Alcune osservazioni riguardanti i gruppi di Lie G_2 e Spin(7), candidati a gruppi di olonomia (*) (**).

STEFANO MARCHIAFAVA (Roma)

Summary. – *The Lie groups G_2 and* Spin(7) *can be considered as automorphisms groups of euclidean vector spaces (of dimension* 7, 8 *resp.) endowed with a suitable vector product (cfr.* [12]). *Here one put in evidence several geometric properties of certain special subspaces of such euclidean spaces and the manifolds of special subspaces are determined as well known homogeneous spaces. One considers also riemannian manifolds with holonomy group G_2 or* Spin(7) *establishing that in the analytic case the existence of a totally geodesic submanifold of codimension* 1 *imply local reducibility.*

Introduzione.

Fra i gruppi di Lie semplici che trovansi nella lista di E. CARTAN hanno recentemente attirato l'attenzione dei geometri differenziali i gruppi G_2 e Spin(7) (peraltro già interessanti nella costruzione di certi spazi omogenei) in quanto un ormai noto teorema di classificazione [1] li presenta come possibili gruppi di olonomia (eccezionali) per varietà riemanniane non simmetriche di dimensione rispettivamente 7 e 8.

D'altra parte, sempre di recente, alcuni autori che si sono occupati dello studio di tali gruppi hanno indicato come esso si inquadri in un comune ambito geometrico generale in relazione ad una opportuna nozione di «prodotto vettoriale» in uno spazio vettoriale euclideo; [9], [12].

Il presente lavoro ha come scopo da un lato quello di approfondire lo studio di G_2 e Spin(7) di per sè, con particolare riferimento a tale ultimo aspetto; dall'altro, di fornire alcuni risultati riguardanti appunto il citato problema di stabilire l'esistenza o meno di varietà riemanniane che li ammettono come gruppi di olonomia.

Nel primo ordine di idee si precisano e mettono in luce alcune proprietà dei gruppi G_2, Spin(7) pensati come quei gruppi di isometrie di R^7, R^8 rispettivamente che conservano un dato prodotto vettoriale. Ci occupiamo poi in dettaglio dello studio di certi sottospazi «speciali» (che qui chiamiamo *caratteristici*), che assumono un ruolo analogo a quello delle sezioni olomorfe nel caso delle strutture complesse e quaternionali nel caratterizzare la geometria di R^7 o R^8 in relazione alle azioni di G_2 o di Spin(7) rispettivamente.

(*) Entrata in Redazione il 7 giugno 1981.
(**) Lavoro svolto nell'ambito del «Gruppo Nazionale Strutture Algebriche, Geometriche e Applicazioni (Consiglio Nazionale delle Ricerche)».

In particolare, riusciamo a determinare le varietà dei sottospazi caratteristici per ciascun gruppo mostrando che per G_2 trattasi dello spazio omogeneo $G_2/SO(4)$, per Spin(7) della Grassmanniana $G_{4,7} = SO(7)/SO(4)\times SO(3)$.

Il risultato riguardo a G_2 presenta interesse anche perchè permette di dare una semplice interpretazione geometrica alla metrica G_2-invariante di $G_2/SO(4)$, in relazione alla quale tale spazio omogeneo compare tra gli spazi simmetrici irriducibili compatti e semplicemente connessi classificati da E. CARTAN.

Per quanto concerne lo studio delle varietà riemanniane M con gruppo di olonomia G contenuto in G_2 o Spin(7) prendiamo qui in esame l'ipotesi che una tale varietà ammetta una sottovarietà totalmente geodetica S di codimensione 1.

Partendo dalle relazioni che in riferimenti opportuni vengono allora ad essere valide per le componenti del tensore di curvatura e dei suoi derivati covarianti a seguito della ipotesi sul gruppo di olonomia di M e di quella sull'esistenza di S, perveniamo a dimostrare che ne risulta in ogni punto della sottovarietà S la riducibilità del gruppo di olonomia infinitesimale di M, isomorfo ad un sottogruppo del prodotto $1\times SU(3)$ nel caso $G = G_2$ o ad un sottogruppo del prodotto $1\times G_2$ nel caso $G = \mathrm{Spin}(7)$.

Nelle ipotesi di analiticità per M e S se ne trae poi che la varietà è localmente riducibile, localmente prodotto riemanniano di una varietà kähleriana a curvatura di Ricci nulla e di un aperto della retta euclidea se $G = G_2$, di una varietà con gruppo di olonomia contenuto in G_2 e di un aperto della retta euclidea se $G = \mathrm{Spin}(7)$.

Desidero ringraziare JACQUES LAFONTAINE per alcuni utili commenti riguardanti questo lavoro.

1. – Richiami sulla nozione di prodotto vettoriale in R^7.

È ben noto che il gruppo di Lie semplice, compatto e connesso, G_2 può essere pensato come gruppo degli automorfismi dell'algebra degli ottetti di Cayley.

Richiamiamo qui brevemente a tal proposito alcune nozioni rimandando alla bibliografia posta in fine, ed in particolare alla lettura di [9], per maggiori approfondimenti.

Sia C l'algebra sui reali degli ottetti di Cayley, pensata al solito generata dall'unità reale 1 e da 7 elementi puramente immaginari e_i $(i\in Z_7)$ per i prodotti dei quali valgono le

$$e_i^2 = -1\,; \qquad e_i\cdot e_{i+1} = e_{i+3}\,, \qquad e_{i+1}\cdot e_{i+3} = e_i\,, \qquad e_{i+3}\cdot e_i = e_{i+1} \qquad (i\in Z_7)\,.$$

Ogni $c\in C$ si scrive in modo unico come $c = a + x^0e_0 + \ldots + x^6e_6$ $(a\in R;\ x^i\in R,$ $i = 0, 1, \ldots, 6)$ ove $a = \mathrm{Re}\,(c)$ è la *parte reale* di c e $x^0e_0 + \ldots + x^6e_6 = \mathrm{Im}\,(c)$ è la *parte immaginaria*.

Identificati gli ottetti immaginari, della forma $x = \sum_{i\in Z_7} x^ie_i$, con i vettori $x =$

$= (x^0, \ldots, x^6)$ di R^7, la norma $N(x) = \sum_{i \in Z_7} (x^i)^2$ di un tale ottetto coincide con la norma del vettore $x = (x^0, \ldots, x^6)$ di R^7 dotato del prodotto scalare canonico $\langle x, y \rangle = \sum_{i \in Z_7} x^i y^i$.

Mediante il prodotto in C risulta allora definito in R^7 (facendo riferimento alla posta identificazione) un prodotto vettoriale $P: R^7 \times R^7 \to R^7$, col porre

$$P(x, y) = x \cdot y + \langle x, y \rangle\,, \qquad \forall x, y \in R^7$$

(è immediato verificare che $P(x, y)$ è sempre un ottetto immaginario risultando $\operatorname{Re}(x \cdot y) = -\langle x, y \rangle$).

Il prodotto P gode delle seguenti proprietà:

1.1) P è bilineare

1.2) $P(x, y)$ è ortogonale a entrambe i fattori x, y

1.3) la norma di $P(x, y)$ uguaglia quella del bivettore $x \wedge y$, ovvero

$$|P(x, y)|^2 = |x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2\,.$$

Se V^7 è uno spazio vettoriale reale 7-dimensionale dotato di un prodotto scalare definito positivo $\langle\,,\rangle$, *ogni prodotto vettoriale* P: $V^7 \times V^7 \to V^7$ *verificante le* 1, 2, 3) *è ottenibile nel modo anzidetto previa opportuna identificazione di* V^7 *con* R^7.

In corrispondenza, *il gruppo* G_2 *può anche caratterizzarsi come il gruppo degli automorfismi di* R^7 *che conservano il prodotto* P; e come tale lo penseremo appunto nel seguito.

Cominciamo qui a mettere in evidenza le seguenti proprietà del prodotto P, di cui faremo spesso uso più avanti, e che si ricavano a partire dalle 1), 2), 3).

1.4) *Per ogni* $x, y, z \in R^7$ *risulta*

1.4.1) $P(y, x) = -P(x, y)$

1.4.2) $\langle P(x, y), z \rangle = \langle P(z, x), y \rangle = P(y, z), x \rangle$

1.4.3) $\langle P(t, x), P(t, y) \rangle = |t|^2 \langle x, y \rangle - \langle t, x \rangle \langle t, y \rangle$

1.4.4) $P(x, P(x, y)) = \langle x, y \rangle x - \langle x, x \rangle y$

1.4.5) $P(x, P(y, z)) + P(P(x, y), z) = 2\langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z - \langle z, y \rangle x\,.$

DIM. – Per la 1.3) risulta sempre $P(x, x) = 0$ e la 1.4.1) segue dalla identità $P(x + y, x + y) = 0$ e dalla bilinearità di P.

La 1.4.2) discende dalla identità $\langle P(x, y + z), y + z \rangle = 0$ tenendo conto della bilinearità di P e del prodotto scalare.

La 1.4.3) si ricava tenendo conto che

$$\langle P(t, x), P(t, y)\rangle = \tfrac{1}{2}\left(|P(t, x + y)|^2 - |P(t, x)|^2 - |P(t, y)|^2\right)$$

e applicando la 1.3) per le norme a secondo membro.

Per dimostrare la 1.4.4) osserviamo dapprima che, facendo uso della 1.4.2) e successivamente della 1.4.3), per ogni t ortogonale a x, y risulta

$$\langle P(x, P(x, y)), t\rangle = \langle P(t, x), P(x, y)\rangle = 0 .$$

Dunque $P(x, P(x, y)) = ax + by$ per opportuni $a, b \in R$. Moltiplicando scalarmente ambo i membri di quest'ultima prima per x, poi per y e utilizzando di nuovo la 1.4.2) si trova rispettivamente: $a|x|^2 + b\langle y, x\rangle = 0$, $-|x|^2|y|^2 + \langle x, y\rangle^2 = a\langle x, y\rangle + b|y|^2$, dalle quali si ricava $a = \langle x, y\rangle$, $b = -|x|^2$.

La 1.4.5) si trae osservando che per la bilinearità di P

$$P(x, P(y, z)) + P(P(x, y), z) = P(P(x + z, y), x + z) - P(P(x, y), x) - P(P(z, y), z)$$

e applicando la 1.4.4) ai termini a secondo membro.

È facile mostrare, a partire dalle 1.4, che

1.5) *se x è un fissato versore di R^7, l'endomorfismo $Jy = P(x, y)$ di R^7 definisce una struttura complessa nel sottospazio S_x ortogonale a x. Inoltre, per $y, z \in S_x$ risulta*

$$\langle Jy, Jz\rangle = \langle y, z\rangle .$$

Osserviamo anche quanto segue.

Una base ortonormale $(e_0, \ldots, e_6)$ di R^7 per la quale valgono le

1.6) $$P(e_i, e_i) = 0\ , \quad P(e_i, e_{i+1}) = e_{i+3} \quad (i \in Z_7)$$

la diremo una *base adattata* di R^7 (rispetto al prodotto P).

Evidentemente *ogni automorfismo di G_2 trasforma basi adattate in basi adattate*; ma risulta anche, facilmente, che

1.7) *date comunque in R^7 due basi adattate $(e_0, \ldots, e_6)$, $(f_0, \ldots, f_6)$ l'automorfismo di R^7 che muta i vettori e_i della prima base nei corrispondenti f_i dell'altra $(i \in \mathbf{Z}_7)$ appartiene a G_2.*

Riuscirà anche utile ricordare che (cfr. ad es. [10])

1.8) *data comunque una terna ortonormale di vettori $x, y, z \in R^7$ con z ortogonale a $P(x, y)$ i vettori $e_0 = x$, $e_1 = y$, $e_2 = z$, $e_3 = P(x, y)$, $e_4 = P(e_1, e_2)$, $e_5 = P(e_2, e_3)$, $e_6 = P(e_3, e_4)$ costituiscono una base adattata $(e_0, \ldots, e_6)$ di R^7.*

2. – La varietà dei sottospazi caratteristici di R^7 in relazione all'azione di G_2.

Diremo *sottospazio caratteristico* di R^7 (rispetto a P), ogni sottospazio tridimensionale chiuso rispetto al prodotto P (1).

Ogni assegnata coppia di vettori indipendenti x, y in R^7 appartiene ad un ben determinato sottospazio caratteristico, quello generato dalla terna $x, y, P(x, y)$ (e che risulta effettivamente chiuso rispetto al prodotto P, come è facile verificare tenendo conto delle 1.1), 1.4.1), 1.4.4) (2)).

Indicheremo con V_c^3 un generico sottospazio caratteristico; con V_c^4 un sottospazio 4-dimensionale ortogonale ad un V_c^3 caratteristico.

Se x, y sono una coppia di vettori ortonormali appartenenti al sottospazio caratteristico V_c^3 allora $(x, y, P(x, y))$ è una base ortonormale per V_c^3, che diremo *base caratteristica* per tale sottospazio.

Evidentemente, *le basi caratteristiche* $(x, y, P(x, y))$ *determinano una orientazione in ciascun sottospazio caratteristico* V_c^3, che diremo *orientazione canonica.* Così anche ogni V_c^4 risulterà dotato di una orientazione canonica, indotta da quella canonica dell'ambiente R^7 e da quella canonica del suo ortogonale V_c^3 (considerando cioè in V_c^4 quelle basi (e_2, e_4, e_5, e_6) che si ottengono come in 1.8) a partire da basi caratteristiche di V_c^3).

2.1) *se V_c^4 è il sottospazio ortogonale al sottospazio caratteristico V_c^3, per ogni $x, y \in V_c^4$ risulta $P(x, y) \in V_c^3$.*

Scelta infatti una base adattata $(e_0, \ldots, e_6)$ con (e_0, e_1, e_3) base caratteristica per V_c^3 e (e_2, e_4, e_5, e_6) base per V_c^4 (come è sempre possibile, in infiniti modi, tenendo conto di 1.8)) dalle 1.6) risulta che per ogni coppia di indici $s, t \in (2, 4, 5, 6)$, $P(e_s, e_j) = e_a$ con $a \in (0, 1, 3)$; poichè P è bilineare ne segue appunto la 2.1).

In particolare,

2.2) *l'ortogonale V_c^4 di un sottospazio caratteristico V_c^3 non contiene alcun sottospazio caratteristico.*

È noto che *G_2 è transitivo sulle coppie ortonormali di vettori di R^7* (cfr. [6], pag. 327); poichè gli automorfismi di G_2 conservano il prodotto P se ne trae subito che *G_2 è transitivo sulle terne ortonormali del tipo* $(x, y, P(x, y))$.

(1) In [9] i sottospazi caratteristici vengono detti *speciali* ed in senso opportuno appaiono come una spontanea generalizzazione delle faccette caratteristiche nel caso complesso e quaternionale.

(2) Ragionando analogamente risulta che ogni vettore $x \in R^7$ appartiene a infiniti sottospazi caratteristici; questa è una differenza sostanziale rispetto al caso delle faccette caratteristiche nel caso complesso o quaternionale.

Dalle 1.8), 1.7) segue poi che G_2 *è transitivo sulle terne ortonormali del tipo* $(x, y, P(x, y))$.

Poichè, come si è già messo in evidenza, in ogni sottospazio caratteristico V_c^3 può assegnarsi una base ortonormale del tipo $(x, y, P(x, y))$, se ne ricava in particolare *che* G_2 *è transitivo sui sottospazi caratteristici.*

Mostriamo ora che

2.3) *il sottogruppo* H *delle trasformazioni di* G_2 *che mutano in sè un assegnato sottospazio caratteristico* V_c^3 *è isomorfo a* $SO(4)$; *tutti i sottogruppi* H *di tale tipo sono coniugati in* G_2 *mediante automorfismi interni.*

DIM. – Si pensi il sottospazio V_c^3 e l'ortogonale V_c^4 dotati ciascuno della metrica indotta da quella di R^7 e con le rispettive orientazioni canoniche. Ogni elemento di H induce in V_c^3 una trasformazione di $SO(3)$ e quindi una trasformazione di $SO(4)$ nell'ortogonale V_c^4. Viceversa, una trasformazione di $SO(4)$ nell'ortogonale V_c^4 può sempre estendersi, ed in un solo modo, ad una trasformazione di G_2 che muta in sè V_c^3. Infatti, scegliamo in R^7 una base adattata $(e_0, \dots, e_6)$ per la quale (e_0, e_1, e_3) costituiscono una base di V_c^3, e quindi (e_2, e_4, e_5, e_6) una base per l'ortogonale. Una trasformazione h di $SO(4)$ in V_c^4 corrisponde alla scelta in V_c^4 di una nuova base ortonormale (f_2, f_4, f_5, f_6) con f_2, f_4, f_5 terna arbitraria di vettori ortonormali: d'altra parte per ogni scelta arbitraria di f_2, f_4, f_5 e posto $f_0 = P(f_4, f_5)$, tenuto conto di 2.1) e di 1.8) risulta determinata una base adattata $(f_0, \dots, f_6)$ di R^7 con f_0, f_1, f_3 base ortonormale di V_c^3. La trasformazione di G_2 che muta la base $(e_0, e_1, \dots, e_6)$ inizialmente assegnata nella base $(f_0, \dots, f_6)$ muta in sè V_c^3 ed evidentemente induce sull'ortogonale di V_c^3 la trasformazione h di $SO(4)$ supposta assegnata. In conclusione, H è isomorfo a $SO(4)$.

Siano ora $V_c^3, 'V_c^3$ sottospazi caratteristici e H, H' i sottogruppi di G_2 ad essi associati come sopra. Scegliamo basi adattate $(e_0, \dots, e_6)$, $(f_0, \dots, f_6)$ in modo tale che (e_0, e_1, e_3), (f_0, f_1, f_3) costituiscano basi ortonormali di $V_c^3, 'V_c^3$ rispettivamente. Sia g la trasformazione di G_2 che muta una base nell'altra: evidentemente l'automorfismo interno definito da g in G_2 induce un isomorfismo tra i gruppi H, H'.

D'altra parte la validità dell'ultima affermazione nell'enunciato della proposizione 2.3) può anche ricavarsi direttamente da [8], ove si stabilisce appunto che tutti i sottogruppi isomorfi a $SO(4)$ sono coniugati in G_2.

Possiamo concludere che

2.4) *la varietà dei sottospazi caratteristici di* R^7 *relativamente al prodotto* P *è lo spazio omogeneo* $G_2/SO(4)$, (*quale viene considerato ad es. in* [7]).

Il risultato presenta interesse anche in base alle seguenti considerazioni.

$G_2/SO(4)$ dotato di una metrica G_2-invariante, individuata a meno di omotetie, è uno degli spazi simmetrici irriducibili classificati da E. Cartan [cfr. 19].

Ora, tenendo conto che i sottospazi caratteristici di R^7 hanno dimensione tre e da quanto abbiamo stabilito nella dimostrazione della 2.4), $G_2/SO(4)$ appare come una sottovarietà della Grassmanniana $G_{3,7} = SO(7)/SO(3)\times SO(4)$ dei sottospazi tridimensionali di R^7. Inoltre, la metrica di $G_{3,7}$ è $SO(7)$-invariante e così quella indotta su $G_2/SO(4)$ è ovviamente G_2-invariante, essendo G_2 un sottogruppo di $SO(7)$ che trasforma sottospazi speciali in sottospazi speciali.

3. – Varietà riemanniane con gruppo di olonomia G_2 o uno dei suoi sottogruppi.

Sia V^7 una varietà riemanniana (3) con gruppo di olonomia contenuto in G_2. Poichè G_2 lascia invariante il prodotto $P\colon R^7\times R^7 \to R^7$ risulterà definito su V^7 un prodotto vettoriale globale P. Cioè, in ogni punto p di V^7 lo spazio tangente T_p sarà dotato di un prodotto vettoriale $P\colon T_p\times T_p \to T_p$ verificante le 1.1), 1.2), 1.3) variabile differenziabilmente; inoltre tale prodotto sarà conservato dal trasporto per parallelismo. (Cfr. [15, pag. 113.)

Diremo *riferimento adattato* in p un riferimento ortonormale $(e_0, e_1, \ldots, e_6)$ di T_p per il quale i vettori e_i verificano le relazioni 1.6).

In un riferimento adattato l'algebra di Lie di G_2 coincide con l'algebra delle matrici antisimmetriche $A = (A_{ij})$, $(i, j \in Z_7)$, soddisfacenti le relazioni

$$A_{i+1,i+3} + A_{i+4,i+5} + A_{i+2,i+6} = 0 \qquad (i \in Z_7)\,.$$

(Cfr. ad es. [7], pag. 527).

Poichè, come si sa, per ogni coppia di vettori $x, y \in T_p$ la forma di curvatura $\Omega_p(x, y)$ è un elemento dell'algebra di Lie di G_2, [15], presi $x = e_l$, $y = e_m$ ne risulterà che le componenti del tensore di curvatura verificano le relazioni

$$R_{lm\,i+1\,i+3} + R_{lm\,i+2\,i+6} + R_{lm\,i+4\,i+5} = 0 \tag{3.1}$$

qualunque siano $l, m, i \in Z_7$.

Inoltre (cfr. ad es. [15], pag. 133) per il derivato covariante k-esimo $\overset{(k)}{\nabla} R$ di R $(k = 1, \ldots)$ varranno le

$$\nabla_{i_1}\ldots\nabla_{i_k}R_{lm\,i+1\,i+3} + \nabla_{i_1}\ldots\nabla_{i_k}R_{lm\,i+2\,i+6} + \nabla_{i_1}\ldots\nabla_{i_k}R_{lm\,i+4\,i+5} = 0 \tag{3.2}$$

qualunque siano $i_1, \ldots, i_k, l, m, i \in Z_7$.

È noto che le 3.1), utilizzate assieme alle identità che in generale soddisfa il tensore di curvatura di una varietà riemanniana, implicano che V^7 *è a curvatura di Ricci nulla* (cfr. per es. [3], [5]).

---

(3) Che supporremo sempre connessa e di classe C^∞.

Riuscirà utile osservare a proposito delle 3.1), 3.2) che

3.3) OSSERVAZIONE. – *Per ogni fissato indice* $i \in Z_7$ *le coppie ordinate* (e_{i+1}, e_{i+3}), (e_{i+4}, e_{i+5}), (e_{i+2}, e_{i+6}) *dei vettori della base* (e_j) *sono precisamente quelle fra i vettori* $e_0, \ldots, e_6$ *il cui prodotto è* e_i.

3.4) OSSERVAZIONE. – *Le coppie* (e_{i+1}, e_{i+3}), (e_{i+4}, e_{i+5}), (e_{i+2}, e_{i+6}) *sono costituite dai vettori della base ortogonali a* e_i, *ed ogni vettore della base il quale sia ortogonale a* e_i *vi compare esattamente una volta.*

In relazione ad una fissata base adattata $(e_0, \ldots, e_6)$ porremo poi la seguente:

3.5) CONVENZIONE. – Se due indici $h, k \in (0, \ldots, 6)$ sono tali che $P(e_h, e_k) = \pm e_i$ diremo brevemente che la coppia (h, k) è «*associata*» all'indice i; e quando occorra preciseremo dicendo che è *associata positivamente* o *negativamente* all'indice i a seconda che l'uguaglianza supposta verificata valga con il segno $+$ o il segno $-$.

4. – Sull'esistenza di sottovarietà totalmente geodetiche di dimensione 6 in una varietà riemanniana con gruppo di olonomia G_2 o uno dei suoi sottogruppi.

Sia V^7 una varietà riemanniana con gruppo di olonomia contenuto in G_2:
Osserviamo esplicitamente che una tale V^7 *è orientata*, potendosi ridurre il gruppo strutturale del fibrato tangente ad un sottogruppo di $SO(7)$.
Indichiamo al solito con P il prodotto vettoriale che risulta definito su V^7.
Ricordiamo che vale la seguente proposizione (cfr. [12])

4.1) PROPOSIZIONE. – *Sia* V^6 *una sottovarietà, di dimensione* 6, *orientabile, di* V^7. *Scelta una orientazione,* V^6 *risulta dotata di una struttura complessa* J, *definibile a partire dal prodotto* P; *inoltre la metrica indotta da quella di* V^7 *su* V^6 *è hermitiana in relazione a tale struttura complessa. Infine, se* V^6 *è totalmente geodetica tale metrica è Kähleriana e il gruppo di olonomia di* V^6 *è contenuto in* $SU(3)$.

DIM. – Per ogni punto $p \in V^6$ pensiamo lo spazio tangente $T_p(V^6)$ immerso in $T_p(V^7)$. Scelta una orientazione di V^6 è possibile, in relazione alla orientazione di V^7, definire un campo differenziabile n di versori normali a V^6 in V^7 ($n_p \in T_p(V^7)$ è un versore ortogonale a $T_p(V^6)$ per ogni $p \in V^6$).

Per ogni vettore $x \in T_p(V^6)$ si pone allora $J_p(x) = P(n_p, x)$ definendo così, in base a quanto osservato al n. 1, una struttura complessa J su V^6.

Indicato con $\langle\, ,\rangle_p$ il prodotto scalare in $T_p(V^6)$, restrizione del prodotto scalare in $T_p(V^7)$, risulta sempre, tenendo conto della 1.5), $\langle x, y\rangle_p = \langle Jx, Jy\rangle_p$, $\forall x, y \in T_p(V^6)$; sicchè V^6 è hermitiana.

Su V^7 è sempre $\nabla_x P = 0$; se V^6 è totalmente geodetica per ogni $x \in T_p(V^6)$ si ha anche $\nabla_x n = 0$ e dunque su $V^6 \nabla J = 0$.

L'ultima osservazione circa il gruppo di olonomia di una V^6 totalmente geodetica in V^7, il quale in questo caso è un sottogruppo del gruppo di olonomia di V^7, si ricava pensando che per ogni punto $p \in V^6$ il trasporto parallelo lungo cappi di origine p contenuti in V^6 dà luogo ad automorfismi di $T_p(V^7)$ che lasciano fisso n_p e che il sottogruppo degli automorfismi di G_2 che lasciano fisso un assegnato vettore di $T_p(V^7)$ è isomorfo a $SU(3)$. (Cfr. [12], prop. 2.1.)

Se V^6 è una varietà kähleriana con gruppo di olonomia contenuto in $SU(3)$ il prodotto riemanniano $V^7 = V^6 \times R'$ di V^6 per un aperto R' della retta euclidea R è evidentemente una varietà riemanniana con gruppo di olonomia isomorfo a $SU(3)$, dunque un sottogruppo di G_2.

È chiaro che un tale esempio di varietà con gruppo di olonomia contenuto in G_2 è privo di interesse con riferimento al gruppo G_2 stesso; ciò che ha interesse invece nell'ordine di idee in cui qui ci poniamo è la considerazione di varietà V^7 con gruppo di olonomia *esattamente* G_2.

Nel presente paragrafo mostreremo che l'esistenza di una sottovarietà totalmente geodetica, 6-dimensionale, V^6 in una V^7 con gruppo di olonomia contenuto in G_2 implica condizioni molto forti, e tali da comportare, in opportune ipotesi sulla classe di differenziabilità delle varietà in considerazione, la locale riducibilità di V^7 stessa.

Più precisamente, stabiliremo che in generale vale la seguente

4.2) PROPOSIZIONE. – *Sia V^7 una varietà riemanniana, C^∞, con gruppo di olonomia contenuto in G_2 e V^6 una sottovarietà totalmente geodetica, 6-dimensionale. In ogni punto $p \in V^6$ il gruppo di olonomia infinitesimale* [4] *σ_p di V^7 è riducibile, isomorfo ad un sottogruppo di $SU(3)$.*

Nel caso analitico il gruppo di olonomia infinitesimale coincide con il gruppo di olonomia (cfr. ad es. [15], pag. 145). Avendo presente che in generale, la riducibilità del gruppo di olonomia implica che la varietà sia almeno localmente un prodotto riemanniano (cfr. ad es. [15], pag. 148), dalla 4.2) seguirà subito che

4.3) PROPOSIZIONE. – *Ogni varietà V^7 riemanniana, analitica, con gruppo di olonomia contenuto in G_2 la quale ammetta una sottovarietà, di dimensione* 6, *(analitica), totalmente geodetica, è localmente un prodotto riemanniano $V^6 \times R'$ di una varietà kähleriana V^6 con gruppo di olonomia contenuto in $SU(3)$ e di un aperto R' della retta euclidea R.*

5. – Facciamo ora alcune considerazioni preliminari alla dimostrazione della 4.2). Sia dunque V^7 una varietà riemanniana, che per il momento supponiamo solo C^∞,

---

(4) La cui nozione verrà richiamata più avanti.

con gruppo di olonomia contenuto in G_2 e supponiamo che V^7 contenga una sottovarietà totalmente geodetica V^6, di dimensione 6.

Ricordiamo che in tali ipotesi *il tensore di curvatura* R' *di* V^6 *e i suoi derivati covarianti* $\overset{(k)}{\nabla} R'$ $(k = 1, 2, \dots)$ *si ottengono per restrizione dal tensore di curvatura* R *di* V^7 *e dai suoi derivati covarianti* $\overset{(k)}{\nabla} R$ $(k = 1, 2, \dots)$ *rispettivamente* (5).

Terremo spesso conto di ciò, anche senza farne esplicita menzione.

Sia ora p un punto fissato di V^6; $n_p \in T_p(V^7)$ il versore normale in p a V^6. In $T_p(V^7)$ scegliamo una base adattata costituita da vettori $(e_0, e_1, \dots, e_6)$ con $e_0 \equiv n_p$: consideriamo poi il sistema di coordinate normali di origine p, basato su $(e_0, e_1, \dots, e_6)$.

AVVERTENZE. – 1) Nelle relazioni che considereremo nel seguito ometteremo di indicare, sottointendendolo, che le componenti dei tensori che vi intervengono si pensano in effetti calcolate in p.

2) *Useremo sistematicamente lettere greche per denotare indici che si intendono variabili solo nell'insieme* $(1, \dots, 6)$ *e lettere latine per indici variabili nell'insieme* $(0, 1, \dots, 6)$.

Si è già messo in evidenza al n. 3 che per ogni indice $i \in (0, 1, \dots, 6)$ vi sono esattamente tre coppie distinte di indici associate ad i. In quanto segue ci si servirà in modo essenziale della seguente ulteriore

1) OSSERVAZIONE. – Una coppia di indici del tipo $(\gamma, 0)$ è associata ad un indice $\alpha \in (1, \dots, 6)$ e le altre due distinte coppie di indici associate al medesimo α sono del tipo (λ, μ), (ϱ, τ) per opportuni indici $\lambda, \mu, \varrho, \tau \in (1, \dots, 6)$.

Notiamo ora che per la scelta di coordinate fatta e dall'essere V^6 totalmente geodetica, in p risulta

$$5.1)\qquad R_{\alpha\beta\gamma 0} = 0\,, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, 6$$

e

$$5.2)\qquad \nabla_{\varrho_1} \dots \nabla_{\varrho_k} R_{\alpha\beta\gamma 0} = 0 \ (^6)\,, \quad \varrho_1, \dots, \varrho_k, \alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, 6;\ k = 1, 2, \dots .$$

Inoltre, se assieme alle 5.1), 5.2) si tiene anche conto delle 3.1), 3.2), valide in p per la scelta della base $(e_0, \dots, e_6)$, risulta anche

$$5.3)\qquad R_{\alpha 0 \beta 0} = 0\,, \quad \forall \alpha, \beta = 1, \dots, 6$$

e

$$5.4)\qquad \nabla_{\varrho_1} \dots \nabla_{\varrho_k} R_{\alpha 0 \beta 0} = 0 \ (^7)\,, \quad \forall \varrho_1, \dots, \varrho_k, \alpha, \beta = 1, \dots, 6\,.$$

(5) Cfr. ad es. [11], Vol. II, pag. 58.

(6) La validità delle 5.1), 5.2) potrebbe anche ricavarsi tenendo conto che per la 4.1) V^6 risulta dotata localmente di una struttura kähleriana e utilizzando le 3.1), 3.2).

(7) Le 5.3), 5.4) potrebbero anche ricavarsi, tenuto conto di quanto richiamato all'inizio di questo numero, come conseguenza dell'annullarsi della curvatura di Ricci di V^7 e di V^6.

Infatti, in base alla precedente osservazione 1), le componenti del tipo $R_{\alpha 0\beta 0}$ possono esprimersi, utilizzando le 3.1), mediante componenti con un solo indice uguale a 0, cioè

$$R_{\alpha 0\beta 0} = -R_{\lambda\mu\beta 0} - R_{\varrho\tau\beta 0}$$

per opportuni $\lambda, \mu, \varrho, \tau$, e queste ultime sono nulle per le 5.1).

Analogamente, utilizzando le 3.2),

$$\nabla_{\varrho_1} \dots \nabla_{\varrho_k} R_{\alpha 0\beta 0} = -\nabla_{\varrho_1} \dots \nabla_{\varrho_k} R_{\lambda\mu\beta 0} - \nabla_{\varrho_1} \dots \nabla_{\varrho_k} R_{\lambda\mu\beta 0}$$

per opportuni indici $\lambda, \mu, \varrho, \tau$, ed utilizzando le 5.2) se ne ricava la 5.4).

Le 5.1), 5.2), 5.3), 5.4) esprimono l'annullarsi in p di alcune componenti del tensore di curvatura R e dei suoi derivati covarianti ove compare una o più volte l'indice 0. Mostriamo ora che più in generale

LEMMA. – *Nel riferimento scelto in p risultano nulle tutte le componenti del tensore di curvatura e di ogni suo derivato covariante k-esimo ($k = 1, 2, \dots$) per le quali almeno uno degli indici che vi compaiono è uguale a 0; cioè*

$$R_{ijlm} = 0 \,, \qquad \nabla_{s_1} \dots \nabla_{s_k} R_{ijlm} = 0$$

se almeno uno tra gli indici i, j, l, m, rispettivamente $s_1, \dots, s_k, i, j, l, m$ è uguale a 0.

DIM. – L'asserzione è senz'altro vera per le componenti di R poichè sussistono le 5.1), 5.3).

Verifichiamo ora la validità del lemma anche per le componenti del derivato covariante primo di R ($k = 1$).

In effetti, le 5.2), 5.4) per $k = 1$ ci dicono intanto che sono nulle alcune delle dette componenti di ∇R, cioè

5.5) $$\nabla_\varrho R_{\alpha\beta\gamma 0} = 0 \,, \quad \nabla_\varrho R_{\alpha 0\beta 0} = 0 \,, \quad \forall \varrho, \alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, 6 \,.$$

Le altre componenti ove almeno uno degli indici è uguale a 0 sono del tipo $\nabla_0 R_{ijhk}$: anche esse risultano nulle utilizzando le identità di Bianchi, le 3.2) e le 5.5).

In effetti, usando Bianchi e successivamente le 5.5) si ha

$$\nabla_0 R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\nabla_\delta R_{\alpha\beta 0\gamma} - \nabla_\gamma R_{\alpha\beta\delta 0} = 0 \,,$$

e

$$\nabla_0 R_{\alpha\beta\gamma 0} = -\nabla_\beta R_{0\alpha\gamma 0} - \nabla_\alpha R_{\beta 0\gamma 0} = 0 \,.$$

Infine, utilizzando le 3.1) e le due precedenti

$$\nabla_0 R_{\alpha 0\beta 0} = -\nabla_0 R_{\varrho\tau\beta 0} - \nabla_0 R_{\lambda\mu\beta 0} = 0 \,.$$

Procediamo ora per induzione. Supponiamo che per $0 \leqslant q \leqslant k$ siano nulle in p tutte quelle componenti del derivato covariante q-esimo di R, $\overset{(q)}{\nabla} R$, ove uno degli indici almeno è uguale a 0 e mostriamo che la medesima osservazione è vera allora anche per $q = k + 1$.

Innanzi tutto, per le 5.2) e 5.4) si ha

$$\nabla_{\varrho_1} \dots \nabla_{\varrho_{k+1}} R_{\alpha\beta\gamma 0} = 0 \,, \qquad \nabla_{\varrho_1} \dots \nabla_{\varrho_{k+1}} R_{\alpha 0 \beta 0} = 0 \,. \tag{5.6}$$

Notiamo poi che sempre in base all'oss. 1 le componenti del tipo $\nabla_{s_1} \dots \nabla_{s_{k+1}} R_{\alpha\beta\varrho 0}$ e $\nabla_{s_1} \dots \nabla_{s_{k+1}} R_{\alpha 0 \beta 0}$ sono esprimibili, facendo uso delle 3.2), mediante somme di componenti del tipo $\nabla_{s_1} \dots \nabla_{s_{k+1}} R_{\alpha\beta\gamma\delta}$: dunque resta solo da *mostrare che sono nulle le componenti del tipo* $\nabla_{s_1} \dots \nabla_{s_{k+1}} R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ *se almeno uno degli indici* $s_1, \dots, s_{k+1}$ *è uguale a* 0.

A tale scopo cominciamo con l'osservare che, *per l'ipotesi induttiva fatta, risulta sempre*

$$\nabla_{\varrho_1} \dots \nabla_{\varrho_k} \nabla_0 R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \,. \tag{5.7}$$

Infatti, usando dapprima Bianchi e tenendo poi conto delle 5.6) si ha

$$\nabla_{\varrho_1} \dots \nabla_{\varrho_k} \nabla_0 R_{\alpha\beta\gamma\varrho} = - \nabla_{\varrho_1} \dots \nabla_{\varrho_k} \nabla_\beta R_{0\alpha\gamma\delta} - \nabla_{\varrho_1} \dots \nabla_{\varrho_k} \nabla_\alpha R_{\beta 0 \gamma\delta} = 0 \,.$$

Facciamo ora vedere che *se fra gli indici* $s_1, \dots, s_{k+1}$ *ve ne sono* r, $1 \leqslant r \leqslant k + 1$, *uguali a* 0 *allora* $\nabla_{s_1} \dots \nabla_{s_{k+1}} R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ *può esprimersi come somma di componenti del tipo* $\nabla_{t_1} \dots \nabla_{t_{k+1}} R_{\lambda\mu\varrho\tau}$ *con al più* $r - 1$ *tra gli indici* $t_1, \dots, t_{k+1}$ *uguali a* 0.

Sia infatti $a \in (1, \dots k + 1)$ il massimo intero per il quale $i_a = 0$. Usando l'identità di Ricci si può scrivere

$$\begin{aligned} \nabla_{s_1} \dots \nabla_{s_{a-1}} \nabla_0 \nabla_{s_{a+1}} \dots \nabla_{s_{k+1}} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = {} & \nabla_{s_1} \dots \nabla_{s_{a-1}} \nabla_{s_{a+1}} \nabla_0 \nabla_{s_{a+2}} \dots \nabla_{s_{k+1}} R_{\alpha\beta\gamma\delta} - \\ & - \sum_{i=0}^{6} \nabla_{s_1} \dots \nabla_{s_{a-1}} (R_{0 s_{a+1} s_{a+2} i} \nabla_i \nabla_{s_{a+3}} \dots \nabla_{s_{k+1}} R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \dots + \\ & + R_{0 s_{a+1} s_{a+m+1} i} \nabla_{s_{a+2}} \dots \nabla_{s_{a+m}} \nabla_i \nabla_{s_{a+m+2}} \dots \nabla_{s_{k+1}} R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \dots + \\ & + R_{0 s_{a+1} s_{k+1} i} \nabla_{s_{a+2}} \dots \nabla_{s_k} \nabla_i R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{0 s_{a+1} \alpha i} \nabla_{s_{a+2}} \dots \nabla_{s_{k+1}} R_{i\beta\gamma\delta} \\ & + R_{0 s_{a+1} \beta i} \nabla_{s_{a+1}} \dots \nabla_{s_{k+1}} R_{\alpha i \gamma\delta} + R_{0 s_{a+1} \gamma i} \nabla_{s_{a+2}} \dots \nabla_{s_{k+1}} R_{\alpha\beta i \delta} + \\ & + R_{0 s_{a+1} \delta i} \nabla_{s_{a+2}} \dots \nabla_{s_{k+1}} R_{\alpha\beta\gamma i}) \,. \end{aligned}$$

Ma gli addendi che compaiono nella sommatoria a secondo membro sono tutti esprimibili mediante somme di prodotti di componenti di derivati covarianti $\overset{(r)}{\nabla} R$, $\overset{(s)}{\nabla} R$ di R con $0 \leqslant r \leqslant k$, $0 \leqslant s \leqslant k$ $(\overset{(0)}{\nabla} R \equiv R)$ in almeno una delle quali compare l'indice 0 e quindi nulla per l'ipotesi induttiva. Dunque

$$\nabla_{s_1} \dots \nabla_{s_{a-1}} \nabla_0 \nabla_{s_{a+1}} \dots \nabla_{s_{k+1}} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \nabla_{s_1} \dots \nabla_{s_{a-1}} \nabla_{s_{a+1}} \nabla_0 \nabla_{s_{a+2}} \dots \nabla_{s_{k+1}} R_{\alpha\beta\gamma\delta} \,.$$

Iterando il ragionamento

$$\nabla_{s_1}\ldots\nabla_{s_{a-1}}\nabla_0\nabla_{s_{a+1}}\ldots\nabla_{s_{k+1}}R_{\alpha\beta\gamma\delta}=\nabla_{s_1}\ldots\nabla_{s_{a-1}}\nabla_{s_{a+1}}\nabla_0\nabla_{s_{a+2}}\ldots\nabla_{s_{k+1}}R_{\alpha\beta\gamma\delta}=$$
$$=\nabla_{s_1}\ldots\nabla_{s_{a-1}}\nabla_{s_{a+1}}\nabla_{s_{a+2}}\nabla_0\nabla_{s_{a+3}}\ldots\nabla_{s_{k+1}}R_{\alpha\beta\gamma\delta}=\ldots=$$
$$=\nabla_{s_1}\ldots\nabla_{s_{a-1}}\nabla_{s_{a+2}}\ldots\nabla_{s_{k+1}}\nabla_0R_{\alpha\beta\gamma\delta}\,.$$

Da cui

$$\nabla_{s_1}\ldots\nabla_{s_{a-1}}\nabla_0\nabla_{s_{a+1}}\ldots\nabla_{s_{k+1}}R_{\alpha\beta\gamma\delta}=\nabla_{s_1}\ldots\nabla_{s_{a-1}}\nabla_{s_{a+1}}\nabla_{s_{a+2}}\ldots\nabla_{s_{k+1}}\nabla_0R_{\alpha\beta\gamma\delta}\,. \tag{5 8)}$$

Utilizzando l'identità di Bianchi per l'espressione a secondo membro si ha

$$\nabla_{s_1}\ldots\nabla_{s_{k+1}}R_{\alpha\beta\gamma\delta}=-\nabla_{s_1}\ldots\nabla_{s_{a-1}}\nabla_{s_{a+1}}\ldots\nabla_{s_{k+1}}\nabla_\beta R_{0\alpha\gamma\delta}-$$
$$-\nabla_{s_1}\ldots\nabla_{s_{a-1}}\nabla_{s_{a+1}}\ldots\nabla_{s_{k+1}}\nabla_\alpha R_{\beta 0\gamma\delta}$$

e facendo uso delle 3.2) per ciascuna delle componenti a secondo membro

$$\nabla_{s_1}\ldots\nabla_{s_{k+1}}R_{\alpha\beta\gamma\delta}=-\nabla_{s_1}\ldots\nabla_{s_{a-1}}\nabla_{s_{a+1}}\ldots\nabla_{s_{k+1}}\nabla_\beta R_{\lambda\mu\gamma\delta}-$$
$$-\nabla_{s_1}\ldots\nabla_{s_{a-1}}\nabla_{s_{a+1}}\ldots\nabla_{s_{k+1}}\nabla_\beta R_{\varrho\tau\gamma\delta}-$$
$$-\nabla_{s_1}\ldots\nabla_{s_{a-1}}\nabla_{s_{a+1}}\ldots\nabla_{s_{k+1}}\nabla_\alpha R_{\varepsilon\eta\gamma\delta}-$$
$$-\nabla_{s_1}\ldots\nabla_{s_{a-1}}\nabla_{s_{a+1}}\ldots\nabla_{s_{k+1}}\nabla_\alpha R_{\zeta\theta\gamma\delta}$$

per opportuni indici $\lambda, \mu, \varrho, \tau, \varepsilon, \eta, \zeta, \theta\in(1, \ldots, 6)$.

Risulta così appunto che la componente $\nabla_{s_1}\ldots\nabla_{s_{k+1}}R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ove r degli indici di derivazione covariante si sono supposti coincidenti con 0 può essere espressa mediante la somma di componenti del tipo $\nabla_{t_1}\ldots\nabla_{t_{k+1}}R_{\lambda\mu\gamma\delta}$ ove al più $r-1$ degli indici di derivazione covariante sono uguali a 0.

Ora, applicando successivamente il procedimento sopra illustrato si potrà esprimere ogni componente $\nabla_{s_1}\ldots\nabla_{s_{k+1}}R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ *come somma di componenti del tipo* $\nabla_{\lambda_1}\ldots\nabla_{\lambda_{a-1}}\cdot\nabla_0\nabla_{\lambda_{a+1}}\ldots\nabla_{\lambda_{k+1}}R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ *ove uno solo degli indici di derivazione covariante è uguale a zero.* Anzi, tenendo conto delle 5.8), mediante componenti del tipo $\nabla_{\lambda_1}\ldots\nabla_{\lambda_k}\nabla_0R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ con solo il $k+1$-esimo indice di derivazione covariante uguale a 0. Ma queste componenti sono tutte nulle poichè si è già osservato che nelle ipotesi in cui ci siamo posti valgono le 5.7).

La dimostrazione del lemma è così completata.

Ricordiamo ora che il gruppo di olonomia infinitesimale σ'_p in un punto p di V^7 è un sottogruppo connesso del gruppo di olonomia σ_p e che, in relazione ad un riferimento adattato fissato in p, l'algebra di Lie di σ'_p è generata dagli endomorfismi

$A = (A_{ij})$ di $T_p(V^7)$ per i quali

$$A_{ij} = \nabla_{r_1} \dots \nabla_{r_k} R_{lmij}$$

ove $k = 0, 1, 2, \dots$ e gli indici $r_1, \dots, r_k, l, m$ sono pensati fissati (arbitrariamente [8]).

Poggiando nel lemma precedente, se $p \in V^6$ l'algebra di Lie di σ'_p risulta coincidere con quella generata dalle trasformazioni $A = (A_{ij})$ per le quali

$$A_{i0} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, 6) \quad \text{e} \quad A_{\alpha\beta} = \nabla_{\varrho_1} \dots \nabla_{\varrho_k} R_{\lambda\mu\alpha\beta}$$

con $\varrho_1, \dots, \varrho_k, \lambda, \mu \in (1, \dots, 6)$ fissati.

Poichè, come si è richiamato all'inizio di questo numero, il tensore di curvatura $'R$ di V^6 coincide con la restrizione del tensore di curvatura R di V^7, se ne deduce che l'algebra di Lie di σ'_p è isomorfa all'algebra di Lie del gruppo di olonomia infinitesimale di V^6 in p; da cui è immediato trarre la 4.2).

6. – Cenno alla estensione di alcuni dei risultati precedenti al caso di Spin(7).

Richiamiamo qui brevemente alcune nozioni relative al gruppo Spin(7), rimandando ai lavori [5], [9], [12], [14] citati in bibliografia per quelle dimostrazioni che qui vengono omesse del tutto o che non siano evidenti con riferimento alle analoghe per G_2.

Ricordiamo che Spin(7) può essere presentato, in modo analogo a quanto visto per G_2, come segue.

Si pensi R^8 identificato con l'algebra C mediante la corrispondenza che all'ottetto $c = a + \sum_{i=0}^{6} x^i e_i$ associa il vettore $x = (x_0, \dots, x^6, x^7 = a)$ di R^8.

Si considerino i prodotti vettoriali

$$\tilde{P}_i \colon R^8 \times R^8 \times R^8 \to R^8 \quad (i = 1, 2)$$

definiti rispettivamente mediante le

$$\text{6.1)} \qquad \tilde{P}_1(x, y, z) = -x(\bar{y}z) + \langle x, y\rangle z + \langle y, z\rangle x - \langle z, x\rangle y$$

$$\text{6.2)} \qquad \tilde{P}_2(x, y, z) = -(x\bar{y})z + \langle x, y\rangle z + \langle y, z\rangle x - \langle z, x\rangle y$$

per ogni $x, y, z \in R^8 \equiv C$.

---

(8) Cfr. per es. [11], Vol. I, pag. 152.

Ciascuno di tali prodotti verifica le proprietà seguenti:

6.3) $\tilde{P}_i$ è bilineare

6.4) $$\langle \tilde{P}_i(x_1, x_2, x_3), x_j \rangle = 0 , \quad j = 1, 2, 3$$

6.5) $$|\tilde{P}_i(x_1, x_2, x_3)|^2 = \det(\langle x_h, x_k \rangle) .$$

Viceversa, se V è uno spazio vettoriale reale con prodotto scalare definito positivo ogni prodotto vettoriale $\tilde{P}\colon V \times V \times V \to V$ verificante le 6.3), 6.4), 6.5), previa opportuna identificazione con R^8 coincide con uno dei prodotti $\tilde{P}_i$.

Il gruppo Spin(7) *può caratterizzarsi come il gruppo degli automorfismi di R^8 che conservano uno* (comunque scelto) *dei prodotti $\tilde{P}_i$.*

Indicheremo nel seguito con $\tilde{P}$ uno di tali prodotti, supposto assegnato.

7. – Ad ogni base normale di C corrisponde una base $(e_0, e_1, \dots, e_7)$ di R^8 verificante le condizioni

$$\tilde{P}(e_7, e_i, e_{i+1}) = e_{i+3} , \qquad i \in Z_7$$

che diremo una *base adattata* di R^8 (rispetto al prodotto $\tilde{P}$).

Ogni automorfismo di Spin(7) muta basi adattate in basi adattate e viceversa.

Come per G_2 anche in questo caso l'azione di Spin(7) su R^8 individua dei *sottospazi caratteristici*, V_c^4, di dimensione reale 4, caratterizzati dall'essere chiusi rispetto al prodotto $\tilde{P}$.

Si può vedere facilmente che, comunque sia data una terna ortonormale x, y, z di vettori di R^8 la quaterna $x, y, z, \tilde{P}(x, y, z)$ genera uno di tali sottospazi caratteristici.

Inoltre, l'ortogonale di un sottospazio caratteristico è a sua volta un sottospazio caratteristico.

Spin(7) *è transitivo sui sottospazi caratteristici.*

Mostriamo che

7.1) PROPOSIZIONE. – *Il sottogruppo H di* Spin(7) *che lascia invariante un fissato sottospazio caratteristico V_c^4 è isomorfo a* $\mathrm{Sp}(1)\times\mathrm{Sp}(1)\times\mathrm{Sp}(1)/Z_2$, *ove* $Z_2 = \{(1, 1, 1), (-1, -1, -1)\}$. *Inoltre tutti tali sottogruppi sono tra loro coniugati mediante automorfismi interni di* Spin(7).

DIM. – Ricordiamo che fatta come d'uso l'identificazione $Q \equiv R^4$ fra il corpo Q dei quaternioni e lo spazio Euclideo 4-dimensionale R^4 (pensando il quaternione $q = a + ib + jc + kd$ coincidente con il vettore (a, b, c, d), per ogni assegnata coppia (a, q) di quaternioni di norma unitaria la trasformazione $T_{a,q}\colon Q \to Q$ definita da $z' = azq$, $\forall z \in Q$, è un elemento di $SO(4)$; inoltre $T_{a',q'} \equiv T_{a,q}$ se e solo se $(a', q') = (\pm a, \pm q)$ e ne risulta un isomorfismo $SO(4) \simeq \mathrm{Sp}(1)\times\mathrm{Sp}(1)/Z_2$ (essendo Sp(1) il gruppo moltiplicativo dei quaternioni di norma unitaria e $Z_2 = \{(1,1), (-1,-1)\} \subset \subset \mathrm{Sp}(1)\times\mathrm{Sp}(1)$.

Ora qui, per comodità di dimostrazione, penseremo come in [18] gli elementi di C quali coppie di quaternioni $c = [z_1, z_2]$ ove la somma e il prodotto sono definiti ponendo

$$c + c' = [z_1 + z_1', z_2 + z_2'] , \qquad c\cdot c' = [z_1 z_1' - \bar{z}_2' z_2, z_2' z_1 + z_2 \bar{z}_1']$$

per $c = [z_1, z_2]$, $c' = [z_1', z_2']$, e il coniugato di c è $\bar{c} = [\bar{z}_1, -z_2]$.

Penseremo poi R^8 identificato con $Q\times Q \equiv R^4\times R^4$.

È immediato verificare usando le 6(1 o 2) che il sottospazio di $R^8 \equiv C$ costituito dagli ottetti del tipo $[z_1, 0]$ è chiuso rispetto a ciascuno dei prodotti $\tilde{P}_i$, e quindi caratteristico: lo indicheremo con V_c^4 mentre con $'V_c^4$ denoteremo il suo ortogonale, costituito dagli ottetti del tipo $[0, z_2]$ e pur esso caratteristico.

È una semplice verifica diretta, a partire dalla definizione di $\tilde{P}_1$ (risp. $\tilde{P}_2$), che ogni automorfismo di R^8 definito dalle

$$7.1.1) \qquad \left\{\begin{array}{l} z_1' = a_1 z_1 q \\ z_2' = a_2 z_2 q \end{array}\right. , \quad \forall [z_1, z_2] \in C \quad \left(\text{risp. } 7.1.2) \begin{array}{l} z_1' = \bar{q} z_1 \bar{a}_1 \\ z_2' = -a_2 z_2 q \end{array}\right)$$

ove a_1, a_2, q sono quaternioni di norma unitaria, lascia invariati V_c^4, $'V_c^4$ e conserva $\tilde{P}_1$ (risp. $\tilde{P}_2$).

Dunque H contiene in ciascun caso il sottogruppo delle trasformazioni 7.1 (1 o 2 a seconda che appunto ci si riferisca al prodotto $\tilde{P}_1$ o $\tilde{P}_2$), il quale, come è facile verificare, è isomorfo a $\mathrm{Sp}(1)\times\mathrm{Sp}(1)\times\mathrm{Sp}(1)/Z_2$; d'altra parte l'asserito isomorfismo tra H e quest'ultimo segue poi tenendo conto che un tale sottogruppo è un sottogruppo di Lie connesso massimale in Spin(7) (cfr. [8]). Inoltre, sempre in base a quanto viene dimostrato in [8], tutti i sottogruppi H del tipo considerato sono coniugati mediante automorfismi interni di Spin(7).

Risulta così che (cfr. [19], pag. 284)

7.2) *La varietà dei sottospazi caratteristici di* R^8 (rispetto ad uno qualunque dei prodotti $\tilde{P}_i$) *è lo spazio omogeneo* $SO(7)/SO(4)\times SO(3)$, *ovvero la Grassmanniana* $G_{4,7}$.

8. – Sia $\tilde{P}$ un assegnato 3-prodotto vettoriale in R^8 e $(e_0, e_1, \dots, e_7)$ una base ortonormale adattata.

Identificata come d'uso l'algebra di Lie di SO(8) con l'algebra delle trasformazioni lineari antisimmetriche di R^8, l'algebra di Lie di Spin(7) coincide con le trasformazioni lineari antisimmetriche $A = (A_{ij})$ verificanti le relazioni (indipendenti)

$$8.1) \qquad A_{7i} + A_{i+1,i+3} + A_{i+4,i+5} + A_{i+2,i+6} = 0 \qquad (i \in Z_7) .$$

9. – Sia V^8 una varietà riemanniana con gruppo di olonomia contenuto in Spin(7); V^7 una sottovarietà totalmente geodetica di V^8.

Scegliamo in $p \in V^7$ una base adattata $(e_0, e_1, \dots, e_7)$ di $T_p(V^8)$ per la quale e_7 coincide con il versore normale a V^7 in p stesso.

Consideriamo il sistema normale di coordinate di origine p basato su $(e_0, \dots, e_7)$.

Usiamo lettere latine per indici variabili nell'insieme $(0, 1, \dots, 7)$; lettere greche per indici variabili nell'insieme $(0, \dots, 6)$.

In p valgono le

9.1) $$\nabla_{i_1} \dots \nabla_{i_k} R_{lm7i} + \nabla_{i_1} \dots \nabla_{i_k} R_{lmi+1\,i+3} + \nabla_{i_1} \dots \nabla_{i_k} R_{lmi+4\,i+5} + \\ + \nabla_{i_1} \dots \nabla_{i_k} R_{lmi+2\,i+6} = 0 \qquad (k = 0, 1, \dots;\ l, m, i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, 7)\,.$$

Inoltre poichè V^7 è supposta totalmente geodetica, sempre in p si hanno le

9.2) $$\nabla_{\varrho_1} \dots \nabla_{\varrho_k} R_{\alpha\beta\gamma 7} = 0\,, \qquad \forall \varrho_1, \dots, \varrho_k, \alpha, \beta, \gamma = 0, \dots, 6;\ k = 0, 1, \dots\,.$$

Ragionando come fatto al n. 5 nell'analogo caso per G_2, combinando le 9.1) e le 9.2), risulta che

9.3) *nel riferimento scelto sono nulle in p tutte le componenti del tensore di curvatura e dei suoi derivati covarianti non appena uno degli indici sia uguale a* 7; *cioè*

$$\nabla_{i_1} \dots \nabla_{i_k} R_{rslm} = 0$$

se (almeno) uno degli indici $i_1, \dots, i_k, r, s, l, m$ è uguale a 7.

Ne discende, tenuto conto che il sottogruppo degli automorfismi di Spin(7) che lasciano fisso un assegnato vettore è isomorfo a G_2, che

9.4) PROPOSIZIONE. – *In ogni punto $p \in V^7$ il gruppo di olonomia infinitesimale σ'_p di V^8 è riducibile, isomorfo ad un sottogruppo di G_2. Se la varietà V^8 e la sottovarietà V^7 sono analitiche allora V^8 è localmente un prodotto riemanniano di un aperto di V^7 e di un aperto R' della retta euclidea R.*

BIBLIOGRAFIA

[1] M. BERGER, *Sur les groupes d'holonomie homogènes des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes*, Bull. Soc. Math. France, **83** (1955), pp. 279-330.

[2] M. BERGER, *Sur les variétés d'Einstein compactes*, CR. II Réunion Math. Expression Latine, Namur (1965), pp. 35-55.

[3] M. BERGER, *Remarques sur les groupes d'holonomie des variétés riemanniennes*, C. R. Acad. Sci. Paris, **262** (1966), pp. 316-318.

[4] M. BERGER, *Trois remarques sur les variétés riemanniennes à courbure positive*, C. R. Acad. Sci. Paris, **263** (1966), pp. 76-78.

[5] E. BONAN, *Sur les variétés riemanniennes à groupe d'holonomie G_2 ou* Spin(7), C. R. Acad. Sci. Paris, **262** (1966), p. 127.

[6] A. BOREL, *Sur l'homologie et la cohomologie des groupes de Lie compacts connexes*, Americ. Journal of Math., **76** (1954).

[7] A. BOREL - F. HIRZEBRUCH, *Characteristic classes and homogeneous spaces*, Amer. Journal of Math., **80** (1958), pp. 458-538.

[8] A. BOREL - J. DE SIEBENTHAL, *Sur les sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie compacts connexes*, Comment. Math. Helv., **23** (1949), pp. 200-221.

[9] R. B. BROWN - A. GRAY, *Vector cross products*, Comment. Math. Helv., **42** (1967), pp. 222-236.

[10] N. JACOBSON, *Composition algebras and their automorphisms*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **7** (1958), pp. 55-80.

[11] S. KOBAYASHI - K. NOMIZU, *Foundations of differential geometry*, vol. I e II, Tracts in mathematics n. 15, Interscience (1963).

[12] A. GRAY, *Vector cross products on manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc., **14** (1968), pp. 465-504.

[13] A. GRAY, *A note on Riemannian manifolds with holonomy group* $\mathrm{Sp}(n)\,\mathrm{Sp}(1)$, Michigan Math. J., **16** (1969), pp. 125-128.

[14] A. GRAY, *Weak holonomy groups*, Math. Z., **123** (1971), pp. 290-300.

[15] A. LICHNEROWICZ, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Ed. Cremonese, Roma (1962).

[16] D. MONTGOMERY - H. SAMELSON, *Transformation groups of spheres*, Ann. of Math., **44** (1943), pp. 454-470.

[17] J. SIMONS, *On transitivity of holonomy systems*, Ann. of Math., **76** (1962), pp. 213-234.

[18] N. STEENROD, *The topology of fibre bundles*, Princeton University Press, Princeton (1951).

[19] J. A. WOLF, *Spaces of constant curvature*, McGraw-Hill Book Company, New York (1967).