L'ensemble des points fixes d'une application holomorphe dans un produit fini de boules-unités d'espaces de Hilbert est une sous-variété banachique complexe (*).

MOHAMED ABD-ALLA

Résumé. – *Dans cet article, nous montrons le résultat suivant. Soit $B = B_1 \times \ldots \times B_p$ un produit fini de boules-unités d'espaces de Hilbert H_i, et soit $f: B \to B$ une application holomorphe. Alors, l'ensemble des points fixes de f est une sous-variété banachique complexe de B, et est rétracte holomorphe de B.*

Summary. – *In this paper, we prove the following result. Let $B = B_1 \times \ldots \times B_p$ be a finite product of unit balls of complex Hilbert spaces H_i, and let $f: B \to B$ be a holomorphic map, then the set of fixed points of f is a complex Banach submanifold, and is a holomorphic retract of B.*

0. – Introduction.

E. VESENTINI ([10] et [11]) a étudié la notion de géodésique complexe d'un domaine borné D d'un espace de Banach complexe E, et a montré dans un certain nombre de cas que, étant donnés deux points x et y de D, il existe une et une seule géodésique complexe passant par x et y. Il en déduit, en particulier que, si B est la boule unité d'un espace de Banach complexe E tel que tous les points de la frontière ∂B de B soient des points complexes extremaux de $\bar{B}$, et si $f: B \to B$ est une application holomorphe telle que $f(0) = 0$, alors l'ensemble des points fixes de f est l'intersection de B avec un sous-espace vectoriel complexe fermé F de E.

Dans le cas du bidisque $\Delta \times \Delta$, il y a en général une infinité de géodésiques complexes passant par x et y. VESENTINI [11] montre cependant que, si x et y sont deux points fixes de $f: \Delta \times \Delta \to \Delta \times \Delta$, il existe une géodésique complexe passant par x et y formée de points fixes de f.

En utilisant des résultats de compacité, VIGUÉ [13] a généralisé ce résultat au cas d'un domaine borné convexe D de $\mathbf{C}^n$. De plus, il a montré [14] que l'ensemble V des points fixes de f est une sous-variété analytique de D, et est rétracte holomorphe de D.

(*) Entrata in Redazione il 7 gennaio 1986.
Indirizzo dell'A.: 10, Le Bosquet - 91940 Les Ulis, France.

Soit maintenant $B = B_1 \times \ldots \times B_p$ un produit fini de boules-unités d'espaces de Hilbert H_i. Les géodésiques complexes passant par deux points x et y ne forment pas en général un ensemble compact. En utilisant la notion de centre asymptotique d'une suite, VIGUÉ [12] a montré que, si $f: B \to B$ est une application holomorphe ayant deux points fixes distincts x et y, il existe une géodésique complexe passant par x et y et formée de points fixes de f.

Le résultat principal de cet article est que l'ensemble V des points fixes de f est une sous-variété banachique complexe de B, et que V est rétracte holomorphe de B.

Nous montrerons d'abord que si $f(x_0) = x_0$, $f'(x_0)\cdot v = v$, $(v \neq 0)$, il existe une géodésique complexe $\varphi: \Delta \to B$ telle que $\varphi(0) = x_0$, que $\varphi'(0)$ soit colinéaire à v et que son image $\varphi(\Delta)$ soit formée de points fixes de f. On peut alors supposer que l'origine 0 est un point fixe de f. Nous construirons une application holomorphe $\psi: B \to B$ telle que $\psi'(0)$ soit un projecteur de norme 1 de $H = H_1 \times \ldots \times H_p$ sur $F_0 = \{x \in H: f'(0)\cdot v = v\}$. Nous montrerons que $\psi(B \cap F_0)$ est une sous-varieté banachique de B, et est rétracte holomorphe de D. Nous montrerons enfin que $\psi(B \cap F_0)$ est égale à l'ensemble des points fixes de f, ce qui montre le résultat annoncé.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur Jean-Pierre VIGUÉ qui par son enseignement, par les nombreux entretiens qu'il m'a accordés et par ses constants encouragements et directives a été l'inspirateur de ce travail.

1. – Rappels et définitions.

1.1. *Géodésiques complexes.*

Pour les définitions et les propriétés de la distance de Carathéodory c_D et la métrique infinitésimale de Carathéodory E_D sur un domaine borné D d'un espace de Banach complexe E, voir par exemple [3] et [7].

DÉFINITION 1.1.1. – On dit qu'une application holomorphe $\varphi: \Delta \to D$ de disque unité $\Delta \subset \mathbf{C}$ dans D est une géodésique complexe de D si φ est une isométrie pour c_Δ et c_D, c'est-à-dire si, $\forall \zeta_1 \in \Delta$, $\forall \zeta_2 \in \Delta$,

$$c_D(\varphi(\zeta_1), \varphi(\zeta_2)) = c_\Delta(\zeta_1, \zeta_2) .$$

Dans [11], VESENTINI a donné la caractérisation suivante des géodésiques complexes de D.

PROPOSITION 1.1.2. – *Soit $\varphi: \Delta \to D$ une application holomorphe. Pour que φ soit une géodésique complexe de D, il faut et il suffit que φ satisfasse à une des conditions suivantes:*

i) *il existe deux points distincts $\zeta_1, \zeta_2 \in \Delta$ tels que*

$$c_D(\varphi(\zeta_1), \varphi(\zeta_2)) = c_\Delta(\zeta_1, \zeta_2) ;$$

ii) *il existe* $\zeta_1 \in \Delta$, *et un vecteur* $v \in \mathbf{C}$ *non-nul tel que*

$$E_D(\varphi(\zeta_1), \varphi'(\zeta_1)\cdot v) = E_\Delta(\zeta_1, v) .$$

Ainsi si $f: D \to D$ est une application holomorphe ayant deux points fixes distincts x et y, si $\varphi: \Delta \to D$ est une géodésique complexe de D passant par x et y, alors $f\circ\varphi$ est une géodésique complexe passant par x et y. Si φ est (à changement de paramètre près) l'unique géodésique complexe passant par x et y, alors $f\circ\varphi = \varphi$, et l'image $\varphi(\Delta)$ de la géodésique φ est formée de points fixes de f (voir [11]).

1.2. *Points fixes d'applications holomorphes.*

DÉFINITION 1.2.1. – Soit D un domaine d'un espace de Banach complexe E. On dit qu'une partie bornée A de D est complètement intérieur à D, (et on note $A \subset\subset D$), si la distance de A à la frontière de D est strictement positive.

D'après un résultat de EARLE et HAMILTON [2], sur les points fixes d'une application holomorphe f d'un domaine borné D dans lui-même telle que $f(D)$ soit complètement intérieure à D, on déduit le

THÉORÈME 1.2.2 ([12]). – *Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E, et soit M une variété banachique complexe. Soit* $f: M\times D \to D$ *une application holomorphe, et supposons que, pour tout* $z \in M$, *il existe un voisinage* $V(z)$, *tel que* $f(V\times D) \subset\subset D$. *Alors pour tout* $z \in M$, *l'application*

$$\begin{aligned} D &\to D \\ x &\to f(z, x) \end{aligned}$$

admet un point fixe unique $\varphi(z) \in D$, *et l'application*

$$\begin{aligned} M &\to D \\ z &\to \varphi(z) \end{aligned}$$

est une application holomorphe de M dans D.

2. – Points fixes d'applications holomorphes dans un produit fini de boules unités ouvertes d'espaces de Hilbert.

Rappelons d'abord le résultat suivant ([12])

THÉORÈME 2.1. – *Soit* $B = B_1\times\ldots\times B_p$ *un produit fini de boules unités ouvertes d'espaces de Hilbert* H_i. *Soit* $f: B \to B$ *une application holomorphe ayant deux points fixes distincts x et y. Alors il existe une géodésique complexe* $\varphi: \Delta \to B$ *passant par x et y telle que son image* $\varphi(\Delta)$ *soit formée de points fixes de f.*

Nous allons montrer maintenant le théorème suivant

THÉORÈME 2.2. – *Soit $B = B_1 \times \ldots \times B$: un produit fini de boules unités ouvertes B_i d'espaces de Hilbert H_i: Soit $f: B \to B$, une application holomorphe telle qu'il existe $x \in B$ et $v \in H$ $(v \neq 0)$ tel que $f(x) = x$, $f'(x)\cdot v = v$. Alors il existe une géodésique complexe $\varphi: \Delta \to B$, telle que $\varphi(0) = x$, $\varphi'(0)$ soit colinéaire à v, et que $\varphi(\Delta)$ soit formée de points fixes de f.*

DÉMONSTRATION. – Comme B est homogène, on peut supposer que $x = 0$. Quitte à multiplier v par un scalaire, on peut supposer que $E_B(0, v) = 1$. Soit N l'ensemble

$$N = \{\varphi \in H(\Delta, B) \colon \varphi(0) = 0,\ \varphi'(0) = v\}$$

N est non-vide et d'après la proposition 1.1.2 (Vesentini), tout element de N est une géodésique complexe de B. Ainsi pour tout $\varphi \in N$, $f \circ \varphi \in N$.

Soit $\varphi \in N$,

$$\begin{aligned} \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p) \colon \Delta &\to B_1 \times \ldots \times B_p \\ \zeta &\to (\varphi_1(\zeta), \ldots, \varphi_p(\zeta)) \end{aligned}$$

nous avons

$$\varphi_i(0) = 0\,, \quad \varphi_i'(0) = v_i\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant p\,.$$

Quitte à changer l'ordre d'indices, il existe un indice j, $1 \leqslant j \leqslant p$ tel que

$$1 = E_B(0, v) = \|v\| = \|v_1\| = \ldots = \|v_j\| > \|v_{j+1}\| \geqslant \ldots \geqslant \|v_p\|\,. \tag{2.1}$$

Alors pour $i \leqslant j$,

$$\varphi_i \colon \Delta \to B_i \quad \text{est telle que} \quad E_{B_i}(\varphi_i(0), \varphi_i'(0)) = 1\,.$$

Ainsi φ_i $(i \leqslant j)$ est une géodésique complexe de B_i, et d'après Vesentini on a

$$\varphi_i(\zeta) = \zeta v_i\,.$$

D'après la proposition 1.1.2, $f \circ \varphi \colon \Delta \to B$ est une géodésique complexe de B et pour tout $i \leqslant j$, nous avons

$$E_{B_i}(f_i \circ \varphi(0), (f_i \circ \varphi)'(0)) = 1\,.$$

Alors pour tout i, $i \leqslant j$

$$f_i(\zeta v_1, \ldots, \zeta v_j, \varphi_{j+1}(\zeta), \ldots, \varphi_p(\zeta)) = \zeta v_i\,, \quad \forall \zeta \in \Delta \tag{2.2}$$

les seules conditions imposées à φ_k, $k \geqslant j+1$ sont

$$\varphi_k(0) = 0\,, \quad \varphi_k'(0) = v_k\,. \tag{2.3}$$

Soit l'application

$$\begin{aligned} g = (g_1, \dots, g_p) \colon \Delta \times B_{j+1} \times \dots \times B_p &\to B_1 \times \dots \times B_p \\ (\zeta, x_{j+1}, \dots, x_p) \quad &\to f(\zeta v_1, \dots, \zeta v_j, x_{j+1}, \dots, x_p) \end{aligned}$$

et

$$g_i(\zeta, x_{j+1}, \dots, x_p) = f_i(\zeta v_1, \dots, \zeta v_j, x_{j+1}, \dots, x_p)\,, \qquad 1 \leqslant i \leqslant p\,.$$

Maintenant il existe beaucoup d'applications $(\varphi_{j+1}, \dots, \varphi_p)$ telles que (2.3) soit vérifié, il existe donc un ouvert U de $\Delta \times B_{j+1} \times \dots \times B_p$ tel que, pour tout $(\zeta, x_{j+1}, \dots, \dots, x_p) \in U$, pour tout $i \leqslant j$

$$g_i(\zeta, x_{j+1}, \dots, x_p) = \zeta v_i\,.$$

Ainsi d'après le théorème de prolongement analytique, nous avons pour tout $i \leqslant j$, pour tout $(\zeta, x_{j+1}, \dots, x_p) \in \Delta \times B_{j+1} \times \dots \times B_p$

$$g_i(\zeta, x_{j+1}, \dots, x_p) = \zeta v_i\,. \tag{2.4}$$

Soit l'application

$$G = \pi \circ g \colon \Delta \times B_{j+1} \times \dots \times B_p \to B_{j+1} \times \dots \times B_p$$

où π est la projection canonique de $B_1 \times \dots \times B_p$ sur $B_{j+1} \times \dots \times B_p$.

Donc G est telle que

a) $G(0, 0) = 0$;

b) $G'(0, 0) \cdot (1, v_{j+1}, \dots, v_p) = (v_{j+1}, \dots, v_p)$.

De plus d'après l'inegalité (2.1), on a

$$\|(v_{j+1}, \dots, v_p)\| = \max_{j+1 < i < p} \|v_i\| < 1\,.$$

Pour terminer la démonstration, il reste à montrer qu'il existe une application holomorphe $\psi \colon \Delta \to B_{j+1} \times \dots \times B_p$ telle que $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = (v_{j+1}, \dots, v_p)$, et que pour tout $\zeta \in \Delta$, $G(\zeta, \psi(\zeta)) = \psi(\zeta)$.

Nous allons le faire dans le théorème suivant

THÉORÈME 2.3. – *Soit $B = B_1 \times \ldots \times B_p$ un produit fini de boules unités ouvertes d'espaces de Hilbert H_i. Soit $f\colon \Delta \times B \to B$, une application holomorphe telle que*

$$f(0, x_0) = x_0\,, \quad f'(0, x_0)\cdot(1, v) = v\,, \quad (v \neq 0,\ \|v\| < 1)\,.$$

Alors il existe une application holomorphe $\psi\colon \Delta \to B$, telle que $\psi(0) = x_0$, $\psi'(0) = v$, et que pour tout $\zeta \in \Delta$, $f(\zeta, \psi(\zeta)) = \psi(\zeta)$.

DÉMONSTRATION. – On peut supposer $x_0 = 0$ (car B est homogène). Pour tout λ, $0 \leqslant \lambda < 1$, soit l'application holomorphe

$$f_\lambda(\zeta, x) = \lambda f(\zeta, x) + (1 - \lambda)\zeta v$$

de $\Delta \times B$ dans B.

On a

$$\begin{aligned}\|f_\lambda\| &\leqslant \lambda\|f\| + (1 - \lambda)\|v\| \\ &< \lambda + (1 - \lambda) = 1 \qquad (\text{car } \|v\| < 1, \text{ par hypothèse})\,.\end{aligned}$$

Donc, pour tout $\zeta \in \Delta$, il existe un voisinage $V(\zeta)$ tel que $f_\lambda(V \times B) \subset\subset B$, et on peut appliquer le théorème 1.2.3. Ainsi l'application

$$\begin{aligned} &B \to B \\ &x \to f_\lambda(\zeta, x)\end{aligned}$$

admet un point fixe unique, $\psi_\lambda(\zeta)$, et pour tout $\lambda < 1$, l'application

$$\begin{aligned} &\Delta \to B \\ &\zeta \to \psi_\lambda(\zeta)\end{aligned}$$

est holomorphe.

L'application f_λ est telle que

1) $f_\lambda(\zeta, \psi_\lambda(\zeta)) = \psi_\lambda(\zeta)$, $\forall \zeta \in \Delta$;

2) $f_\lambda(0, 0) = 0$;

3) $f'_\lambda(0, 0)\cdot(1, v) = \lambda f'(0, 0)\cdot(1, v) + (1 - \lambda)v = v$

et nous avons donc

$$\psi_\lambda(0) = 0\,. \tag{2.5}$$

On veut montrer que $\psi_\lambda'(0) = v$. Il faut donc montrer que, pour ζ assez petit, $\|\psi_\lambda(\zeta) - \zeta v\|$ est infiniment petit devant $|\zeta|$.

Au voisinage de $(0, 0)$ nous avons

$$\begin{aligned} f_\lambda(\zeta, \zeta v) &= f_\lambda(0, 0) + f_\lambda'(0, 0)\cdot\zeta(1, v) + O(|\zeta|^2) \\ &= \zeta v + O(|\zeta|^2) \end{aligned}$$

où $O(|\zeta|^2)$ désigne un infiniment petit de l'ordre de $|\zeta|^2$.

D'après les inegalités de Cauchy, il existe une constante K telle que

$$\|f_\lambda(\zeta, \zeta v) - \zeta v\| < K|\zeta|^2, \qquad \text{pour } |\zeta| < r .$$

On sait que

$$\psi_\lambda(\zeta) = \lim_{n\to\infty} [f_\lambda(\zeta, \cdot)]^n \cdot (\zeta v) .$$

D'après EARLE et HAMILTON [2], il existe une constante positive $\theta < 1$, telle que

$$c_B\big([f_\lambda(\zeta, \cdot)]^{n+1}\cdot(\zeta v), \quad [f_\lambda(\zeta, \cdot)]^n\cdot(\zeta v)\big) \leqslant \theta^n c_B\big(f_\lambda(\zeta, \cdot)\cdot\zeta v, \zeta v\big) \leqslant \theta^n K_1|\zeta|^2$$

où K_1 est une constante. On a donc

$$c_B\big(\psi_\lambda(\zeta), \zeta v\big) = \lim_{n\to\infty} c_B\big([f_\lambda(\zeta, \cdot)]^n\cdot(\zeta v), \zeta v\big) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \theta^k K_1|\zeta|^2 = K_1|\zeta|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k = \frac{K_1}{1-\theta}|\zeta|^2 .$$

Alors il existe une constante K_2 telle que

$$\|\psi_\lambda(\zeta) - \zeta v\| \leqslant \frac{K_2}{1-\theta}|\zeta|^2 .$$

Ceci prouve que

$$\psi_\lambda'(0) = v . \tag{2.6}$$

Choisissons une suite de nombres $\{\lambda_n\}$; $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, et notons $\psi_n = \psi_{\lambda_n}$. Comme l'image de ψ_n est contenu dans un sous-ensemble faiblement compact de l'espace de Banach complexe H, d'après le théorème 3.14.2 de [8], on peut extraire une sous-suite $\{\psi_{n_k}\}$ de $\{\psi_n\}$ telle que ψ_{n_k} converge faiblement vers ψ, et que l'application

$$\zeta \to \psi(\zeta)$$

soit une application holomorphe de ζ.

Maintenant pour tout $\zeta \in \Delta$, il existe une boule faiblement fermée $B(\zeta)$ contenue dans B, et telle que

$$\psi_{n_k}(\zeta) \in B(\zeta)\,, \qquad \forall k \in \boldsymbol{N}$$

qui implique que $\psi(\zeta) \in B(\zeta)$.

D'autre part

$$c_B\big(\psi_{n_k}(\zeta), f(\zeta, \psi_{n_k}(\zeta))\big) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Comme dans VIGUÉ [12], on montre par récurrence sur p en utilisant la notion de centre asymptotique, que

$$f(\zeta, \psi(\zeta)) = \psi(\zeta)\,, \qquad \text{pour tout } \zeta \in \Delta$$

et d'après les égalités (2.5) et (2.6), en passant au limite quand $k \to \infty$, on a $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = v$. Le théorème est demontré.

Nous allons maintenant énoncer et montrer le théorème suivant, qui est le résultat essentiel de cet article.

THÉORÈME 2.4. – *Soit $B = B_1 \times \ldots \times B_p$ un produit fini de boules-unités ouvertes d'espaces de Hilbert H_i. Soit $f\colon B \to B$, une application holomorphe, et soit V l'ensemble des points fixes de f. Alors V est une sous-variété banachique complexe connexe de B, et, si V est non vide, V est rétracte holomorphe de B (c'est à dire, il existe une application holomorphe $\psi\colon B \to V$ telle que $\psi|_V = \mathrm{Id}|_V$).*

Le théorème 2.4 sera la conséquence d'une suite de propositions que nous allons maintenant démontrer. Soit V l'ensemble des points fixes de f. Pour tout $x_0 \in V$, l'application linéaire $f'(x_0)$ est de norme $\leqslant 1$ pour la norme $E_B(x_0, \cdot)$. Comme B est homogène, nous supposerons que $x_0 = 0$. Alors $E_B(0, \cdot)$ est égale à la norme $\|\cdot\|$. Soit le sous-espace vectoriel fermé F_0 de H

$$F_0 = \{v \in H\colon f'(0)\cdot v = v\}\,.$$

On va montrer la

PROPOSITION 2.5. – *Il existe un projecteur $p\colon H \to F_0$ de norme* 1.

DÉMONSTRATION. – Considerons les applications

$$\varphi_n = (\mathrm{Id} + f + f^2 + \ldots + f^{n-1})/n\,, \qquad n \in \boldsymbol{N}\,.$$

Nous avons

i) comme B est convexe, φ_n est une application de B dans B;

ii) $\varphi_n|_V = \mathrm{Id}|_V$;

iii) $\varphi_n'(0)|_{F_0} = \mathrm{Id}|_{F_0}$.

Maintenant $\{\varphi_n\}$ est une suite d'applications holomorphes de B dans B. Soit $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre sur N sans point adhérent. La suite φ_n converge faiblement selon $\mathfrak{U}$ vers une application φ de B dans B. En effet, pour toute forme linéaire continue σ sur H

$$\sigma\circ\varphi_n \xrightarrow[\text{suivant}\,\mathfrak{U}]{} \sigma\circ\varphi .$$

D'après le théorème de Montel, φ_n converge uniformement suivant $\mathfrak{U}$ sur tout compact de $B\cap F$, pour tout sous-espace vectoriel de dimension finie F de H.

Ainsi φ est borné sur B et pour toute forme linéaire continue σ sur H, pour tout sous-espace vectoriel de dimension finie F de H, $\sigma\circ\varphi$ est une fonction holomorphe sur $B\cap F$. D'après DOUADY [1] et RAMIS [9], φ est une application holomorphe de B dans B.

L'application holomorphe φ est telle que:

1) $\varphi|_V = \mathrm{Id}|_V$;

2) $\varphi'(0)|_{F_0} = \mathrm{Id}|_{F_0}$;

3) $\varphi'(0)$ est une application linéaire de norme 1.

Montrons que $\operatorname{Im}\varphi'(0)\subset F_0$. Il suffit de montrer que

$$f'(0)\cdot\varphi'(0)v = \varphi'(0)v\,, \quad \text{pour tout } v\in H .$$

Pour tout $v\in H$,

$$\varphi_n'(0)v \to \varphi'(0)v \quad \text{faiblement selon } \mathfrak{U} . \tag{2.7}$$

Maintenant pour tout $v\in H$, on a

$$f'(0)\cdot\varphi_n'(0)v = \frac{1}{n}\big(f'(0)v + \ldots + f'^n(0)v\big) = \varphi_n'(0)v + \big(f'^n(0)v - v\big)/n .$$

Comme $f'(0)$ est faiblement continue (car, pour tout forme linéaire continue σ sur H, $\sigma\circ f'(0)$ est une forme linéaire continue sur H), nous avons

$$f'(0)\cdot\varphi_n'(0)v \xrightarrow[\mathfrak{U}]{} f'(0)\cdot\varphi'(0)v$$

d'autre part,

$$\big(f'^n(0)v - v\big)/n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Ainsi

$$f'(0)\cdot\varphi'(0)\,v = \varphi'(0)\,v\,, \quad \text{pour tout } v\in H .$$

Mais comme $\varphi'(0)|_{F_0} = \mathrm{Id}|_{F_0}$, nous avons $\mathrm{Im}\,\varphi'(0) = F_0$, et $\varphi'(0)$ est un projecteur de H sur F_0 de norme 1. C.q.f.d.

On a donc une décomposition directe de H

$$H = \mathrm{Ker}\,\varphi'(0) \oplus F_0 .$$

Considérons maintenant la suite $\{\psi_n\}$,

$$\psi_n = \varphi^n , \qquad n \in \boldsymbol{N} .$$

De la même façon, ψ_n converge faiblement selon $\mathcal{U}$, vers une application holomorphe ψ telle que

a) $\psi|_V = \mathrm{Id}|_V$;

b) $\psi'(0)|_{F_0} = \mathrm{Id}|_{F_0}$, et $\psi'(0)$ est un projecteur de H sur F_0 de norme 1.

PROPOSITION 2.6. – *$\psi(B \cap F_0)$ est une sous-variété banachique complexe et rétracte holomorphe de B.*

DÉMONSTRATION. – Soit $p = \psi'(0) = \varphi'(0)$. La restriction à $B \cap F_0$ de $p \circ \psi$ est une application holomorphe de $B \cap F_0$ dans $B \cap F_0$ telle que

$$p \circ \psi|_{B \cap F_0}(0) = 0 , \qquad (p \circ \psi|_{B \cap F_0})'(0) = \mathrm{Id}|_{F_0} .$$

On déduit du théorème d'unicité de H. CARTAN que

$$p \circ \psi|_{B \cap F_0} = \mathrm{Id}|_{B \cap F_0} .$$

Soit q la projection sur $\mathrm{Ker}\,p$, parallèlement à F_0. Alors $\psi(B \cap F_0)$ est le graphe de l'application $q \circ \psi\colon B \cap F_0 \to \mathrm{Ker}\,p$, et $\psi(B \cap F_0)$ est donc une sous-variété banachique complexe directe de B. L'application holomorphe $\psi \circ p$ est une rétraction holomorphe de B sur $\psi(B \cap F_0)$.

Remarquons que l'on déduit facilement du théorème d'unicité de H. CARTAN que, pour tout $n \in \boldsymbol{N}$,

$$p \circ \varphi^n|_{B \cap F_0} = \mathrm{Id}|_{B \cap F_0} . \tag{2.8}$$

Pour terminer la démonstration du théorème 2.4, il nous reste à montrer que l'ensemble de points fixes V de f est identique à $\psi(B \cap F_0)$. Nous montrerons d'abord que $V \subset \psi(B \cap F_0)$, nous montrerons ensuite que $V = \psi(B \cap F_0)$.

PROPOSITION 2.7. – *L'ensemble des points fixes V de f est contenu dans $\psi(B \cap F_0)$.*

DÉMONSTRATION. – Montrons d'abord que, si $x \in V$ est proche de 0, il existe un point $y \in B \cap F_0$ tel que $\varphi^n(y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Soit $y = p(x)$, et montrons que $\varphi^n(y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

Considerons la décomposition directe

$$H = \operatorname{Ker} p \oplus F_0 .$$

On déduit des inégalités de Cauchy qu'il existe un voisinage W de 0 dans B et une constante k assez proche de 0 tel que, pour tout $x \in W$, pour tout $v \in \operatorname{Ker} p$

$$\|\varphi'(x)\cdot v\| < k\|v\| . \tag{2.9}$$

On en déduit que, pour tout $x \in W$, pour tout $v \in \operatorname{Ker} p$ tel que le segment $[x, x + v]$ soit contenu dans W, on a

$$\|\varphi(x + v) - \varphi(x)\| < k\|v\| . \tag{2.10}$$

Soit maintenant $x \in V \cap W$; $x - p(x) \in \operatorname{Ker} p$, et d'après l'inégalité (2.10)

$$\|\varphi(x) - \varphi(p(x)(\| < k\|x - p(x)\|$$

et comme $\varphi(x) = x$, on a

$$\|x - \varphi(p(x))\| \leqslant k\|x - p(x)\| .$$

Montrons par récurrence sur n que

$$\|x - \varphi^n(p(x))\| = \|\varphi^n(x) - \varphi^n(p(x))\| \leqslant k^n\|x - p(x)\| . \tag{2.11}$$

La propriété est démontrée à l'ordre 1. Supposons-la démontrée à l'ordre $(n - 1)$. Montrons-la à l'ordre n. Par hypothèse de récurrence, on a

$$\|x - \varphi^{n-1}(p(x))\| \leqslant k^{n-1}\|x - p(x)\| .$$

D'après la remarque (égalité (2.8)), $p\big(\varphi^{n-1}(p(x)) = p(x)\big)$, ce qui montre que $x - \varphi^{n-1}(p(x))$ appartient à $\operatorname{Ker} p$. On déduit de (2.10) que

$$\|\varphi(x) - \varphi^n(p(x))\| = \|x - \varphi^n(p(x))\| \leqslant k^n\|x - p(x)\|$$

et le résultat est démontré. On en déduit que $\varphi^n(p(x))$ converge vers x, ce qui prouve que $V \cap W$ est contenu dans $\psi(B \cap F_0)$. Remarquons que $\psi(B \cap F_0)$ et V sont définis dans B par des equations globales. La proposition se déduit alors du théorème de prolongement analytique. C.q.f.d.

Enfin, nous montrerons la proposition suivante qui termine la démonstration du théorème 2.4.

PROPOSITION 2.8. – *L'ensemble des points fixes V de f est égal à $\psi(B \cap F_0)$.*

DÉMONSTRATION. – Soit l'application $g = f - \mathrm{Id}\colon B \to H$, et considerons sa restriction h à la variété connexe $\psi(B \cap F_0)$, et il nous faut montrer que $h \equiv 0$. Considerons une carte u d'un voisinage W de 0 dans $\psi(B \cap F_0)$ sur un voisinage U de 0 dans un espace de Banach complexe E. Dans cette carte, h admet un développement en série de polynômes homogènes,

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x)$$

où p_n est un polynôme homogène de degré n. Montrons par récurrence sur n que $p_n \equiv 0$. Le résultat est démontré à l'ordre 0, supposons-le démontré à l'ordre $(n-1)$. Montrons-le à l'ordre n. Soit $\varphi\colon \Delta \to B$ une géodésique complexe telle que $\varphi(0) = 0$ et que $\varphi(\Delta)$ soit contenu dans l'ensemble des points fixes de f.

Comme $\varphi(\Delta)$ est contenu dans V, l'application $u \circ \varphi$ est définie dans un voisinage de 0 dans Δ, à valeurs dans U. La fonction $u \circ \varphi$ admet un développement en série

$$u \circ \varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k .$$

Il est facile de vérifier que le développement de $h(u \circ \varphi(z))$ est de la forme suivante

$$h(u \circ \varphi(z)) = p_n(a_1) z^n + \sum_{k>n} a_k z^k .$$

Comme $h \circ u \circ \varphi \equiv 0$, on en déduit: $p_n(a_1) = 0$.

D'autre part, d'après le théorème 2.2, pour tout $v \in F_0$, on peut trouver une géodésique complexe $\varphi\colon \Delta \to B$ telle que $\varphi(0) = 0$, et que $\varphi'(0)$ soit colinéaire à v, et que $\varphi(\Delta)$ soit contenu dans V. Ainsi $p_n \equiv 0$, et le résultat est démontré par récurrence. Nous avons montré que h est identiquement nulle sur un voisinage de 0; le théorème de prolongement analytique montre que g est identiquement nulle sur $\psi(B \cap F_0)$, ce qui achève la démonstration de la proposition.

Ainsi, V est rétracte holomorphe de B. On peut par exemple prendre comme rétraction l'application $\psi \circ p$; il est d'ailleurs facile de montrer que ψ est aussi une telle rétraction.

On a donc le

COROLLAIRE 2.9. – $V = \psi(B \cap F_0) = \psi(B)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. DOUADY, *Le problème de modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné,* Ann. Inst. Fourier, **16** (1966), p. 1.

[2] C. EARLE - R. HAMILTON, *A fixed point theorem for holomorphic mappings*, Proc. Symposia Pure Math., Vol. **16**, Amer. Math. Soc., Providence (1970), pp. 61-65.

[3] T. FRANZONI - E. VESENTINI, *Holomorphic maps and invariant distances,* North-Holland, Amsterdam, 1980.

[4] K. GOEBEL - T. SEKOWSKI - A. STĄCHURA, *Uniform convexity of the hyperbolic-metric and fixed points of holomorphic mappings in the Hilbert ball,* Non-linear Analysis, Theory, Methods and Applications, 4 (1980), pp. 1011-1021.

[5] K. GOEBEL - S. REICH, *Uniform convexity, hyperbolic geometry and non-expansive mappings,* 1984.

[6] K. GOEBEL, *Uniform convexity of Carathéodory's metric on the Hilbert ball and its consequences,* Symposia Mathematica, **26** (1982), pp. 163-179.

[7] L. HARRIS, *Schwary-Pick system of pseudometrics for domains in normed linear spaces,* in Advances in Holomorphy, J. Barroso editor, North-Holland, Amsterdam, 1979, pp. 345-406.

[8] E. HILLE - R. PHILLIPS, *Functional analysis and semi-groups,* Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. 36, Amer. Math. Soc. Providence, R.I., 1957.

[9] J.-P. RAMIS, *Sous ensembles analytiques d'une variété banachique complexe,* Erg. der Math., **53**, Springer-Verlag, 1970.

[10] E. VESENTINI, *Complex geodesics,* Compositio mathematica, **44** (1981), pp. 375-394.

[11] E. VESENTINI, *Complex geodesics and holomorphic maps,* Symposia Mathematica, **26** (1982), pp. 211-230.

[12] J.-P. VIGUÉ, *Points fixes d'applications holomorphes dans un produit fini de boules-unités d'espaces de Hilbert,* Annali di matematica, (4), **137** (1984), pp. 245-256.

[13] J.-P. VIGUÉ, *Géodésiques complexes et points fixes d'applications holomorphes,* Advances in Math., **52** (1984), pp. 241-247.

[14] J.-P. VIGUÉ, *Points fixes d'applications holomorphes dans un domaine borné convexe de* $\mathbf{C}^n$, Trans. A.M.S., **289** (1985), pp. 345-353.