Sui problemi ellittici non lineari con coefficienti crescenti « rapidamente « o « lentamente » (*) (**).

GIULIANA PALMIERI (Bari)

Summary. – *We study boundary value problems in variational form for nonlinear elliptic operators in the case the nonlinearity is not of polynomial type. We give some examples of applications of abstract theorems for homogeneous problems obtained by other authors (e.g. Donaldson, Gossez) to homogeneous « intermediate » and « mixed » problems. Furthermore we prove some existence theorems for non homogeneous problems.*

Introduzione.

In questo lavoro ci occuperemo di problemi al bordo, in forma variazionale, per operatori del tipo:

$$Au = \sum_{|\alpha|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, u, \ldots, \nabla^m u)$$

definiti su un aperto Ω di $\boldsymbol{R}^n$, con coefficienti crescenti « rapidamente » o « lentamente » rispetto ad u ed alle sue derivate.

Problemi di questo tipo sono stati studiati per la prima volta da M. I. VISIK in [23], [24], [25], utilizzando il metodo di Faedo-Galerkin e spazi di Orlicz, se i coefficienti A_α non crescono come una potenza. Successivamente vari autori hanno studiato tali problemi utilizzando le teorie degli operatori monotoni e pseudomonotoni. Per il caso A_α di tipo polinomiale, almeno per $|\alpha| = m$, citiamo i lavori di F. E. BROWDER [2], [3], [4], [5], di J. LERAY e J. L. LIONS [19] e di P. HESS [15]. Se le funzioni A_α non hanno il comportamento di un polinomio, caso che considereremo in questa nota, sembra naturale studiare tali problemi in spazi di Orlicz-Sobolev, $W^m L_M(\Omega)$, dove M è una N-funzione (o una k-upla di N-funzioni) dipendente dal comportamento delle A_α.

Le maggiori difficoltà si incontrano se le A_α crescono « rapidamente » o « lentamente »: in tali casi lo spazio $W^m L_M(\Omega)$ in cui il problema risulta appropriatamente formulato non è nè separabile nè riflessivo. Inoltre se le A_α crescono più velocemente di ogni potenza l'applicazione corrispondente all'operatore A non è ovunque defi-

(*) Entrata in Redazione il 28 novembre 1979.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R.

nita ed il suo dominio non è chiuso rispetto alla topologia debole. Se le A_α crescono lentamente, ed in genere se la funzione complementare ad $M, \overline{M}$, non verifica le Δ_2-condizione, non sembrano concretamente applicabili teoremi in cui si faccia l'ipotesi che l'applicazione corrispondente ad A sia coercitiva. T. K. DONALDSON ha dimostrato, in [7], teoremi di esistenza per problemi al bordo omogenei, validi anche nel caso A_α crescenti «rapidamente», estendendo la teoria degli operatori monotoni nell'ambito di spazi complementari, supponendo che l'applicazione corrispondente all'operatore A sia coercitiva e che $\overline{M}$ verifichi la Δ_2-condizione. Ciò implica che M cresca più velocemente di qualche potenza (cfr. [16], [20]), resta perciò escluso il caso A_α crescenti «lentamente» ad esempio come un logaritmo.

Il metodo di monotonia viene utilizzato anche nei lavori di G. P. GOSSEZ [10], G. P. GOSSEZ e P. HESS [14] e di A. FOUGÈRES [9]; rileviamo che negli ultimi due lavori citati i comportamenti all'infinito delle A_α non sono legati tra di loro e quindi $W^m L_M(\Omega)$ è anisotropo.

Successivamente G. P. GOSSEZ ha esteso, in modo astratto, la teoria degli operatori pseudomonotoni nell'ambito di spazi complementari e ciò gli ha permesso di dimostrare teoremi di esistenza per problemi al bordo omogenei validi sia nel caso A_α crescenti «rapidamente», sia nel caso A_α crescenti «lentamente». L'ipotesi di coercitività viene inoltre sostituita con condizioni che sono verificate, in casi concreti, anche se $\overline{M}$ non soddisfa le Δ_2-condizione (cfr. [11], [12], [13]).

Nei lavori citati o si considerano problemi di Dirichlet e di Neumann omogenei o si dimostra l'esistenza di una soluzione $u \in Y \subset W^m L_M(\Omega)$ dell'equazione

$$Au = f, \quad f \in Z$$

sotto l'ipotesi che Y e Z formino una coppia di spazi complementari, ponendo, naturalmente, adeguate condizioni su A ed f. Quindi se B_Γ è un operatore definito sulla frontiera, Γ, di Ω e $Y = \{v \in W^m L_M(\Omega) : B_\Gamma v = 0\}$ si ha l'esistenza di una soluzione per il problema

$$Au = f, \quad B_\Gamma u = 0, \quad f \in Z$$

purchè Y individui una coppia complementare. Rileviamo che da un punto di vista astratto sono completamente caratterizzati i sottospazi Y di $W^m L_M(\Omega)$ ai quali si può associare Z in modo che Y e Z formino una coppia complementare (cfr. [8] e [11]).

Ciò porta alla seguente definizione: il *problema al bordo* $Au = f$, $B_\Gamma u = 0$ si dice *ammissibile* se

$$Y = \{v \in W^m L_M(\Omega) : B_\Gamma v = 0\}$$

individua una coppia complementare.

Per i problemi di Dirichlet e di Neumann Y è uguale, rispettivamente, a $W_0^m L_M(\Omega)$ e $W^m L_M(\Omega)$ che, sotto condizioni abbastanza generali, individuano una coppia complementare.

Un altro esempio di problema al bordo ammissibile, dato da M. T. LACROIX in [18] è il seguente: $Au = f$, $u|_{\Gamma'} = 0$, A di ordine due, $\Gamma' \subset \Gamma$ con Γ e Γ', sufficientemente regolari ed Ω limitato, nell'ipotesi restrittiva che $M(t) = |t|^p M_1(t)$, $p > 1$ dove M_1 è una N-funzione.

Non sono noti, a quanto mi risulta, altri esempi di problemi al bordo ammissibili.

Nel § 1, avvalendoci dei teoremi di traccia e di rilevamento dimostrati in una nota precedente (cfr. [21]) vedremo che sono ammissibili problemi al bordo « intermedi » e « misti », sotto ipotesi di regolarità di Γ e della sua eventuale partizione, purchè o M oppure $\bar{M}$ verifichi la Δ_2-condizione, ipotesi in genere verificata nei casi concreti. Nello stesso paragrafo daremo inoltre teoremi di rilevamento per gli operatori, B_Γ, corrispondenti a tali problemi.

Nel § 2 dimostreremo teoremi di esistenza di soluzioni per problemi al bordo non omogenei, problemi sino ad ora trattati solo nel caso A_α di tipo polinomiale. Tali teoremi si possono applicare, ad esempio, al problema

$$\sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha p(D^\alpha u) = f, \qquad \left.\frac{\partial^{i_r} u}{\partial n^{i_r}}\right|_{\Gamma_1} = g_r, \qquad 0 \le i_r \le m-1,$$

$1 \le r \le k \le m$, $\Gamma_1 \subset \Gamma$, Γ_1 sottoinsieme di Γ con bordo sufficientemente regolare, con p continua, monotona crescente, dispari, tale che $p(t) \to \infty$, per $t \to +\infty$, e, posto $M(t) = \int_0^t p(s)\, ds$, o M o $\bar{M}$ verifichi la Δ_2-condizione (tale ipotesi non è necessaria per il problema di Dirichlet). Funzioni p che soddisfano le ipotesi sopra dette sono, ad esempio

$$\operatorname{sign} t \log(1 + |t|), \qquad |t|^{p-2} \log(1 + |t|) + \frac{t|t|^{p-1}}{1+|t|}, \qquad (p > 1), \ te^{t^2}.$$

Per comodità del lettore riportiamo alcune definizioni che useremo in seguito. Per definizioni e proprietà degli spazi di Orlicz-Sobolev rinviamo ai testi di R. A. ADAMS [1], M. A. KRASNOSELSKIĬ e YA. B. RUTICKIĬ [16], A. KUFNER, O. JOHN e S. FUČIK [17].

DEFINIZIONE 1. – Due *spazi* di Banach Y e Z in dualità si dicono *complementari* se esistono due sottospazi chiusi $Y_0 \subset Y$ e $Z_0 \subset Z$ tali che $Y_0^* = Z$ e $Z_0^* = Y$. In tal caso si dice anche che $(Y, Y_0; Z, Z_0)$ è un *sistema complementare.*

Se M_i sono N-funzioni ed $\bar{M}_i$ le N-funzioni complementari, allora gli spazi $\prod_{i=1}^k L_{M_i}(\Omega)$ e $\prod_{i=1}^k L_{\bar{M}_i}(\Omega)$ sono complementari, cioè $(\prod L_{M_i}, \prod E_{M_i}; \prod L_{\bar{M}_i}, \prod E_{\bar{M}_i})$ è un sistema complementare.

PROPOSIZIONE 1 (cfr. [7], [11]). – Se $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ è un aperto dotato della proprietà del segmento, $W^m L_M(\Omega)$ e $W_0^m L_M(\Omega)$ generano un sistema complementare in $(\prod L_M, \prod E_M; \prod L_{\bar{M}}, \prod E_{\bar{M}})$ $\left[\prod L_M = \prod_{|\alpha| \le m} L_M\right]$.

Ricordiamo che il sistema complementare generato da $W_0^m L_M(\Omega)$, definito come la $\sigma(\prod L_M, \prod E_{\bar{M}})$ chiusura di $\mathcal{D}(\Omega)$, è $(W_0^m L_M, W_0^m E_M; W^{-m} L_{\bar{M}}, W^{-m} E_{\bar{M}})$ dove $W_0^m E_M(\Omega)$ è la chiusura di $\mathcal{D}(\Omega)$ in $W^m L_M(\Omega)$,

$$W^{-m} L_M(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{D}'(\Omega) : f = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha, \quad f_\alpha \in L_{\bar{M}}(\Omega) \right\}$$

$$W^{-m} E_{\bar{M}}(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{D}'(\Omega) : f = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha, \quad f_\alpha \in E_{\bar{M}}(\Omega) \right\}.$$

DEFINIZIONE 2. – Sia $(Y, Y_0; Z, Z_0)$ un sistema complementare e V un sottospazio denso di Y_0. Un'*applicazione* $T: Y \to 2^Z$ si dica *pseudomonotona* rispetto a V se

i) T è finitamente continua da V in 2^Z, Z munito della $\sigma(Z, V)$ topologia (cioè Ty è un insieme non vuoto, $\sigma(Z, V)$-compatto e connesso in Z per ogni $y \in V$ e T è semicontinua superiormente su ogni sottoinsieme finito dimensionale di V, rispetto alla $\sigma(Z, V)$ topologia).

ii) Per ogni rete (y_i, z_i) tale che $z_i \in Ty_i$, $y_i \in V$, y_i limitata, $y_i \to y \in Y$ nella $\sigma(Y, Z_0)$ topologia (cioè nella topologia debole di Y), $z_i \to z \in Z$ per la $\sigma(Z, V)$ topologia di Z e $\overline{\lim} \langle y_i, z_i \rangle \leq \langle y, z \rangle$, risulti $z \in Ty$ e $\langle y_i, z_i \rangle \to \langle y, z \rangle$.

DEFINIZIONE 3. – Sia (Y, Y_0, Z, Z_0) un sistema complementare. Una famiglia ad un parametro di operatori $T_s: [0, 1] \times Y \to 2^Z$ è detta *omotopia pseudomonotona* rispetto a V, sottospazio denso in Y_0, se

i) T_t è finitamente continua da $[0, 1] \times V$ in 2^Z, con Z munito della $\sigma(Z, V)$ topologia;

ii) per ogni rete (t_i, y_i, z_i) tale che $z_i \in T_{t_i} y_i$, $t_i \to t$ e $y_i \in V$ limitata, y_i $\sigma(Y, Z_0)$ convergente ad $y \in Y$, z_i $\sigma(Z, V)$ convergente a $z \in Z$ e $\overline{\lim} \langle y_i, z_i \rangle \leq \langle y, z \rangle$ risulti $z \in T_t y$ e $\langle y_i, z_i \rangle \to \langle y, z \rangle$.

Per lo studio di tali operatori si veda [11].

Siano Ω un aperto di $\boldsymbol{R}^n$ con frontiera, Γ, dotata della proprietà di Lipschitz locale forte (vedi [1]), esistono allora un ricoprimento aperto $\{U_j\}$ di Γ, ed una successione di trasformazioni, $\{\Phi_j\}$, lipschitziane con le loro inverse (con costante di Lipschitz indipendentemente da j), tali che

$$\Phi_j(U_j) = \{x \in \boldsymbol{R}^n : |x_i| < 1, \ i = 1, \ldots, n\}$$

e

$$\Phi_j(U_j \cap \Omega) = \{x \in \boldsymbol{R}^n : |x_i| < 1, \ i = 1, \ldots, n-1, \ 0 < x_n < 1\}.$$

Poniamo $x = (x', x_n)$ e $Q = \Phi_j(U_j \cap \Gamma) = \{x' \in \boldsymbol{R}^{n-1} : |x_i| < 1, \ i = 1, \ldots, n-1\}$.

Sia $\{\omega_j\}$ una partizione dell'unità corrispondente al ricoprimento scelto, si definisce:

$$L_M(\Gamma) = \left\{ u \,|\, \exists \lambda > 0 : \sum_j \int_Q M(\lambda \omega_j v \circ \Phi_j^{-1}(x', 0)) \, dx' < +\infty \right\}$$

con la norma di Luxemburg naturale e analogamente si definisce $E_M(\Gamma)$.

DEFINIZIONE 4. – Posto $A = \{(x, y) \in \Omega \times \Omega : |x - y| < 1\}$,

$$(\delta_\nu u)(x, y) = \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{1-\nu}}$$

chiamiamo

$$W^{k,\nu} L_M(\Omega) = \Big\{ u \in W^k L_M(\Omega) / \forall \alpha \in \mathbf{N}^n, \quad |\alpha| = k,\ \exists \lambda > 0 : \int_A M\big(\lambda(\delta_\nu D^\alpha u)(x, y)\big) \frac{dx\,dy}{|x - y|^{n-1}} < +\infty \Big\}$$

e analogamente definiamo $W^{k,\nu} E_M(\Omega)$.

Se Ω ha frontiera, Γ, dotata della $C^{k-1,1}$-regolarità uniforme, si definiscono, in modo ovvio, gli spazi $W^{k,\nu} L_M(\Gamma)$ e $W^{k,\nu} E_M(\Gamma)$. Per lo studio di tali spazi si veda [21].

Riportiamo una proposizione che utilizzeremo frequentemente.

PROPOSIZIONE 2 (cfr. [21], Th. III e 2.7). – *Sia Ω un aperto con frontiera [limitata], Γ, dotata della $C^{k,1}$-regolarità uniforme [di classe $C^{k,1}$]. Se $\overline{M}$ verifica la Δ_2-condizione globale [Δ_2-condizione] allora l'applicazione γ:*

$$\gamma(u) = (\gamma_0 u, \ldots, \gamma_k u), \qquad \gamma_i u = \left.\frac{\partial^i u}{\partial n}\right|_\Gamma$$

definisce un isomorfismo ed omeomorfismo tra $W^k L_M(\Omega)/W_0^k L_M(\Omega)$ e $\prod_{r=0}^{k-1} W^{k-1-r,0} L_M(\Gamma)$. Inoltre per qualsiasi N-funzione M esiste un operatore lineare e limitato

$$R : \prod_{r=0}^{k-1} W^{k-1-r,0} L_M(\Gamma) \to W^k L_M(\Omega),$$

tale che se $g \in \prod_{r=0}^{k-1} W^{k-1-r,0} L_M(\Gamma)$ allora $\gamma(Rg) = g$.

Tali risultati continuano a valere con E_M in luogo di L_M.

Rileviamo che è stato un esempio di funzione appartenente a $W^1 L_M(\Omega)$ la cui traccia non appartiene a $W^{0,0} L_M(\Gamma)$ (cfr. [20]).

§ 1. – Come abbiamo accennato nell'introduzione, per assicurare che il problema

$$Au = f, \qquad B_\Gamma u = g \tag{1.1}$$

ammetta soluzione, si deve supporre che lo spazio $Y = \{u \in W^m L_M(\Omega) : B_\Gamma u = 0\}$ individui una coppia complementare. Più precisamente: se la forma semilineare

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha| \le m} A_\alpha(x, u, \ldots, \nabla^m u) D^\alpha v \, dx \tag{1.2}$$

definisce un'applicazione, non lineare, $T: \prod L_{N_\alpha} \to \prod L_{\bar{N}_\alpha}$ (dove N_α sono N-funzioni), posto $Y_0 = Y \cap \prod E_{N_\alpha}$,

$$Y_0^\perp = \{v \in L_{\bar{N}_\alpha} : \langle u, v\rangle = 0, \ \forall u \in Y_0\} \quad \text{e} \quad Z = \prod L_{\bar{N}_\alpha}/Y_0^\perp ,$$

Y e Z devono formare una coppia complementare. Condizione necessaria e sufficiente affinchè ciò sia vero è che Y sia $\sigma(\prod L_{N_\alpha}, \prod E_{\bar{N}_\alpha})$-chiuso ed uguale alle $\sigma(\prod L_{N_\alpha}, \prod L_{\bar{N}_\alpha})$-chiusura di Y_0 (cfr. [8], [11]); risulta $Z_0 = \prod E_{\bar{N}_\alpha}/Y_0^\perp$.

Tali condizioni sono verificate dagli spazi $W^m L_M(\Omega)$ e $W_0^m L_M(\Omega)$ se Ω ha la proprietà del segmento e $N_\alpha = M$, $\forall\alpha$, oppure N_α soddisfano a condizioni più generali che preciseremo in seguito. In tali casi i problemi di Neumann e di Dirichlet sono ammissibili.

In questo paragrafo daremo condizioni sufficienti affinchè problemi al bordo « intermedi » e « misti » siano ammissibili, vedremo inoltre sotto quali ipotesi l'equazione $B_\Gamma u = g$ ammette soluzioni in $W^m L_M(\Omega)$, con B_Γ operatore corrispondente ad uno dei problemi menzionati. Consideriamo inizialmente il caso $N_\alpha = M$ per ogni α.

TEOREMA 1.1. – *Siano Ω un aperto di $\mathbf{R}^n$ con frontiera, Γ, [limitata] dotata della $C^{m,1}$-regolarità uniforme [di classe $C^{m,1}$] ed M una N-funzione. Se M oppure $\bar{M}$ verifica la Δ_2-condizione globale, [Δ_2-condizione], lo spazio Y formato dalle funzioni $u \in W^m L_M(\Omega)$ tali che*

$$(1.2)' \qquad B_\Gamma u = 0 : B_\Gamma = (B_0, \dots, B_k),\ B_r u = \left.\frac{\partial^{i_r} u}{\partial n^{i_r}}\right|_\Gamma ,$$

$i_1, \dots, i_k$ interi compresi tra 0 ed $m-1$, è $\sigma(\prod L_M, \prod E_{\bar{M}})$ chiuso, inoltre Y è uguale alla $\sigma(\prod L_M, \prod L_{\bar{M}})$ chiusura di $Y_0 = Y \cap W^m E_M(\Omega)$.

DIMOSTRAZIONE. – Se M è una qualsiasi N-funzione e Γ è dotata della $C^{m-1,1}$-regolarità uniforme si vede, con una semplice generalizzazione del teorema provato da G. P. GOSSEZ nel § 3 di [13], che l'applicazione traccia è continua da $W^m L_M(\Omega)$ in $W^{m-1} L_M(\Gamma)$, muniti delle rispettive $\sigma(\prod L_M, \prod E_{\bar{M}})$ topologie. Ne segue che Y è $\sigma(\prod L_M, \prod E_{\bar{M}})$ chiuso. Se M verifica le Δ_2-condizione globale $W^m L_M(\Omega) = W^m E_M(\Omega)$ quindi $Y_0 = Y$ e la tesi è provata. Se Γ è limitata, M soddisfa le Δ_2-condizione, ma $m\Omega = +\infty$ allora non è più detto che $W^m E_M(\Omega)$ coincida con $W^m L_M(\Omega)$. In questo caso consideriamo un ricoprimento aperto di Γ, $\{U_j\}$, formato da insiemi limitati, un aperto $U_0 \subset \Omega$ tale che $d(U_0, \Gamma) > 0$ e $\bigcup_{j=0}^{N} U_j \supset \Omega$ ed una corrispondente partizione dell'unità su Ω, $\{\omega_j\}$. La funzione $u_1 = \sum_{j=1}^{N} \omega_j u$ ha supporto limitato, perciò appartiene a $W^m E_M(\Omega)$ inoltre $u - u_1 = \omega_0 u \in W_0^m L_M(\Omega)$, quindi si può determinare una successione, $\{u_s\}$, di funzioni appartenenti a $\mathfrak{D}(\Omega)$ e $\sigma(\prod L_M, \prod L_{\bar{M}})$ convergente ad $\omega_0 u$ (cfr. [11], Th. 1.3). La successione $\{u_1 + u_s\}$ risulta $\sigma(\prod L_M, \prod L_{\bar{M}})$-

convergente ad u ed è formata da elementi di Y_0, dato che $u_1+u_s\in W^mE_M(\Omega)$ e $B_\Gamma(u_1+u_s)=B_\Gamma u$.

Supponiamo ora che $\overline{M}$, ma non M, verifichi la Δ_2-condizione globale, resta da provare che Y_0 è $\sigma(\prod L_M, \prod L_{\overline{M}})$ denso in Y. Per la proposizione 2, se $u\in W^mL_M(\Omega)$ allora $\gamma u\in\prod\limits_{i=0}^{m-1} W^{m-1-i,0}L_M(\Gamma)$. Sia R l'operatore rilevamento costruito nel teorema 2.7 di [21]; poniamo $R(\gamma u)=\overline{u}$; $\overline{u}\in Y$ e $u-\overline{u}\in W_0^mL_M(\Omega)$. Ma $\mathcal{D}(\Omega)$ è $\sigma(\prod L_M, \prod L_{\overline{M}})$ denso in $W_0^mL_M(\Omega)$ perciò se riusciamo a costruire una successione $\{\overline{u}_s\}$ formata da elementi di Y_0 e $\sigma(\prod L_M, \prod L_{\overline{M}})$ convergente ad $\overline{u}$ la tesi è provata.

Siano $\{U_j\}$ un ricoprimento di Γ, $\{\omega_j\}$ una partizione dell'unità su Γ, di classe C^∞, allora, per costruzione, $\overline{u}=\sum\limits_{j\geq 1} v_j$, dove v_j sono funzioni di $W^mL_M(\Omega)$ tali che $\operatorname{supp} v_j\subset\subset U_j$ e $\gamma_i v_j=\gamma_i u\cdot\omega_j$, quindi $v_j\in Y$.

Fissati ad arbitrio $\varepsilon>0$ ed $f=(f_\alpha)_{|\alpha|\leq m}\in\prod L_{\overline{M}}$, si può determinare h in modo che $\operatorname{supp}\Big(\sum\limits_{j\geq h+1} v_j\Big)\subset\Omega-B_r$, $r=r(\varepsilon,f)$, $B_r=\{x\in\boldsymbol{R}^n\colon |x|<r\}$, e

$$\left|\int_\Omega \sum_{j\geq h+1} D^\alpha v_j f_\alpha dx\right| = \left|\int_{\Omega-B_r}\sum_{j\geq h+1} D^\alpha v_j f_\alpha dx\right|<\varepsilon \qquad \forall\alpha\colon |\alpha|\leq m\,.$$

Chiaramente $\sum\limits_{j=1}^{h} v_j\in Y$ basta perciò approssimare, nel modo voluto, le funzioni v_j, aventi supporto compatto contenuto in $U_j\cap\overline{\Omega}$. Utilizzando carte locali e la costruzione delle funzioni v_j ci si riporta al problema seguente: siano $Q=\{x'\in\boldsymbol{R}^{n-1}\colon |x_i|<1, i=1,\dots,n-1\}=\Phi_i(\Omega_j\cap\Gamma)$, $P=\{x\in\boldsymbol{R}^n\colon |x_i|<1-x_n, i=1,\dots,n-1, 0<x_n<1\}$ $w=(w_0,\dots,w_{m-1})\in\prod\limits_{i=0}^{m-1}W^{m-1-i,0}L_M(Q)$ tale che $\sup w\subset\subset Q$ e $w_{i_r}=0$ per $r=1,\dots,k$. Posto $f=R(w_0,\dots,w_{m-1})$, dove R è il rilevamento di w in P costruito nel lemma 2.5 di [21] $(D^i_{x_n}f|_Q=w_i)$ si deve determinare una successione $\{f_s\}$, $\sigma(\prod L_M, \prod L_{\overline{M}})$-convergente ad f, $f_s\in W^mE_M(P)$ e tali che $D^{i_r}_{x_n}f_s|_Q=0$, $r=1,\dots,k$.

Consideriamo una successione di funzioni regolarizzanti, $\{\varphi_s\}$, $\varphi_s\in\mathcal{D}(\boldsymbol{R}^{n-1})$, $\varphi_s\geq 0$, $\operatorname{supp}\varphi_s\subset B_{1/s}$, $\int\limits_{\boldsymbol{R}^{n-1}}\varphi_s\,dx=1$ e le corrispondenti successioni

$$w_{i,s}(x')=\int_{\boldsymbol{R}^{n-1}} w_i(y')\,\varphi_s(x'-y')\,dy'\,,\qquad i=0,\dots,m-1\,.$$

Se $1/s<d(\operatorname{supp} w,\partial Q)$, $w_{i,s}\in\mathcal{D}(Q)$ quindi anche a $W^{m-1-i,0}E_M(Q)$, ne segue che $R(w_{0,s},\dots,w_{m-1,s})=f_s\in W^mE_M(P)$ inoltre $w_{i_r,s}=D^{i_r}_{x_n}f_s|_Q=0$, $r=1,\dots,k$, $\forall s$.

Vediamo che, per $s\to+\infty$, f_s converge $\sigma(\prod L_M, \prod L_{\overline{M}})$ ad f.

Ricordiamo che:

$$R(w_0,\dots,w_{m-1})=R_0w_0+R_1(w_1-D_{x_n}(R_0w_0)|_Q)+$$
$$+R_2[w_2-D^2_{x_n}(R_0w_0)|_Q-D^2_{x_n}R_1(w_1-D_{x_n}(R_0w_0)|_Q)|_Q]+\dots$$

ed analoga espressione ha $R(w_{0,s},\dots,w_{m-1,s})$.

Studiamo inizialmente $R_0 w_0$ e $R_0 w_{0,s}$, dove

$$R_0 w_0(x', x_n) = \int_{|z'|<1} \varphi(z') w_0(x' + x_n z')\, dz' ,$$

con $\varphi \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{R}^{n-1})$, $\varphi \geqslant 0$, supp $\varphi \subset B_1$ e $\int_{\boldsymbol{R}^{n-1}} \varphi(x')\, dx' = 1$. Q è limitato perciò $L_M(Q) \subset \subset L^1(Q)$ allora $w_{0,s} \to w_0$ in L^1, ne segue che $D^\beta R_0 w_{0,s} \to D^\beta R_0 w_0$ q.o. in P per $|\beta| \leqslant m$ e, $D^i_{x_n} R_0 w_{0,s}|_Q \to D^i_{x_n} R_0 w_0|_Q$ in $L^1(Q)$ per $i = 0, \ldots, m-1$.

Inoltre si può determinare $\bar{\lambda} > 0$, indipendente da s, in modo che le funzioni $M(\lambda D^\beta R_0 w_{0,s}(x))$, per $0 < \lambda \leqslant \bar{\lambda}$ e $|\beta| \leqslant m$, siano maggiorate da una funzione di $L^1(P)$.

Ma se $f_n \to f$ q.o. in Ω e per qualche λ $M(\lambda f_n) \leqslant g \in L^1$ allora $f \in L_M(\Omega)$ ed $f_n \to f$, $\sigma(L_M, L_{\bar{M}})$ (cfr. lemma 1.4 di [11]).

Siamo perciò sicuri che

$$R_0 w_{0,s} \to R_0 w_0 , \qquad \sigma\left(\prod L_M, \prod L_{\bar{M}}\right) .$$

Posto

$$w_1' = w_1 - D_{x_n} R_0 w_0|_Q \qquad \text{e} \qquad w_{1,s}' = w_{1,s} - D_{x_n} R_0 w_{0,s}|_Q ,$$

per quanto visto precedentemente, $w_{1,s}' \to w_1'$ in $L^1(Q)$ e procedendo come per R_0 si ha che

$$R_1 w_{1,s}' \to R_1 w_1' , \qquad \sigma\left(\prod L_M, \prod L_{\bar{M}}\right)$$

e $D^i_{x_n} R_1(w_{1,s}')|_Q \to D^i_{x_n} R_1 w_z'|_Q$ in $L^1(Q)$per $i = 1, \ldots m-1$ e, per costruzione, $R_1 w_{1,s}'|_Q = = R_1 w_1'|_Q = 0$.

Ripetendo lo stesso ragionamento per $R_2, \ldots, R_{m-1}$ otteniamo $R(w_{0,s}, \ldots, w_{m-1,s}) \to \to R(w_0, \ldots, w_{m-1})$, $\sigma\left(\prod L_M, \prod L_{\bar{M}}\right)$.

La dimostrazione è così completata.

N.B. - L'ipotesi fatta su $\bar{M}$ serve solo a garantire che

$$\gamma u \in \prod_{i=0}^{m-1} W^{m-1-i,0} \quad (\Gamma).$$

LEMMA 1.2. - *Se Ω ha frontiera dotata della $C^{m,1}$ regolarità uniforme, B_Γ è l'operatore considerato nel teorema precedente, $g_r \in W^{m-1-i_r,0} L_M(\Gamma)$, $r = 1, \ldots, k$, allora esiste una trasformazione lineare e continua R: $\prod_{r=1}^{k} W^{m-1-i_r,0} L_M(\Gamma) \to W^m L_M(\Omega)$ tale che, posto $R(g_1, \ldots, g_r) = u$, si abbia $B_r u = g_r$, $r = 1, \ldots, k$.*

Analogo risultato con E_M in luogo di L_M.

DIMOSTRAZIONE. – Siano $j_1, \dots, j_{m-k}$ gli interi compresi tra 0 ed $m-1$ e diversi da i_r, $r=1, \dots, k$. Per la proposizione 2 si può determinare una funzione $u \in W^m L_M(\Omega)$

$$\left.\frac{\partial u^{i_r}}{\partial n^{i_r}}\right|_\Gamma = B_r u = g_r, \quad r=1, \dots, k \quad \text{e} \quad \left.\frac{\partial^{j_s} u}{\partial n^{i_r}}\right|_\Gamma = 0 \quad s=1, \dots, m-k.$$

Ne segue la tesi.

Prima di considerare il caso di condizioni al bordo assegnato su uno o più sottoinsiemi di Γ introduciamo alcune definizioni. Supponiamo che Γ sia dotata della $C^{k,1}$-regolarità uniforme [di classe $C^{k,1}$ se è limitata] con $k \geqslant 0$, $k \in \boldsymbol{N}$. In tale ipotesi (cfr. [1]) esistono un ricoprimento aperto $\{U_j\}$ di Γ ed una successione di trasformazioni, $\{\Phi_i\}$, di classe $C^{k,1}$ con le loro inverse, dotate di derivate sino all'ordine k equilimitate e con la costante di Lipschitz corrispondente alle derivate di ordine k indipendente dai j, tali che:

$$\Phi_j(U_j) = \{x \in \boldsymbol{R}^n \colon |x_i| < 1,\ i=1, \dots, n\}$$

e

$$\Phi_j(U_j \cap \Omega) = \{x \in \boldsymbol{R}^n \colon |x_i| < 1,\ i=1, \dots, n-1,\ 0 < x_n < 1\}.$$

Poniamo $Q = \Phi_j(U_j \cap \Gamma) = \{x \in \boldsymbol{R}^{n-1} \colon |x_i| < 1,\ i=1, \dots, n-1\}$.

Diciamo che la « superficie » ad $n-2$ dimensioni contenuta in Γ, individuata da $f \colon \boldsymbol{R}^{n-2} \to \Gamma$, è *localmente lipschitziana* se, detto r_j l'operatore di restrizione ad U_j, $\Phi_j \circ r_j \circ f$ ha immagine, in Q, localmente lipschitziana. Si possono cioè determinare un ricoprimento dell'immagine di $\Phi_j \circ r_j \circ f$, in $\boldsymbol{R}^{n-1}$, e dei sistemi di riferimento in modo che essa sia individuata da $x_{n-1} = \bar{f}_j(x_1, \dots, x_{n-2})$ con $\bar{f}_j$ lipschitziana. Se si può determinare una costante di Lipschitz indipendente da j diremo che la superficie è dotata della *proprietà di Lipschitz locale uniforme*. Queste definizioni hanno senso perchè non dipendono dal ricoprimento scelto e le Φ_j, per l'ipotesi fatta su Γ, hanno costante di Lipschitz indipendente da j. Analogo significato daremo alle espressioni: di *classe* $C^{h,1}$, *di classe* $C^{h,1}$-*uniforme* per $h \in \boldsymbol{N}$, $h \leqslant k$.

TEOREMA 1.3. – *Supponiamo che M ed Ω verifichino le ipotesi del teorema* 1.1; *sia Γ_1 un sottoinsieme di Γ, aperto in Γ ed avente frontiera localmente lipschitziana. Il sottospazio Y di $W^m L_M(\Omega)$ formato dalle funzioni, u, tali che*

$$B_{\Gamma_1} u = 0; \quad B_{\Gamma_1} = (B^1_{\Gamma_1}, \dots, B^k_{\Gamma_1}),\ B^r_{\Gamma_1} u = \left.\frac{\partial^{i_r} u}{\partial n^{i_r}}\right|_{\Gamma_1}, \tag{1.3}$$

$i_1, \dots, i_k$ interi compresi tra 0 ed $m-1$; è $\sigma(\prod L_M, \prod E_{\bar{M}})$-chiuso, inoltre $Y \cap W^m E_M(\Omega) = Y_0$ è $\sigma(\prod L_M, \prod L_{\bar{M}})$ denso in Y.

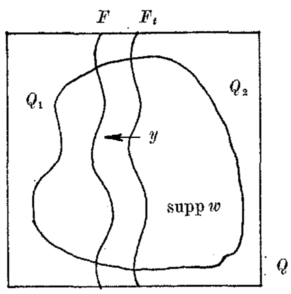
DIMOSTRAZIONE. – Si vede, come nel teorema 1.1, che, se Γ_1 è un qualsiasi aperto in Γ, Y è $\sigma(\prod L_M, \prod L_{\bar{M}})$ chiuso, per qualsiasi M. Se M verifica la Δ_2-condizione la dimostrazione si completa come nel Th. 1. Se $\overline{M}$ verifica la Δ_2-condizione globale e questo non è vero per M, si deve provare che Y_0 è $\sigma(\prod L_M, \prod L_{\overline{M}})$ denso in Y.

Indichiamo, come nel teorema 1.1, con $\{U_j\}$ un ricoprimento di Γ a $\{\omega_j\}$ una corrispondente partizione dell'unità su Γ. La dimostrazione si discosta da quella del teorema 1.1 solo quando si considerano i rilevamenti di $\gamma u \circ \omega_j$, con j tale che $\operatorname{supp}(\gamma u \cdot \omega_j) \cap \Gamma_1 \neq \emptyset$ e $\operatorname{supp}(\gamma u \cdot \omega_j) \cap (\Gamma \setminus \Gamma_1) \neq \emptyset$. In questo caso, sempre utilizzando le notazioni del teorema 1.1, Q risulta suddiviso in due sottoinsiemi Q_1, Q_2, con Q_1 corrispondente ad $U_j \cap \Gamma_1$. Si deve approssimare, $\sigma(\prod L_M, \prod L_{\overline{M}})$ il rilevamento, f, in P, di $(w_0, \dots, w_{m-1}) = w \in \prod W^{m-1-i,0} L_M(Q)$, tale che $\operatorname{supp} w \subset\subset Q$ e $w_{i_r}|_{Q_1} = 0$ per $r = 1, \dots, k$, con una successione di funzioni, f_s, appartenenti a $W^m E_M(P)$ e soddisfacenti le seguenti condizioni:

$$D^{i_r}_{x_n} f_s|_{Q_1} = 0 \quad \text{per } r = 1, \dots, k \,. \tag{1.4}$$

Per l'ipotesi fatta su Γ_1, esistono un ricoprimento finito $\{V_k\}$ di $\partial Q_1 \cap Q = F$ e vettori y_k non nulli tali che se $x' \in V_k \cap Q_1 \cap \operatorname{supp} w$ allora $x' + t y_k \in Q_1$ per $t \in]0, 1[$. Per semplicità supponiamo che esista un vettore che goda di questa proprietà per ogni $x' \in Q_1 \cap \operatorname{supp} w$.

Poniamo $w_{i,t}(x') = w_i(x' + ty)$ e $w_t = (w_{0,t}, \dots, w_{m-1,t})$; si vede facilmente che $\|w_{i,t}\|_{m-1-i,0} \leq \|w_i\|_{m-1-i,0}$ se $t < d(\operatorname{supp} w, \partial Q)/|y|$, allora $R w_t = f_t \in W^m L_M(P)$ e, per costruzione $D^{i_r}_{x_n} f_t|_{Q_1'} = 0$, $r = 1, \dots, k$ con $Q_1' \supset Q_1$, Q_1' avente per frontiera $F + ty = F_t$.



Inoltre $w_{i,t} \to w_i$ in $L^1(Q)$ per $t \to 0$ e $i = 0, \dots, m-1$, allora, proseguendo come nella dimostrazione del teorema 1 si ottiene che $f_t \to f$ $\sigma(\prod L_M, \prod L_{\overline{M}})$. È sufficiente, perciò, determinare una successione di funzioni $f_s \in W^m E_M(P)$, soddisfacenti le (1.4) e $\sigma(\prod L_M, \prod L_{\overline{M}})$ convergenti ad f_t.

Regolarizziamo, tramite funzioni $\varphi_s \in D(\boldsymbol{R}^{n-1})$, $\operatorname{supp} \varphi_s \subset \subset B'_{1/s}$, le tracce $w_{i,t}$ di f_t su Q. Se $1/s < \min\{d(\operatorname{supp} w_t, \partial Q), d(F_s, F_t)\}$, allora, per $i = 0, \dots, m-1$, $w_{i,t} * \varphi_s = w_{i,t,s}$ hanno supporto contenuto in Q inoltre se $w_{i_r}|_{Q_1} = 0$ anche $w_{i_r,t,s}|_{Q_1} = 0$ e $w_{i,t,s} \in C_0^\infty(Q)$.

Ne segue che le funzioni $f_s = R(w_{t,s}) \in W^m E_M(P)$ e soddisfano le condizioni (1.4). Infine dalla dimostrazione del teorema 1 segue che $f_s \to f_t$ $\sigma(\prod L_M, \prod L_{\overline{M}})$.

COROLLARIO 1.4. – *Siano Ω un aperto con frontiera dotata della $C^{m,1}$-regolarità uniforme, $\Gamma_1 \subset \Gamma$, Γ_1 aperto in Γ ed avente frontiera di classe $C^{m-1,1}$ uniforme, B_{Γ_1} l'operatore considerato nel teorema precedente, $g_r \in W^{m-1-i_r,0} L_M(\Gamma_1)$, $r = 1, \dots, k$.*

Allora esiste una trasformazione lineare e continua $R\colon \prod_{r=1}^{k} W^{m-1-i_r,0} L_M(\Gamma_1) \to W^m L_M(\Omega)$ tale che, posto $R(g_1, \dots, g_k) = u$ si abbia $B^r_{\Gamma_1} u = g_r$, $r = 1, \dots, k$. Analogo risultato si ha con E_M in luogo di L_M.

DIMOSTRAZIONE. – Per le ipotesi fatte sul bordo di Γ ed il teorema di estensione II di [21], possiamo prolungare g_r su tutto Γ con funzioni, Eg_r, appartenenti a

$W^{m-1-i_r,0}L_M(\Gamma)$ e tali che $Eg_r(x')=g_r(x')$ se $x'\in\Gamma_1$: Siano $j_1, \ldots, j_{m-k}$ gli interi compresi tra 0 ed $m-1$ e diversi da i_r, $r=1, \ldots, k$. Per la proposizione 2 si può determinare $u\in W^m L_M(\Omega)$ tale

$$\gamma_{i_r}u=Eg_r\,,\qquad r=1,\ldots,k,\qquad\qquad \gamma_{j_s}u=0\,,\qquad s=1,\ldots,m-k\,.$$

Ne segue la tesi.

COROLLARIO 1.5. – *Se Ω ed M verificano le ipotesi del teorema 1, S è una «superficie» ad $n-2$ dimensioni contenuta in Γ, localmente lipschitziana, che divide Γ in due sottoinsiemi Γ_1, Γ_2 (disgiunti ed aperti in Γ), allora il sottospazio Y di $W^m L_M(\Omega)$ formato dalle funzioni, u, tali che*

$$(1.5)\qquad B_{\Gamma_e}u=0\,,\qquad B_{\Gamma_e}=(B^1_{\Gamma_e},\ldots,B^{k_e}_{\Gamma_e})\,,\qquad B^r_{\Gamma_e}u=\left.\frac{\partial^{i_{r,e}}u}{\partial n^{i_{r,e}}}\right|_{\Gamma_e}\qquad e=1,2$$

$i_{1,e},\ldots,i_{k,e}$ interi compresi tra 0 ed $m-1$, è $\sigma(\prod L_M, \prod E_{\bar M})$ chiuso e $Y_0=Y\cap\cap W^m E_M(\Omega)$ è $\sigma(\prod L_M, \prod L_{\bar M})$ denso in Y.

DIMOSTRAZIONE. – La dimostrazione è simile a quella del teorema 3. Sia u la funzione, di Y, da approssimare, $U_j\cap\Gamma_1\neq\emptyset$ e $U_j\cap\Gamma_2\neq\emptyset$; passando a carte locali, Q risulta suddiviso in due sottoinsiemi Q_1 e Q_2 aventi una parte di bordo in comune, F, localmente lipschitziano. Indicata con w la trasformata di $\gamma u\cdot\omega_j$ supponiamo, per semplicità, che esistano due vettori y_1 ed y_2 tali che se $x'\in Q_1\cap\operatorname{supp}w$ allora $x'+ty_1\in Q_1$ per $t\in]0,1[$, se $x'\in Q_2\cap\operatorname{supp}w$, $x'+ty_2\in Q_2$ per $t\in]0,1[$.

Se condizione necessaria affinchè v sia la trasformata di una funzione appartenente ad Y ed avente supporto contenuto in U_j è $D^i_{x_n}v|_{Q_1}=0$, si costruiscono le regolarizzate di $w_i(x'+ty_1)=w^1_{i,t}$ mentre se deve essere $D^i_{x_n}v|_{Q_2}=0$ si costruiscono le regolarizzate di $w_i(x'+ty_2)$. Se $D^i_{x_n}u|_Q$ non deve soddisfare a nessuna condizione si costruiscono, ad esempio, le regolarizzate di w_i: Siano $F_{t,1}=F+ty_1$, $F_{t,2}=F+ty_2$ con t scelto in modo che $0<t<\min\{1, d(\operatorname{supp}w,\partial Q)/|y_1|, d(\operatorname{supp}w,\partial Q)/|y_2|\}$ allora $\operatorname{supp}w^e_{i,t}\subset\subset Q$, $e=1,2$, $i=0,\ldots,m-1$,

$$w^e_{i,t}(x')=w_i(x'+ty_2)\,,\qquad \|w^e_{i,t}\|_{m-1-i,0}\leqslant\|w_i\|_{m-1-i,0}$$

e $w^e_{i,t}\to w_i$ in $L^1(Q)$. La dimostrazione si completa come nel teorema 1.3.

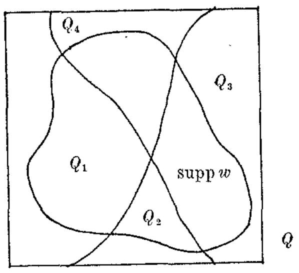
COROLLARIO 1.6. – *Siano Ω un aperto con frontiera dotata della $C^{m,1}$-regolarità uniforme, S una «superficie» $n-2$ dimensionale contenuta in Γ di classe $C^{m-1,1}$-uniforme, che divide Γ in due sottoinsiemi Γ_1, Γ_2, B_{Γ_e}, $e=1,2$ gli operatori definiti nel corollario precedente.*

Sia W lo spazio formato dalle $g_{r,e}\in W^{m-1-i_{r,e},0}L_M(\Gamma_e)$, $e=1,2$, $r=1,\ldots,k_e$, tali che se $i_{r,1}=i_{s,2}$ allora $g_{r,1}\chi_{\Gamma_1}+g_{r,2}\chi_{\Gamma_2}\in W^{m-1-i_{r,e},0}L_M(\Gamma)$, χ_{Γ_e} funzione caratteristica di Γ_e, *allora esiste una trasformazione lineare e continua* R: $W \to W^m L_M(\Omega)$ *tale che, posto* $R(g_{1,1}, \dots, g_{k_{s,2}}) = u$, *si abbia* $B^r_{\Gamma_e} u = g_{r,e}$.

Analogo risultato vale con E_M *in luogo di* L_M.

La dimostrazione è sostanzialmente uguale a quella del corollario 1.4.

OSSERVAZIONE. – Il corollario 1.5 può essere esteso al caso di operatori B_Γ del tipo (1.5) assegnati su p, $p \geq 3$, sottoinsiemi di Γ, aperti in Γ, aventi frontiera localmente lipschitziana, purchè la suddivisione di Γ e le condizioni al bordo caratterizzanti Y siano tali che il sottoinsieme Γ^i di Γ su cui deve essere $\partial^i u/\partial n^i|_{\Gamma^i} = 0$ sia a frontiera localmente lipschitziana.



Per l'ipotesi fatta sulla suddivisione di Γ l'ultima condizione è sicuramente verificata se $p = 3$ oppure se una medesima derivata normale deve annullarsi necessariamente solo su sottoinsiemi aventi tra loro distanza positiva.

La dimostrazione è simile a quella del corollario 1.5.

Illustriamo con un esempio un caso critico. Supponiamo che condizione necessaria affinchè una funzione, v, sia la trasformata di una funzione appartenente ad Y ed avente supporto compatto in un aperto U_j del ricoprimento di Γ, sia che

$$D^i_{x_n} v|_{Q_1 \cup Q_3} = 0 \qquad \text{(vedi disegno)}$$

e w sia la trasformata di $\gamma u \cdot \omega_j$, $u \in Y$ funzione da approssimare.

In questo caso non si possono determinare un ricoprimento $\{V_k\}$ di $(\partial Q_1 \cup \partial Q_3) \cap \cap \operatorname{supp} w$ e dei vettori non nulli y_k tali che se $x' \in (Q_1 \cup Q_3) \cap V_k$ allora $x' + t y_k \in \in Q_1 \cup Q_3$ per $t \in]0, 1[$. Perciò se, $w_i|_{Q_2 \cup Q_4} \neq 0$ e $\operatorname{supp} w_i$ non ha distanza positiva da $Q_1 \cup Q_3$ non siamo in grado di costruire delle funzioni regolarizzate di w_i, aventi supporto contenuto in $Q_2 \cup Q_4$.

Se Γ è limitata si può enunciare l'analogo del corollario 1.6 purchè le frontiere di Γ_i e Γ^i siano di classe $C^{m-1,1}$ e se $i_{r,e} = i_{s,i}$ allora

$$g_{r,e}\chi_e + g_{s,i}\chi_i \in W^{m-i_{r,e}-1,0} L_M(\Gamma_e \cup \Gamma_i) .$$

Basta osservare che se γ_i $(\gamma_i u = (\partial u^i/\partial n^i)|_\Gamma)$ risulta assegnata in due o più sottoinsiemi, aperti in Γ, aventi frontiere prive di punti comuni si può costruire una funzione appartenente a $W^{m-1-i,0}L_M(\Gamma)$ estensione delle funzioni assegnate. Infatti l'estensione di una funzione appartenente a $W^{k,0}L_M(A)$, A aperto di $\boldsymbol{R}^N$, si può sempre costruire in modo che sia nulla in $\boldsymbol{R}^N \setminus A_\delta$, $A_\delta = \{x \in \boldsymbol{R}^N : d(x, A) < \delta\}$ .Basta scegliere δ minore della più piccola tra le distanze degli aperti in questione e considerare la somma delle estensioni costruite. Se Ω non è limitato bisogna allora supporre che, se γ_i risulta assegnata in due o più aperti di Γ disgiunti, la loro distanza si mantenga positiva.

Sino ad ora abbiamo dato esempi di operatori al bordo ammissibili se la (1.1) definisce un'applicazione $T\colon \prod L_M \to \prod L_{\bar M}$.

Prima di esaminare il caso generale richiamiamo un teorema di immersione dovuto a T. DONALDSON e N. TRUDINGER (cfr. [8]) e precisiamo il significato di alcuni simboli che utilizzeremo.

Siano B_1 e B_2 due N-funzioni, si scrive: $B_1 \prec B_2$ se esistono $K>0$ e $t_0>0$ tali che $B_1(t) \leqslant B_2(Kt)$, $\forall t>t_0$; $B_1 \prec\prec B_2$ se $\forall \varepsilon>0$, $B_1(t)/B_2(\varepsilon t) \to 0$ per $t \to +\infty$.

Se $B_1 \prec B_2$ e $B_2 \prec B_1$ allora B_1 e B_2 si dicono equivalenti.

Da $B_1 \prec B_2 [\prec\prec]$ segue $\bar B_1 \succ \bar B_2 [\succ\succ]$.

Sia C_0 una N-funzione e sia $\int_0^1 C_0^{-1}(t)/t^{1+1/n}\, dt < +\infty$ (esiste sempre una funzione equivalente a C_0 che soddisfa questa ipotesi), se $\int_1^{+\infty} C_0^{-1}(t)/t^{1+1/n}\, dt = +\infty$ definiamo una nuova N-funzione ponendo $C_1^{-1}(t) = \int_0^{|t|} C_0^{-1}(r)/r^{1+1/n}\, dr$. Per ricorrenza si definiscono $C_2, C_3, \ldots$. Indichiamo con $q(C_0)$, $\leqslant n$, il primo intero tale che

$$\int_1^{+\infty} C_q^{-1}(t)/t^{1+1/n}\, dt < +\infty\,.$$

PROPOSIZIONE 1.7 (cfr. [8]). – *Siano Ω un aperto limitato di $\mathbf{R}^n$ con frontiera dotata della proprietà di cono, C_0 una N-funzione ed $u \in W^m L_{C_0}(\Omega)$. Se $m - q(C_0) \leqslant |\alpha| \leqslant m$ allora $D^\alpha u \in L_{C_{m-|\alpha|}}$ e l'immersione è continua, inoltre se C^* è una N-funzione e $C^* \prec\prec C_{m-|\alpha|}$ allora $D^\alpha u \in E_{C^*}$ e l'immersione è compatta. Se $|\alpha| < m - q(C_0)$, $D^\alpha u \in C(\bar\Omega)$ e l'immersione è compatta. Infine se $u \in W^m E_{C_0}$, $D^\alpha u \in E_{C_{m-|\alpha|}}$ se $m - q(C_0) \leqslant |\alpha| \leqslant m$.*

Ricordiamo che, se $\int_1^{+\infty} C_0^{-1}(t)/t^{1+1/n}\, dt = +\infty$ allora $C_0 \prec\prec C_1$ (cfr. [11], lemma 4.14).

TEOREMA 1.8. – *Siano dati:*

i) *Un aperto limitato, Ω, di $\mathbf{R}^n$ con frontiera, Γ, di classe $C^{m,1}$;*

ii) *M, N_α (N-funzioni) ed $M \prec N_\alpha \prec M_{m-|\alpha|}$ se $m - q(M) \leqslant |\alpha| \leqslant m$, e supponiamo che M o $\bar M$ verifichi la Δ_2-condizione;*

iii) *una partizione di Γ in insiemi disgiunti, aperti in Γ, Γ_i, $i = 1, \ldots, p$ con frontiera localmente lipschitziana;*

iv) *gli operatori (1.5) $e = 1, \ldots, p$;*

inoltre se $p > 3$

v) *Γ_i e B_{Γ_i} siano tali che il sottoinsieme Γ^r di Γ su cui deve essere $\partial^r u/\partial n^r|_{\Gamma^r} = 0$, $r = 0, \ldots, m-1$, sia a frontiera localmente lipschitziana. Allora il sottospazio Y di $W^m L_M(\Omega)$ formato dalle funzioni, u, tali che $B_{\Gamma_i} u = 0$, $i = 1, \ldots, p$, è $\sigma(\prod L_{N_\alpha}, \prod E_{\bar N_\alpha})$ chiuso e $Y_0 = Y \cap \prod E_{N_\alpha} = Y \cap W^m E_M(\Omega)$ è $\sigma(\prod L_{N_\alpha}, \prod L_{\bar N_\alpha})$ denso in Y.*

La dimostrazione è una semplice generalizzazione del corollario 1.5. Osserviamo che l'ipotesi fatta su M, sulla frontiera degli aperti in Γ, Γ_i e la v) servono solo per dimostrare che Y_0 è $\sigma(\prod L_{N_\alpha}, \prod L_{\bar{N}_\alpha})$ denso in Y. Analoga osservazione si può fare per il corollario 1.6.

§ 2. – Consideriamo ora problemi al bordo non omogenei, in forma variazionale, per operatori A della forma (2.1)

$$Au = \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, u, \ldots, \nabla^m u) .$$

Se l'applicazione, non lineare, generata da A ha dominio contenuto in $W^m L_M(\Omega)$, per risolvere il problema

$$A\varphi = f , \qquad B_\Gamma \varphi = g$$

si devono determinare $w \in W^m L_M(\Omega)$ ed $u \in Y = \{v \in W^m L_M(\Omega) : B_\Gamma v = 0\}$ tali che $B_\Gamma w = g$ ed $A(u+w) = f$; si deve cioè trovare una soluzione $u \in Y$ di $A_1(u) = f$, con

$$A_1(u) = A(u+w) , \qquad w \text{ fissato in } W^m L_M(\Omega) .$$

Vediamo che, sotto opportune ipotesi sui coefficienti A_α, l'operatore A_1 definisce un'applicazione pseudomonotona tra una coppia di spazi complementari.

Indichiamo con s_m (risp. s'_m) il numero delle derivate rispetto ad x di ordine $\leq m$ (risp. d'ordine $= m$) e identifichiamo $\boldsymbol{R}^{s_m}$ con il campo di m-getti; quindi se $\xi = \{\xi_\alpha : \alpha \in \boldsymbol{N}^n, |\alpha| \leq m\} \in \boldsymbol{R}^{s_m}$ ed u è funzione derivabile, $\xi(u) = \{D^\alpha u : \alpha \in \boldsymbol{N}^n, |\alpha| \leq m\}$. Analogamente se $\zeta = \{\zeta_\alpha : \alpha \in \boldsymbol{N}^n, |\alpha| = m\} \in \boldsymbol{R}^{s'_m}$ ed $\eta = \{\eta_\alpha : \alpha \in \boldsymbol{N}^n, |\alpha| < m\} \in \boldsymbol{R}^{s_{m-1}}$, $\zeta(u)$ ed $\eta(u)$ denoteranno, rispettivamente, le derivate di u di ordine massimo e quelle di ordine inferiore.

$\mathcal{T}(E_M; r)$ denota l'insieme della $u \in L_M$ aventi distanze (secondo la norma di Orlicz) da E_M minore di r. Ricordiamo che $\mathcal{T}(E_M; 1) \subset \mathcal{L}_M$ (cfr. [16], pag. 82).

Sia $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ aperto, supponiamo che i coefficienti A_α dell'operatore (2.1) verifichino le seguenti condizioni:

(2.2) Condizione di Carathèodory: ogni $A_\alpha(x, \xi)$ sia una funzione definita in $\Omega \times \boldsymbol{R}^{s_m}$ a valori reali continua rispetto a ξ per ogni $x \in \Omega$ fissato e misurabile rispetto a x per ogni $\xi \in \boldsymbol{R}^{s_m}$ fissato.

(2.3) Esistano: una N-funzione M, $a(x) \in E_M$, $b, c \in \boldsymbol{R}^+$ tali che, se $|\alpha| \leq m$, $x \in \Omega$, $\xi \in \boldsymbol{R}^{s_m}$:

$$|A_\alpha(x, \xi)| \leq a(x) + b \sum_{|\beta|\leq m} \bar{M}^{-1}(M(c\xi_\beta)) .$$

(2.4) Per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $\xi, \xi' \in \boldsymbol{R}^{s_m}$:

$$\sum_{|\beta| \leqslant m} (A_\alpha(x, \xi) - A_\alpha(x, \xi'))\, (\xi - \xi') \geqslant 0 \, .$$

Sia Y un sottospazio di $W^m L_M(\Omega)$, $\sigma(\prod L_M, \prod E_{\bar{M}})$-chiuso, dove M è la N-funzione che compare nella condizione (2.3), tale che

$$Y = \sigma(\prod L_M, \prod L_{\bar{M}})\text{-chiusura di } Y_0 \, , \tag{2.5}$$

$Y_0 = Y \cap W^m E_M(\Omega)$. In tali ipotesi, come abbiamo ricordato nel § 1, Y genera un sistema complementare, $(Y, Y_0; Z, Z_0)$, in $(\prod L_M, \prod E_M; \prod L_{\bar{M}}, \prod E_{\bar{M}})$.

TEOREMA 2.1. – *Siano A un operatore della forma* (2.1) *soddisfacente le condizioni* (2.2), (2.3), (2.4), $w \in W^m E_M(\Omega)$, *Y un sottospazio di $W^m L_M(\Omega)$, $\sigma(\prod L_M, \prod E_{\bar{M}})$-chiuso, soddisfacente la* (2.5).

L'operatore T_w da

$$D(T_w) = \{u \in Y \colon A_\alpha(\xi(u + w)) \in L_{\bar{M}}(\Omega),\ \forall \alpha \in N^n,\ \textit{tale che}\ |\alpha| \leqslant m\}$$

in Z, definito da

$$\langle v, T_w(u) \rangle = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leqslant m} A_\alpha(\xi(u + w)) D^\alpha v \, dx \qquad \forall v \in Y_0$$

è pseudomonotono rispetto ad ogni sottospazio V denso in Y_0.

DIMOSTRAZIONE. – Per le ipotesi (2.2) e (2.3) l'applicazione: $z = (z_\beta)_{|\beta| \leqslant m} \to \to (A_\alpha(z))_{|\alpha| \leqslant m}$ manda $\prod E_M$ in $\prod L_{\bar{M}}$ ed è finitamente continua in $\prod L_{\bar{M}}$ munito della $\sigma(\prod L_{\bar{M}}, \prod E_M)$ topologia (cfr. [11]). Quindi ogni sottospazio V denso in Y_0 è contenuto in $D(T_w)$ e T_w è finitamente continuo da V in Z munito della $\sigma(Z, V)$ topologia.

Sia u_i una rete contenuta in V, limitata, $\sigma(Y, Z_0)$ convergente ad $u \in Y$, tale che $T_w(u_i) \to f \in Z$, $\sigma(Z, V)$ (cioè nella $\sigma(Z, V)$ topologia), inoltre

$$\limsup \langle u_i, T_w(u_i) \rangle \leqslant \langle u, f \rangle \, . \tag{2.6}$$

Dimostriamo che $u \in D(T_w)$, $T_w(u) = f$ e $\langle u_i, T_w(u_i) \rangle \to \langle u, f \rangle$ passando, se necessario, ad una sottorete. Dalla condizione (2.4) segue che per ogni $z = (z_\beta)_{|\beta| < m} \in \prod E_M$

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \sum A_\alpha(\xi(u_i + w))(z_\alpha - D^\alpha w)\, dx \leqslant \\ &\qquad \leqslant \int_\Omega \sum \{A_\alpha(\xi(u_i + w)) D^\alpha u_i - A_\alpha(z) D^\alpha u_i\}\, dx - \int_\Omega \sum A_\alpha(z)(D^\alpha w - z_\beta)\, dx \end{aligned} \tag{2.7}$$

il primo integrale che compare a secondo membro è limitato per le ipotesi fatte su u_i e z, il secondo integrale non dipende da i, quindi ogni $A_\alpha(\xi(u_i+w))$ è limitato in $L_{\bar{M}}(\Omega)$. Ne segue che $A_\alpha(\xi(u_i+w)) \to h_\alpha \in L_{\bar{M}}$, $\sigma(L_{\bar{M}}, E_M)$ (passando eventualmente ad una sottorete) perciò la forma lineare $f \in Z$ può essere identificata con $(h_\alpha) \in \prod L_{\bar{M}}$, infatti

$$\langle v, f\rangle = \int_\Omega \sum h_\alpha D^\alpha v\, dx\,, \qquad \forall v \in V\,,$$

ma V è denso in Y_0 e Y_0 è $\sigma(\prod L_M, \prod L_{\bar{M}})$ denso in Y, quindi la relazione precedente vale $\forall y \in Y$.

Se $z \in \prod L^\infty$ ha supporto compatto in $\bar{\Omega}$, per la (2.3), $A_\alpha(z) \in E_{\bar{M}}(\Omega)$ inoltre $\sigma(\prod L_M, \prod E_{\bar{M}})$ induce $\sigma(Y, Z_0)$ su Y, allora passando al limite nella (2.7) si ottiene:

$$\int_\Omega \sum (h_\alpha - A_\alpha(z))(D^\alpha(u+w) - z_\alpha)\, dx \geqslant 0\,, \qquad \forall z \in \prod L^\infty \tag{2.8}$$

a supporto compatto in $\bar{\Omega}$, ne segue (cfr. [7], lemma 1.3 e [11], lemma 4.5)

$$A_\alpha(D^\alpha(u+w)) = h_\alpha \qquad \text{per } |\alpha| \leqslant m\,.$$

Detta χ_k la funzione caratteristica di $\Omega_k = \{x \in \Omega\colon |x| \leqslant k,\ |D^\alpha(u+w)| \leqslant k\}$, e posto $z_\alpha = D^\alpha(u+w)\chi_k$, dalla (2.7) segue, $\forall k$

$$\begin{aligned}\liminf \int_\Omega \sum A_\alpha(\xi(u_i+w)) D^\alpha u_i\, dx \geqslant\\ \geqslant \int_\Omega \sum [A_\alpha(\xi(u+w)\chi_k) - A_\alpha(0)][D^\alpha(u+w) - D^\alpha(u+w)\chi_k]\, dx +\\ + \int_\Omega \sum A_\alpha(0)\{D^\alpha(u+w) - D^\alpha(u+w)\chi_k\}\, dx +\\ + \int_\Omega \sum A_\alpha(\xi(u+w))\{D^\alpha(u+w)\chi_k - D^\alpha w\}\, dx\end{aligned}$$

quindi passando al limite per $k \to +\infty$

$$\geqslant \int_\Omega \sum A_\alpha(\xi(u+w)) D^\alpha u\, dx$$

Da questa diseguaglianza e dalla (2.6) segue che

$$\lim \langle u_i, T_w(u_i)\rangle = \langle u, f\rangle\,.$$

OSSERVAZIONE 1. – L'ipotesi $w \in W^m E_M(\Omega)$ si può indebolire se $\bar{M}$ verifica la Δ_2-condizione. Infatti è possibile dimostrare che se $D^\alpha w \in \mathcal{T}(E_M; 1/c)$ per $|\alpha| \leqslant m$, dove c è la costante che compare nella (2.3), T_w è finitamente continua da $\prod E_M$ in $\prod L_{\bar{M}}$, munito della $\sigma(\prod L_{\overline{M}}, \prod E_M)$ topologia. Inoltre se $\overline{M}$ verifica le Δ_2-condizione $z \in \prod L^\infty(\Omega)$ ed ha supporto compatto in $\overline{\Omega}$, $w \in \prod \mathcal{T}(E_M; 1/c)$, allora $A_\alpha(z + \xi(w)) \in E_{\overline{M}}$ e dalla (2.7), riscritta nella forma seguente:

$$\int_\Omega \sum A_\alpha(\xi(u_i + w))\, z_\alpha\, dx \leqslant \int_\Omega \sum A_\alpha(\xi(u_i + w))\, D^\alpha u_i - \int_\Omega \sum A_\alpha(z + \xi(w))(D^\alpha u_i - z_\alpha)\, dx$$

segue

$$\int_\Omega \sum \big(h_\alpha - A_\alpha(z + \xi(w))\big)(D^\alpha u - z_\alpha)\, dx \geqslant 0\ .$$

Utilizzando questa relazione in luogo della (2.8) si perviene alla tesi.

Concludendo: se $\overline{M}$ verifica le Δ_2-condizione globale, l'ipotesi su w nel teorema 2.1 può essere sostituita con $w \in \prod \mathcal{T}(E_M; 1/c) \cap W^m L_M(\Omega)$. Se poi Ω è limitato ed ha la proprietà di cono, basta che $D^\alpha w \in \mathcal{T}(E_M; 1/c)$ per $|\alpha| = m$ perchè per la proposizione 1.7, se $|\gamma| < m$, $D^\gamma w \in E_M$.

OSSERVAZIONE 2. – Dalla dimostrazione del teorema precedente segue che se u_i è una rete limitata di Y, $u_i \to u$, $\sigma(Y, Z_0)$ e $T_w u_i \to f$ in Z_0 munito della topologia forte, allora $T_w(u) = f$. Rileviamo inoltre che T_w è monotono e fortemente quasi limitato in Y_0 rispetto a qualsiasi elemento, $\overline{u}$, di Y_0, dato che $D(T_w) \supset B_\varepsilon(\overline{u}, Y_0)$, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \overline{u} \in Y_0$, con $B_\varepsilon(\overline{u}, Y_0)$ sfera in Y_0 di centro $\overline{u}$ e raggio ε.

Ricordiamo che un'applicazione $S\colon Y \to 2^Z$ si dice fortemente quasi limitata su $V \subset Y$ rispetto a $\overline{y} \in V$ se $\forall c_1, c_2 > 0$ esiste $k(c_1, c_2) > 0$ tale che se $z \in S(y)$, $y \in V$, $\|z\| \leqslant c_1$, $\langle y - \overline{y}, z\rangle \leqslant c_2$ allora $\|z\| \leqslant k(c_1, c_2)$. Un'applicazione monotona $S\colon Y \to 2^Z$ è quasi limitata in V rispetto ad $\overline{y} \in V$ se il suo dominio contiene $B_\varepsilon(\overline{y}, V)$ per qualche $\varepsilon > 0$ (cfr. BROWDER-HESS [5]).

Se Ω è limitato e dotato della proprietà di cono vale la proposizione 1.7, allora l'ipotesi (2.3) su A può essere indebolita e si può aggiungere un operatore di ordine inferiore.

La condizione (2.3) sui coefficienti dell'operatore (2.1) può essere sostituita dalla seguente

(2.3′) Esistano: una N-funzione M, delle N-funzioni $N_\alpha \succ M$ soddisfacenti $N_\alpha \prec M_{m-|\alpha|}$ per $m - q(M) \leqslant |\alpha| \leqslant m$, $a_\alpha \in E_{\overline{N}_\alpha}(\Omega)$, $g_\alpha \in C(\mathbf{R}^{s_{m-q-1}})$, $b, c \in \mathbf{R}^+$, tali che per $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbf{R}^{s_m}$, con componente ξ^q in $\mathbf{R}^{s_{m-q-1}}$:

$$|A_\alpha(x, \xi)| \leqslant a(x) + g_\alpha(\xi^q) + b \sum_{|\beta| \leqslant m} N_\alpha^{-1} N_\beta(c\xi_\beta)\ .$$

(se $|\alpha| < m - q(M)$ l'ipotesi su a_α può essere sostituita con $a_\alpha \in L^1(\Omega)$).

Consideriamo il seguente operatore di ordine inferiore

$$C(u) = \sum_{|\gamma| \leqslant m-1} (-1)^{|\gamma|} D^\gamma C_\gamma(x, u, \ldots, \nabla^{m-1} u) \tag{2.9}$$

e supponiamo che i coefficienti C_γ verifichino le seguenti condizioni:

(2.10) Ogni $C_\gamma(x, \eta)$ verifichi le ipotesi di Carathèodory in $\Omega\times \boldsymbol{R}^{sm-1}$.

(2.11) Esistono delle N-funzioni P_γ soddisfacenti $P_\gamma \prec\prec M_{m-|\gamma|}$ per $m-q(M)\leqslant \leqslant|\gamma|\leqslant m-1$, $d_\gamma\in E_{\overline{M}_\gamma}$, $d\in L^1$, $g_\gamma\in C(\boldsymbol{R}^{sm-q-1})$, $c\in \boldsymbol{R}^+$, tali che $\forall x\in\Omega$ e $\forall\eta\in\boldsymbol{R}^{sm-1}$, con componente η^q in $\boldsymbol{R}^{sm-q-1}$, sia:

se $m-q(M)\leqslant|\gamma|\leqslant m-1$

$$|C_\gamma(x,\eta)|\leqslant g_\gamma(\eta^q)[d_\gamma(x)+\sum_{m-q\leqslant|\alpha|\leqslant m-1}\overline{P}_\gamma^{-1}P_\alpha(c\eta_\alpha)]$$

se $|\gamma|<m-q(M)-1$

$$|C_\gamma(x,\eta)|\leqslant g_\gamma(\eta^q)[d(x)+\sum_{m-q\leqslant|\alpha|\leqslant m-1}P_\alpha(c\eta_\alpha)]\,.$$

Siano M ed N_α le N-funzioni che compaiono nella condizione (2.3′), Y un sottospazio di $W^mL_M(\Omega)$, $\sigma(\prod L_{N_\alpha}, \prod E_{\overline{N}_\alpha})$-chiuso tale che

$$Y=\sigma(\prod L_{N_\alpha}, \prod L_{\overline{N}_\alpha}) \quad \text{chiusura di } Y_0\,, \tag{2.12}$$

dove $Y_0=Y\cap\prod E_{N_\alpha}=Y\cap W^mE_{N_\alpha}(\Omega)$, ed $(Y, Y_0; Z, Z_0)$ il sistema complementare generato da Y in $(\prod L_{N_\alpha}, \prod E_{N_\alpha}; \prod L_{\overline{N}_\alpha}, \prod E_{\overline{N}_\alpha})$.

Vale allora il seguente

TEOREMA 2.2. – *Siano $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ un aperto limitato dotato della proprietà di cono, A un operatore della forma* (2.1) *soddisfacente le condizioni* (2.2), (2.3′), (2.4) *e C un operatore della forma* (2.9) *soddisfacente le condizioni* (2.10), (2.11), *Y un sottospazio $\sigma(\prod L_{N_\alpha}, \prod E_{\overline{N}_\alpha})$-chiuso per cui vale la* (2.12) *e $w\in W^mE_M(\Omega)$. Sia T_w l'applicazione da*

$$D(T_w)=\{u\in Y\colon A_\alpha(\xi(u+w))\in L_{\overline{N}_\alpha},\ \forall\alpha\in\boldsymbol{N}^n \text{ tale che } |\alpha|\leqslant m\}$$

in Z, definito da

$$\langle v, T_w(u)\rangle=\int_\Omega\Big\{\sum_{|\alpha|\leqslant m}A_\alpha(\xi(u+w))D^\alpha v+\sum_{|\gamma|\leqslant m-1}C_\gamma(\eta(u+w))D^\gamma v\Big\}dx$$

$\forall v\in Y_0$. *Allora T_w è pseudomonotono rispetto ad ogni sottospazio V denso in Y_0.*

DIMOSTRAZIONE. – Indichiamo con $T_{1,w}$ e $T_{2,w}$ le applicazioni individuate, rispettivamente, da A e da C, allora $T_w=T_{1,w}+T_{2,w}$. La dimostrazione della pseudomonotonia dell'operatore $T_{1,w}$ è analoga a quella del teorema 1. Inoltre $T_{2,w}$ è completamente continuo anche per $w\in W^mL_M(\Omega)$, cioè $T_{2,w}$ è definito su Y e continuo rispetto alla topologia forte di Z su ogni sottoinsieme di Y limitato munito della

$\sigma(Y, Z_0)$ topologia. Questo segue banalmente dal teorema 4.15 di [11] e dal lemma 1.4 di [7]. Ne segue che T_w è pseudomonotono rispetto ad ogni sottospazio denso in Y_0 (cfr. [11]).

OSSERVAZIONE 3. – Se le N_α verificano la Δ_2-condizione l'ipotesi su w fatta nel teorema precedente può essere sostituita con $w \in \prod \mathcal{S}(E_{N_\alpha}; 1/c) \cap W^m L_M(\Omega)$, dove c è la costante che compare nella condizione (2.3′) (vedi osservazione 1).

OSSERVAZIONE 4. – Se u_i è una rete limitata, contenuta in Y, $u_i \to u$, $\sigma(Y, Z_0)$ e $T_w u_i \to f$ in Z_0, rispetto alla topologia forte, allora $T_w u = f$.

Se Ω è limitato e dotato della proprietà di cono, utilizzando la Proposizione (1.7) si può indebolire la condizione di monotonia, (2.4), per l'operatore A.

Supponiamo ora che i coefficienti A_α soddisfino la condizione (2.2) ed inoltre

(2.13) Esistano delle N-funzioni M ed $N_\alpha \succ M$, $N_\alpha \prec M$ per $|\alpha| = m$, $N_\alpha \prec\prec M_{m-|\alpha|}$ per $m - q(M) \leqslant |\alpha| < m$, $a_\alpha \in E_{\bar N_\alpha}(\Omega)$ per $|\alpha| = m$, $a_\alpha \in L_{\bar N_\alpha}(\Omega)$ per $|\alpha| < m$, una N-funzione $P \prec\prec M$, $g_\alpha \in C(\boldsymbol{R}^{s_{m-q(M)-1}})$, $c, c_1 \in \boldsymbol{R}^+$ tali che $\forall x \in \Omega$, $\forall \xi \in \boldsymbol{R}^{s_m}$ con componente ξ^q in $\boldsymbol{R}^{s_{m-q(M)-1}}$, sia:

se $|\alpha| = m$

$$|A_\alpha(x, \xi)| \leqslant g_\alpha(\xi^q)\Big[a_\alpha(x) + \sum_{|\beta|=m} \bar N_\alpha^{-1} N_\beta(c_\beta \xi_\beta) + \sum_{m-q(M)\leqslant|\beta|<m} \bar P^{-1} N_\beta(c\xi_\beta)\Big]$$

se $|\alpha| < m$

$$|A_\alpha(x, \xi)| \leqslant g_\alpha(\xi^q)\Big[a_\alpha(x) + \sum_{|\beta|=m} \bar N_\alpha^{-1} P(c\xi_\beta) + \sum_{m-q(M)\leqslant|\beta|<m} \bar N_\alpha^{-1} N_\beta(c\xi_\beta)\Big] .$$

(2.14) Per ogni $x \in \Omega$, $\eta \in \boldsymbol{R}^{s_{m-1}}$, $\zeta, \zeta' \in \boldsymbol{R}^{s'_m}$ con $\zeta \neq \zeta'$

$$\sum_{|\alpha|=m} \big(A_\alpha(x, \zeta, \eta) - A_\alpha(x, \zeta', \eta)\big)(\zeta_\alpha - \zeta'_\alpha) > 0 .$$

(2.15) Per ogni $x \in \Omega$, $\zeta', \zeta'' \in \boldsymbol{R}^{s'_m}$

$$\sum_{|\alpha|=m} \big(A_\alpha(x, \zeta, \eta) - \zeta'\big)(\zeta_\alpha - \zeta''_\alpha) \to +\infty$$

per $|\zeta| \to +\infty$ in $\boldsymbol{R}^{s'_m}$, uniformemente per η e ζ' limitati.

TEOREMA 2.3. – *Siano $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ un aperto limitato con frontiera dotata della proprietà di cono, A un operatore della forma* (2.1) *soddisfacente le condizioni* (2.2), (2.13), (2.14), (2.15), *Y un sottospazio di $W^m L_M(\Omega)$, $\sigma(\prod L_{N_\alpha}, \prod E_{\bar N_\alpha})$-chiuso soddisfacente la* (2.12) *e $w \in W^m L_M(\Omega)$ tale che $D^\alpha w \in \mathcal{S}(E_M; 1/c_1)$, per $|\alpha| = m$ dove c_1 è la costante che compare nella* (2.13). *Sia T_w l'applicazione da*

$$D(T_w) = \{u \in Y\colon A_\alpha(\xi(u + w)) \in L_{\bar N_\alpha},\ \forall \alpha \in \boldsymbol{N}^n \text{ tale che } |\alpha| \leqslant m\}$$

in Z, definito da

$$\langle v, T_w(u)\rangle = \int_\Omega \sum_{|\alpha|\leqslant m} A_\alpha(\xi(u+w))D^\alpha v\,dx \qquad \forall v \in Y_0$$

allora T_w è sequenzialmente pseudomonotona rispetto ad ogni sottospazio V denso in Y_0:

Ricordiamo che sequenzialmente pseudomonotona significa che la condizione ii) della definizione 2 vale per successioni.

La dimostrazione è simile a quella del teorema 5.3 di [11].

OSSERVAZIONE 5. – Se le A_α dipendono da t, sono continue rispetto a (ξ, t) per ogni x fissato e le condizioni (2.13), (2.14), (2.15) sono soddisfatte uniformemente rispetto a t, allora A_t definisce un'omotopia sequenzialmente pseudomonotona rispetto ad ogni sottospazio V denso in Y_0.

Osserviamo infine che se $u_i \in Y$, $u_i \to u \in Y$, $\sigma(Y, Z_0)$, $T_w(u_i) \to f \in Z_0$ in norma allora $T(u) = f$.

I teoremi 2.1, 2.2, 2.3, uniti ai teoremi sugli operatori pseudomonotoni (vedi GOSSEZ [11] e [12]) permettono di enunciare vari teoremi di esistenza di soluzioni.

TEOREMA 2.4. – *Siano Ω un aperto di $\boldsymbol{R}^n$, A un operatore della forma* (2.1) *soddisfacente le condizioni* (2.2), (2.3), (2.4), *Y un sottospazio di $W^m L_M(\Omega)$, $\sigma(\prod L_M, \prod E_{\overline{M}})$-chiuso verificante la* (2.5), *$w \in W^m E_M(\Omega)$. Se per qualche $\overline{u} \in Y_0$ $\langle T_w(u), u-\overline{u}\rangle \to +\infty$ per $\|u\| \to +\infty$, $u \in Y_0$ allora $\forall f \in Z_0$ esiste almeno una soluzione appartenente ad Y dell'equazione $A(u+w) = f$.*

TEOREMA 2.5. – *Se Ω è un aperto limitato dotato della proprietà di cono e l'operatore A definito dalla* (2.1) *verifica le condizioni* (2.2), (2.3′), (2.4) *oppure* (2.2), (2.13), (2.14), (2.15) *l'operatore C definito dalla* (2.9) *verifica le condizioni* (2.10), (2.11), *Y è un sottospazio di $W^m L_M(\Omega)$, $\sigma(\prod L_{N_\alpha}, \prod E_{\overline{N}_\alpha})$-chiuso, soddisfacente la condizione* (2.12) *$w \in W^m E_M(\Omega)$, inoltre per qualche $\overline{u} \in Y_0$ $\langle T_w(u), u-\overline{u}\rangle/\|u\| \to +\infty$ per $\|u\| \to +\infty$, $u \in Y_0$, allora per ogni $f \in Z_0$ esiste almeno una soluzione in Y di $A(u+w) + C(u+w) = f$.*

Questi teoremi sono un'immediata conseguenza dei teoremi 2.1, 2.2, 2.3 e del teorema 3.1 di [11].

Analoghi enunciati si hanno sostituendo la condizione di coercitività con la seguente: per qualche $\overline{u} \in Y_0$

$$\inf\{\langle u-\overline{u}, T_w(u)\rangle \|u\|^{-1} + \|T_w(u)\|\} \to +\infty$$

per $\|u\| \to +\infty$, $u \in D(T_w)$ ed esiste $h: \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^+$ continua tale che

$$\inf\{\langle u-\overline{u}, T_w(u)\rangle\} \geqslant -h(\|u\|)$$

$u \in V$ sottospazio denso in Y_0 e $\|u\| > R$, $R > 0$ opportuno.

Questo segue dai teoremi 2.1, 2.2, 2.3 e dal teorema 3.5 di [11].

TEOREMA 2.6. – *Siano Ω un aperto di $\boldsymbol{R}^n$, A un operatore della forma* (2.1) *verificante le condizioni* (2.2), (2.3), (2.4), $w \in W^m E_M(\Omega)$ Y *un sottospazio* $\sigma(\prod L_M, \prod E_{\overline{M}})$-*chiuso soddisfacente le* (2.5). *Se* $\forall f \in Z_0$ *esistono un intorno* $U(f)$ *in* Z *ed una costante* K *tali che* $\forall g \in U$ *e per ogni soluzione appartenente ad* Y *dell'equazione* $A(u+tw)=g$, $t\in[0,1]$ *si abbia* $\|u\|\leqslant K$, *allora* $A(u+tw)=f$ *ammette almeno una soluzione in* Y *per ogni* $t\in[0,1]$ *e per ogni* $f\in Z_0$.

DIMOSTRAZIONE. – L'applicazione T_{tw} da:

$[0,1]\times D(T_{tw})=[0,1]\times\{u\in Y\colon A_\alpha(x,\xi(u+tw))\in L_M(\Omega),\ \forall\alpha\in\boldsymbol{N}^n$ tale che $|\alpha|\leqslant m\}$, in Z, definita da

$$\langle v, T_{tw}(u)\rangle = \int_\Omega \sum_{|\alpha|\leqslant m} A_\alpha((u+tw))D^\alpha v\,dx \qquad \forall v\in Y_0$$

è un'omotopia pseudomonotona rispetto ad ogni sottospazio V denso in Y_0, la dimostrazione è analoga a quella del teorema 2.1. Inoltre T_{tw} è monotona e T_0 interseca Z_0, infatti $T_0(0)\in Z_0$. Per il corollario 1 di [12] si ha allora $R(T_{tw})\supset Z_0$ per ogni $t\in[0,1]$.

TEOREMA 2.7. – *Siano $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ un aperto limitato dotato della proprietà di cono, A un operatore della forma* (2.1) *verificante le condizioni* (2.2), (2.3′), (2.4), *C un operatore della forma* (2.9) *verificante le condizioni* (2.10), (2.11), *Y un sottospazio di* $W^mL_M(\Omega)$, $\sigma(\prod L_{N_\alpha}, \prod E_{\overline{N}_\alpha})$-*chiuso verificante la* (2.12), $w\in W^mE_M(\Omega)$. *Se* $\forall f\in Z_0$ *esistono un intorno* $U(f)$ *in* Z *e una costante* $K>0$ *tali che per ogni soluzione* $u\in Y$ *di* $A(u+tw)+tC(u+tw)=g$, $t\in[0,1]$, *si abbia* $\|u\|\leqslant K$, *allora* $A(u+tw)+tC(u+tw)=f$ *ha almeno una soluzione u in Y*, $\forall f\in Z_0$ *e* $\forall t\in[0,1]$.

Si dimostra come il teorema precedente: basta osservare che T_0 è monotona e $R(T_0)$ interseca Z_0.

OSSERVAZIONE 6. – Se $\overline{M}$ verifica la Δ_2-condizione globale e $m\Omega<+\infty$ nei teoremi precedenti, (2.4), ..., (2.7), l'ipotesi su w può essere sostituita con la seguente: $w\in W^mL_M(\Omega)$ e $D^\alpha w\in\mathcal{T}(E_M;1/c)$ per $|\alpha|=m$ dove c è la costante che compare nelle (2.3), o (2.3′); se $m\Omega=+\infty$, con $w\in W^mL_M(\Omega)\cap\prod\mathcal{T}(E_M;1/c)$.

TEOREMA 2.7′. – *Siano $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ un aperto limitato dotato delle proprietà di cono, A un operatore della forma* (2.1) *verificante le condizioni* (2.2), (2.13), (2.14), (2.15), *C un operatore della forma* (2.9) *verificante le condizioni* (2.10), (2.11), *Y un sottospazio di* $W^mL_M(\Omega)$, $\sigma(\prod L_{N_\alpha}, \prod E_{\overline{N}_\alpha})$-*chiuso soddisfacente la* (2.12), $w\in W^mL_M(\Omega)$ *tale che* $D^\alpha w\in\mathcal{T}(E_M;1/c_1)$ *per* $|\alpha|=m$, *dove c_1 è la costante che compare nella* (2.13). *Poniamo inoltre* $A=A'+A''$ *con A' monotona all'esterno di qualche sfera di* Y_0. *Se* $\forall f\in Z_0$ *esistono un intorno* $U(f)$ *in* Z *ed una costante* $K>0$ *tali che per ogni soluzione* $u\in Y$

dell'equazione $A'(u+tw)+tA''(u+tw)+C(u+tw)=g$, $t\in[0,1]$, *si abbia* $\|u\|<K$, *allora* $A'(u+tw)+tA''(u+tw)+C(u+tw)=f$ *ha almeno una soluzione in* Y *per ogni* $f\in Z_0$ *e per ogni* $t\in[0,1]$.

Rileviamo che $T_{t,w}$ è un'omotopia sequenzialmente pseudomonotona, $T_{0,0}$ è monotona all'esterno di qualche sfera e $R(T_{0,0})$ interseca Z_0.

OSSERVAZIONE 7. – Se le condizioni (2.4), (2.14) sono sostituite con

$$\sum_{|\alpha|\leq m}[A_\alpha(x,\xi)-A_\alpha(x,\xi')](\xi_\alpha-\xi'_\alpha)>0$$

$\forall x\in\Omega$ e $\forall\xi,\xi'\in\boldsymbol{R}^{s_m}$ con $\xi\neq\xi'$, allora l'applicazione T_w è strettamente monotona e, nelle ipotesi dei teoremi precedenti, la soluzione $u\in Y$ di $A(u+w)=f$, $f\in Z_0$ è unica.

Sino ad ora abbiamo considerato aperti $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ molto generali, ma naturalmente perchè abbia senso considerare un operatore B_Γ definito sulla frontiera, Γ, di Ω si devono fare ipotesi di regolarità su Γ. Nel seguito considereremo problemi al bordo « intermedi » e « misti » e supporremo Γ [limitata] dotata della $C^{m,1}$-regolarità uniforme [di classe $C^{m,1}$] e, per $m=1$, Γ dotata della proprietà di Lipschitz locale forte. In tali ipotesi da $u\in W^mL_M(\Omega)$ segue $\gamma u\in W^{m-1}L_M(\Gamma)$ $(\gamma=(\gamma_0,\dots,\gamma_{m-1}),\ \gamma_k u=\partial^k u/\partial n^k|_\Gamma)$, (cfr. [21], Th. 2.2) e si possono applicare i teoremi di rilevamento proposizione 2, lemma 1.2, Corollario 1.4, Corollario 1.6).

Es. – Sia

$$Au=\sum_{|\alpha|\leq m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha p(D^\alpha u)$$

con $p:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ non decrescente, continua, dispari, tale che $p(+\infty)=+\infty$. Posto $M(t)=\int_0^t p(r)\,dr$ le ipotesi (2.2), (2.3), (2.4) sono verificate. Supponiamo inoltre che Ω abbia frontiera, Γ, dotata della $C^{m,1}$-regolarità uniforme.

Consideriamo il problema di Dirichelet

$$\begin{aligned}&A(\varphi)=f\,, &&f\in W^mE_M(\Omega)\,,\\ &B_\Gamma\varphi=g\,, &&B_\Gamma=(\gamma_0,\dots,\gamma_{m-1}),\ g\in\prod_{i=0}^{m-1}W^{m-1-i,0}L_M(\Gamma)\,.\end{aligned}$$

Come abbiamo già ricordato in questo caso $Y=W_0^mL_M(\Omega)$, $Y_0=W_0^mE_M(\Omega)$ inoltre Z e Z_0 possono essere identificati, rispettivamente, con $W^{-m}L_M(\Omega)$ e $W^{-m}E_M(\Omega)$ e quindi se $f\in Z_0$, $f=\sum_{|\alpha|\leq m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha f$, $f_\alpha\in E_{\overline{M}}(\Omega)$. Scelta $c>0$ in modo che

$$\int_\Omega\overline{M}(3f_\alpha)\,dx\leq c\,,\qquad\forall\alpha\in\boldsymbol{N}^n,\ |\alpha|\leq m\,,$$

consideriamo l'intorno di f in $Z = W^{-m}L_M(\Omega)$ seguente

$$U(f) = \left\{h = (h_\alpha) \in Z: \int_\Omega \overline{M}(2h_\alpha)\, dx \leq c + 1,\ \forall \alpha \in N^n,\ |\alpha| \leq m\right\}.$$

che contiene sicuramente l'intorno di f di raggio 1/6.

Determinata $w \in W^m L_M(\Omega)$ tale che $B_\Gamma w = g$, e questo è possibile per la proposizione 2, vediamo che ogni possibile soluzione appartenente ad Y di $A(u + tw) = h$, $t \in [0, 1]$, è limitata in Y se $h \in U(f)$ e $w \in \prod \mathcal{T}(E_M, 1) \cap W^m L_M(\Omega)$.

Sia infatti u una tale soluzione, allora

$$\int_\Omega \sum p(D^\alpha(u + tw))\, D^\alpha v\, dx = \int_\Omega \sum h_\alpha D^\alpha v\, dx, \qquad \forall v \in Y_0$$

e, per la (2.5), anche $\forall v \in Y$ e quindi

$$\int_\Omega \sum p(D^\alpha(u + tw))\, D^\alpha u\, dx = \int_\Omega \sum h_\alpha D^\alpha u\, dx .$$

Ne segue:

$$\int_\Omega \left\{\sum M(D^\alpha(u + tw)) + \overline{M}\big(p(D^\alpha(u + tw))\big)\right\} dx = \int_\Omega \sum p(D^\alpha(u + tw))\, D^\alpha(u + tw) =$$
$$= \int_\Omega \sum \{h_\alpha D^\alpha(u + tw) - t h_\alpha D^\alpha w + t p(D^\alpha(u + tw)) D^\alpha w\}\, dx \leq$$

per la diseguaglianza di Young,

$$\leq \int_\Omega \sum \{\overline{M}(2h_\alpha) + M(\tfrac{1}{2} D^\alpha(u + tw)) + t\overline{M}(h_\alpha) + tM(D^\alpha w) +$$
$$+ t\overline{M}\big(p(D^\alpha(u + tw))\big) + tM(D^\alpha w)\}\, dx$$

allora

$$\tfrac{1}{2}\int_\Omega \sum M(D^\alpha(u + tw))\, dx \leq 2\int_\Omega \sum \{\overline{M}(2h_\alpha) + tM(D^\alpha w)\}\, dx$$

e il secondo membro è limitato se $w \in \prod \mathcal{T}(E_M, 1) \cap W^m L_M(\Omega)$.

Ne segue che $T_{tw}^{-1}(U)$ è limitato in Y.

Definiamo:

$$\mathcal{T}(W^{k,0}E_M; r) = \{v \in W^{k,0}L_M: \inf_{z \in W^{k,0}E_M} \|u - z\|^*_{k,0,M} < r\}$$

e indichiamo con R: $W^{m-1-i,0}L_M(\Gamma) \to W^m L_M(\Omega)$ l'operatore lineare limitato tale che

$B(Rg) = g$ ed osserviamo che se

$$g \in \prod_{i=0}^{m-1} W^{m-1-i,0} L_M(\Gamma) \cap \mathcal{S}\big(W^{m-1-i,0} E_M(\Gamma); 1/\|R\|\big)$$

allora

$$w = Rg \in W^m L_M(\Omega) \cap \prod_{k=0}^{m} \mathcal{S}(E_M; 1) .$$

Per il teorema 2.6 il problema di Dirichlet considerato ammette almeno una soluzione $\forall g \in \prod_{i=0}^{m-1} W^{m-1-i,0} E_M(\Gamma)$.

Rileviamo che per la definizione di $M(t)$, $\forall t > 0$, $\forall \alpha > 0$, $M\big((1+\alpha)t\big) \geqslant \int_t^{t(1+\alpha)} p(\tau)\, d\tau \geqslant$ $\geqslant \alpha t p(t)$, inoltre $M(t) = M(-t)$, $\forall t \in \boldsymbol{R}$, quindi $\overline{M}\big(p(u)\big) \leqslant 1/\alpha M\big((1+\alpha)u\big) - M(u)$, $\forall \alpha > 0$; ne segue: $\{u \in L_M \colon p(u) \in L_{\overline{M}}\} \supset \mathcal{S}(E_M; 1)$. Procedendo come nell'osservazione 1 si ottiene che $A(u + tw)$, $t \in [0, 1]$ definisce un'omotopia pseudomonotona $\forall w \in W^m L_M(\Omega) \cap$ $\cap \prod \mathcal{S}(E_M; 1)$ se $\overline{M}$ verifica la Δ_2-condizione globale [Δ_2-condizione se $m\Omega < +\infty$].

Dal teorema 2.6, e dall'osservazione 6, segue che $A(u + tw) = f$ ha almeno una soluzione in Y, $\forall f \in Z_0$, $\forall w \in W^m L_M(\Omega) \cap \prod \mathcal{S}(E_M; 1)$, $\forall t \in [0, 1]$, se $\overline{M}$ verifica la Δ_2-condizione globale e per M qualsiasi se Ω è limitato (cfr. Th. 2.7′).

Se p è strettamente crescente allora la soluzione è unica.

Siano B_Γ uno degli operatori considerati nel § 1, $Y = \{u \in W^m L_M(\Omega) \colon B_\Gamma u = 0\}$ e $Y_0 = Y \cap W^m E_M(\Omega)$. Come abbiamo visto, se Γ e la sua eventuale partizione sono sufficientemente regolari ad M oppure $\overline{M}$ verificano la Δ_2-condizione globale allora Y individua un sistema complementare, $(Y, Y_0; Z, Z_0)$ in $\big(\prod L_M, \prod E_M; \prod L_{\overline{M}}, \prod E_{\overline{M}}\big)$.

In questi casi non ci si può aspettare una semplice caratterizzazione di $Y_0 = Z$, ma si vede facilmente che $\forall f \in Z$ esiste $(v_\alpha) \in \prod L_{\overline{M}}$ tale che

$$\langle u, f\rangle = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leqslant m} D^\alpha u v_\alpha dx \qquad \forall u \in Y_0 \tag{2.16}$$

e

$$\|f\| = \min_{I_f} \|v\|_{\Pi L_{\overline{M}}}, \qquad I_f = \left\{v = (v_\alpha) \in \prod L_{\overline{M}} \colon \langle u, f\rangle = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leqslant m} D^\alpha u v_\alpha dx \qquad \forall u \in Y_0\right\}.$$

Se $f \in Z_0$, sottospazio di Z formato dai funzionali lineari $\sigma\big(\prod E_M, \prod E_{\overline{M}}\big)$-continui, allora esiste $v = (v_\alpha) \in \prod E_{\overline{M}}$ tale che valga la (2.16) e $\|f\| = \min_{I'_f} \|v\|_{\Pi L_{\overline{M}}}$

$$I'_f = \left\{v = (v_\alpha) \in \prod E_{\overline{M}} \colon \langle u, f\rangle = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leqslant m} D^\alpha u v_\alpha dx \qquad \forall u \in Y_0\right\}.$$

Fissata $f \in Z_0$ indichiamo con (f_α) l'elemento di I'_f avente norma minima, scegliamo $c > 0$ in modo che $\int_\Omega \overline{M}(3f_\alpha)\, dx < c$, allora un intorno di f in Z può essere identificato con un sottoinsieme di

$$U=\left\{h=(h_\alpha)\in\prod L_{\bar{M}}:\int_\Omega \bar{M}(2h_\alpha)\,dx\leqslant c+1\right\}.$$

Se A è l'operatore considerato precedentemente:

$$Au=\sum_{|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}p(D^\alpha u)\,,$$

per quanto visto, ogni soluzione appartenente ad Y di $A(u+tw)$ è limitata in Y, $\forall t\in[0,1]$ se $w\in W^mL_M(\Omega)\cap\mathcal{S}(E_M;1)$.

Utilizzando le proposizioni del § 1 siamo in grado di dare condizioni sufficienti affinchè i problemi al bordo $A\varphi=f$, $B_\Gamma\varphi=g$, dove B_Γ è uno degli operatori del § 1, abbia almeno una soluzione in Y. Consideriamo ad esempio l'operatore (1.3) ed il corrispondente problema al bordo

$$\text{(2.16')}\qquad \begin{aligned}&\sum_{|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}p(D^\alpha u)=f \qquad f\in Z_0\\ &\left.\frac{\partial^{i_r}u_r}{\partial n^{i_r}}\right|_\Gamma=g_r \qquad g_r\in W^{m-1-i_r,0}L_M(\Gamma_1) \qquad r=1,\dots,k\leqslant m\end{aligned}$$

$i_1,\dots,i_r$ interi compresi tra 0 ed $m-1$. Sia Γ dotata della $C^{m,1}$-regolarità uniforme, il bordo di Γ_1 sia una «superficie» su Γ di classe $C^{m-1,1}$ uniforme [localmente lipschitziana se $g_r=0$, $r=1,\dots,k$] e $w=Rg$, R operatore di rilevamento considerato nel corollario 1.4. *Se M oppure $\bar{M}$ verificano la Δ_2-condizione globale* [Δ_2 condizione se Γ è limitata] *e* $g_r\in\mathcal{S}\big(W^{m-1-i_r,0}E_M(\Gamma_1);1/\|R\|\big)$ il problema (2.16') *ha almeno una soluzione*, la soluzione è unica se $p(t)$ è strettamente crescente. Analoghi enunciati si hanno per gli altri operatori al bordo considerati nel § 1.

ESEMPIO 2. – Sia

$$Au=\sum_{|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}p_\alpha(D^\alpha u)$$

con p_α monotone, non decrescenti, dispari, continue, tali che $p_\alpha(\tau)\to+\infty$ per $\tau\to+\infty$. Posto $N_\alpha(t)=\int_0^t p_\alpha(\tau)\,d\tau$ supponiamo che esista una N-funzione M tale che $M\prec N_\alpha\prec M_{m-|\alpha|}$ per $m-q(M)\leqslant|\alpha|\leqslant m$, $M\prec N_\alpha$ per $|\alpha|<m-q(M)$. Se Ω è limitato e la sua frontiera, Γ, è di classe $C^{m,1}$ sono verificate le ipotesi del teorema 2.2, con $C=0$. Se B_Γ è uno degli operatori considerati nel § 1 supponiamo inoltre che M oppure $\bar{M}$ verifichino la Δ_2-condizione e che l'eventuale partizione di Γ sia sufficientemente regolare. Procedendo come nell'esempio precedente si vede che se $w\in W^mL_M(\Omega)$ e $D^\alpha w\in\mathcal{S}(E_M,1)$ per $|\alpha|=m$, fissata $f\in Z_0$ esiste un intorno U di f in Z tale che $\forall h\in U$ ogni eventuale soluzione, u, appartenente a Y di $A(u+tw)=h$,

$t \in [0, 1]$ soddisfa alla limitazione $\|D^\alpha(u+tw)\|_{N_\alpha} < \text{cost}$ e quindi $\|u+tw\|_Y < \text{cost}$ dove abbiamo indicato al solito con $(Y, Y_0; Z, Z_0)$ il sistema complementare generato da $Y = \{u \in W^m L_M(\Omega): B_\Gamma u = 0\}$ in $\left(\prod L_{N_\alpha}, \prod E_{N_\alpha}; \prod L_{\bar N_\alpha}, \prod E_{\bar N_\alpha}\right)$.

Possiamo allora dare condizioni su g, analoghe a quelle viste nell'esempio precedente, che assicurano l'esistenza di una soluzione dei problemi di Dirichlet, « misti » e « intermedi » non omogenei. La soluzione è unica se le p_α sono strettamente crescenti.

Sia che A è un operatore della forma (2.1) verificante le condizioni (2.2), (2.3), (2.4) ed inoltre

(2.17) Esistono: $b_\alpha \in L_{\bar M}(\Omega)$, $b \in L^1(\Omega)$ e $d \in \mathbf{R}^+$ tali che per ogni $x \in \Omega$ e $\xi \in \mathbf{R}^{s_m}$ sia:

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} \big(A_\alpha(x, \xi) - b_\alpha(x)\big)\xi_\alpha \geqslant d \sum_{|\alpha| \leqslant m} M(c\xi_\alpha) + b(x)$$

dove c è la costante che compare nella (2.3).

Ripetendo le considerazioni precedenti si può dimostrare il seguente corollario che permette di dare condizioni sufficienti per l'esistenza di una soluzione di problemi al bordo non omogenei.

COROLLARIO 2.8. – *Sia Ω un aperto di $\mathbf{R}^n$, A un operatore della forma* (2.1) *verificante le condizioni* (2.2), (2.3), (2.4), (2.17), *Y un sottospazio di $W^m L_M(\Omega)$, $\sigma\left(\prod L_M, \prod E_{\bar M}\right)$-chiuso verificante le* (2.5), *$w \in W^m E_M(\Omega)$. Allora per ogni $f \in Z_0$ esiste almeno una soluzione in Y dell'equazione $A(u+w) = f$.*

Se $\bar M$ verifica la Δ_2-condizione globale, oppure Ω è limitato, ha la proprietà di cono, ed M è una qualsiasi N-funzione il teorema vale $\forall w \in W^m L_M(\Omega) \cap \mathcal{S}(E_M; 1/c')$, $c' = \max\{c, 2bs_m d^{-1}\}$, dove b e d sono le costanti che compaiono nelle (2.3) *e* (2.17).

Diamo ora condizioni sufficienti a garantire l'esistenza di soluzioni per problemi al bordo non omogenei nel caso Ω limitato.

Sia A un operatore della forma (2.1) soddisfacente le condizioni (2.2), (2.14), (2.15) e, in luogo della (2.13),

(2.13′) Esistano: due N-funzioni M e P, $P \prec\prec M$, funzioni $a_\alpha \in E_{\bar M}$, due costanti $c_1, c_2 \in \mathbf{R}^+$, tali che $\forall x \in \Omega$ e $\forall \xi \in \mathbf{R}^{s_m}$ sia,

se $|\alpha| = m$

$$|A_\alpha(x, \xi)| \leqslant a_\alpha(x) + c_1 \sum_{|\beta| = m} \bar M^{-1} M(c_2 \xi_\beta) + c_1 \sum_{|\beta| < m} \bar P^{-1} M(c_2 \xi_\beta)$$

se $|\alpha| < m$

$$|A_\alpha(x, \xi)| \leqslant a_\alpha(x) + c_1 \sum_{|\beta| = m} \bar M^{-1} P(c_2 \xi_\beta) + c_1 \sum_{|\beta| < m} \bar M^{-1} M(c_2 \xi_\beta)$$

inoltre supponiamo che:

(2.17') Esistano funzioni $b_\alpha \in E_{\overline{M}}$, $b \in L^1$, una costante $d > 0$, tali che:

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} [A_\alpha(x, \xi) - b_\alpha(x)]\xi_\alpha > d \sum_{|\beta| \leqslant m} M(c_2 \xi_\beta) - b(x)$$

per ogni $x \in \Omega$ e $\xi \in \boldsymbol{R}^{s_m}$ (è sufficiente $b_\alpha \in L_{\overline{M}}$ per $|\alpha| < m$).

COROLLARIO 2.9. – *Siano Ω un aperto limitato dotato della proprietà di cono, A un operatore della forma* (2.1) *verificante le condizioni* (2.2), (2.13'), (2.14), (2.15), (2.17'), *Y un sottospazio di $W^m L_M(\Omega)$, $\sigma(\prod L_{N_\alpha}, \prod E_{N_\alpha})$-chiuso verificante la* (2.12), *$w \in W^m L_M(\Omega)$ tale che $D^\alpha w \in \mathcal{S}(E_M; 1/c)$, $c = \max\{c_1, 2c_1 s_m d\}$ dove c_1 e d sono le costanti che compaiono nelle* (2.13') *e* (2.17'). *Allora per ogni $f \in Z_0$ esiste almeno una soluzione in Y dell'equazione $A(u + w) = f$.*

Per ogni $t \in [0, 1]$ sia $T_{t,w}$ l'applicazione da

$$[0, 1] \times D(T_{t,w}) = [0, 1] \times \{u \in Y : A_\alpha(x, \xi(u + tw)) \in L_{\overline{M}},\ \forall \alpha \in \boldsymbol{N}^n,\ |\alpha| \leqslant m\}$$

in Z, definita da:

$$\langle v, T_{t,w}(u)\rangle = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leqslant m} \{A_\alpha(\xi(u + tw)) - (1 - t) b_\alpha\} D^\alpha v \, dx \qquad \forall v \in Y_0$$

dove b_α sono le funzioni che compaiono nella (2.17').

Dall'osservazione 5 segue che $T_{t,w}$ è un'omotopia sequenzialmente pseudomonotona rispetto ad ogni sottospazio denso in Y_0. Vediamo che fissata ad arbitrio $f \in Z_0$ si possono determinare un intorno di f in Z, $U(f)$, ed una costante $k > 0$ tali che $\forall h \in U(f)$, $\forall t \in [0, 1]$ e per ogni soluzione di $\langle v, T_{t,w}(u)\rangle = \langle v, h\rangle$, $\forall v \in Y$, sia $\|u\| \leqslant k$. Come abbiamo osservato precedentemente, se $f \in Z_0$ si può determinare $\tilde{f} = (f_\alpha) \in \prod E_{\overline{M}}$ in modo che $\|\tilde{f}\|_{\prod L_{\overline{M}}} = \|f\|_{Z_0}$ e $\langle v, f\rangle = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leqslant m} D^\alpha v f_\alpha \, dx$, $\forall v \in Y_0$ (e quindi $\forall v \in Y$). Fissato $\lambda \geqslant \max\{1, 1/c_2, 4/d\}$, dove c_2 e d sono le costanti che compaiono nella (2.13') e (2.17), scegliamo $c > 0$ in modo che $\int_\Omega \overline{M}((\lambda^2 + 1) f_\alpha) \, dx < c$, allora un intorno di f in Z si può identificare con un sottoinsieme di

$$U = \left\{h = (h_\alpha) \in \prod L_{\overline{M}} : \int_\Omega M(\lambda^2 h_\alpha) \, dx < c + 1\right\}.$$

Se $u \in Y$ e $T_{t,w}(u) = h$ per qualche $t \in [0, 1]$ si ha:

$$\int_\Omega \sum [A_\alpha(\xi(u + tw)) - (1 - t) b_\alpha] D^\alpha v \, dx = \int_\Omega \sum h_\alpha D^\alpha v \, dx, \qquad \forall v \in Y$$

da cui

$$(2.18)\quad \int_\Omega \sum A_\alpha(\xi(u+tw)) - b_\alpha D^\alpha(u+tw)\,dx = \int_\Omega \sum \{h_\alpha D^\alpha(u+tw) - \\ - th_\alpha D^\alpha w + t[A_\alpha(\xi(u+tw)) - (1-t)b_\alpha]D^\alpha w + tb_\alpha D^\alpha(u+tw)\}\,dx\,.$$

Per la (2.17′) il primo membro è maggiore di:

$$d\int_\Omega \sum M(c_2 D^\alpha(u+tw))\,dx - k_1$$

e per la (2.13′), applicando la disuguaglianza di Young, si ottiene che il secondo membro della (2.18) è maggiorato da

$$\text{cost} + \int_\Omega \sum \{2/3\lambda M(c_2 D^\beta(u+tw)) + 2/\lambda M(D^\beta(u+tw)/\lambda)\}\,dx\,,$$

la costante include anche gli integrali di $M(c_2 D^\beta w)$ e $M(2c_2/dD^\beta w)$. Per la scelta di λ, ne segue che $\|u+tw\| \leqslant \text{cost}$. Inoltre, per la (2.17′), $T_{0,0}$ è monotona all'esterno di qualche sfera di Y, sono perciò soddisfatte tutte le ipotesi del teorema 2.7′ (in questo caso è $A' = A - \sum(-1)^{|\alpha|}D^\alpha b_\alpha$).

Utilizzando le proposizioni enunciate nel § 1 ed il teorema 2.7 di [21] otteniamo, ad esempio: se l'operatore A soddisfa le ipotesi del teorema precedente il problema al bordo di Dirichlet:

$$\begin{aligned} &A(\varphi) = f\ , && f \in W^{-m}E_M(\Omega) \\ &\left.\frac{\partial^r \varphi}{\partial n^r}\right|_\Gamma = g_r\,, && g_r \in W^{m-1-r,0}E_M(\Gamma) \end{aligned}$$

ha almeno una soluzione.

Se M oppure $\overline{M}$ verifica la Δ_2-condizione, S è una « superficie » di classe $C^{m-1,1}$ che divide Γ in due sottoinsiemi Γ_1, Γ_2, il problema al bordo:

$$\begin{aligned} &A(\varphi) = f\quad , && f \in Z_0 \\ &\left.\frac{\partial^{i_{r,e}} \varphi}{\partial n^{i_{r,e}}}\right|_\Gamma = g_{r,e}\,, && e = 1, 2,\ g_{r,e} \in W^{m-1-r_{r,e},0}E_M(\Gamma_e), \end{aligned}$$

$i_{r,e}$ compresi tra 0 ed $m-1$, $\chi_{\Gamma_1} g_{r,1} + \chi_{\Gamma_2} g_{s,2} \in W^{m-1-i_{r,1},0}E_M(\Gamma)$ se $i_{r,1} = i_{s,2}$, dove χ_{Γ_e} è la funzione caratteristica di Γ_e, ammette almeno una soluzione. Analoghi enunciati si ottengono chiaramente per gli altri operatori B_Γ precedentemente considerati. Osserviamo che se si studiano problemi omogenei, basta che la superficie S sia localmente lipschitziana, inoltre nella (2.17′) la costante c_2 può essere sostituita con una qualsiasi costante positiva.

Se Ω ha l'uniforme proprietà di cono oppure è limitato ed ha la proprietà di cono si possono indebolire le condizioni (2.17) e (2.17′) utilizzando le seguenti disuguaglianze: valide per ogni intero j tale che $0 \leqslant j < m$, $\forall \lambda > 0$ e $\forall u \in W^m L_M(\Omega)$:

$$\sum_{|\alpha|=j} \int_\Omega M(\lambda D^\alpha u(x))\, dx \leqslant \int_\Omega \Big\{ \sum_{|\beta|=m} M(\lambda K D^\beta u(x)) + M(\lambda K u(x)) \Big\} dx \tag{2.19}$$

$$\sum_{|\alpha|=j} \|D^\alpha u\|_{M,\Omega} \leqslant K \sum_{|\beta|=m} \|D^\beta u\|_{M,\Omega} + K \|u\|_{M,\Omega}, \tag{2.20}$$

con $K = K(m, \Omega)$, dimostrate in [22].

Nel caso Ω illimitato supponiamo che i coefficienti A_α verifichino le condizioni (2.2), (2.4) ed inoltre:

(2.21) Esistano: una N-funzione M, $a \in E_{\overline{M}}(\Omega)$, $b, c \in \boldsymbol{R}^+$ tali che per ogni $x \in \Omega$, $\xi \in \boldsymbol{R}^{s_m}$ ed $\alpha \in \boldsymbol{N}^n$, $|\alpha| \leqslant m$

$$|A_\alpha(x, \xi)| \leqslant a(x) + b \sum_{|\beta|=m} \overline{M}^{-1} M(c\xi_\beta) + b \overline{M}^{-1} M(c\xi_0) .$$

(2.22) Esistano: $b_\alpha \in E_{\overline{M}}(\Omega)$, $b \in L^1(\Omega)$, $d \in \boldsymbol{R}^+$ tali che per ogni $x \in \Omega$ e $\xi \in \boldsymbol{R}^{s_m}$ sia

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} [A_\alpha(x, \xi) - b_\alpha(x)]\xi_\alpha \geqslant d \Big\{ \sum_{|\alpha|=m} M(c\xi_\alpha) + M(c\xi_0) \Big\} + b(x)$$

dove c è la costante che compare nella (2.21).

COROLLARIO 2.10. – *Siano Ω un aperto dotato dell'uniforme proprietà di cono, A un operatore della forma* (2.1) *verificante le condizioni* (2.2), (2.4), (2.21), (2.22), *Y un sottospazio di $W^m L_M(\Omega)$, $\sigma(\prod L_M, \prod E_{\overline{M}})$-chiuso verificante la* (2.5), *$w \in W^m E_M(\Omega)$. Allora per ogni $f \in Z_0$, esiste in Y almeno una soluzione dell'equazione $A(u + w) = f$. Se M verifica la Δ_2-condizione globale il risultato continua a valere per ogni $w \in W^m L_M(\Omega) \cap \prod \mathcal{T}(E_M; 1/c_1)$, $c_1 = \max(c, 3s_m b/d)$, dove c e d sono le costanti che compaiono nella* (2.22).

Mediante questo corollario si possono dare, ad esempio, condizioni sufficienti per l'esistenza di una soluzione di un problema al bordo non omogeneo, ammissibile, per l'operatore:

$$Au = (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha p(D^\alpha u) + p(u)$$

con $p: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ continua, dispari, monotona non decrescente, tale che $p(t) \to +\infty$ per $t \to +\infty$. In questo caso non è chiaramente verificata la condizione (2.17) del corollario 2.8.

DIMOSTRAZIONE. – Procedendo come nella dimostrazione del corollario precedente ed utilizzando la (2.19) si vede che $\forall f \in Z_0$ esiste un intorno $U(f)$ in Z tale che se u è soluzione di $A(u+tw)=h$ per qualche $h\in U(f)$ e per qualche $t\in[0,1]$ allora

$$\|u+tw\|_M+\sum_{|\alpha|=m}\|D^\alpha(u+tw)\|_M\leqslant \text{cost}\,.$$

Per la (2.20) ne segue che $\|u+tw\|_Y\leqslant$ cost e, per il teorema 2.6, si ottiene la tesi.

Nel caso Ω limitato, dotato della proprietà di cono, si possono indebolire le ipotesi (2.4) e (2.21): supponiamo in questo caso che A sia un operatore della forma (2.1) verificante le condizioni (2.2), (2.14), (2.15), (2.22) ed inoltre:

(2.23) Esistano: $a_\alpha\in E_{\bar M}(\Omega)$, $c_1, c_2\in \boldsymbol{R}^+$, una N-funzione $P\prec\prec M$ tali che per ogni $x\in\Omega$, $\xi\in\boldsymbol{R}^{s_m}$ sia:

per $|\alpha|=m$

$$|A_\alpha(x,\xi)|\leqslant a_\alpha(x)+c_1\sum_{|\beta|=m}\bar M^{-1}M(c\xi_\beta)+c_1\sum_{|\beta|<m}\bar M^{-1}P(c_2\xi_\beta)+c_1\bar M^{-1}M(c\xi_0)$$

per $|\alpha|<m$

$$|A_\alpha(x,\xi)|\leqslant a_\alpha(x)+c_1\sum_{|\beta|\leqslant m}\bar M^{-1}P(c_2\xi_\beta)+c_1\bar M^{-1}M(c\xi_0)$$

dove c ed M sono la costante e la N-funzione che compaiono nella (2.22).

COROLLARIO 2.11. – *Siano Ω un aperto di $\boldsymbol{R}^n$ limitato e dotato della proprietà di cono, A un operatore della forma* (2.1) *verificante le condizioni* (2.2), (2.14), (2.15), (2.22), (2.23), *Y un sottospazio di $W^mL_M(\Omega)$, $\sigma(\prod L_M, \prod E_{\bar M})$-chiuso e verificante la* (2.5), *$w\in W^mL_M(\Omega)$ tale che $D^\alpha w\in \mathcal{S}(E_M; 1/c_3)$*, per $|\alpha|=m$, $c_3=\max\{c, 6c_1s_m/d\}$. *Allora per ogni $f\in Z_0$ esiste in Y almeno una soluzione dell'equazione $A(u+w)=f$.* (c, c_1, d sono le costanti che compaiono nelle (2.22) e (2.23)).

La dimostrazione è analoga a quella dei corollari precedenti.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. A. ADAMS, *Sobolev spaces*, Academic Press, 1975.

[2] F. E. BROWDER, *Non linear elliptic boundary value problems*, Bull. Amer. Math. Soc., **69** (1963), pp. 862-874.

[3] F. E. BROWDER, *Existence theorems for non linear partial differential equations*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. **16**, Amer. Math. Soc. Providence, R.I. (1970), pp. 1-60.

[4] F. E. BROWDER, *Nonlinear elliptic boundary value problems and the generalized topological degree*, Bull. Amer. Math. Soc., **76** (1970), pp. 999-1005.

[5] F. E. BROWDER, *Existence theory for boundary value problems for quasilinear elliptic systems with strongly non linear lower order terms*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. **23**, Amer. Math. Soc. Providence, R.I. (1973), pp. 269-286.

[6] F. E. BROWDER - P. HESS, *Non linear mappings of monotone type in Banach spaces*, J. Functional Analysis, **11** (1972), pp. 251-294.

[7] T. DONALDSON, *Non linear elliptic boundary value problems in Orlicz-Sobolev spaces*, J. Differential Equations, **10** (1971), pp. 507-528.

[8] T. DONALDSON - N. S. TRUDINGER, *Orlicz-Sobolev spaces and imbedding theorems*, J. Functional Analysis, **8** (1971), pp. 52-75.

[9] A. FOUGÈRES, *Opérateurs elliptiques du calcul des variations à coefficients très fortement non linéaires*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B-**274** (1972), pp. A763-A766.

[10] G. P. GOSSEZ, *Boundary value problems for quasilinear elliptic equations with rapidly increasing coefficients*, Bull. Amer. Math. Soc., **78** (1972), pp. 753-758.

[11] G. P. GOSSEZ, *Nonlinear elliptic boundary value problems for equations with rapidly (or slowly) increasing coefficients*, Trans. Amer. Math. Soc., **190** (1974), pp. 163-205.

[12] G. P. GOSSEZ, *Surjectivity results for pseudo-monotone mappings in complementary systems*, J. Math. Anal. Appl., **53** (1976), pp. 484-494.

[13] G. P. GOSSEZ, *A remark on strongly nonlinear elliptic boundary value problems*, Bull. Soc. Brasil. Mat. (in corso di stampa).

[14] G. P. GOSSEZ - P. HESS, *Sur certains problèmes aux limites elliptiques fortement non linéaires*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B **278** (1974), pp. A343-A345.

[15] P. HESS, *A strongly non linear elliptic boundary value problems*, J. Math. Anal. Appl., **43** (1973), pp. 241-249.

[16] M. A. KRASNOSEL'SKIĬ - Ya. B. RUTICKIĬ, *Convex functions and Orlicz spaces*, Noordhoff, Groningen, 1961.

[17] A. KUFNER - O. JOHN - S. FUČIK, *Function spaces*, Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1977.

[18] M. T. LACROIX, *Étude des conditions au bord pur des problèmes elliptiques fortement non linéaires*, Annali Mat. Pura Appl., Serie IV, **109** (1976), pp. 203-220.

[19] J. LERAY - J. L. LIONS, *Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéaires par la méthode de Minty-Browder*, Bull. Soc. Math. France, **93** (1965), pp. 97-107.

[20] G. PALMIERI, *Alcuni contributi alla teoria degli spazi di Orlicz-Sobolev*, Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli, Serie IV, **45** (1978), pp. 367-381.

[21] G. PALMIERI, *Sulle tracce di funzioni di una classe di spazi di Orlicz-Sobolev con peso* (in corso di stampa su Boll. Un. Mat. Ital.).

[22] G. PALMIERI, *Alcune disuguaglianze per derivate intermedie negli spazi di Orlicz-Sobolev*, Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli, Serie IV, **46** (1979), pp. 633-652.

[23] M. I. VISIK, *Boundary-value problems for quasilinear strongly elliptic systems in divergence form*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **138** (1961), pp. 518-521.

[24] M. I. VISIK, *Quasilinear strongly elliptic systems of differential equations in divergence form*, Trans. Moscow Math. Soc. (1963), pp. 140-208.

[25] M. I. VISIK, *Solvability of the first boundary value problem for quasilinear equations with rapidily increasing coefficients in Orlicz classes*, Soviet Math. Dokl., **4**, no. 4 (1963), pp. 1060-1064.