Soluzioni periodiche di equazioni ellittiche totalmente non lineari (*) (**).

ANGELO ALVINO - GUIDO TROMBETTI (Napoli)

Summary. – *Existence theorems for periodic solutions of totaly non linear elliptic equations are given.*

Sunto. – *In questo lavoro dimostriamo due teoremi di esistenza di soluzioni periodiche per due classi di equazioni ellittiche totalmente non lineari.*

In una recente memoria [2] A. CANFORA ha studiato i seguenti problemi:

P$_1$) $\lambda v + F(D_x^2 v, D_y^2 v) = f(x, y)\,, \quad f(x, y), v(x, y) \in C_\#^\infty$

dove $F(\xi, \eta) \in C^\infty(R^2)$, $\lambda \in R_+$, $C_\#^\infty = \{u \in C^\infty(R^2)$ con u periodica in x e y di periodo $1\}$:

$$|D_\xi^h D_\eta^k F| \leqslant N_{h+k}\,, \quad -N_1 \leqslant D_\xi F,\ D_\eta F \leqslant -\nu < 0\,.$$

P$_2$) $\lambda v + F(D_x^4 v, D_y^4 v) = f(x, y)\,, \quad f(x, y), v(x, y) \in C_\#^\infty$

nelle ipotesi $F \in C^\infty(R^2)$, $\lambda \in R^+$, $|D_\xi^h D_\eta^k F| \leqslant N_{h+k}$:

a) $0 < \nu \leqslant D_\xi F,\ D_\eta F \leqslant N_1$;

b) $\inf \dfrac{(D_\xi F + D_\eta F + \lambda)^2}{(D_\xi F)^2 + (D_\eta F)^2 + \lambda^2} > 2\,.$

I risultati fondamentali di tale lavoro sono due teoremi di esistenza per i problemi P$_1$) e P$_2$).

La dimostrazione si ottiene in entrambi i casi strutturando $C_\#^\infty$ come spazio numerabilmente normato ed applicando un risultato di Caccioppoli relativo alle applicazioni continue, aperte e proprie (cfr. par. 1).

In questo lavoro estendiamo il risultato relativo al problema P$_1$) ad un'equa-

(*) Entrato in Redazione il 22 aprile 1981.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R.

zione di forma più generale del tipo:

P$_3$) $\lambda v + F(D_y^2 v, D_{xx}^2 v, D_y^2 v, D_x v, D_y v, v) = f(x, y)$

dove $f(x, y)$ e $v(x, y) \in C_\#^\infty$, $\lambda \in R^+$:

$|F_{\xi_i}(\xi)| \leq M$, $\quad |D_\xi^\alpha F| \leq c_\alpha[1 + |\xi|]^{\eta_\alpha}$, $\quad \eta_\alpha \geq 0$,

$0 < \nu|\eta|^2 \leq F_{\xi_1}(\xi)\eta_1^2 + F_{\xi_2}(\xi)\eta_1\eta_2 + F_{\xi_3}\eta_2^2 \leq M|\eta|^2$, $\quad \forall \xi \in R^6$, $\forall \eta \in R^2$.

Il procedimento utilizzato è analogo a quello seguito da CANFORA in [2]; si utilizza in luogo del risultato di CAMPANATO [1] un risultato di TALENTI [9].

Diamo un esempio di equazione verificante le ipotesi del problema P$_3$):

$$F(\xi) = \sum_{i=1}^{6} \int_0^{\xi_i} \operatorname{sen} P_i(t)\, dt + K \sum_{i=1}^{3} \xi_i \qquad K > 3$$

dove $P_i(t)$ sono polinomi in t di grado arbitrario. Si verifica facilmente che con tale scelta di F sono verificate le ipotesi del problema P$_3$).

Diamo poi un teorema di esistenza per un'equazione non lineare del tipo

P$_4$) $\lambda v + F(D_x^{2m} v, \ldots, D_y^{2m} v, D_x^{2m-1} v, \ldots, v) = f$

nelle ipotesi $F \in C^\infty$, $f, v \in C_\#^\infty$, λ « abbastanza grande »

$|D_{\xi_i} F(\zeta)| \leq M$, $\quad |D^\alpha F| \leq c_\alpha[1 + |\zeta|]^{\eta_\alpha}$, $\quad \forall_\alpha \geq 0$

e sostituendo la ipotesi *a*) con un'opportuna ipotesi di ellitticità e la *b*) con un'ipotesi tipo CORDES, per altro già introdotta da GIAQUINTA in [6].

Per ottenere il suddetto teorema di esistenza è stato necessario estendere alcuni risultati di Giaquinta e Campanato alle equazioni di ordine superiore nell'ambito di spazi di funzioni periodiche.

1. – Definizioni e richiami.

Richiamiamo alcune nozioni relative agli spazi numerabilmente normati, rinviando per una più ampia trattazione a [2], [7].

Assegnate due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ su di uno spazio vettoriale Φ, si dicono concordanti se *per ogni successione di Cauchy rispetto ad entrambe le norme*:

$$\{\|x_n\|_1 \to 0\} \Leftrightarrow \{\|x_n\|_2 \to 0\}.$$

Data su Φ una successione di norme a due a due concordanti:

$$\forall x \in \Phi, \qquad \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \ldots \leq \|x\|_q \leq \ldots$$

si introduce in Φ una topologia che genera la seguente convergenza:

$$\{x_n \underset{\Phi}{\to} x\} \Leftrightarrow \left\{\forall p,\ \lim_n \|x - x_n\|_p = 0\right\}.$$

Se accade che ogni successione di Cauchy rispetto a tutte le norme è convergente, lo spazio così strutturato si dice « numerabilmente normato ».

Vale la seguente

PROP. 1.1. – *Condizione sufficiente affinchè in uno spazio numerabilmente normato Φ ogni limitato sia compatto è che risulti:*

$$\forall p\ \{B \text{ limitato rispetto alla norma } \|\cdot\|_{p+1} \Rightarrow B \text{ compatto rispetto alla norma } \|\cdot\|_p\}.$$

DEF. 1.1. – Siano Φ e Ψ due spazi numerabilmente normati e sia $\mathcal{F}$ una applicazione continua tra Φ e Ψ; si dice che $\mathcal{F}$ è *propria* se risulta compatta in Φ l'immagine reciproca $\mathcal{F}^{-1}(B)$ di ogni compatto $B \subset \Psi$; si dice che è *aperta* se il codominio $\mathcal{F}(\Phi)$ è un aperto di Ψ.

Sussiste il seguente teorema (cfr. [3], [2]):

TEOREMA 1.1 (Caccioppoli). – *Se Φ e Ψ sono due spazi numerabilmente normati e $\mathcal{F}: \Phi \to \Psi$ è un'applicazione continua, aperta e propria, allora $\mathcal{F}$ è suriettiva.*

Particolare interesse presenta il caso in cui (cfr. Prop. 1.1) in Φ i limitati sono compatti, poichè, in tal caso, affinchè $\mathcal{F}$ sia propria basterà supporre che

$$\forall B \text{ limitato in } \Psi, \qquad \mathcal{F}^{-1}(B) \text{ è limitato in } \Phi.$$

Indicheremo con $C^\infty_\#$ lo spazio delle funzioni di classe $C^\infty(R^2)$ periodiche in x ed y di periodo 1. Per ogni $p > 1$ indicheremo con $W^{k,p}_\#$ il completamento di $C^\infty_\#$ rispetto alla norma:

$$\|u\|_{k,p,T} = \left[\sum_{|\alpha|\leq k} \int_T |D^\alpha u|^p \, dx\, dy\right]^{1/p} \qquad T = [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]^2.$$

Introduciamo anche la norma equivalente

$$|||u|||_{k,p,T} = \left[\int_T \{u^2 + (D_x^2 u)^2 + (D_y^2 u)^2\}^{p/2} \, dx\, dy\right]^{1/p}.$$

Rispetto alla successione di norme $\{\|\cdot\|_{k,p}\}$ $C^\infty_\#$ è uno spazio numerabilmente normato e vale la prop. 1.1.

Detto G un dominio limitato di R^2 introduciamo le seguenti notazioni:

$$(u)_{k,G} = \|u\|_{C^k(G)} = \sum_{i+j\leq k} \max_G |D_x^i D_y^j u| = \sum_{h=0}^k U_k(G)\,,$$

$$(u)_{k,\mu,G} = \|u\|_{C^{k,\mu}(G)} = \|u\|_{C^k(G)} + \sum_{i+j=k)} \sup_{p'',p'\in G} \frac{|D_x^i D_y^j u(P') - D_x^i D_y^j u(P'')|}{|P'-P''|^\mu} =$$

$$= \|u\|_{C^k(G)} + \sum_{i+j=k} [D_x^j D_y^i u]_\mu^G = (u)_{k,G} + U_{k,\mu}(G) \qquad \mu\in\,]0,1]$$

con ovvio significato dei simboli.

Indicato con Q il quadrato $[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]^2$ e con $\Omega = \{(x,y)\colon (x^2+y^2)\colon\leq\frac{3}{2}\}$ si ha (cfr. [2])

$$\|D_x^h D_x^k u\|_{0,p,Q} = 9^{1/p}\|D_x^h D_y^k u\|_{0,p,T}\,, \qquad \forall h,k,\ \forall u\in C_\#^\infty\,, \tag{1.1}$$

$$(u)_{0,\mu,Q} \leq 5(u)_{0,\mu,T}\,, \qquad \forall u\in C_\#^\infty\,. \tag{1.2}$$

2. - Su un'equazione a coefficienti limitati, misurabili e periodici.

Sia dato un operatore differenziale della forma:

$$Au = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) D^{\alpha+\beta} u + a_{00}(x) u\,, \qquad x\in R^n$$

nelle ipotesi:

i) $a_{\alpha\beta}$, a_{00} sono reali, misurabili, limitati e periodici;

ii) riesce $a_{00}(x)>0$ e $(-1)^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \geq \nu \sum_{|\gamma|=m} |\xi_\gamma|^2$ con $\xi_{\gamma|}\in R$.

Sia

$$Bu = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} b_{\alpha\beta} D^{\alpha+\beta} u + b_{00} u \tag{2.1}$$

un operatore differenziale i cui coefficienti verifichino i) e ii) ed inoltre sia un isomorfismo tra $W_\#^{2m,p}$ ed $L^p(T)$ (¹), $\forall p\in(p_1,p_2)$ con $p_1\leq 2$ e $p_2>2$. Ad esempio $Bu = (-1)^m \sum_{i=1}^n D_{x_i}^{2m} u + u$ (cfr. [2] con $m=2$).

Indicato con $B^{-1}(2)$ l'isomorfismo inverso di B tra $W_\#^{2m,2}$ ed L^2 supponiamo ancora:

iii) $$\boldsymbol{K}^2 = \sup_T \left\{ \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} b_{\alpha\beta}^2 + b_{00}^2 - \frac{(\sum b_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} + b_{00} a_{00})^2}{\sum a_{\alpha\beta}^2 + a_{00}^2} \right\} \leq \|B^{-1}(2)\|^{-2}.$$

(¹) In questo numero con T si intende $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n$.

Si ha:

TEOREMA 2.1. – *L'operatore A è un isomorfismo tra $W_{\#}^{2m,2}$ ed $L^2(T)$ e riesce*

$$\|u\|_{W_{\#}^{2m,2}} \leqslant \frac{\|B^{-1}(2)\| \sup \delta(x)}{1-\boldsymbol{K}\|B^{-1}(2)\|} \|Au\|_{L^2(T)} \tag{2.2}$$

dove

$$\delta(x) = \frac{\sum a_{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + a_{00} b_{00}}{\sum a_{\alpha\beta}^2 + a_{00}^2}.$$

Riesce $\delta(x) > 0$ e si ha

$$\|B - \delta A\|_{\mathfrak{L}(W_{\#}^{2m,2}, L^2)} \leqslant \boldsymbol{K} < \|B^{-1}(2)\|^{-1}$$

da cui l'asserto con metodi standard.

Procedendo adesso nell'ordine di idee di [1] si può provare il seguente

TEOREMA 2.2. – *Esistono p_1' e p_2' con $p_1' < 2$ e $p_2' > 2$ tali che $\forall p \in [p_1', p_2'] A$ sia un isomorfismo tra $W_{\#}^{2m,p}$ ed $L^p(T)$; vale inoltre la seguente formula di maggiorazione*

$$|||u|||_{W_{\#}^{2m,p}} \leqslant \frac{\|B^{-1}(p)\| \sup \delta(x)}{1-\boldsymbol{K}\|B^{-1}(p)\|} \|Au\|_{L^p(T)} \tag{1.3}$$

dove $B^{-1}(p)$ è la norma dell'inverso di B tra $W_{\#}^{2m,p}$ ed $L^p(T)$.

Procedendo come in [1] si trova

$$\int_T |(B - \delta A) u|^p \, dx \leqslant \boldsymbol{K}^p \int_T \left[\sum_{|\alpha|=2m} (D^\alpha u)^2 + u^2 \right]^{p/2} dx . \tag{2.4}$$

Fissato $r \in]2, p_2[$ per la diseguaglianza d'interpolazione si ricava

$$\|B^{-1}(p)\| \leqslant \|B^{-1}(2)\|^{1-((2-p)r)/((2-r)p)} \|B^{-1}(r)\|^{((2-p)r)/((2-r)p)} = g(p) .$$

Dato che $g(2) < 1/\boldsymbol{K}$ e dalla continuità di $g(p)$ segue l'esistenza di $p_2' > 2$ tale che $\forall p \in [2, p_2')$ riesca

$$\|B^{-1}(p)\| < \frac{1}{\boldsymbol{K}};$$

da qui e da (2.4) segue

$$\|B - \delta A\|_{\mathfrak{L}(W_{\#}^{2m,p}, L^p)} \leqslant \boldsymbol{K} < \|B^{-1}(p)\|^{-1}$$

e quindi l'asserto (2).

(2) Analogamente si dimostra l'esistenza di $p_1' < 2$.

Sia adesso Bu *a coefficienti costanti.* Poniamo

$$Eu = Au + \sum_{0<|\gamma|<2} d^\gamma(x) D^\gamma u + c(x) u \tag{2.5}$$

con Au soddisfacente ancora i), ii), iii), e $d_\gamma(x)$ e $c(x)$ reali, periodici, limitati e misurabili.

Vale il seguente teorema

TEOREMA 2.3. – *Esiste una costante C dipendente da $B^{-1}(2)$, $\|B - \delta A\|$, sup δ, inf δ, sup $|d_\gamma|$ tale che se $\lambda \geq C - \inf c(x) = \lambda_0$ c'è una ed una sola soluzione dell'equazione*

$$Eu + \lambda u = f\,, \qquad f \in L^2(T)$$

in $W_{\#}^{2m,2}$ e vale

$$\|u\|_{W_{\#}^{2m,2}} \leq \frac{c_1 \sup(\delta)}{1 - K^2\|B^{-1}(2)\|^2} \|f\|_{L^2(T)} \tag{2.6}$$

con c_1 costante assoluta.

La (2.6) si ricava procedendo come nella dim. del teor. 2.1 di [6]. L'esistenza della soluzione segue poi dal fatto che l'indice di A è zero (cfr. [6], teor. 2.1), $E - A$ è compatto da $W_{\#}^{2m,2}$ in $L^2(T)$ e dalla (2.6).

Vogliamo ora mostrare come partendo dal teorema 2.3 si possa ricavare un risultato analogo a quello contenuto nel teorema 2.2 per l'operatore $E + \lambda$, con E definito dalla (2.5).

TEOREMA 2.4. – *Nelle ipotesi del teorema 2.3 esistono $p_1'' \leq 2$ e $p_2'' > 2$ tali che $\forall p \in [p_1'', p_2'')$ e $\lambda \geq \lambda_0$ c'è esistenza e unicità in $W_{\#}^{2m,p}$ per l'equazione*

$$Eu + \lambda u = f\,, \qquad f \in L^p(T)$$

e vale

$$|||u|||_{W_{\#}^{2m,p}} \leq c_2 \|f\|_{L^p} \tag{2.7}$$

con

$$c_2 = \frac{2c_1 \sup \delta}{1 - K^2\|B^{-1}(2)\|^2}\,.$$

Consideriamo l'operatore $E + \lambda$ da $W_{\#}^{2m,p}$ in $L^p(T)$ con $p \in [2, p_3')$ e p_2' definito nel teorema 2.2. Si ha:

1) $E + \lambda$ è a codominio chiuso; infatti riesce in forza della (2.3):

$$|||u|||_{W_{\#}^{2m,p}} \leq c_3 \|Au\|_{L^p} \leq c_3 \|Eu + \lambda u\|_{L^p} + c_4 \|u\|_{W^{2m-1,p}(T)}$$

e l'asserto segue dal fatto che $W_{\#}^{2m,p}$ è immerso con compattezza in $W^{2m-1,p}(T)$;

2) c'è unicità: infatti $L^p \subset L^2$, $W_{\#}^{2m,p} \subset W_{\#}^{2m,2}$ e quindi se per f in L^p vi fossero due soluzioni in $W_{\#}^{2m,p}$ si contradirrebbe il teorema 2.3;

3) $E + \lambda$ è ad indice zero; infatti $i(A) = 0$, $E - A + \lambda$ è compatto e quindi $i(E + \lambda) = 0$; allora essendoci unicità c'è anche esistenza;

4) fissato $\overline{p}_2 \in]2, p_2'[$ e detto $(E + \lambda)^{-1}(p)$ l'inverso di $E + \lambda$ tra $W_{\#}^{2m,p}$ ed $L^p(T)$ si ha per interpolazione

$$\|(E + \lambda)^{-1}(p)\| \leqslant \|(E + \lambda)^{-1}(2)\|^{1-\theta_p} \|(E + \lambda)^{-1}(\overline{p}_2)\|^{\theta_p} = g(p)\,, \qquad 0 < \theta < 1$$

dove $g(p)$ è continua e

$$\lim_{p \to 2} g(p) = g(2) = \|(E + \lambda)^{-1}(2)\|\,.$$

Esiste allora un $p_2'' \in (2, \overline{p}_2)$ tale che riesca $\|(E + \lambda)^{-1}(p)\| \leqslant g(p) \leqslant 2\|(E + \lambda)^{-1}(2)\|$.

Sia adesso $2 > p > p_1'$; sia $f \in C_{\#}^{\infty}$; esiste una soluzione in $W_{\#}^{2m,2}$ di $E + \lambda u = f$ e quindi tale soluzione è anche in $W_{\#}^{2m,p}$; poichè vale ancora 1) l'operatore $E + \lambda$ è a codominio chiuso e tale codominio contiene $C_{\#}^{\infty}$; allora tale codominio essendo un sottospazio chiuso e denso in L^p coincide con L^p.

Si conclude poi ragionando come in 3) e 4).

3. – Un'equazione non lineare di ordine superiore.

Sia $F(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ una funzione di classe $C^\infty(R^n)$ $\big(n = (2m + 1)(m + 1)\big)$ tale che

1) $|D_{\xi_i} F| = |F_i(\xi)| \leqslant M\,, \quad \forall \xi \in \boldsymbol{R}^n\,,$

2) $|D^\alpha F| = |F_\alpha(\zeta)| \leqslant c_\alpha (1 + |\zeta|)^{\gamma_\alpha} \quad$ con $\gamma_\alpha \geqslant 0\,.$

Fissato $f \in C_{\#}^{\infty}(R^2)$ consideriamo l'equazione

$$\lambda v + F(D_x^{2m} v, \ldots, D_y^{2m} v, D_x^{2m-1} v, \ldots, v) = f\,, \qquad v \in C_{\#}^{\infty}(R^2)\,. \tag{3.1}$$

Scritta tale equazione, per comodità, nella forma:

$$\lambda v + F(D^{\alpha_1 + \beta_1} v, \ldots, D^{\alpha_{m+1} + \beta_{m+1}} v, D_x^{2m-1} v, \ldots, v) = f \tag{3.2}$$

con $|\alpha_i| = |\beta_i| = m$ e posto $F_{\alpha_i \beta^i}(\xi) = F_i(\xi)$ supponiamo ancora che

3) $(-1)^m \sum_{|\alpha_i| = |\beta_i| = m} F_{\alpha_i \beta_i}(\xi) \eta_{\alpha_i} \eta_{\beta_i} \geqslant \nu \sum_{|\gamma_i| = m} |\eta_{\gamma_i}|^2\,, \quad \forall \xi \in R^n\,.$

4) Esistono un operatore a coefficienti costanti del tipo

$$Bu = \sum_{|\alpha_i|=|\beta_i|=m} b_{\alpha_i\beta_i} D^{\alpha_i+\beta_i} u + b_{00} u$$

soddisfacente la ii) del n. 2, che sia un isomorfismo tra $W_{\#}^{2m,p}$ ed $L^p(T)$ $\forall p \in [2, p_2)$ ed una costante positiva c tale che

$$K^2 = \sup_{R^n} \left\{ \sum_i b^2_{\alpha_i\beta_i} + b^2_{00} - \frac{(\sum b_{\alpha_i\beta_i} F_{\alpha_i\beta_i} + cb_{00})^2}{\sum F^2_{\alpha_i\beta_i} + c^2} \right\} < \|B^{-1}(2)\|^{-2}.$$

OSSERVAZIONE. – Fissata $v \in C_{\#}^{\infty}(R^2)$ e posto

$$\lambda v + F(D_x^{2m} v, \ldots) = f$$

consideriamo l'equazione

$$cv_{x_j} + \sum F_{\alpha_i\beta_i} D^{\alpha_i+\beta_i} v_{x_j} + F_{m+2} D_{x_1}^{2m-1} v_{x_j} + \ldots + F_n v_{x_j} = f_{x_j}$$

che è del tipo (2.5) con $A = c + \sum F_{\alpha_i\beta_i}$.

Per le ipotesi 3) e 4) è senz'altro possibile applicare il teorema 2.4 con λ_0 e la costante che compare in (2.7) indipendente da v.

Consideriamo l'applicazione

$$v \in C_{\#}^{\infty} \to \lambda v + F(D_{x_1}^{2m} v, \ldots, v) = \mathfrak{I}(v) \in C_{\#}^{\infty}\,.$$

Vogliamo dimostrare il seguente

TEOREMA 3.1. – *Nelle ipotesi* 1), 2), 3), 4) *per λ abbastanza grande esistono due successioni $\{c_k\}$, $\{n_k\}$ di costanti positive assolute tali che per ogni k riesca:*

$$\|v\|_{W_{\#}^{2m+k,\bar{p}}} \leq c_k (\|\mathfrak{I}(v)\|_{W_{\#}^{k,p}} + M)^{n_k} \tag{3.1}$$

$\forall v \in C_{\#}^{\infty}$ e con $\bar{p} > 2$ opportuno.

Posto

$$\lambda v + F(D_{x_1}^{2m} v, \ldots, v) = f$$

derivando rispetto ad x_j si ha

$$[\lambda + F_1 D_{x_1}^{2m} + \ldots + F_n] v_{x_j} = f_{x_j}; \tag{3.2}$$

detta λ_0 la costante di cui ai teoremi 2.3, 2.4 relativamente all'operatore

$$E = F_1 D_{x_1}^{2m} + \ldots + F_{2m+1} D_{x_2}^{2m} + c + F_{2m+2} D_{x_1}^{2m-1} + \ldots + F_n$$

assumendo $\lambda \geqslant \lambda_0 + c$ si ha in forza della (2.7):

$$\|v_{x_j}\|_{W_\#^{2m,p}} \leqslant c(p)\|D_{x_j}f\|_{L^p}, \quad \forall p \in [2, p_2') \tag{3.3}$$

dove $c(p)$ non dipende da v.

D'altro canto si ha:

$$\lambda v = f - F_1 D_{x_1}^{2m} v - \ldots - F_n v - F(0, \ldots, 0)$$

dove $F_1, \ldots, F_n$ vanno calcolati in un punto del tipo $(\theta D_{x_1}^{2m}, \ldots, \theta v)$.

Essendo $\lambda + F_n > 0$ (cfr. teor. 2.3 con $F_n = c(x)$) riesce

$$\|v\|_{L^p} \leqslant c\Big\{\|f\|_{L^p} + \sum_j \|v_{x_j}\|_{W_\#^{2m-1,p}} + M\Big\};$$

da qui e dalla (3.3) segue

$$\|v\|_{W_\#^{2m+1,p}} \leqslant c(p)\{\|f\|_{W_\#^{1,p}} + M\}. \tag{3.4}$$

Per il teorema di Sobolev, fissato $\bar{p} \in]2, p_2'[$, si ha allora:

$$\max_T |D^\alpha v| \leqslant c\{\|f\|_{W_\#^{1,\bar{p}}} + M\} \qquad |\alpha| \leqslant 2m. \tag{3.5}$$

Derivando la (3.2) rispetto a x_k si ha:

$$[\lambda + F_1 D_{x_1}^{2m} + \ldots + F_n] v_{x_j x_k} = f_{x_j x_k} - [F_{1,1} D_{x_1}^{2m} v_{x_j} D_{x_1}^{2m} v_{x_k} + \ldots].$$

Fissiamo come in [2], $p \in]2, \bar{p}[$. Riesce

$$\|v_{x_j x_k}\|^p_{W_\#^{2m,p}} \leqslant c\Bigg\{\|f_{x_j x_k}\|^p_{L^p} + \sum_{\substack{i,j,\alpha,\beta \\ |\alpha| \leqslant 2m+1 \\ |\beta| \leqslant 2m+1}} \int_T |F_{ij} D^\alpha v\, D^\beta v|^p\, dx\Bigg\}. \tag{3.6}$$

In forza della ipotesi 2) si ha utilizzando la (3.5):

$$\sup |F_{ij}(D_{x_1}^{2m} v, \ldots)| \leqslant c_{ij} \sup (1 + |D_{x_1}^{2m} v| + \ldots)^{\gamma_{ij}} \leqslant c_{ij}\{\|f\|_{W^{1,\bar{p}}} + M\}^{\gamma_{ij}}.$$

Dalla (3.6) segue:

$$\|v_{x_j x_k}\|^p_{W_\#^{2m,p}} \leqslant c\Big\{\|f_{x_j x_k}\|^p_{L^p} + \big[\sum (\|f\|_{W^{1,\bar{p}}} + M)^{\gamma_{ij}}\big]^p \cdot \int |D^\alpha v\, D^\beta v|^p\, dx\Big\}. \tag{3.7}$$

Se $|\alpha| < 2m + 1$, $|\beta| < 2m + 1$ si ha

$$\int |D^\alpha v\, D^\beta v|^p\, dx \leqslant (\|f\|_{W^{1,\bar{p}}} + M)^{2p}.$$

Negli altri casi procedendo come in [2] si ricava

$$\left(\int_T |D^\alpha v\, D^\beta v|^p\, dx\right)^{1/p} \leqslant \|D^\beta v\|_{\overline{p}} \|D^\alpha v\|_{p\overline{p}/(\overline{p}-p)}$$

e quindi dalla (3.7)

$$(3.8)\qquad |D^{2m+2}v|_p = \left(\sum_{|\alpha|=2m+2} \int_T |D^\alpha v|^p\, dx\right)^{1/p} \leqslant c\left\{\|f\|_{W^{2,\overline{p}}_\#} + \sum_{i,j} (\|f\|_{W^{1,\overline{p}}_\#} + M)^{\gamma_{ij}+2} + \right. \\ \left. + \sum (\|f\|_{W^{1,\overline{p}}_\#} + M)^{\gamma_{ij}} \|v\|_{W^{2m+1,\overline{p}}_\#} \cdot |D^{2m+1}v|_q \right\}$$

con $q = p\overline{p}/(\overline{p}-p)$.

Dal teor. 58.X di [8] con $p = p_0$, $r = 2m+2$, $h = 2m+1$ si ha

$$|D^{2m+1}v|_{\sigma(a)} \leqslant K\{|D^{2m+2}v|_p^a |v|_p^{1-a} + |v|_p\}$$

con $1/\sigma(a) = m + \frac{1}{2} + a(1/p - m - 1) + (1-a)/p$, $\forall a \in [(2m+1)/(2m+2), 1]$.

È facile verificare (cfr. [2]) che esiste una sola a per cui

$$\frac{1}{\sigma(a)} = \frac{\overline{p}-p}{\overline{p}p}$$

e quindi dalle (3.8) e (3.4) segue

$$|D^{2m+2}v|_p \leqslant c\{\|f\|_{W^{2,\overline{p}}_\#} + \sum (\|f\|_{W^{1,\overline{p}}_\#} + M)^{\gamma_{ij}+2} + \sum (\|f\|_{W^{1,\overline{p}}_\#} + M)^{\gamma_{ij}+1} \cdot \\ \cdot (|D^{2m+2}v|_p^a |v|_p^{1-a} + |v|_p)\}$$

ed ancora dalla (3.4):

$$|D^{2m+2}v|_p \leqslant c\{\|f\|_{W^{2,\overline{p}}_\#} + \sum (\|f\|_{W^{1,\overline{p}}_\#} + M)^{\gamma_{ij}+2} + \sum (\|f\|_{W^{1,\overline{p}}_\#} + M)^{\gamma_{ij}+2-a} \cdot |D^{2m+2}v|_p^a\};$$

esisteranno quindi un $\gamma > 0$ ed una costante C tali che

$$|D^{2m+2}v|_p \leqslant C\{(\|f\|_{W^{2,\overline{p}}_\#} + M)^{\gamma+2} + (\|f\|_{W^{2,\overline{p}}_\#} + M)^{\gamma+2-a} |D^{2m+2}v|_p^a\};$$

da qui, dalla (3.4) e dal teorema di Sobolev segue:

$$\sum_{|\alpha|\leqslant 2m+1} \max |D^\alpha v| \leqslant c\|v\|_{W^{2m+2,p}_\#} \leqslant \{\|f\|_{W^{2,\overline{p}}_\#} + M\}^{(\gamma+2-a)/(1-a)}, \qquad p \in [2, \overline{p}[\,.$$

Ma allora riscrivendo la (3.6) con $p = \overline{p}$ e dalla (3.4) segue l'esistenza di un $k_1 > 0$ tale che

$$\|v\|_{W^{2m+2,\overline{p}}_\#} \leqslant c_1\{\|f\|_{W^{2,\overline{p}}_\#} + M\}^{\gamma_1}.$$

La (3.1) si dimostra per k qualunque derivando k volte l'equazione.

Dal teorema 3.1 segue banalmente:

TEOREMA 3.2. – *Nelle ipotesi del teorema* 3.1 *l'operatore*

$$\mathcal{F}: v \in \Phi \to \lambda v + F(D_{x_1}^{2m} v, \dots, v) \in \Phi \text{ (3)}$$

è proprio.

Si ha inoltre:

TEOREMA 3.3. – *Nelle ipotesi del teorema* 3.1 *l'operatore* $\mathcal{F}$ *è aperto.*

Tale dimostrazione è analoga a quella del teor. 8.IV di [2], perciò ne diamo un rapido cenno.

Si prova facilmente che, l'operatore $\mathcal{F}$: $W_{\#}^{2m+1,\bar{p}} \to W_{\#}^{1,\bar{p}}$ è di classe C^1 ed il suo differenziale $\mathcal{F}'(u)v = \lambda v + F_1(D_{x_1}^{2m} u, \dots, u) D_{x_1}^{2m} v + \dots$ è bigettivo tra $W_{\#}^{2m+1,\bar{p}}$ e $W_{\#}^{1,\bar{p}}$ con $u \in C_{\#}^{\infty}$. Ne consegue che $\mathcal{F}$ è localmente invertibile in ogni punto $u \in C_{\#}^{\infty}$.

Fissato f in $\mathcal{F}(\Phi)$ sia u tale che $\mathcal{F}(u) = f$. Allora in u l'operatore $\mathcal{F}$ considerato come operatore da $W_{\#}^{2m+1,\bar{p}}$ in $W_{\#}^{1,\bar{p}}$ è localmente invertibile e quindi esistono un intorno $I(u)$ ed un intorno $J(f)$ tra cui $\mathcal{F}$ è bigettivo; consideriamo l'insieme

$$\Phi \cap J(f) = J'(f)$$

esso è certamente un intorno di f nella topologia di Φ. Detto g un elemento di $J'(f)$ consideriamo il corrispondente di g in $I(u)$ e sia esso v.

Detto V il prolungamento periodico di v si ha $V \in W^{2m+1,\bar{p}}(Q)$ e

$$\mathcal{F}(V) = g\,.$$

Da noti risultati di regolarità (cfr. ad esempio [4], [5], [8]) segue $V \in C^{\infty}(Q)$ e quindi $v \in C_{\#}^{\infty}$. Dall'arbitrarietà di g segue $J'(f) \subset \mathcal{F}(\varphi)$ e quindi l'asserto.

Dai teoremi 3.2 e 3.3 segue:

TEOREMA 3.4. – *Nelle ipotesi del teorema* 3.1 *l'operatore* $\mathcal{F}$ *è suriettivo.*

---

(3) Con Φ indichiamo lo spazio numerabilmente normato $C_{\#}^{\infty}$ con la successione di norme

$$\|u\|_{k,p} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leqslant k} \int |D^{\alpha} u|^p \, dx \right\}^{1/p}$$

4. – Un'equazione non lineare del secondo ordine.

Sia $F(\xi_1, \dots, \xi_6)$ una funzione di classe $C^\infty(R^6)$ tale che

1) $|F_i(\xi)| = |D_{\xi_i} F| \leq M$.

2) $|D^\alpha F| = |F_\alpha(\xi)| \leq c(1 + |\xi|)^{n_\alpha}$, $\quad \alpha \equiv (\alpha^1, \dots, \alpha^6)$.

3) $F_1 \eta_1^2 + F_2 \eta_1 \eta_2 + F_3 \eta_2^2 \geq \nu |\eta|^2$, $\quad \forall \eta = (\eta_1, \eta_2)$, $\nu > 0$.

Osserviamo che detto Ω un aperto di R^2 e $v(x_1, x_2)$ una funzione di classe $C^\infty_\#(R^2)$ si ha:

$$\sup_\Omega |F_\alpha(D^2_{x_1} v, D^2_{x_2 x_1} v, \dots, v)| \leq \begin{cases} M & \text{se } |\alpha| = 1 \\ c_\alpha(1 + \|v\|_{C^2(\bar{\Omega})})^{n_\alpha} & \text{se } |\alpha| > 1 \end{cases} \tag{4.1}$$

$$[F_\alpha(D^2_{x_1} v, \dots, v)]_{0,\mu} \leq c(1 + \|v\|_{C^2(\bar{\Omega})})^\gamma (v)_{2,\mu,\Omega} \tag{4.2}$$

con $\gamma = \max \{n_{\alpha_i}\}$ con $|\alpha_i| = |\alpha| + 1$, $\alpha_i \equiv (\alpha^1, \dots, \alpha^i + 1, \dots, \alpha^6)$.

Ricordiamo inoltre che, fissato Ω, si ha:

$$(v)_{k,\mu,\Omega} \leq c(V_0 + V_{k,\mu}) \tag{4.3}$$

dove $V_0 = \max_\Omega |v|$, $V_{k,\mu} = \sum_{i+j=k} [D^i_{x_1} D^j_{x_2} v]_{0,\mu}$.

Consideriamo l'equazione:

$$\lambda v + F(v) = f = \mathcal{F}(v) \qquad \text{con } f, v \in C^\infty_\#(R^2) . \tag{4.4}$$

Si ha

TEOREMA 4.1. – *Nelle ipotesi* 1), 2), 3) *esistono due successioni di costanti positive* $\{c_k\}$ *e* $\{\gamma_k\}$ *tali che si abbia*

$$(v)_{2+k,\mu,T} \leq c_k \{(\mathcal{F}(v))_{k,\mu,T} + M\}^{\gamma_k}, \qquad \forall v \in C^\infty_\#, \ \forall k \tag{4.5}$$

nell'ulteriore ipotesi $\sup [F_6 + \lambda] < 0$.

Si ha intanto subito

$$\max_T |v| \leq c\{(f)_{0,T} + M\} . \tag{4.6}$$

Infatti se v ha un massimo positivo in $\bar{\bar{P}}$ si ha

$$\lambda v(\bar{\bar{P}}) + F(0, \dots, 0) + F(\eta_1, \dots, \eta_6) D^2_{x_1} v(\bar{\bar{P}}) + F_2(\eta_1, \dots, \eta_6) D^2_{x_1 x_2} v(\bar{\bar{P}}) +$$
$$+ F_3 D^2_{x_2} v(\bar{\bar{P}}) + F_6(\bar{\bar{P}}) = f(\bar{\bar{P}})$$

dove $\eta_1 \in (0, D^2_{x_1} v(\bar{\bar{P}}))$ ...; da qui e dall'ipotesi 3) segue:

$$F(0, 0) + (\lambda + F_6) v(\bar{\bar{P}}) > f(\bar{\bar{P}});$$

e quindi la (4.6).

Deriviamo adesso la (4.4) rispetto a x_j; si ha:

$$[\lambda + F_1 D^2_{x_1} + F_2 D^2_{x_1 x_2} + F_3 D^2_{x_2 x_2} + \dots + F_6] v_{x_j} = f_{x_j} \tag{4.7}$$

che scriviamo

$$[\lambda + E^v] v_{x_j} = f_{x_j} . \tag{4.8}$$

Si ha, come per la (4.6):

$$\max_T |D_{x_j} v| \leqslant c \max_T |f_{x_j}| . \tag{4.9}$$

Sia adesso ω una funzione di classe C^∞ con le seguenti proprietà:

$$\begin{cases} 0 \leqslant \omega \leqslant 1; \quad \omega = 1 \quad \text{in } T, \\ |D_{x_1} \omega|, \ |D_{x_2} \omega|, \ |D^2_{x_1 x_2} \omega|, \ |D^2_{x_1} \omega|, \ |D^2_{x_2} \omega| \leqslant k . \end{cases}$$

Posto $z = \omega v_{x_j}$ dalla (4.8) si ha

$$[\lambda + E^v] z = \omega f_{x_j} + v_{x_j} E^v \omega + \sum_{\substack{|\alpha_i| \leqslant 1 \\ |\beta_i| \leqslant 1}} F_i \, D^{\alpha}_i \omega \, \grave{\mathrm{E}}^{\beta_i} v_{x_j} = g . \tag{4.10}$$

Osservato che $g \in L^p(\Omega)$ per ogni p si ha dai risultati di [9]

$$\|z\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leqslant c \|g\|_{L^2(\Omega)} \tag{4.11}$$

$$[z_{x_j}]_{0,\mu,T} \leqslant c \{\|g\|_{L^p(\Omega)} + \|z\|_{W^{1,p}(\Omega)}\} . \tag{4.12}$$

Da (4.9), (4.10), (4.11) si trae con facili calcoli:

$$\|\omega v_{x_j}\|_{V^{2,2}(\Omega)} \leqslant c \{\|f_{x_j}\|_{L^2} + \|v_{x_j}\|_{L_2}\} \leqslant c \max_\Omega |f_{x_j}| . \tag{4.13}$$

da qui, dalla (4.12) applicata con $1/p = \frac{1}{2} - 1/n$ e dal teorema di Sobolev si trae:

$$[v_{x_j x_j}]_{0,\mu,T} \leqslant c \max_\Omega |D_{x_j} f|$$

e quindi da (4.6), (1.2), (4.3)

$$(v)_{2,\mu,\Omega} \leqslant c \{(f)_{1,\Omega} + M\} . \tag{4.14}$$

Indichiamo con $A^v_{0,\mu,\Omega}$ la somma delle norme in $C^{0,\mu}(\Omega)$ dei coefficienti dell'operatore E^v. Dalla (4.14) e dalle (4.1) e (4.2) segue facilmente:

$$A^v_{0,\mu,\Omega} \leq c\{(f)_{1,\Omega} + M\}^\gamma \quad \text{con } \gamma > 0 . \tag{4.15}$$

Applichiamo alla (4.10) la (35.7) di [8]; si ha:

$$[z]_{2,\mu,\Omega} \leq c\{[(f)_{1,\Omega} + M]^{\gamma'}(g)_{0,\Omega} + (g)_{0,\mu,\Omega} + (1 + [(f)_{1,\Omega} + M)^{\gamma'})[z]_{0,\Omega}\} \quad \text{con } \gamma' > 0; \tag{4.16}$$

da qui, da (4.9), dall'espressione di g e da (4.14) segue l'esistenza di un $\gamma_1 > 0$ tale che

$$[v_{x_j}]_{2,\mu,\Omega} \leq c\{(f)_{1,\mu,T} + M\}^{\gamma_1} .$$

Da qui, tenendo conto di (4.6) e di (4.3) segue:

$$(v)_{3,\mu,T} \leq c_1\{(\mathcal{F}(v))_{1,\mu,T} + M\}^{\gamma_1} . \tag{4.17}$$

Derivando k volte la (4.4) si ricava la (4.5) procedendo come per la (4.17). Quindi l'asserto.

Si ha dal teorema 4.1:

TEOREMA 4.2. – *Nelle ipotesi del teorema* 4.1 *l'operatore* $\mathcal{F}$ *è proprio.*

5. – Un risultato ausiliario.

Consideriamo il problema:

$$\begin{cases} (E + \lambda)u = [a_{11}(x_1, x_2)\, D^2_{x_1} + a_{12} D^2_{x_1x_2} + a_{22}\, D^2_{x_2x_2} + a_{10}\, D_{x_1} + a_{01}\, D_{x_2} + \\ \qquad\qquad + a_{00} + \lambda]u = f \\ u = W^{2,2}_{\#} , \quad f \in L^2(T) \end{cases} \tag{5.1}$$

nelle ipotesi:

$$\nu|\eta|^2 \leq a_{11}\,\eta_1^2 + a_{12}\eta_1\eta_2 + a_{22}\eta_2^2 \leq \mu|\eta|^2$$
$$|a_{10}|,\ |a_{01}|,\ |a_{00}| \leq M , \quad \sup (a_{00} + \lambda) < 0 , \quad a_{ij} \in C^\infty_{\#} .$$

Vogliamo dimostrare che si ha

TEOREMA 5.1. – *Nelle ipotesi poste l'operatore* $E + \lambda$ *da* $W^{k+2,2}_{\#}$ *a* $W^{k,2}_{\#}$ *è un isomorfismo algebrico e topologico.*

Posto $z = \omega u$ ed applicando i risultati di [9] si ha:

$$\|u\|_{W^{2,2}_{\#}} \leq \|\omega u\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq c\{\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|z\|_{L^2(\Omega)}\} \leq c\{\|f\|_{L^2(T)} + \|u\|_{L^2(T)}\} . \tag{5.2}$$

Mostriamo che si ha:

$$u \in W^{2,2}_{\#} \qquad (E + \lambda)u = 0 \quad \text{ in } T \Rightarrow u = 0 . \tag{5.3}$$

Infatti detto U il prolungamento periodico di u si ha:

$$U \in W^{2,2}(Q) \quad \text{ e } \quad (E + \lambda)\, U = 0 \quad \text{ in } Q .$$

Dai teoremi di regolarità segue $U \in C^\infty(\mathring{Q})$ e quindi $U \in C^\infty_{\#}$.

Si ha allora detto $\overline{\overline{P}}$ il punto di T in cui U raggiunge il massimo:

$$0 = [E + \lambda]u(\overline{\overline{P}}) = a_{11} D^2_{x_1x_2} u(\overline{\overline{P}}) + a_{21} D^2_{x_1x_2} u(\overline{\overline{P}}) + a_{22} D^2_{x_1x_2} u(\overline{\overline{P}}) + (a_{00} + \lambda) u(\overline{\overline{P}})$$

e quindi:

$$(a_{00} + \lambda) u(\overline{\overline{P}}) \geq 0 \Rightarrow u(\overline{\overline{P}}) \leq 0 ;$$

nel punto di minimo invece:

$$u(\overline{\overline{P}}) \geq 0$$

e quindi la (5.3). Allora da (5.2) e (5.3) segue che l'operatore $E + \lambda$ è iniettivo ed a codominio chiuso.

Per provare che è un isomorfismo basta allora far vedere che:

$$v \in L^2 , \qquad A^* v = [E + \lambda]^* v = 0 \Rightarrow v = 0 . \tag{5.4}$$

Sia

$$\langle v, Au \rangle = \int_T v[E + \lambda] u \, dx = 0 , \qquad \forall u \in W^{2,2}_{\#} .$$

Essendo i coefficienti di E di classe $C^\infty_{\#}$, detto V il prolungamento periodico di v si ha

$$V \in L^2(Q) \qquad \int_Q V[E + \lambda] u = 0 , \qquad \forall u \in C^\infty_{\#} .$$

Dai teoremi di regolarizzazione segue allora $V \in C^\infty(\mathring{Q})$ e quindi poichè V è periodica si ha $V \in C^\infty_\#$; ne segue:

$$(V \in L^2,\ A^* V = 0) \Rightarrow \left(V \in C^\infty_\# \int_T V[E + \lambda]u\, dx = 0,\ \forall u \in C^\infty_\#\right)$$

ed integrando per parti

$$\int_T u[E + \lambda]^* v\, dx = 0\ , \qquad \forall u \in C^\infty_\# \Rightarrow [E + \lambda]^* v = 0 \qquad \text{in } T$$

dove:

$$\begin{aligned}[E + \lambda]^* = {} & a_{11} D^2_{x_1x_1} + a_{12} D^2_{x_1x_2} + a_{22} D^2_{x_2x_2} + (2D_{x_1} a_{11} + 2D_{x_1} a_{12} - a_{12}) D_{x_2} \\ & + (2D_{x_1} a_{22} + D_{x_1} a_{12} - a_{01}) D_{x_1} + (D^2_{x_1x_2} a_{11} + D^2_{x_1x_2} a_{12} + D^2_{x_2x_2} a_{22} \\ & - D_{x_1} a_{10} - D_{x_1} a_{01} + a_{00} + \lambda)\ .\end{aligned}$$

Detto $a(x) + \lambda$ il coefficiente di v si ottiene $v = 0$, come nella (5.3) se $\sup\big(\alpha(x) + \lambda\big) < 0$.

Quindi nella ipotesi $\sup\big(\alpha(x) + \lambda\big) < 0$ $(E + \lambda)$ è un isomorfismo tra $W^{2,2}_\#$ e $L^2(T)$.

Sfruttando opportunamente la periodicità ed i teoremi di regolarizzazione segue che $E + \lambda$ è un isomorfismo tra $W^{2+k,2}_\#$ e $W^{k,2}_\#$.

Fissato adesso λ e posto $2 \sup|\alpha + \lambda| = \lambda_0$ l'operatore $E + \lambda - \lambda_0$ è, per quanto visto sopra, un isomorfismo tra $W^{k+2,2}_\#$ ed $W^{k,2}_\#$.

D'altro canto $E + \lambda$ è iniettivo ed a codominio chiuso (cfr. (5.2), (5.3)) e $\lambda_0 u$ è un operatore compatto. Quindi $E + \lambda$ è un isomorfismo nella sola ipotesi $\lambda > 0$.

6. – Sul carattere aperto dell'operatore.

Vale il seguente

TEOREMA 6.1. – *Nelle ipotesi del teorema* 4.1 *l'operatore* $\mathcal{F}$ *è a codominio aperto.*

Si comincia col dimostrare che l'operatore $\mathcal{F}$ in ogni punto $u \in C^\infty_\#$ è localmente invertibile come operatore da $W^{4,2}_\#$ a $W^{2,2}_\#$.

Ciò si ottiene osservando che tale operatore è di classe C^1, e che il suo differenziale:

$$\mathcal{F}'(u)v = [\lambda + F_1(D^2_{x_1x_1}u, \ldots, u) D^2_{x_1x_1} + \ldots + F_6]v$$

è invertibile tra $W^{4,2}_\#$ e $W^{2,2}_\#$ in forza del teorema 5.1.

La dimostrazione si completa procedendo come nel teorema 3.3 (cfr. anche Lemma 6.I di [2]).

Dai teoremi 4.2 e 6.1 segue

TEOREMA 6.2. – *L'operatore* $\mathcal{F}$ *è suriettivo.*

BIBLIOGRAFIA

[1] S. CAMPANATO, *Un risultato relativo ad equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo non variazionale,* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **21** (1967), pp. 701-707.

[2] A. CANFORA, *Sull'esistenza di soluzioni periodiche per certe equazioni ellittiche totalmente non lineari,* in corso di stampa su Ann. di Mat. Pura Appl.

[3] R. CACCIOPPOLI, *Un principio di inversione per le corrispondenze funzionali e sue applicazioni ...,* Rend. Acc. Lincei, **16** (1932), pp. 390-395 e pp. 484-489.

[4] A. DOUGLIS - L. NIRENBERG, *Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations,* Comm. Pure Appl. Math., **8** (1955), pp. 503-538.

[5] A. FRIEDMAN, *On the regularity of the solutions of non-linear elliptic and parabolic ...,* J. Math. Mec., **7** (1958), pp. 43-59.

[6] M. GIAQUINTA, *Equazioni ellittiche di ordine 2m di tipo Cordes,* Boll. Un. Mat. Ital., (4) **4** (1971), pp. 251-257.

[7] I. M. GUELFAND - G. E. CHILOV, *Les distributions,* vol. 2, Dunod, Paris.

[8] C. MIRANDA, *Partial differential equations of elliptic type,* Springer Verlag (1970).

[9] G. TALENTI, *Equazioni lineari ellittiche in due variabili,* Le Matematiche, (XXI), **2** (1966), pp. 1-38.