Courbure de Ricci et géométrie conforme (*) (**).

CLAUDIO BUZZANCA

Alla memoria della mia adorata madre

Résumé. – *On connaît l'intérêt porté sur les liaisons entre courbure de Ricci et géométrie conforme d'une variété riemannienne. Ici on étudie une fonctionnelle attachée aux déformations conformes du tenseur d'Einstein d'une variété riemannienne compacte* (M, g) *de dimension* $n > 2$, *en obtenant certains résultats globaux concernant la géométrie et la topologie de* (M, g), *en particulier une condition pour que* (M, g) *soit isométrique à une sphère euclidienne. On étudie, ensuite, la courbure de Ricci du fibré tangent en cercles* T_cV *d'une variété riemannienne* (V, g) *de dimension 2, fibré muni de la métrique* g^S *de Sasaki, en obtenant, d'une part, des resultats, soit locaux soit globaux, sur la géométrie conforme de* (T_cV, g^S) *et, d'autre part, des conditions d'isométrie, soit de* (V, g) *soit de* (T_cV, g^S), *à certaines variétés standard. Certains des résultats de ce travail ont été annoncés dans une note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris.*

Introduction.

Dans la partie I de ce travail on trouve certaines liaisons entre la courbure de Ricci et les déformations conformes $g_f \equiv e^{(n/2)f} g$ $(f \in C^\infty_{\mathbb{R}}(M))$ d'une variété riemannienne (M, g) compacte, orientable, C^∞, de dimension $n > 2$: soit S_f le tenseur d'Einstein relatif à la métrique g_f (Cf. I, § 1); on étudie la fonctionnelle F: $C^\infty_{\mathbb{R}}(M) \to \mathbb{R}$, définie, en terme de produit scalaire global, par $F(f) = \langle |S_f|_f^2, e^{nf} \rangle$, où $|\cdot|_f$ est la norme locale associée à g_f. *Ceci permet de trouver un système en f d'équations intégrales caractérisant les métriques g_f qui sont d'Einstein* (théorème 1).

On analyse ensuite les points critiques de F en liaison avec les propriétés géométriques et topologiques de M. Si $\dim M = 4$, on trouve que *la métrique $g_\varphi = e^{2\varphi} g$ $(\varphi \in C^\infty_{\mathbb{R}}(M))$ est à courbure scalaire constante si et seulement si φ est un point critique de F* (théorème 2). D'autres propriétés intéressantes de F, ici prouvées, sont les suivantes (théorème 3): considérons 1 comme élément de $C^\infty_{\mathbb{R}}(M)$; on a:

1) *pour que la courbure scalaire R de g soit constante il faut et il suffit que* $d_1 F \equiv 0$, où d_1 est la différentielle de Fréchet au point 1;

(*) Entrata in Redazione il 4 ottobre 1983.

(**) Travail exécuté d'après le programme du « Gruppo Nazionale per le strutture algebriche e geometriche e loro Applicazioni, C.N.R. Italia ».

Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Via Archirafi 34 - 90123 Palermo, Italia.

2) *si*

$$\langle n, \ \mathrm{Ric}\,(dh, dh)\rangle \geqslant \langle R, \Delta_1 h\rangle\,, \qquad \forall h \in C^\infty_{\mathbb{R}}(M)\,,$$

alors 1 *est un point critique dégénéré de* F *si et seulement si* (M, g) *est isométrique à la sphère euclidienne* $\big(S^n(\sqrt{n(n-1)/R}), \mathit{can}\big)$ *de rayon* $\sqrt{n(n-1)/R}$.

Soit $T_c V$ le fibré tangent en cercles de rayon c d'une surface (V, g), fibré muni de la métrique de Sasaki. Dans la partie II de ce travail on trouve certaines liaisons entre l'opérateur de Ricci sur $\Lambda^1(T_c V)$ (Cf. II, § 2) et les propriétés géométriques et topologiques de la surface, en particulier sa géométrie conforme, liaisons qu'on expose en détails dans l'introduction à cette deuxième partie.

I. - UNE FONCTIONNELLE ATTACHÉE AUX DÉFORMATIONS CONFORMES DU TENSEUR D'EINSTEIN

1. – Notations et préliminaires.

Nous notons: (M, g) une variété riemannienne compacte, C^∞, connexe, orientable, de dimension $n > 2$; $R_{\lambda\alpha\mu\beta}$, $R_{\lambda\mu} \equiv R_{\lambda\alpha\mu\cdot}^{\ \ \ \ \alpha}$, $R \equiv g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$, respectivement, les composantes covariantes du tenseur de courbure $\mathfrak{R}$, celles du tenseur de Ricci « Ric » et la courbure scalaire de (M, g); $S = \mathrm{Ric} - (R/n)g$.

Les symboles $(|)$ et $|\ |$ désignent, respectivement, le produit scalaire local et la norme associée définis par g, en chaque espace tangent de M, sur les tenseurs de même ordre; si T, Z sont deux tenseurs sur $T_m M$ d'ordre r, on a donc $(T|Z) = T_{\alpha_1 \ldots \alpha_r} \cdot Z^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}$.

Nous notons η, $\langle , \rangle \equiv \int_M (|)\eta$ et $\|\cdot\|$, respectivement, l'élément de volume riemannien, le produit scalaire global et la norme L^2 associée, relatifs à g. Pour tout $f \in C^\infty_{\mathbb{R}}(M)$, l'on désigne par: g_f la métrique riemannienne, conforme à g, définie par $g_f = e^{(n/2)f} g$; $\Delta_1 f$ la fonction $|df|^2 \equiv g^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha f\,\partial_\beta f$. Nous notons avec un indice f les différents tenseurs de courbure relatifs à la métrique g_f.

Les énoncés suivants résultent de théorèmes connus:

THÉORÈME I [5]. – *Soit* (M, g) *une variété d'Einstein compacte,* C^∞, *de dimension* $n \geqslant 2$. *Si* λ_1 *est la plus petite valeur propre du laplacien sur* $C^\infty_{\mathbb{R}}(M)$, *alors*

$$\lambda_1 \geqslant \frac{R}{n-1}\,.$$

THÉORÈME II [2]. – *Soit* (M, g) *une variété riemannienne compacte* C^∞, *à courbure scalaire constante, de dimension* $n \geqslant 2$. *Soit* $T(h)$ *le tenseur sur* M *défini par*

$$T(h) = \nabla\, dh + \frac{\Delta h}{n}\, g\,, \qquad (h \in C^\infty_{\mathbb{R}}(M))\,.$$

S'il existe h non constante annulant T, alors (M, g) est isométrique à la sphère euclidienne de rayon $\sqrt{n(n-1)/R}$.

THÉORÈME III [1]. – *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, orientable. Si* $\dim M = 4$, *alors*

$$\|\mathfrak{R}\|^2 = 4\|\mathrm{Ric}\|^2 - \|R\|^2 + 8\pi^2\chi(M) \tag{1}$$

où $\chi(M)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de M.

§ 2. – LEMME 1. – *Pour tout $f \in C^\infty_{\mathbf{R}}(M)$, on a*

$$\langle |S_f|^2_f, e^{nf}\rangle = F(f)$$

où $F\colon C^\infty_{\mathbf{R}}(M) \to \mathbf{R}$ est la fonctionnelle définie par

$$\begin{aligned} F(f) = {} & 2^{-8}n(n-2)^2[n^2(n-1)\|\Delta_1 f\|^2 - 4n(n+2)\langle f, \Delta_1 f\rangle + 2^4(n-1)\|\Delta f\|^2] - \\ & - 2^4(n-2)[\langle n^2(n-4), \mathrm{Ric}\,(df, df)\rangle + \langle 2R, n\,\Delta_1 f - 2(n-2)\,\Delta f\rangle] + \|S\|^2 . \end{aligned} \tag{2}$$

PREUVE. – Soit $f' = (n/4)f$. On a (cf. [4])

$$\overset{f}{R}_{\lambda\alpha\mu\beta} = e^{2f'}(R_{\lambda\alpha\mu\beta} + g_{\alpha\mu}\tilde{f}_{\lambda\beta} - g_{\lambda\mu}\tilde{f}_{\alpha\beta} + g_{\lambda\beta}\tilde{f}_{\alpha\mu} - g_{\alpha\beta}\tilde{f}_{\lambda\mu})$$

où

$$\tilde{f}_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha\,\partial_\beta f' - \partial_\alpha f'\,\partial_\beta f' + \tfrac{1}{2}\,\Delta_1 f'\cdot g_{\alpha\beta} .$$

On obtient

$$\mathrm{Ric}_f = \mathrm{Ric} - (n-2)\tilde{f} + \left(\Delta f' - \frac{n-2}{2}\,\Delta_1 f'\right)\cdot g \tag{3}$$

et, par suite,

$$R_f \equiv g_f^{\alpha\beta}\overset{f}{R}_{\alpha\beta} = e^{-2f'}\{R + (n-1)[2\Delta f' - (n-2)\,\Delta_1 f']\} \tag{4}$$

et

$$\begin{aligned} |\mathrm{Ric}_f|^2_f = e^{-4f'}\Big[& |\mathrm{Ric}|^2 + (n-2)^2|\tilde{f}|^2 + \\ & + (3n-4)\left(\Delta f' - \frac{n-2}{2}\,\Delta_1 f'\right)^2 + 2R\left(\Delta f' - \frac{n-2}{2}\,\Delta_1 f'\right) - 2(n-2)(\mathrm{Ric}\,|\tilde{f})\Big] . \end{aligned}$$

Puisque

$$|S_f|_f^2 \equiv \overset{f}{S}_{\lambda\mu}\overset{f}{S}{}^{\lambda\mu} = |\mathrm{Ric}_f|_f^2 - (R_f)^2/n\,,$$

on obtient

$$|S_f|_f^2 e^{4f'} = |S|^2 + (n-2)|\tilde{f}|^2 - 2(n-2)(\mathrm{Ric}\,|\tilde{f}) - \\ - \frac{(n-2)^2}{4n}[2\Delta f' - (n-2)\,\Delta_1 f']^2 - \frac{(n-2)R}{n}[2\Delta f' - (n-2)\,\Delta_1 f']\,. \tag{5}$$

En appliquant la formule de Stokes, on voit aisément que

$$\|\tilde{f}\|^2 = \|\nabla df'\|^2 + \frac{n}{4}\|\Delta_1 f'\|^2 - 2\langle \Delta f', \Delta_1 f'\rangle\,. \tag{6}$$

En appliquant la même formule et la formule

$$\nabla^\lambda R_{\lambda\mu} = \tfrac{1}{2}\,\partial_\mu R\,,$$

on voit aussi que

$$\langle \mathrm{Ric}, \tilde{f}\rangle = \tfrac{1}{2}\langle R, \Delta_1 f' - \Delta f'\rangle - \langle 1, \mathrm{Ric}\,(df', df')\rangle\,, \tag{7}$$

Substituons $(n/4)f$ à f'. Compte tenu des formules (6) et (7), on aboutit, par intégration des deux membres de (5), à la formule (2).

REMARQUE. – D'après la définition de F, on a

1) $F(f) \geqslant 0$ *pour tout* $f \in C^\infty_{\mathbf{R}}(M)$;

2) $F(f) = 0$ *si et seulement si la métrique* $g_f = e^{(n/2)f}g$ *est d'Einstein.*

Etant donné $f \in C^\infty_{\mathbf{R}}(M)$, l'application

$$t \mapsto F(tf)\,, \qquad (t \in \mathbf{R})$$

est une fonction polynomiale de 4ème degré:

$$F(tf) = \sum_{i=0}^{4} a_i t^{4-i}\,,$$

où

$$a_0 = 2^{-8}n^3(n-1)(n-2)^2\|\Delta_1 f\|^2\,,$$

$$a_1 = -2^{-6}n^2(n-2)^2(n+2)\langle \Delta f, \Delta_1 f\rangle\,,$$

$$a_2 = 2^{-4}n(n-2)[(n-1)(n-2)\|\Delta f\|^2 - \langle n(n-4), \mathrm{Ric}\,(df, df)\rangle - 2\langle R, \Delta_1 f\rangle],$$
$$a_3 = 2^{-2}(n-2)^2\langle R, \Delta f\rangle\,,$$
$$a_4 = \|S\|^2\,.$$

Le lemme 1 fournit une autre démonstration du théorème I, de Lichnerowicz, déjà cité:

COROLLAIRE. – *Soit g d'Einstein. Si λ_1 est la plus petite valeur propre du laplacien Δ sur $C^\infty_{\mathbb{R}}(M)$, alors*

(8) $$\lambda_1 \geqslant \frac{R}{n-1}\,.$$

PREUVE. – Soit $f \in C^\infty_{\mathbb{R}}(M)$. On a, par hypothèse, $S \equiv 0$ et, par suite, $R \equiv$ Cte. Par conséquent, $a_4 = a_3 = 0$.

Puisque $F(tf) \geqslant 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ et que $\mathrm{Ric}\,(df, df) = (R/n)\,\Delta_1 f$ parce que $S \equiv 0$, il s'en suit que

$$a_2 = 2^{-4}n(n-2)^2[(n-1)\|\Delta f\|^2 - \langle R, \Delta_1 f\rangle] \geqslant 0\,.$$

Par suite,

(9) $$\|\Delta f\|^2 \geqslant \frac{R}{n-1}\langle 1, \Delta_1 f\rangle = \frac{R}{n-1}\langle f, \Delta f\rangle\,.$$

Si $\Delta f = \lambda f$, avec $\lambda \equiv$ Cte et $f \not\equiv 0$, les relations (9) entraînent l'inégalité

$$\lambda_1 \geqslant \frac{R}{n-1}\,.$$

THÉORÈME 1. – *La métrique $g_f = e^{(n/2)f}g$ est d'Einstein si et seulement si f vérifie les équations suivantes:*

(10) $$n(n-2)[n(n-1)\|\Delta_1 f\|^2 - 2(n+2)\langle \Delta f, \Delta_1 f\rangle] + {} + 2^4[\langle n, \mathrm{Ric}\,(df, df)\rangle - \langle R, \Delta_1 f\rangle] = 0\,,$$

(11) $$(n-2)(n-1)[n^2\|\Delta_1 f\|^2 - 2^4\|\Delta f\|^2] + \langle 2^4 n^2, \mathrm{Ric}\,(df, df)\rangle - \langle 2^5 R, \Delta_1 f\rangle + {} + \frac{2^8}{n(n-2)}\|S\| = 0\,,$$

(12) $$2(n-2)\langle R, \Delta f\rangle + \langle n^2, \mathrm{Ric}\,(df, df)\rangle - \langle nR, \Delta_1 f\rangle + \frac{2^4}{n-2}\|S\|^2 = 0\,.$$

PREUVE. – La suffisance du théorème est évidente: en fait, si f vérifie le système d'équations (10), (11) et (12), alors le 1er membre de l'égalité (2), i.e. $F(f)$, est nul.

Inversement, supposons g_f d'Einstein. En utilisant les formules (3) et (4), on obtient

$$\{g_f \text{ est d'Einstein}\} \Leftrightarrow S_f \equiv 0 \Rightarrow S_f(df', df') \equiv 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ric}(df', df') - \frac{R}{n}\Delta_1 f' + \\ + \frac{(n-2)(n-1)}{n}(\Delta_1 f')^2 - \frac{n-2}{2}(df'|d(\Delta_1 f')) - \frac{n-2}{n}\Delta f \cdot \Delta_1 f' \equiv 0$$

d'où, après substitutions de $(n/4)f$ à f' et intégration, l'équation (10). Cette équation équivaut à

$$(10') \qquad 2a_0 + a_1 + 2^{-3}n(n-2)[\langle n, \operatorname{Ric}(df, df)\rangle - \langle R, \Delta_1 f\rangle] = 0\,.$$

L'équation (11) equivaut à

$$(11') \qquad a_0 + a_4 - a_2 + 2^{-2}n(n-2)[\langle n, \operatorname{Ric}(df, df)\rangle - \langle R, \Delta_1 f\rangle] = 0\,.$$

L'équation (12) équivaut à

$$(12') \qquad a_3 + 2a_4 + 2^{-3}n(n-2)[\langle n, \operatorname{Ric}(df, df)\rangle - \langle R, \Delta_1 f\rangle] = 0\,.$$

Compte tenu de l'équation (10′), les équations (11′) et (12′) s'écrivent, respectivement,

$$(11'') \qquad a_4 - a_2 - 3a_0 - 2a_1 = 0\,,$$

$$(12'') \qquad a_3 + 2a_4 - 2a_0 - a_1 = 0\,.$$

Prouvons donc (11″) et (12″). Puisque $F(f) = 0$, $t = 1$ est un zéro de $F(tf)$. Comme $F(tf) \geqslant 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, on a, nécessairement,

$$F(tf) = a_0(t-1)^2[(t-\alpha)^2 + \beta^2]\,, \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})\,.$$

Par conséquent,

$$a_2 = 3a_0 - 2a_1 + a_4; \qquad a_3 = 2a_0 + a_1 - 2a_4\,,$$

d'où (11″) et (12″) et, par suite, (11) et (12).

§ **3.** – Les notions de différentiation au sens de Fréchet et au sens de Gateaux sont bien connues (cf. [6]).

Si E, V sont deux espaces vectoriels normés, alors, si une application $\Phi\colon U \to V$ (U = ouvert de E) est différentiable au sens de Fréchet en $m \in U$, elle l'est aussi, en ce point, au sens de Gateaux et les deux différentielles, de Fréchet $d_m\Phi$ et de Gateaux, sont égales; on a donc

$$d_m\Phi(h) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{R}^*}} \frac{\Phi(m+th)-\Phi(m)}{t}, \qquad \forall h\in E .$$

Considérons maintenant l'espace vectoriel normé $\left(C^\infty_{\mathbb{R}}(M),\ \|\cdot\|\right)$, où $\|\cdot\|$ est la norme L^2.

On voit que la fonctionnelle $F\colon C^\infty_{\mathbb{R}}(M)\to\mathbb{R}$ est partout différentiable au sens de Fréchet. Par conséquent,

$$d_fF(h) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{R}^*}} \frac{F(f+th)-F(f)}{t}, \qquad \forall f,\ h\in C^\infty_{\mathbb{R}}(M) . \tag{13}$$

Calculons cette limite. On trouve que

$$\begin{aligned} F(f+th)-F(f) &= 2^{-6}n(n-2)^2t\{n^2(n-1)\langle\Delta_1 f\cdot df, dh\rangle - \\ &\quad - n(n+2)[2\langle\Delta f\cdot df, dh\rangle + \langle\Delta_1 f, \Delta h\rangle] + 2^3(n-1)\langle\Delta f, \Delta h\rangle\} + \\ &\quad + 2^{-3}(n-2)t[\langle 2R, (n-2)\,\Delta h - n(df|dh)\rangle - \langle n^2(n-4), \operatorname{Ric}(df, dh)\rangle] + O(t) , \end{aligned}$$

où

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{R}^*}} \frac{O(t)}{t} = 0 .$$

Par conséquent,

LEMME 2. – *La différentielle de Fréchet de F est donnée par*

$$\begin{aligned} d_fF(h) &= 2^{-6}n(n-2)^2\{n^2(n-1)\langle\Delta_1 f\cdot df, dh\rangle - \\ &\quad - n(n+2)[2\langle\Delta f\cdot df, dh\rangle + \langle\Delta_1 f, \Delta h\rangle] + 2^3(n-1)\langle\Delta f, \Delta h\rangle\} + \\ &\quad + 2^{-3}(n-2)[\langle 2R, (n-2)\,\Delta h - n(df|dh)\rangle - \langle n^2(n-4), \operatorname{Ric}(df, dh)\rangle] . \end{aligned} \tag{14}$$

Si $f\in C^\infty_{\mathbb{R}}(M)$, soit $\mathcal{R}_f$ le tenseur de courbure de (M, g_f).

THÉORÈME 2. – *Si* $\dim M = 4$, *les conditions suivantes sont équivalentes:*

1) *la métrique* $g_\varphi = e^{2\varphi}g$ $\left(\varphi\in C^\infty_{\mathbb{R}}(M)\right)$ *est à courbure scalaire constante;*

2) φ *est un point critique de*

$$\begin{aligned} C^\infty_{\mathbb{R}}(M) &\xrightarrow{\ F\ } \mathbb{R} \\ f\ &\longmapsto \|S_f\|_f^2 . \end{aligned}$$

3) *φ est un point critique de*

$$\begin{array}{ccc} C^\infty_{\mathbb{R}}(M) & \xrightarrow{G} & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \|\mathcal{R}_f\|_f^2 . \end{array}$$

PREUVE. – Pour $n = 4$, les formules (4) et (14) montrent que la différentielle dR_f et la différentielle de Fréchet $d_f F$ sont données, respectivement, par

$$dR_f = e^{-2f}\{d[R + 6(\Delta f - \Delta_1 f)] + 2[6(\Delta_1 f - \Delta f) - R]\, df\}\,, \tag{15}$$

$$d_f F(h) = \langle R + 6(\Delta f - \Delta_1 f),\, \Delta h\rangle + 2\langle [6(\Delta_1 f - \Delta f) - R]\, df,\, dh\rangle\,. \tag{16}$$

Il s'en suit que $d_f F(h) = \langle e^{2f}\cdot dR_f,\, dh\rangle$.

Par conséquent, $R_f \equiv$ Cte entraîne $d_f F \equiv 0$. Réciproquement, si $d_f F \equiv 0$, alors $d_f F(R_f) = 0$ et, par suite, $R_f \equiv$ Cte. On a donc 1) $\Leftrightarrow$ 2).

D'après la formule (1), d'Avez, on a

$$G(f) = 4F(f) + 8\pi^2\chi(M)$$

par conséquent, les fonctionnelles G et F ont les mêmes points critiques. Il en résulte que 2) $\Leftrightarrow$ 3).

§ **4.** – Avec la même méthode utilisée pour calculer dF, on trouve

LEMME 3. – *La différentielle seconde de F est donnée par*

$$\begin{aligned} d_f^2 F(h, h') = {} & 2^{-6}(n-2)^2\{n^3(n-1)[\langle \Delta_1 f\cdot dh,\, dh'\rangle + 2\langle (df|dh),\, (df|dh')\rangle] - \\ & - 2n^2(n+2)[\langle \Delta f\cdot dh,\, dh'\rangle + \langle \Delta h\cdot df,\, dh'\rangle + \langle \Delta h'\cdot df,\, dh\rangle] + \\ & + 2^3 n(n-1)\langle \Delta h,\, \Delta h'\rangle\} + 2^{-3}n(n-2)[\langle n(4-n),\, \mathrm{Ric}\,(dh, dh')\rangle - \langle 2R\, dh,\, dh'\rangle]\,. \end{aligned} \tag{17}$$

COROLLAIRE. – *Supposons* dim $M = 4$ *et* $R \equiv$ Cte. *Considérons* 1 *comme élément de* $C^\infty_{\mathbb{R}}(M)$. *Soit λ_1 la première valeur propre de Δ sur $C^\infty_{\mathbb{R}}(M)$. Pour que $\lambda_1 \geqslant R/3$ il faut et il suffit que*

$$d_1^2 F(h, h) \geqslant 0\,, \qquad \forall h \in C^\infty_{\mathbb{R}}(M)\,.$$

PREUVE. – D'après les hypothèses faites, la formule (17) entraîne

$$d_1^2 F(h, h) = 2[3\|\Delta h\|^2 - \langle R,\, \Delta_1 h\rangle]\,.$$

Soit $\{\lambda_i\}$ le spectre de Δ et $\{h_i\}$ les fonctions propres correspondantes normées.

Le développement de h en série de Fourier selon les h_i s'écrit

$$h = \sum_{i=1}^{\infty} c_i h_i \,, \qquad c_i \in \mathbb{R} \,.$$

On en déduit

$$d_1^2 F(h, h) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i c_i^2 (3\lambda_i - \mathbb{R}) \,.$$

La conclusion est alors immédiate.

THÉORÈME 3. – *Considérons* 1 *comme élément de* $C_{\mathbb{R}}^{\infty}(M)$. *On a*:

1) *pour que* R *soit constante il faut et il suffit que* $d_1 F \equiv 0$;

2) *si*

$$\langle n, \mathrm{Ric}\,(dh, dh)\rangle \geqslant \langle R, \Delta_1 h\rangle \,, \qquad \forall h \in C_{\mathbb{R}}^{\infty}(M) \tag{18}$$

alors 1 *est un point critique dégénéré de* F *si et seulement si* (M, g) *est isométrique à la sphère euclidienne* $\big(S^n(\sqrt{n(n-1)/R}),\ \mathrm{can}\big)$ *de rayon* $\sqrt{n(n-1)/R}$.

PREUVE. – 1) D'après la formule (14), on a

$$d_1 F(h) = 2^{-4}(n-2)^2 \langle R, \Delta h\rangle \,;$$

par conséquent,

$$R \equiv \mathrm{Cte} \Rightarrow d_1 F \equiv 0$$

et, réciproquement,

$$d_1 F \equiv 0 \Rightarrow d_1 F(R) = 0 \Rightarrow R \equiv \mathrm{Cte} \,.$$

2) D'après la formule (17), on a

$$d_1^2 F(h, h) = 2^{-3} n(n-2)[(n-2)(n-1)\|\Delta h\|^2 + \\ + \langle n(4-n), \mathrm{Ric}\,(dh, dh)\rangle - 2\langle R, \Delta_1 h\rangle] \,; \tag{19}$$

d'après l'inégalité (18), on a alors

$$d_1^2 F(h, h) \geqslant 2^{-3} n(n-2)^2 [(n-1)\|\Delta h\|^2 - \langle n, \mathrm{Ric}\,(dh, dh)\rangle] = 2^{-3} n(n-2)^2 \|T(h)\|^2 \,,$$

où

$$T(h) = \nabla\, dh + \frac{\Delta h}{n}\, g \,.$$

Si 1 est un point critique dégénéré de F, on a, par suite,

i) $R \equiv \mathrm{Cte}$;

ii) $\exists h \in C^\infty_{\mathbb{R}}(M)$, non constante, telle que $T(h) = 0$.

D'après le theorème II, de Bishop et Goldberg, les conditions i) et ii) sont simultanément vérifiées si et seulement si (M, g) est isométrique à $\big(S^n(\sqrt{n(n-1)/R}),\ \mathrm{can.}\big)$

Inversement, si (M, g) est isométrique à $\big(S^n(\sqrt{n(n-1)/R}),\ \mathrm{can}\big)$, alors (M, g) est une variété d'Einstein et, d'autre part, il existe h vérifiant la condition ii). Puisque g est d'Einstein, la formule (19) entraîne

$$d_1^2 F(h, h) = 2^{-3} n(n-2)^2 \|T(h)\|^2 .$$

Il s'en suit que $d_1^2 F(h, h) = 0$.

Par conséquent, 1 est un point critique dégénéré de F.

II. - LE FIBRÉ TANGENT EN CERCLES DES SURFACES ET LA GÉOMÉTRIE CONFORME

Introduction.

Soient: (V, g) une variété riemannienne C^∞, de dimension 2, connexe; $(T_c V, g^s)$ le fibré tangent en cercles de rayon c ($c = \mathrm{Cte} > 0$) de (V, g), muni de la métrique g^s de Sasaki [6]; $C_1(T_c V)$ le sous-espace de $\Lambda^1(T_c V)$ des 1-formes cofermées; Q: $:\Lambda^1(T_c V) \to \Lambda^1(T_c V)$ l'opérateur de Ricci, i.e. l'opérateur linéaire sur $\Lambda^1(T_c V)$ associé, par dualité, au tenseur de Ricci de g^s.

Le théorème 1 affirme qu'*il y a équivalence entre les conditions* 1), 2) *et* 3) *suivantes*:

1) *Q est un endomorphisme de $C_1(T_c V)$;*

2) *$(T_c V, g^v)$ est localement conformément plate;*

3) *(V, g) est à courbure gaussienne $K \equiv 0$ ou bien $K \equiv 1/c^2$.*

Dans la proposition successive, *on prouve que, si (V, g) est compacte et à courbure gaussienne constante, alors le groupe conforme complet de $(T_c V, g^s)$ coïncide avec le groupe complet des isométries.*

Enfin, *on donne*, dans le théorème 2, *des conditions métriques et cohomologiques caractérisant les fibrés $(T_c V, g^s)$ qui sont, respectivement, un tore plat T^3 ou un espace projectif réel $P^3(\mathbb{R})$, à courbure sectionnelle constante* $1/4c^2$.

§ 1. – Notations et préliminaires.

Soit (M, g) une variété riemannienne, de dimension n. Nous notons $(|)$ et $|\ |$, respectivement, le produit scalaire local sur les tenseurs et la norme associée. Si R est la courbure scalaire de (M, g), on désigne par S le tenseur $\mathrm{Ric} - (R/n)g$ et l'on note $C(M)$ et $I(M)$, respectivement, le groupe conforme complet et le groupe complet d'isométries de (M, g).

On a

THÉORÈME A [2]. – *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte telle que R soit constant > 0 et que $|\mathrm{Ric}|$ soit constant. Si $C(M) \neq I(M)$, alors (M, g) est isométrique à une sphère euclidienne.*

Nous notons $\chi^q(M, w)$ l'espace des formes différentielles sur M harmoniques de degré q, $0 \leqslant q \leqslant n$. On sait que si M est compacte et orientable, alors $\chi^q(M, \mathbb{R})$, muni du produit scalaire global, est un espace vectoriel euclidien de dimension finie et que l'ensemble $\chi^q(M, \mathbb{Z})$ des formes $\omega \in \Lambda^q(M)$ harmoniques à périodes entières est un réseau de $\chi^q(M, \mathbb{R})$ (cf. [3]). On sait aussi que si $*: \Lambda^q(M) \to \Lambda^{n-q}(M)$ est l'opérateur de Hodge et si $(\chi^{n-q}(M, \mathbb{Z}))^*$ est le réseau dual de $\chi^{n-q}(M, \mathbb{Z})$, alors [3]:

$$* \left(\chi^q(M, \mathbb{Z})\right) \subset \left(\chi^{n-q}(M, \mathbb{Z})\right)^* ,$$

cette inclusion étant, en général, stricte.

On a

THÉORÈME B [3]. – *La condition*

$$* \left(\chi^q(M, \mathbb{Z})\right) = \left(\chi^{n-q}(M, \mathbb{Z})\right)^* , \qquad (0 \leqslant q \leqslant n)$$

est satisfaite si:

a) M est un tore T^n;

b) M est de dimension 2;

c) M est un espace projectif complexe, ou quaternionien ou bien le plan projectif des octaves de Cayley;

d) $M = S^m \times S^m$, carré de la sphère de dimension m.

Dans la suite (V, g) désigne une variété riemannienne C^∞, de dimension 2, connexe, de dérivation covariante ∇; $T_c V$, $c = \mathrm{Cte} > 0$, désigne le fibré tangent en cercles de rayon c de (V, g). La métrique de Sasaki g^s sur $T_c V$ est definie [6] par

$$d\sigma^2(x, v) = ds^2(x) + g_{ij}(x)\nabla v^i \nabla v^j$$

où

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j\,.$$

Puisqu'il n'y aura pas d'ambiguité, nous notons aussi ∇ la dérivation covariante induite par g^s. Soit $\big(S^2(c), \text{can}\big)$ la sphère euclidienne bidimensionnelle, de rayon c. On a

THÉORÈME C $\big([5]$ *et* $[8]\big)$. – *La variété* $\big(T_c S^2(c), \text{can}^s\big)$ *est isométrique à l'espace projectif réel* $P^3(\mathbb{R})$ *à courbure constante* $1/4c^2$.

Soit ψ le champ géodésique sur $(T_c V, g^s)$, i.e. le générateur infinitésimal du flot géodésique sur $(T_c V, g^s)$. On a

THÉORÈME D [1]. – *Le rotationnel du champ géodésique* ψ *sur* $(T_c V, g^s)$ *vérifie l'équation*

$$\text{rot}\, \psi = -\psi\,.$$

On sait qu'on peut munir V de cartes locales $(U; \varkappa^1, \varkappa^2)$ isothermes, i.e. telles que

$$ds^2 = e^{2A}[(d\varkappa^1)^2 + (d\varkappa^2)^2]\,, \qquad \big(A \in C^\infty(U; \mathbb{R})\big)\,.$$

Dans une telle carte, on a

$$(\text{II}_1) \qquad g_{ij} = e^{2A}\delta_{ij}$$

$$(\text{II}_2) \qquad \gamma^t_{ij} = \partial_i A \delta^t_j + \partial_j A \delta^t_i - \nabla^t A g_{ij}$$

$$(\text{II}_3) \qquad K = -\Delta_2 A \overset{\text{déf.}}{=} \text{div}\cdot\text{grad}\, A = e^{-2A}(\partial^2_{11} A + \partial^2_{22} A)$$

où γ^t_{ij}, K désignent, respectivement, les symboles de Christoffel et la courbure gaussienne de (V, g) et δ le tenseur de Kronecker. Si $\boldsymbol{v} \in T_\varkappa V$, $\varkappa \in V$, et si $g_{ij} v^i v^j = c^2$, on peut poser

$$v^1 = ce^{-A} \cos\theta\,, \qquad v^2 = ce^{-A} \sin\theta$$

et munir, par suite, $T_c V$ de cartes locales (x^1, x^2, θ). Les composantes covariantes $G_{\alpha\beta}$ et contravariantes $G^{\alpha\beta}$ de g^s, les symboles de Christoffel $\Gamma^\alpha_{\beta\varrho}$ et les composantes $R_{\alpha\beta}$ du tenseur Ric de Ricci de $(T_c V, g^s)$ sont donnés par les formules (2), (3), (4) et (5) de [4] qu'on utilisera systématiquement ainsi que la formule

$$R = 2K - \frac{c^2K^2}{2}$$

où R est la courbure scalaire de $(T_c V, g^s)$.

On a, en particulier ([1], [4]),

$$(\mathrm{II}_4) \qquad \begin{cases} G_{11} = e^{2A} + c^2(\partial_2 A)\,, & G_{12} = -c^2\,\partial_1 A\,\partial_2 A\,, \\ G_{13} = -c^2\,\partial_2 A\,, & G_{22} = e^{2A} + c^2(\partial_1 A)^2\,, \\ G_{23} = c^2\,\partial_1 A\,, & G_{33} = c^2\,. \end{cases}$$

Nous notons Q l'operateur de Ricci sur $\Lambda^1(T_c V)$ i.e. endomorphisme de $\Lambda^1(T_c V)$ défini par:

$$(Q\omega)_\alpha = R_\alpha^\beta \omega_\beta\,, \qquad \forall \omega \in \Lambda^1(T_c V)\,.$$

§ 2. – Cherchons les composantes locales, covariantes et contravariantes, de ψ. Si on explicite les conditions

$$\frac{dx^i}{dt} = v^i\,, \qquad \frac{dv^i}{dt} = -\gamma^i_{jk}\,v^j v^k\,, \qquad g_{ij}\,v^i v^j = c\,,$$

on obtient:

$$(\mathrm{II}_5) \qquad \frac{dx^1}{dt} = c\,e^{-A}\cdot\cos\theta\,, \qquad \frac{dx^2}{dt} = c\,e^{-A}\sin\theta\,, \frac{dv^1}{dt} = -\gamma^1_{jk}\,v^j v^k$$

la 3ème des équations (II_5) entraîne:

$$\frac{d\theta}{dt} = c\,e^{-A}(\partial_2 A\cos\theta - \partial_1 A\sin\theta)\,.$$

Il s'en suit que les équations des géodésiques sur $(T_c V, g^s)$ sont:

$$(\mathrm{II}_6) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx^1}{dt} = c\,e^{-A}\cos\theta\,, \qquad \dfrac{dx^2}{dt} = c\,e^{-A}\sin\theta\,, \\ \dfrac{d\theta}{dt} = c\,e^{-A}(\partial_2 A\cos\theta - \partial_1 A\sin\theta)\,. \end{cases}$$

D'après (II_6), les composantes contravariantes de ψ sont

$$(\mathrm{II}_7) \qquad \begin{cases} \psi^1 = c\,e^{-A}\cos\theta\,, \qquad \psi^2 = c\,e^{-A}\sin\theta\,, \\ \psi^3 = c\,e^{-A}(\partial_2 A\cos\theta - \partial_1 A\sin\theta)\,. \end{cases}$$

D'après (II_4) et (II_7), les composantes covariantes de ψ sont

$$(\mathrm{II}_8) \qquad \psi_1 = ce^A \cdot \cos\theta\,, \qquad \psi_2 = ce^A \sin\theta\,, \qquad \psi_3 = 0\,.$$

LEMME 1. – *La 1 – forme $Q\psi$ est cofermée si et seulement si (V, g) est à courbure gaussienne constante.*

PREUVE. – Si $\omega \in A^1(T_c V)$, on a

$$-\delta(Q\omega) = \omega_\beta \nabla^\alpha R^\beta_\alpha + R^{\alpha\beta}\nabla_\alpha \omega_\beta = \omega_\beta \nabla^\beta R/2 + R^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\omega_\beta =$$
$$= (2 - c^2K)\omega_\beta \nabla^\beta K/2 + R^{\alpha\beta}\nabla_\alpha \omega_\beta\,,$$

où δ est l'opérateur de codifférentiation. Soit $\pi\colon T_c V \to V$ la projection de l'espace fibré $T_c V$.

Si $p \in T_c V$, choisissons sur V un système de coordonnées normales en $\pi(p)$. On a alors en p:

1) $G_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, si $(\alpha, \beta) \neq (3, 3)$, $G_{33} = c^2$;

2) $\Gamma^\alpha_{\beta\varrho} = 0$, à l'exception de

$$\Gamma^1_{23} = c^2K/2\,, \qquad \Gamma^2_{13} = -c^2K/2\,, \qquad \Gamma^3_{11} = -\partial^2_{12}A\,,$$
$$\Gamma^3_{12} = (\partial^2_{11}A - \partial^2_{22}A)/2\,, \qquad \Gamma^3_{22} = \partial^2_{12}A\,.$$

Un calcul local aisé montre que, dans la carte choisie, on a en p:

$$(\mathrm{II}_9) \qquad \left\{\begin{aligned} &\nabla_i\psi_j = 0\,, \qquad \nabla_i\psi_3 = \frac{c^3K}{2}\sin\left[\theta + \frac{(1-i)\pi}{2}\right],\\ &\nabla_3\psi_i = c\left(\frac{c^2K}{2} - 1\right)\sin\left[\theta + \frac{(1-i)\pi}{2}\right],\\ &\nabla_3\psi_3 = 0\,, \qquad (1 \leqslant i,\ j \leqslant 2)\,. \end{aligned}\right.$$

Par suite,

$$-\delta(Q\psi) = (2 - c^2K)\psi_\beta\nabla^\beta K/2 + c(1 - c^2K)(\partial_1 K\cos\theta + \partial_2 K \sin\theta)/2\,,$$

soit

$$-\delta(Q\psi) = (3/2 - c^2K)\psi^\alpha\partial_\alpha K\,.$$

On a donc, dans les coordonnées isothermes en $\pi(p)$,

$$-\delta(Q\psi) = ce^{-A}(3/2 - c^2K)(\partial_1 K\cos\theta + \partial_2 K\sin\theta)\,.$$

Il en résulte:

$$\delta(Q\psi) = 0 \Leftrightarrow \{(3/2 - c^2K)\,\partial_i K = 0,\ i = 1, 2\} \Leftrightarrow K \equiv \mathrm{Cte}\,.$$

Lemme 2. – *Si* $K \equiv \mathrm{Cte}$, *on a*

$$(\mathrm{II}_{10}) \qquad \mathrm{Ric} = (c^2K^2/2)g^s + K(1 - c^2K)\pi^* g\,.$$

Preuve. – Résulte aisément des formules (5) de [4] relatives aux composantes covariantes du tenseur de Ricci et du fait que

$$(\pi^* g)_{ij} = g_{ij}\,, \qquad (1 \leqslant i, j \leqslant 2),\ (\pi^* g)_{3\alpha} = 0,\ \forall\alpha\,.$$

Théorème 1. – *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

1) *l'opérateur de Ricci est un endomorphisme de* $\mathfrak{C}_1(T_c V)$;

2) $(T_c V, g^s)$ *est localement conformément plate*;

3) $(T_c V, g^s)$ *est à courbure sectionnelle constante*;

4) (V, g) *est à courbure gaussienne* $K \equiv 0$ *ou bien* $K \equiv 1/c^2$.

Preuve. – *a*) *On va montrer que* 4) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 4).

L'implication 4) $\Rightarrow$ 3) découle immédiatement du lemme 2 et l'implication 3) $\Rightarrow$ 2) est, évidemment, triviale. Montrons que 2) $\Rightarrow$ 4). Puisque $\dim T_c V = 3$, la condition 2) équivaut à

$$(\mathrm{II}_{11}) \qquad \nabla_\alpha R_{\beta\varrho} - \nabla_\varrho R_{\beta\alpha} = (G_{\beta\varrho}\,\partial_\alpha R - G_{\beta\alpha}\,\partial_\varrho R)/4\,, \qquad \forall\alpha, \beta, \varrho\,.$$

Puisque $\partial_3 R \equiv 0$, les équations (II_{11}) entraînent

$$(\mathrm{II}_{12}) \qquad \nabla_i R_{33} - \nabla_3 R_{i3} = G_{33}\,\partial_i R/4\,, \qquad (i = 1, 2)$$

les formules (4) et (5) de [4], concernant $\Gamma^\alpha_{\beta\varrho}$ et $R_{\alpha\beta}$, entraînent que, dans la carte particulière choisie, on a

$$(\mathrm{II}_{13}) \qquad \nabla_i R_{33} = 3c^4K\,\partial_i K/2\,, \qquad \nabla_3 R_{i3} = c^4K\,\partial_i K/4\,, \qquad (i = 1, 2)\,;$$

puisque $\partial_\alpha R = \partial_\alpha K(2 - c^2K)$, les équations (II_{12}) et (II_{13}) impliquent

$$\partial_i K(3c^2K - 1) \equiv 0\,, \qquad (i = 1, 2)\,.$$

Il en résulte $K \equiv \text{Cte}$. On a alors, d'après (II_{10}) et d'après les formules (4) de [4],

$$(II_{14}) \qquad \nabla_3 R_{12} = 0\,, \quad \nabla_2 R_{13} = e^{2A} c^2 K^2 (c^2 K - 1)/2\,.$$

D'après (II_{11}), on a $\nabla_2 R_{13} - \nabla_3 R_{12} = 0$ et donc, d'après (II_{14}), $K \equiv 0$ ou bien $K \equiv 1/c^2$, i.e. 4).

b) Montrons que 4) $\Leftrightarrow$ 1).

L'implication 4) $\Rightarrow$ 1) résulte immediatement de l'implication 4) $\Rightarrow$ 3). Inversement, supposons vraie 1). A partir des formules (II_4) et (II_8), on prouve sans difficulté que ψ vérifie l'équation

$$(II_{15}) \qquad \operatorname{rot} \psi = -\frac{1}{c}\psi$$

qui est la version évidente, sur $(T_c V, g^s)$ du théorème D; par conséquent la 1-forme ψ est cofermée (propriété, on le sait, prouvée par Liouville). Ceci étant, il en résulte, d'après le lemme 1, l'implication 1) $\Rightarrow K \equiv \text{Cte}$.

On a vu, d'autre part, que si $K \equiv \text{Cte}$ alors

$$-\,\delta(Q\omega) = R^{\alpha\beta}\nabla_\alpha \omega_\beta\,, \qquad \forall \omega \in \Lambda^1(T_c V)\,.$$

Par suite, si $\delta\omega = 0$, on a, d'après le lemme 2,

$$-\,\delta(Q\omega) = K(1 - c^2 K)(\pi^* g)^{\alpha\beta}\nabla_\alpha \omega_\beta = K(1 - c^2 K)\, e^{-2A}(\nabla_1 \omega_1 + \nabla_2 \omega_2)\,.$$

Par conséquent,

$$(II_{16}) \qquad \{\delta\omega = \delta(Q\omega) = 0,\ K = \text{Cte}\} \Rightarrow K(1 - c^2 K)(\nabla_1 \omega_1 + \nabla_2 \omega_2) = 0\,.$$

Puisque l'équation (II_{16}) doit être vérifiée pour toute $\omega \in \mathcal{C}_1(T_c V)$, il en résulte que $K \equiv 0$ ou bien $K \equiv 1/c^2$ i.e. 4). En effet, supposons, par l'absurde, le contraire. On a alors, d'après (II_{16}),

$$(II_{17}) \qquad \nabla_1 \omega_1 + \nabla_2 \omega_2 = 0\,, \quad \forall \omega \in \Lambda^1(T_c V)$$

Si l'on choisit des coordonnées normales en $\pi(p)$, on a alors, en p, $\nabla_3 \omega^3 = 0$ et par suite,

$$(II_{18}) \qquad \partial_3 \omega^3 = 0 \quad \text{pour toute } \omega \in \mathcal{C}_1(T_c V)$$

et, en particulier, pour toute ω coexacte i.e. telle que

$$\omega = * d\varphi , \qquad \varphi \in \Lambda^1(T_c V) ,$$

où

$*$ est l'opérateur de Hodge. Puisque

$$\omega = * d\varphi \Leftrightarrow \omega^\gamma = \eta^{\alpha\beta\gamma}(d\varphi)_{\alpha\beta} ,$$

la condition (II_{18}) entraîne immédiatement que

$$(\partial_{13}\varphi_2)(p) = (\partial_{23}\varphi_1)(p) , \qquad \forall\varphi \in \Lambda^1(T_c V)$$

ce qui est absurde. On a donc 1) $\Rightarrow$ 4).

REMARQUE. – L'équivalence 3) $\Leftrightarrow$ 4) est un résultat non publié de A. AVEZ.

COROLLAIRE. – *Si* (V, g) *est complète et orientable, alors les conditions* 1), 2) *et* 3) *du théorème* 1 *sont équivalentes à la condition*

4′) (V, g) *est plate ou bien isométrique à la sphère euclidienne* $\big(S^2(c), \mathrm{can}\big)$ *de rayon* c.

PREUVE. – Découle immédiatement du théorème 1 et de la classification des surfaces.

PROPOSITION. – *Supposons* (V, g) *compacte. Si* $K \equiv \mathrm{Cte}$, *alors le groupe conforme complet de* $(T_c V, g^s)$ *coïncide avec le groupe complet d'isométries.*

PREUVE. – On a $K \equiv \mathrm{Cte} \Leftrightarrow R \equiv \mathrm{Cte}$. La proposition est surement vraie si $R \leqslant 0$. En effet, on sait (voir, par exemple, [9]) que si (M, g) est une variété riemannienne compacte à courbure scalaire constante $\leqslant 0$, alors $C(M) = I(M)$. Soit donc $R > 0$. Puisque $K \equiv \mathrm{Cte}$, on a, d'après le lemme 2,

$$(\mathrm{II}_{19}) \qquad S = K(c^2K - 1)[(2/3)g^s - \pi^* g]$$

où $S = \mathrm{Ric} - (R/3)g^s$. On trouve aisément que

$$(g^s|\pi^* g) = |\pi^* g|^2 = 2 .$$

Par conséquent,

$$(\mathrm{II}_{20}) \qquad |S|^2 = (2/3)K^2(c^2K - 1)^2 .$$

On a donc

$$K \equiv \mathrm{Cte} \Rightarrow |S| \equiv \mathrm{Cte}\,.$$

D'après le théorème A, si l'on avait $C(T_c V) \neq I(T_c V)$ alors (V, g) serait isométrique à une sphère euclidienne et, en particulier, une variété d'Einstein. D'autre part, on a vu que

$$\{(T_c V, g^s) \text{ est d'Einstein}\} \Leftrightarrow \{K \equiv 0 \text{ ou bien } K \equiv 1/c^2\}\,.$$

Ni pour $K \equiv 0$, ni pour $K \equiv 1/c^2$ le fibré $(T_c V, g^s)$ est isométrique à une sphère, parce que si $K \equiv 0$, alors $(T_c V, g^s)$ est localement plat et si $K \equiv 1/c^2$ alors le revetement à deux feuillets de (V, g) est $\big(S^2(c), \mathrm{can}\big)$ et l'on sait bien [7] que $T_c S^2(c)$ est homéomorphe à $SO(3)$. Par conséquent, $C(T_c V) = I(T_c V)$.

Théorème 2. – *Supposons (V, g) compacte et orientable. Si $(T_c V, g^s)$ est localement conformément plate, alors*

1) $$*\big(\chi^r(T_c V), \mathbb{Z}\big) = \big(\chi^{3-r}(T_c V, \mathbb{Z})\big)^*\,, \quad \forall r \in \{0, 1, 2, 3\}$$

si et seulement si $(T_c V, g^s)$ est un tore plat;

2) $$\exists r; \quad *\big(\chi^r(T_c V, \mathbb{Z})\big) \subset \big(\chi^{3-r}(T_c V, \mathbb{Z})\big)^*$$

(inclusion stricte) si et seulement si $(T_c V, g^s)$ est isométrique à l'espace projectif réel $P^3(\mathbb{R})$ à courbure constante $1/4c^2$.

Preuve. – Si $(T_c V, g^s)$ est localement conformément plate, alors, d'après le corollaire du théorème 1, (V, g) est plate ou bien isométrique à la sphère euclidienne $\big(S^2(c), \mathrm{can}\big)$. Puisque $(T_c V, g^s)$ est alors une variété compacte à courbure sectionnelle constante et que $R = 2K - c^2K^2/2$, il s'en suit que

$$\{(V, g) \text{ est plate}\} \Leftrightarrow \{(T_c V, g^s) \text{ est un tore plat}\}\,;$$

on sait aussi, d'après le théorème C, que $\big(T_c S^2(c), \mathrm{can}^s\big)$ est isométrique à l'espace projectif réel $P^3(\mathbb{R})$, à courbure sectionnelle constante $1/4c^2$. D'autre part, si la condition

$$(\mathrm{II}_{21}) \qquad *\big(\chi^r(T_c V, \mathbb{Z})\big) = \big(\chi^{3-r}(T_c V, \mathbb{Z})\big)^*\,, \quad \forall r\,,$$

est satisfaite, alors $(T_c V, g^s)$ ne peut pas être un espace projectif réel, tandis que le tore T^3 vérifie, d'après le théorème B, la condition (II_{21}), d'où la conclusion.

BIBLIOGRAPHIE

Partie I

[1] A. AVEZ, *Applications de la formule de Gauss-Bonnet-Chern aux variétés à quatre dimensions*, C.R. Acad. Sci. Paris, **256** (1963), A, pp. 5488-5480.

[2] R. L. BISHOP - S. I. GOLDBERG, *A characterization of the Euclidean sphere*, Bull. Am. Math. Soc., **72** (1966), pp. 122-124.

[3] C. BUZZANCA, *Déformations de métriques riemanniennes et variétés isométriques à une sphère*, C.R. Acad. Sci. Paris, **290** (1980), A, pp. 897-899.

[4] S. I. GOLDBERG, « *Curvature and homology* », Acad. Press, New York, 1962.

[5] A. LICHNEROWICZ, « *Géométrie des groupes de transformations* », Dunod, Paris, 1958.

[6] J. T. SCHWARTZ, « *Non linear functional analysis* », Gordon and Breach, New York, 1967.

Partie II

[1] A. AVEZ - C. BUZZANCA, *Flusso geodetico sul fibrato unitario tangente di una superficie*, Rend. Circolo Mat. Palermo II, **25** (1976), pp. 176-182.

[2] C. BARBANCE, *Transformations conformes d'une variéte riemannienne compacte*, C.R. Acad. Sci. Paris, **260** (1965), p. 1547.

[3] M. BERGER, *A l'ombre de Loewner*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., **4**, 5 (1972), pp. 241-260.

[4] R. GRIMALDI, *Curvatura di Ricci e proprietà spettrali del fibrato sferico tangente delle superfici*, Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino (à paraître).

[5] W. KLINGENBERG - S. SASAKI, *On the tangent sphere bundle of a 2-sphere*, Tôhoku Math. Journal, **27** (1975), pp. 49-56.

[6] S. SASAKI, *On the differential geometry of tangent bundles of riemannian manifold II*, Tôhoku Math. Journal, **14** (1962), pp. 146-155.

[7] N. E. STEENROD, « *The topology of fiber bundles* », Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1951.

[8] S. TANNO, *Orthonormal frames on 3-dimensional riemannian manifolds*, J. Diff. Geom., **11** (1976), pp. 467-474.

[9] K. YANO, « *Differential geometry on complex and almost complex spaces* », Pergamon Student Editions, 1964.