Sull'esistenza delle soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie in forma implicita negli spazi di Banach (*) (**).

GIOVANNI EMMANUELE - BIAGIO RICCERI (Catania)

Summary. - *This paper deals with the existence of solutions for the implicit Cauchy problem* $F(t, x, \dot{x}) = \vartheta_B$, $x(t_0) = x_0$ *in a Banach space* B. *By using the Kuratowski and the Hausdorff measure of non compactness, we prove an existence theorem for the previous problem* (*Teorema* 1.1) *and its extension to non compact intervals* (*Teorema* 2.1). *These results generalize the previous ones by* R. CONTI [1] (*in the case* $B = \boldsymbol{R}$), G. PULVIRENTI [2] *and* T. DOMINGUEZ BENAVIDES [3], [4] (*in the general case*). *In particular, we relax a Lipschitz condition assumed by all of the above-mentioned authors. Some applications of Teorema* 2.1 *are presented.*

Introduzione.

Siano: B uno spazio di Banach, reale o complesso; $x_0, y_0 \in B$; $t_0 \in \boldsymbol{R}$; $a, b \in \boldsymbol{R}^+$; $c \in \boldsymbol{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Poniamo:

$$R = \{(t, x, y) \in \boldsymbol{R} \times B \times B : t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + a,\ \|x - x_0\| \leqslant b,\ \|y - y_0\| \leqslant c\} .$$

Sia, poi, $F(t, x, y)$ una funzione definita in R ed a valori in B. Allo studio dell'esistenza delle soluzioni del problema

$$(1) \qquad \begin{cases} F(t, x, \dot{x}) = \vartheta_B \\ x(t_0) = x_0 , \end{cases}$$

ϑ_B elemento nullo di B, sono stati dedicati numerosi lavori; per il caso in cui $\dim(B) < +\infty$ si veda, ad esempio, la bibliografia riportata in [2] e per il caso in cui $\dim(B) \leqslant +\infty$ quella riportata in [4]. In particolare, T. DOMINGUEZ BENAVIDES con il Theorem 1 di [4], che è una versione lievemente più generale del Theorem 3.1 di [3], ha generalizzato il teorema di esistenza di G. PULVIRENTI, contenuto in [2], facendo uso delle misure di non compattezza di Kuratowski e di Hausdorff. Il citato Theorem 1 di [4] si riduce, poi, ad un risultato di R. CONTI, [1], nel caso in cui $B = \boldsymbol{R}$. Scopo dei lavori ora citati è quello di dare una valutazione dell'ampiezza

(*) Entrata in Redazione il 3 settembre 1980.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R.

dell'intervallo in cui esistono le soluzioni, fatto, questo, generalmente non possibile se si pensasse di utilizzare teoremi di esplicitazione rispetto alla terza variabile e ricondursi in tal modo al classico problema di Cauchy in forma normale.

In particolare, nel Theorem 1 di [4], si assume che per un'opportuna trasformazione μ da B in B lineare, continua ed invertibile la funzione $y+\mu(F(t,x,y))$ sia, rispetto ad y, lipschitziana con costante $L<1$ indipendente da t e da x.

Vengono, in tal modo, a sfuggire casi estremamente semplici, come, ad esempio, $F\equiv\vartheta_B$, ed altri (cfr. n. 3) non banali.

Nel presente lavoro noi dimostriamo un teorema più generale del Theorem 1 di [4], utilizzando una tecnica che permette di acquisire automaticamente per la soluzione del problema (1) anche l'ulteriore condizione $\dot{x}(t_0)=y_0$.

Fra le ipotesi del nostro teorema di esistenza non figura quella di lipschitzianità di cui s'è detto sopra, la quale viene sostituita da una più generale.

Tale risultato, dunque, generalizza quello già citato di R. CONTI, nel caso in cui $B=\boldsymbol{R}$.

Il lavoro è diviso in tre parti: nella prima viene dimostrato il teorema di esistenza delle soluzioni per il problema (1) (Teorema 1.1); nella seconda tale risultato viene esteso al caso in cui $a, b\in\boldsymbol{R}^+\cup\{+\infty\}$ (Teorema 2.1); nella terza, infine, vengono fatte alcune osservazioni e sono portati alcuni esempi di applicazione del Teorema 2.1.

1. - Un teorema di esistenza.

Per ogni $x\in B$ ed ogni $r\in\boldsymbol{R}^+$ poniamo

$$S(x,r)=\{y\in B\colon \|y-x\|\leqslant r\}$$

e $S(x,+\infty)=B$. Sia X una parte limitata di B. Dicesi misura di non compattezza di X secondo Kuratowski il numero $\alpha(X)$ così definito

$$\alpha(X)=\inf\Big\{\delta>0\colon \exists X_1,\dots,X_n\subseteq X,\ n\in N,\ \colon\bigcup_{i=1}^{n}X_i=X \text{ e } \operatorname{diam}(X_i)<\delta,\ i=1,\dots,n\Big\}.$$

Se V è una parte di B contenente X dicesi misura di non compattezza di X secondo Hausdorff relativamente a V, il numero $\gamma_V(X)$ così definito

$$\gamma_V(X)=\inf\Big\{r>0\colon \exists x_1,\dots,x_k\in V,\ k\in N,\ \colon X\subseteq\bigcup_{j=1}^{k}S(x_j,r)\Big\}.$$

Quando $V=B$ si suole porre $\gamma_V(X)=\gamma(X)$. Si verifica immediatamente che si ha

$$\gamma(X)\leqslant\gamma_V(X)\leqslant\alpha(X)\leqslant 2\gamma(X)\,. \tag{2}$$

Inoltre, si ha $\gamma(X)=0$ se e solo se X è relativamente compatto.

Si ha il seguente

TEOREMA 1.1. – *Valgano le ipotesi:*

1) *siano* $F(t, x, y)$ *una funzione definita in* R, *a valori in* B, *con* $F(t_0, x_0, y_0) = \vartheta_B$, $T(z)$ *una funzione da* B *in* B, *con* $T(z) = \vartheta_B$ *se e solo se* $z = \vartheta_B$, *e* $d(\varepsilon)$ *una funzione reale positiva definita in* $\mathbf{R}^+$, *con* $\liminf_{\varepsilon \to 0^+} d(\varepsilon) = 0$, *tali che, posto*

$$G(t, x, y) = y + T(F(t, x, y)), \qquad \forall (t, x, y) \in R,$$

per ogni $\varepsilon > 0$ *esista un* $\delta > 0$ *tale che se* $(t', x', y'), (t'', x'', y'') \in R$ *e* $|t' - t''| < \delta$, $\|x' - x''\| < \delta$, $\|y' - y''\| \leqslant d(\varepsilon)$ *allora risulta*

$$\|G(t', x', y') - G(t'', x'', y'')\| \leqslant d(\varepsilon);$$

2) *se* $c < +\infty$ *risulti*

$$\|G(t, x, y) - y_0\| \leqslant c \qquad \forall (t, x, y) \in R,$$

se $c = +\infty$ *la funzione* $G(t, x, y)$ *sia limitata in* R;

3) *detta* M *una costante positiva tale che* $M \geqslant \sup_R \|G(t, x, y)\|$ *e posto* $\delta^* = \min(a, b/M)$ *esistano una funzione* $\omega(t, u, v)\colon [t_0, t_0 + \delta^*[\times \mathbf{R}_0^+ \times \mathbf{R}_0^+ \to \mathbf{R}_0^+$, *non decrescente rispetto ad* u, *ed un numero* $\varrho > 0$ *tali che*

i) *per ogni* $\bar{t} \in]t_0, t_0 + \delta^*[$ *l'unica funzione reale* $v(t)$ *continua in* $[t_0, \bar{t}]$ *ed ivi soddisfacente le relazioni*

$$0 \leqslant v(t) < \varrho, \qquad v(t) \leqslant \omega\Big(t, \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau, v(t)\Big)$$

nonchè la condizione

$$v(t_0) = 0$$

sia la funzione identicamente nulla in $[t_0, \bar{t}]$,

ii) *sia soddisfatta almeno una delle due seguenti condizioni:*

a_1) *per ogni* $t \in]t_0, t_0 + \delta^*[$, $X \subseteq S(x_0, b)$, $Y \subseteq S(y_0, c)$, *con* $\alpha(X) < \varrho$ *e* $0 < \alpha(Y) < \varrho$, *si ha*

$$\alpha(G(t, X, Y)) \leqslant \omega(t, \alpha(X), \alpha(Y)),$$

a_2) *per ogni* $t \in]t_0, t_0 + \delta^*[$, $X \subseteq S(x_0, b)$, $Y \subseteq S(y_0, c)$, *con* $\gamma(X) < \varrho$ *e* $0 < \gamma(Y) < \varrho$ *si ha*

$$\gamma_{S(y_0, c)}(G(t, X, Y)) \leqslant \omega(t, \gamma(X), \gamma_{S(y_0, c)}(Y)).$$

In tali ipotesi, esiste almeno una funzione $x(t)$ a valori in B, fortemente continua assieme alla sua derivata prima (forte) in $[t_0, t_0 + \delta^*]$, ivi soddisfacente la relazione

$$F(t, x(t), \dot{x}(t)) = \vartheta_B$$

nonchè le condizioni

$$x(t_0) = x_0 , \quad \dot{x}(t_0) = y_0 .$$

DIMOSTRAZIONE. – È ovvio che per acquisire la tesi basta far vedere che il problema

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} y(t) = G\left(t, x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} y(\tau)\, d\tau, y(t)\right) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ammette almeno una soluzione fortemente continua in $[t_0, t_0 + \delta^*]$. Infatti, se $y(t)$ è una tale soluzione, allora la funzione $x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} y(\tau)\, d\tau$ soddisfa ai requisiti espressi nella tesi. Allo scopo di dimostrare che il problema (3) ammette almeno una soluzione fortemente continua in $[t_0, t_0 + \delta^*]$, utilizzeremo ragionamenti analoghi a quelli impiegati nella dimostrazione del Teorema 2.1 di [5]. Notato che la funzione $G(t, x, y)$, in virtù dell'ipotesi 1), risulta uniformemente fortemente continua in R, per ogni $n \in N$, poniamo:

$$z_n(t) = \begin{cases} G(t, x_0, y_0) & \forall t \in \left[t_0, t_0 + \dfrac{\delta^*}{n}\right] \\ G\left(t, x_0 + \int\limits_{t_0}^{t-\delta^*/n} z_n(\tau)\, d\tau, z_n\left(t - \dfrac{\delta^*}{n}\right)\right) & \forall t \in \left]t_0 + \dfrac{\delta^*}{n}, t_0 + \delta^*\right] . \end{cases}$$

Le funzioni della successione $\{z_n(t)\}$ sono equicontinue in $[t_0, t_0 + \delta^*]$. Infatti, fissato ad arbitrio un $\varepsilon > 0$ sia $\varepsilon^* > 0$ tale che $d(\varepsilon^*) < \varepsilon$. In corrispondenza ad ε^* esiste, per ipotesi, un $\delta > 0$ tale che se $(t', x', y'), (t'', x'', y'') \in R$ e $|t' - t''| < \delta$, $\|x' - x''\| < \delta$, $\|y' - y''\| \leq d(\varepsilon^*)$ allora si ha

$$\text{(4)} \qquad \|G(t', x', y') - G(t'', x'', y'')\| \leq d(\varepsilon^*) .$$

Posto $\delta' = \min(\delta, \delta/M, \delta^*)$ fissiamo un $n \in N$ tale che $n > 2\delta^*/\delta'$. Per ogni $k \in N$ con $1 \leq k \leq n$ poniamo, poi,

$$I_k = \left]t_0 + \frac{(k-1)\,\delta^*}{n}, t_0 + \frac{k\delta^*}{n}\right]$$

nonchè

$$I'_k = I_k \cap \left]t_0, t_0 + \delta'\right[.$$

Tenendo presenti la (4), la definizione della funzione $z_n(t)$, il fatto che $G(t_0, x_0, y_0) = y_0$ e la scelta di δ', segue subito che la relazione

$$\|y_0 - z_n(t)\| \leqslant d(\varepsilon^*) \tag{5}$$

è vera in I'_k, per ogni $k \geqslant 2$ tale che $I'_k \neq \emptyset$, non appena è vera in I_{k-1}. Da ciò segue che per ogni fissato $\bar{k} \geqslant 2$ tale che $I'_{\bar{k}} \neq \emptyset$ la (5) è vera in $I'_{\bar{k}}$ non appena lo sia in I_1. Ma se $t \in I_1$ allora, in virtù della (4), si ha

$$\|y_0 - z_n(t)\| = \|G(t_0, x_0, y_0) - G(t, x_0, y_0)\| \leqslant d(\varepsilon^*) ,$$

e, quindi, la (5) è vera in $I'_{\bar{k}}$. Da ciò segue che se $t_1 \in I_1 \cup \{t_0\}$ e $t_2 \in I'_k$, con $k \geqslant 1$, allora si ha

$$\|z_n(t_1) - z_n(t_2)\| \leqslant d(\varepsilon^*) . \tag{6}$$

Posto $\bar{\delta} = \delta'/2$, siano t', t'' due qualunque punti di $[t_0, t_0 + \delta^*]$, con $t' < t''$ e $t'' - t' < \bar{\delta}$, e sia $k' \in N$ tale che $t' \in I_{k'} \cup \{t_0\}$. Con gli stessi ragionamenti di prima si vede che si ha

$$\|z_n(t') - z_n(t'')\| \leqslant d(\varepsilon^*)$$

non appena si abbia

$$\left\| z_n\left(t' - \frac{(k'-1)\,\delta^*}{n}\right) - z_n\left(t'' - \frac{(k'-1)\,\delta^*}{n}\right) \right\| \leqslant d(\varepsilon^*) .$$

E quest'ultima relazione è vera in virtù di (6). In conclusione, allora, in corrispondenza al prefissato $\varepsilon > 0$ abbiamo determinato un $\bar{\delta} > 0$ tale che se $t', t'' \in [t_0, t_0 + \delta^*]$, $|t' - t''| < \bar{\delta}$ ed $n > \delta^*/\bar{\delta}$ si ha

$$\|z_n(t') - z_n(t'')\| \leqslant d(\varepsilon^*) < \varepsilon .$$

Tenendo presente l'uniforme forte continuità in $[t_0, t_0 + \delta^*]$ di ogni funzione $z_i(t)$, con $i = 1, \ldots, [\delta^*/\bar{\delta}]$, da quanto sopra segue subito l'asserita equicontinuità in $[t_0, t_0 + \delta^*]$ delle funzioni della successione $\{z_n(t)\}$. Per ogni $n \in N$ poniamo

$$y_n(t) = G\Big(t, x_0 + \int_{t_0}^{t} z_n(\tau)\, d\tau, z_n(t)\Big) , \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta^*] . \tag{7}$$

Ovviamente le funzioni della successione $\{y_n(t)\}$ sono equicontinue in $[t_0, t_0 + \delta^*]$ e, inoltre, vale la relazione

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n(t) - z_n(t)\| = 0 \quad \text{per ogni } t \in [t_0, t_0 + \delta^*] . \tag{8}$$

Supposto che dalla successione di funzioni $\{y_n(t)\}$ se ne possa estrarre una convergente in $[t_0, t_0 + \delta^*]$ verso una funzione $y(t)$, è immediato verificare, utilizzando (7) e (8), che tale funzione è soluzione fortemente continua del problema (3) in $[t_0, t_0 + \delta^*]$.

Posto, per ogni $t \in [t_0, t_0 + \delta^*]$,

$$Y(t) = \bigcup_{n=1}^{\infty} y_n(t) \qquad \text{nonchè} \qquad Z(t) = \bigcup_{n=1}^{\infty} z_n(t)\,, \tag{9}$$

il nostro teorema, per quanto sopra, risulterà completamente dimostrato non appena avremo fatto vedere che l'insieme $Y(t)$ è relativamente compatto in B, per ogni $t \in [t_0, t_0 + \delta^*]$, potendosi applicare, in tal caso, il teorema di Ascoli-Arzelà alla successione di funzioni $\{y_n(t)\}$. A tale scopo supponiamo, ad esempio, che valga la condizione a_2) dell'ipotesi 3). Da (8) segue facilmente, intanto, che si ha

$$\gamma(Y(t)) = \gamma(Z(t)) \quad \text{e} \quad \gamma_{S(y_0,c)}(Y(t)) = \gamma_{S(y_0,c)}(Z(t))\,, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta^*]\,. \tag{10}$$

Dall'equicontinuità delle funzioni della successione $\{y_n(t)\}$ segue, poi, la continuità delle funzioni $\gamma(Y(t))$ e $\gamma_{S(y_0,c)}(Y(t))$ in $[t_0, t_0 + \delta^*]$. Consideriamo, ora, il numero $\varrho > 0$ di cui all'ipotesi 3), e, posto $\varrho^* = \min(\varrho/2, \varrho/\delta^*)$, consideriamo l'insieme E così definito:

$$E = \{t \in]t_0, t_0 + \delta^*] : \gamma(Y(\tau)) < \varrho^* \text{ per ogni } \tau \in [t_0, t]\}\,.$$

Tale insieme, ovviamente, non è vuoto e dettone t^* l'estremo superiore si ha $E =]t_0, t^*)$. Dico che $\gamma(Y(t)) = 0$ $\forall t \in E$. Infatti, supponiamo, per assurdo, che esista un punto $\bar{t} \in]t_0, t^*[$ tale che $\gamma(Y(\bar{t})) > 0$. Fissiamo, poi, un qualunque punto $t \in]t_0, \bar{t}]$ tale che $\gamma(Y(t)) > 0$. In virtù del 3° asserto del Lemma 2 di [6] si ha

$$\gamma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t} z_n(\tau)\, d\tau\right) \leq \int_{t_0}^{t} \gamma(Z(\tau))\, d\tau\,. \tag{11}$$

Da (10) e (11), tenendo presente la scelta di ϱ^*, segue che

$$\gamma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t} z_n(\tau)\, d\tau\right) < \varrho \qquad \text{e} \qquad 0 < \gamma(Z(t)) < \varrho\,.$$

Possiamo, allora, applicare la condizione a_2) dell'ipotesi 3), in virtù della quale, tenendo presenti (2), (10), (11) ed il fatto che $\omega(t, u, v)$ è non decrescente rispetto ad u, si ha

$$\gamma_{S(y_0,c)}(Y(t)) \leqslant \gamma_{S(y_0,c)}\left(G\left(t, x_0 + \bigcup_{n=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t} z_n(\tau)\,d\tau, Z(t)\right)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \omega\left(t, \gamma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t} z_n(\tau)\,d\tau\right), \gamma_{S(y_0,c)}(Z(t))\right) \leqslant$$
$$\leqslant \omega\left(t, \int_{t_0}^{t} \gamma(Z(\tau))\,d\tau, \gamma_{S(y_0,c)}(Z(t))\right) \leqslant$$
$$\leqslant \omega\left(t, \int_{t_0}^{t} \gamma_{S(y_0,c)}(Z(\tau))\,d\tau, \gamma_{S(y_0,c)}(Z(t))\right) =$$
$$= \omega\left(t, \int_{t_0}^{t} \gamma_{S(y_0,c)}(Y(\tau))\,d\tau, \gamma_{S(y_0,c)}(Y(t))\right).$$

In definitiva, allora, per ogni $t \in [t_0, \bar{t}]$ si ha

$$0 \leqslant \gamma_{S(y_0,c)}(Y(t)) < 2\varrho^* \leqslant \varrho$$

e

$$\gamma_{S(y_0,c)}(Y(t)) \leqslant \omega\left(t, \int_{t_0}^{t} \gamma_{S(y_0,c)}(Y(\tau))\,d\tau, \gamma_{S(y_0,c)}(Y(t))\right),$$

e da ciò, in virtù della i) dell'ipotesi 3), segue che $\gamma_{S(y_0,c)}(Y(t)) = 0 \ \ \forall t \in [t_0, \bar{t}]$ e ciò è in contrasto col fatto che $\gamma(Y(\bar{t})) > 0$. Dunque si ha $\gamma(Y(t)) = 0 \ \ \forall t \in E$. Tenendo presente la definizione dell'insieme E segue subito che $t^* = t_0 + \delta^*$ e, quindi, si ha $\gamma(Y(t)) = 0$, $\forall t \in [t_0, t_0 + \delta^*]$, che è quanto volevamo dimostrare. Se, poi, valesse la condizione a_1) dell'ipotesi 3) si acquisirebbe ancora la tesi con la medesima tecnica testè usata. E con tale osservazione il nostro teorema è completamente dimostrato.

2. – Esistenza delle soluzioni in intervalli non (necessariamente) compatti.

Nel presente numero, vogliamo estendere il Teorema 1.1 al caso in cui $a, b \in \mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Si ha il seguente

TEOREMA 2.1. – *Valgano le ipotesi:*

1) *siano $F(t, x, y)$ una funzione definita nell'insieme R, ove $a, b \in \mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$, a valori in B, con $F(t_0, x_0, y_0) = \vartheta_B$, e $T(z)$ una funzione da B in B, con $T(z) = \vartheta_B$ se e solo se $z = \vartheta_B$, tali che, posto*

$$G(t, x, y) = y + T(F(t, x, y)) \qquad \forall (t, x, y) \in R,$$

risulti non vuoto l'insieme A *dei numeri reali* $\bar{t} \in]t_0, t_0 + a]$ *per cui esiste una funzione* $\bar{d}: \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^+$, *con* $\liminf_{\varepsilon \to 0^+} \bar{d}(\varepsilon) = 0$, *tale che per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un* $\delta > 0$ *tale che se* $t', t'' \in [t_0, \bar{t}]$, $x', x'' \in S(x_0, b)$, $y', y'' \in S(y_0, c)$, *e* $|t' - t''| < \delta$, $\|x' - x''\| < \delta$, $\|y' - y''\| \leqslant \bar{d}(\varepsilon)$ *allora si ha*

$$\|G(t', x', y') - G(t'', x'', y'')\| \leqslant \bar{d}(\varepsilon);$$

2) *se* $c < +\infty$ *risulti*

$$\|G(t, x, y) - y_0\| \leqslant c\,, \qquad \forall (t, x, y) \in R \quad \text{con } t \in A \cup \{t_0\}\,,$$

se $c = +\infty$ *esista una funzione reale* $M(t)$ *non negativa e continua in* $A \cup \{t_0\}$ *tale che*

$$\|G(t, x, y)\| \leqslant M(t)(1 + \lambda\|x - x_0\|)\,, \qquad \forall (t, x, y) \in R \quad \text{con } t \in A \cup \{t_0\}\,,$$

ove

$$\lambda = \begin{cases} 0 & \text{se } b < +\infty \\ 1 & \text{se } b = +\infty; \end{cases}$$

3) *detto* t^* *un punto di* $[t_0, \sup A]$ *tale che* $t^* - t_0 \leqslant b/(\|y_0\| + c)$ *ovvero tale che* $\int_{t_0}^{t^*} M(t)\, dt \leqslant b$ *secondo che* $b, c < +\infty$ *ovvero* $b < +\infty$ *e* $c = +\infty$, *posto* $t^* = \sup A$ *se* $b = +\infty$ *e posto, in ogni caso,*

$$A^* = \begin{cases} [t_0, t^*[& \text{se } t^* \notin A \\ [t_0, t^*] & \text{se } t^* \in A \end{cases}$$

esistano un numero $\varrho > 0$ *ed una funzione* $\omega(t, u, v): A^* \times \boldsymbol{R}_0^+ \times \boldsymbol{R}_0^+ \to \boldsymbol{R}_0^+$, *non decrescente rispetto ad* u, *tali che*

i) $\forall \bar{t} \in A^* - \{t_0, t^*\}$, *l'unica funzione reale* $v(t)$ *continua in* $[t_0, \bar{t}]$ *e ivi soddisfacente le relazioni*

$$0 \leqslant v(t) < \varrho\,, \qquad v(t) \leqslant \omega\Big(t, \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau, v(t)\Big)$$

nonchè la condizione

$$v(t_0) = 0$$

sia la funzione identicamente nulla in $[t_0, \bar{t}]$,

ii) *sia soddisfatta almeno una delle due seguenti condizioni*:

a_1) *per ogni* $t \in A^* - \{t_0, t^*\}$, $X \subseteq S(x_0, b)$, $Y \subseteq S(y_0, c)$, *con* $\alpha(X) < \varrho$ *e* $0 < \alpha(Y) < \varrho$, *si ha*

$$\alpha(G(t, X, Y)) \leq \omega(t, \alpha(X), \alpha(Y));$$

a_2) *per ogni* $t \in A^* - \{t_0, t^*\}$, $X \subseteq S(x_0, b)$, $Y \subseteq S(y_0, c)$, *con* $\gamma(X) < \varrho$ *e* $0 < \gamma(Y) < \varrho$, *si ha*

$$\gamma_{S(y_0,c)}(G(t, X, Y)) \leq \omega(t, \gamma(X), \gamma_{S(y_0,c)}(Y)) .$$

In tali ipotesi, vale la tesi del Teorema 1.1, *ove in luogo di* $[t_0, t_0 + \delta^*]$ *va posto* A^*.

DIMOSTRAZIONE. – Osserviamo, anzi tutto, che l'ipotesi 1) assicura che per ogni $\bar{t} \in A^* - \{t_0\}$ la funzione $G(t, x, y)$ è uniformemente fortemente continua in $[t_0, \bar{t}] \times S(x_0, b) \times S(y_0, c)$. Fissato un numero reale positivo δ (non maggiore di $t^* - t_0$ se $t^* < +\infty$) poniamo, per ogni $n \in N$,

$$z_n(t) = \begin{cases} G(t, x_0, y_0) & \forall t \in \left[t_0, t_0 + \dfrac{\delta}{n}\right], \\ G\left(t, x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t-\delta/n} z_n(\tau)\, d\tau, z_n\left(t - \dfrac{\delta}{n}\right)\right) & \forall t \in \left]t_0 + \dfrac{\delta}{n}, t^*\right] \cap \boldsymbol{R}. \end{cases}$$

Come di consueto, utilizzando il principio di induzione se $t^* = +\infty$, si vede subito che tale posizione è atta a definire la funzione $z_n(t)$ in tutto A^*; ivi, inoltre, si ha

$$\|z_n(t)\| \leq \begin{cases} \|y_0\| + c & \text{se } c < +\infty \\ M(t) \exp\left(\lambda \displaystyle\int_{t_0}^{t} M(\tau)\, d\tau\right) & \text{se } c = +\infty . \end{cases} \tag{12}$$

Tenendo presenti l'ipotesi 1) e la (12), con ragionamenti analoghi a quelli utilizzati nella dimostrazione del Teorema 1.1 si verifica che, per ogni fissato $\bar{t} \in A^* - \{t_0\}$, le funzioni della successione $\{z_n(t)\}$ sono equicontinue in $[t_0, \bar{t}]$ e che, adottate le posizioni (7) e (9) per ogni $t \in A^*$, l'insieme $Y(t)$ è relativamente compatto in B per ogni $t \in [t_0, \bar{t}]$; conseguentemente dalla successione di funzioni $\{y_n(t)\}$ se ne può estrarre una che converge uniformemente in $[t_0, \bar{t}]$, verso una funzione che ivi è soluzione del problema (3). Se, allora, $t^* \in A^*$ il teorema, per quanto detto, risulta dimostrato. Supponiamo, invece, che $t^* \notin A^*$. Fissiamo una successione crescente di punti di $A^* - \{t_0\}$, $\{t_k\}$, con $\lim_{k \to \infty} t_k = t^*$. Per quanto sopra esiste una successione $\{\{y_{kn}(t)\}_{n \in N}\}_{k \in N}$ di successioni di funzioni tale che:

b_1) $\{y_{kn}(t)\}_{n \in N}$ è un'estratta di $\{y_{k-1,n}(t)\}_{n \in N}$ per ogni $k \in N$, avendo posto $\{y_{0n}(t)\}_{n \in N} = \{y_n(t)\}_{n \in N}$;

b_2) $\{y_{kn}(t)\}_{n \in N}$ converge uniformemente in $[t_0, t_k]$ per ogni $k \in N$.

Considerata la successione di funzioni $\{y_{kk}(t)\}_{k\in N}$ è facile verificare che essa è un'estratta di $\{y_n(t)\}_{n\in N}$ e che converge uniformemente in ogni intervallo del tipo $[t_0, \bar{t}]$ con $\bar{t} \in A^* - \{t_0\}$. Posto

$$y(t) = \lim_{k\to\infty} y_{kk}(t) \qquad \forall t \in A^*,$$

la funzione $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} y(\tau)\, d\tau$ soddisfa ai requisiti espressi nella tesi del teorema in esame che, pertanto, risulta completamente dimostrato.

3. – Osservazioni ed esempi.

Osserviamo, anzi tutto, che se $\dim(B) < +\infty$ allora le ipotesi del Teorema 2.1 si riducono semplicemente a 1) e 2), poichè non v'è bisogno di verificare l'ipotesi 3) non essendovi, in tal caso, insiemi $Y \subseteq B$ limitati tali che $\alpha(Y) > 0$ oppure $\gamma(Y) > 0$. Osserviamo, inoltre, che dal Teorema 2.1 segue subito il seguente

COROLLARIO 3.1. – *Sia $F(t, x, y)$ una funzione soddisfacente alle ipotesi del Teorema 2.1, con $c = +\infty$. Allora, condizione necessaria affinchè il problema* (1) *abbia una sola soluzione è che l'equazione $F(t_0, x_0, y) = \vartheta_B$ abbia come unica soluzione la $y = y_0$.*

Per comodità di lettura, riportiamo adesso l'enunciato del Theorem 1 di [4], mantenendo le stesse notazioni da noi fin qui usate.

TEOREMA 3.1 (DOMINGUEZ BENAVIDES). – *Valgano le ipotesi:*

1) *sia $F(t, x, y)$ una funzione a valori in B, uniformemente fortemente continua in R, con $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, tale che $F(t_0, x_0, y_0) = \vartheta_B$;*

2) *esista $h \in \mathbf{R}^+$ tale che risulti soddisfatta almeno una delle due seguenti condizioni:*

a_1) *per ogni $t \in [t_0, t_0 + a]$, $X \subseteq S(x_0, b)$, $y \in S(y_0, c)$ si ha*

$$\gamma(F(t, X, y)) \leqslant h\gamma(X)\,,$$

a_2) *per ogni $t \in [t_0, t_0 + a]$, $X \subseteq S(x_0, b)$, $y \in S(y_0, c)$ si ha*

$$\alpha(F(t, X, y)) \leqslant h\alpha(X)\,;$$

3) *esistano una trasformazione μ da B in B lineare, continua, invertibile ed una costante reale non negativa L, con $L < 1$ oppure $L < \frac{1}{2}$ secondo che valga la a_1) oppure la a_2) di 2), tali che*

i) $\|y' - y'' + \mu(F(t, x, y') - F(t, x, y''))\| \leqslant L\|y' - y''\|\,, \quad \forall (t, x, y'), (t, x, y'') \in R\,,$

ii) $\|y + \mu(F(t, x, y)) - y_0\| \leqslant c \qquad \forall (t, x, y) \in R\,.$

In tali ipotesi, posto

$$\delta = \min\left(a, \frac{b}{\|y_0\| + c}, \frac{1-L}{4h}\right) \qquad oppure \qquad \delta = \min\left(a, \frac{b}{\|y_0\| + c}, \frac{1-2L}{2h}\right)$$

secondo che valga la a_1) *oppure la* a_1) *dell'ipotesi* 2), *esiste almeno una soluzione del problema* (1) *nell'intervallo* $[t_0, t_0 + \delta]$.

È facile verificare che le ipotesi di tale Teorema 3.1 rientrano in quelle del Teorema 1.1 e, quindi, in quelle del Teorema 2.1. Infatti, le ipotesi 1) e 3) del Teorema 3.1 implicano le ipotesi 1) e 2) del Teorema 1.1, pur di assumere come funzione T la trasformazione μ e come funzione d l'identità in $\boldsymbol{R}^+$. Supponiamo, poi, che valga la condizione a_1) (risp. a_2)) dell'ipotesi 2) del Teorema 3.1. In $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}_0^+\times\boldsymbol{R}_0^+$ consideriamo la funzione $\omega(t, u, v) = 2\|\mu\|hu + Lv$ (risp. $\omega(t, u, v) = \|\mu\|hu + 2Lv$). Tale funzione, qualunque sia $\varrho \in \boldsymbol{R}^+$, soddisfa alla i) dell'ipotesi 3) del Teorema 1.1, poichè $L < 1$ (risp. $L < \frac{1}{2}$), e soddisfa alla a_2) (risp. a_1)) della ii) di tale ipotesi, in virtù della (8) (risp. (7)) del Lemma 3.2 di [3].

Portiamo adesso due esempi di applicazione del Teorema 2.1, nei quali non è possibile applicare il Teorema 3.1, poichè di questo non è verificata la i) dell'ipotesi 3).

ESEMPIO 3.1. – Siano: $n \in N$; $\Gamma = \{1, 2, \dots, n\}$; A_i, B_i, C_i, $i = 1, \dots, n$, $3n$ parti non vuote di Γ; $\psi_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, n funzioni reali continue in $\boldsymbol{R}_0^+$, con $\psi_i(0) = 0$, $i = 1, \dots, n$; $P_i(t, s), Q_i(t, s)$, $i = 1, \dots, n$, $2n$ funzioni reali uniformemente continue in $\boldsymbol{R}_0^+\times\boldsymbol{R}_0^+$ ed $M^*(t)$ una funzione reale non negativa e continua in $\boldsymbol{R}_0^+$ tali che

$$P_i(0, 0) = 1\,, \quad |P_i(t, s)| \leq 1\,, \quad Q_i(0, 0) = 0\,, \quad |Q_i(t, s)| \leq M^*(t)(1 + s)$$
$$\forall i = 1, \dots, n \quad \text{e} \quad \forall (t, s) \in \boldsymbol{R}_0^+\times\boldsymbol{R}_0^+\,.$$

In tali ipotesi, esistono n funzioni reali, $x_1(t), \dots, x_n(t)$, di classe C^1 in $\boldsymbol{R}_0^+$ tali che

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \operatorname{sen}\left(\psi_i(t) + \max\limits_{k\in A_i} |\dot{x}_k(t)|\right) P_i\left(t, \max\limits_{k\in B_i} |x_k(t)|\right) + \\ \qquad\qquad + Q_i\left(t, \max\limits_{k\in C_i} |x_k(t)|\right) \quad \forall i = 1, \dots, n \ \text{e} \ \forall t \in \boldsymbol{R}_0^+, \\ x_i(0) = \dot{x}_i(0) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n\,. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. – Per acquisire la tesi applichiamo il Teorema 2.1, facendo le seguenti scelte: $B = \boldsymbol{R}^n$, con $\|x\| = \max\limits_{i\in\Gamma} |x_i|$, $\forall x \equiv (x_1, \dots, x_n) \in B$; $x_0 = y_0 = \vartheta_B$; $t_0 = 0$; $a = b = c = +\infty$. Consideriamo, poi, la funzione F che ad ogni $(t, x, y) \in R$, $x \equiv (x_1, \dots, x_n)$, $y \equiv (y_1, \dots, y_n)$, associa il vettore di B la cui i-esima componente è data da

$$\operatorname{sen}\left(\psi_i(t) + \max_{k\in A_i} |y_k|\right) P_i\left(t, \max_{k\in B_i} |x_k|\right) + Q_i\left(t, \max_{k\in C_i} |x_k|\right) - y_i\,.$$

Facciamo vedere che tale funzione F verifica le ipotesi del Teorema 2.1. Evidentemente $F(0, \vartheta_B, \vartheta_B) = \vartheta_B$. Con riferimento all'ipotesi 1), scelta come funzione T l'identità in B, si ha $A = \boldsymbol{R}^+$; infatti, fissati ad arbitrio un $\bar{t} \in \boldsymbol{R}^+$ ed un $\varepsilon \in]0, \pi/2]$, consideriamo due numeri $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in]0, \pi/2]$ tali che

$$\varepsilon_1 + \operatorname{sen} \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon}{2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

In corrispondenza ad $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, in virtù delle ipotesi fatte, si può trovare un $\delta > 0$ tale che per ogni $t', t'' \in [0, \bar{t}]$, per ogni $s', s'' \in \boldsymbol{R}_0^+$, con $|t' - t''| < \delta$ e $|s' - s''| < \delta$, e per ogni $i = 1, \ldots, n$, risulta

$$|P_i(t', s') - P_i(t'', s'')| < \varepsilon_1\,, \qquad |Q_i(t', s') - Q_i(t'', s'')| < \varepsilon_1\,, \qquad |\psi_i(t') - \psi_i(t'')| < \varepsilon_2\,.$$

Allora, per ogni $t', t'' \in [0, \bar{t}]$, $x' \equiv (x'_1, \ldots, x'_n)$, $x'' \equiv (x''_1, \ldots, x''_n)$, $y' \equiv (y'_1, \ldots, y'_n)$, $y'' \equiv$ $\equiv (y''_1, \ldots, y''_n) \in B$, con $|t' - t''| < \delta$, $\|x' - x''\| < \delta$ e $\|y' - y''\| \leqslant \varepsilon$, e per ogni $i = 1, \ldots, n$, si ha

$$\begin{aligned}
&\Big|\operatorname{sen}\Big(\psi_i(t') + \max_{k \in A_i} |y'_k|\Big) P_i\Big(t', \max_{k \in B_i} |x'_k|\Big) + Q_i\Big(t', \max_{k \in C_i} |x'_k|\Big) - \\
&\qquad - \operatorname{sen}\Big(\psi_i(t'') + \max_{k \in A_i} |y''_k|\Big) P_i\Big(t'', \max_{k \in B_i} |x''_k|\Big) - Q_i\Big(t'', \max_{k \in C_i} |x''_k|\Big)\Big| \leqslant \\
&\qquad \leqslant \Big|Q_i\Big(t', \max_{k \in C_i} |x'_k|\Big) - Q_i\Big(t'', \max_{k \in C_i} |x''_k|\Big)\Big| + \\
&\qquad + \Big|P_i\Big(t', \max_{k \in B_i} |x'_k|\Big) - P_i\Big(t'', \max_{k \in B_i} |x''_k|\Big)\Big| \Big|\operatorname{sen}\Big(\psi_i(t'') + \max_{k \in A_i} |y''_k|\Big)\Big| + \\
&\qquad + \Big|\operatorname{sen}\Big(\psi_i(t') + \max_{k \in A_i} |y'_k|\Big) - \operatorname{sen}\Big(\psi_i(t'') + \max_{k \in A_i} |y''_k|\Big)\Big| \Big|P_i\Big(t', \max_{k \in B_i} |x'_k|\Big)\Big| < \\
&\qquad < 2\varepsilon_1 + 2 \operatorname{sen} \frac{|\psi_i(t') - \psi_i(t'')| + \|y' - y''\|}{2} \leqslant 2\varepsilon_1 + 2 \operatorname{sen} \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

L'asserto segue scegliendo, ad esempio, come funzione $\tilde{d}$ quella così definita

$$\tilde{d}(\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon & \text{se } \varepsilon \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\[2ex] 2 + \varepsilon & \text{se } \varepsilon \in \left]\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right[\,. \end{cases}$$

Considerata la funzione $M(t) = M^*(t) + 1$, è subito visto che

$$\|G(t, x, y)\| \leqslant M(t)(1 + \|x\|)\,, \qquad \forall (t, x, y) \in R\,,$$

e con ciò anche l'ipotesi 2) rimane verificata. Come precedentemente osservato, nel caso in esame $(\dim(B) = n < +\infty)$ non occorre verificare l'ipotesi 3). Segue, allora, l'esistenza di almeno una funzione $x(t) \equiv (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ a valori in B, di classe C^1 in $\boldsymbol{R}_0^+$, tale che

$$\begin{cases} F(t, x(t), \dot{x}(t)) = \vartheta_B & \forall t \in \boldsymbol{R}_0^+ \\ x(0) = \dot{x}(0) = \vartheta_B \, . \end{cases}$$

Le funzioni $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ soddisfano i requisiti espressi nella tesi del presente Esempio. Facciamo vedere adesso che la funzione F non soddisfa l'ipotesi 3) del Teorema 3.1. Siano, pertanto, μ una trasformazione da B in B lineare ed invertibile ed L una costante reale non negativa e strettamente minore di 1. Esistono, allora, dei numeri reali a_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, tali che, per ogni $x \equiv (x_1, \ldots, x_n) \in B$, la i-esima componente di $\mu(x)$ è data da

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \, .$$

Osserviamo che per ogni fissato $\bar{\beta} \in \boldsymbol{R}$ la funzione reale $(1 - L)\tau + \bar{\beta}(\operatorname{sen} \tau - \tau)$ risulta crescente in 0. Da tale osservazione segue che è possibile fissare un numero reale $\tau' > 0$ tale che

$$(1 - L)\tau' + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\operatorname{sen} \tau' - \tau') > 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, n \, .$$

Detto y' il punto di B tale che $y' \equiv (\tau', \ldots, \tau')$, si ha

$$\|y' + \mu(F(0, \vartheta_B, y'))\| = \max_{i \in \Gamma} \left| \tau' + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\operatorname{sen} \tau' - \tau') \right| > L\tau' = L\|y'\| \, .$$

Da ciò segue l'asserto.

ESEMPIO 3.2. - Siano: B lo spazio delle successioni di numeri reali infinitesime, dotato dell'usuale norma $\|x\| = \max_{n \in N} |x_n|$, $\forall x \equiv \{x_n\} \in B$; $x_0 = y_0 = \vartheta_B$; $t_0 = 0$; $a = b = +\infty$; $c = \frac{1}{3}$; h una funzione da N in N, biunivoca e tale che $h(\bar{n}) = \bar{n}$ per almeno un $\bar{n} \in N$; ϱ un numero reale positivo, $P(t)$ una funzione reale non negativa definita in $\boldsymbol{R}_0^+$, limitata in ogni sottointervallo limitato di $\boldsymbol{R}_0^+$, e $Q(t, x)$ una funzione a valori in B, uniformemente continua in $\boldsymbol{R}_0^+ \times B$, tali che

$$Q(0, \vartheta_B) = \vartheta_B \, , \qquad \|Q(t, x)\| \leq \frac{1}{27} \qquad \forall (t, x) \in \boldsymbol{R}_0^+ \times B$$

e

$$\alpha(Q(t, X)) \leq P(t)[\alpha(X)]^3 \, , \qquad \forall X \subseteq B \, ,$$

con $\alpha(X) < \varrho$.

Posto

$$H(y) = \{(1 - y_{h(n)}^2) y_{h(n)}\} \, , \qquad \forall y \equiv \{y_n\} \in B \, ,$$

consideriamo la funzione $F: R \to B$ definita ponendo

$$F(t, x, y) = Q(t, x) + H(y) - y \qquad \forall (t, x, y) \in R .$$

Dico che tale funzione F soddisfa alle ipotesi del Teorema 2.1. Riferendoci all'ipotesi 1), è ovvio che $F(0, \vartheta_B, \vartheta_B) = \vartheta_B$.

Scelta come funzione T l'identità in B, facciamo vedere che $A = \boldsymbol{R}^+$. Infatti, fissato ad arbitrio un $\varepsilon \in]0, 2\cdot 3^{-\frac{3}{2}}]$ sia $\delta > 0$ tale che per ogni $(t', x'), (t'', x'') \in \boldsymbol{R}_0^+ \times B$, con $|t' - t''| < \delta$ e $\|x' - x''\| < \delta$, risulta

$$\|Q(t', x') - Q(t'', x'')\| < \varepsilon .$$

Con facili calcoli si verifica che per ogni $\tau', \tau'' \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ si ha

$$|(1 - \tau'^2)\tau' - (1 - \tau''^2)\tau''| \leq \left(1 - \frac{|\tau' - \tau''|^2}{4}\right)|\tau' - \tau''| .$$

Da questa relazione e dal fatto che la funzione reale $(1 - s^2/4)s$ è crescente in $[0, \frac{2}{3}]$, segue subito che per ogni $y', y'' \in S(\vartheta_B, \frac{1}{3})$ si ha

$$\|H(y') - H(y'')\| \leq \left(1 - \frac{\|y' - y''\|^2}{4}\right)\|y' - y''\| . \tag{13}$$

Dalla (13) segue, in definitiva, che per ogni $(t', x', y'), (t'', x'', y'') \in R$, con $|t' - t''| < \delta$, $\|x' - x''\| < \delta$ e $\|y' - y''\| \leq \sqrt[3]{4\varepsilon}$, si ha

$$\begin{aligned}\|G(t', x', y') - G(t'', x'', y'')\| &\leq \|Q(t', x') - Q(t'', x'')\| + \\ &+ \|H(y') - H(y'')\| < \varepsilon + \sqrt[3]{4\varepsilon} - \frac{4\varepsilon}{4} = \sqrt[3]{4\varepsilon} .\end{aligned}$$

L'asserto segue assumendo, per ogni $\bar{t} \in \boldsymbol{R}^+$, come funzione $\bar{d}$, ad esempio, quella così definita

$$\bar{d}(\varepsilon) = \begin{cases} \sqrt[3]{4\varepsilon} & \text{se } \varepsilon \in]0, 2\cdot 3^{-\frac{3}{2}}] \\ 2 \sup\limits_R \|G(t, x, y)\| & \text{se } \varepsilon \in]2\cdot 3^{-\frac{3}{2}}, +\infty[. \end{cases}$$

Per ogni $(t, x, y) \in R$ si ha

$$\|G(t, x, y)\| \leq \|Q(t, x)\| + \|H(y)\| \leq \frac{1}{27} + \frac{8}{27} = \frac{1}{3} .$$

E con ciò l'ipotesi 2) risulta verificata. Riferendoci, infine, all'ipotesi 3) assumiamo

$$\omega(t, u, v) = P(t)\, u^3 + \left(1 - \frac{v^2}{4}\right) v .$$

Se $\bar{t} \in \boldsymbol{R}^+$ e $v(t)$ è una funzione reale continua in $[0, \bar{t}]$ tale che

$$0 \leqslant v(t) \leqslant P(t)\left[\int_0^t v(\tau)\, d\tau\right]^3 + \left(1 - \frac{v^2(t)}{4}\right)v(t) \qquad \forall t \in [0, \bar{t}]$$

allora si ha

$$0 \leqslant v(t) \leqslant \left[4 \sup_{t \in [0,\bar{t}]} P(t)\right]^{\frac{1}{3}} \int_0^t v(\tau)\, d\tau \qquad \forall t \in [0, \bar{t}]$$

e da qui segue che $v(t) = 0 \;\; \forall t \in [0, \bar{t}]$.

Tenendo presenti la (13) e le ipotesi fatte sulla funzione $Q(t, x)$, si deduce subito che per ogni $t \in \boldsymbol{R}^+$, $X \subseteq B$, $Y \subseteq S(\vartheta_B, \frac{1}{3})$, con $\alpha(X) < \varrho$, si ha

$$\alpha\big(G(t, X, Y)\big) \leqslant P(t)[\alpha(X)]^3 + \left(1 - \frac{\alpha^2(Y)}{4}\right)\alpha(Y) = \omega\big(t, \alpha(X), \alpha(Y)\big)\,.$$

E con ciò l'ipotesi 3) risulta verificata.

Facciamo vedere adesso che la funzione F in esame non soddisfa l'ipotesi 3) del Teorema 3.1. Siano, pertanto, μ una trasformazione da B in B lineare, continua ed invertibile ed L una costante reale non negativa e strettamente minore di 1. Allora esistono dei numeri reali a_{nk}, $n, k = 1, 2, \ldots$, tali che per ogni $x \equiv \{x_n\} \in B$ la n- esima componente di $\mu(x)$ è data da

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\, x_k\,.$$

Senza ledere la generalità, possiamo supporre che l'$\bar{n}$ figurante nelle ipotesi del presente Esempio 3.2 valga 1. Sia τ' un numero reale positivo non maggiore di $\frac{1}{3}$ tale che

$$(1 - L)\tau' - a_{11}\tau'^3 > 0\,.$$

Denotiamo con y' il punto di B avente prima componente uguale a τ' e nulle tutte le altre. Allora si ha

$$\|y' + \mu(F(0, \vartheta_B, y'))\| =$$
$$= \max_{n \in N}\left|y'_n + \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}[(1 - y'^2_{h(k)})\, y'_{h(k)} - y'_k]\right| \geqslant |\tau' - a_{11}\tau'^3| > L\tau' = L\|y'\|\,.$$

E da ciò segue l'asserto.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. CONTI, *Sulla risoluzione dell'equazione $F(t, x, dx/dt) = 0$*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) **48** (1959), pp. 97-102.

[2] G. PULVIRENTI, *Equazioni differenziali in forma implicita in uno spazio di Banach*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) **56** (1961), pp. 177-192.

[3] T. DOMINGUEZ BENAVIDES, *An existence theorem for implicit differential equations in a Banach space*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) **118** (1978), pp. 119-130.

[4] T. DOMINGUEZ BENAVIDES, *Continuous dependence for implicit differential equations in Banach spaces*, Collect. Math., **31** (1980), pp. 205-216.

[5] B. RICCERI, *Sull'esistenza delle soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie negli spazi di Banach in ipotesi di Carathéodory*, Boll. Un. Mat. Ital., (5) **18**-C (1981), pp. 1-19.

[6] K. GOEBEL - W. RZYMOWSKI, *An existence theorem for the equations $x' = f(t, x)$ in Banach space*, Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., **18** (1970), pp. 367-370