

Sul criterio dell'energia per la stabilità di un sistema termomeccanico (*) (**).

CARLO BANFI (Brescia) - CLAUDIO GIORGI (Ferrara)

Summary. — *The energy criterion for mechanical stability asserts that the stable configurations are those that minimize the potential energy. Recent studies have shown that the energy criterion can be extended to stability of thermomechanical systems under suitable environment conditions, provided that the « stored energy » is interpreted as the equilibrium free-energy at the environmental temperature θ^e . The aim of this paper is to provide a contribution to a general theory of thermomechanical stability. Essentially we have restated the theory for general materials introduced by Gurtin with a new framework in the light of recent theories of Noll and Coleman-Owen on simple materials and on thermodynamical potentials. We define a « thermomechanical system » which possesses two main features: i) state space has a « natural topology » depending on the thermodynamical behaviour of system; ii) internal energy E and entropy S are not supposed to exist but are expressly obtained with their smoothness properties.*

I. — Introduzione.

Come è noto, il criterio dell'energia per lo studio della stabilità dell'equilibrio di un sistema meccanico soggetto a forze che dipendono da un potenziale, e ad eventuali altre forze dissipative, asserisce che una posizione di equilibrio è stabile se rende minima l'energia potenziale.

Recentemente in diversi studi il criterio è stato esteso a sistemi termomeccanici continui in opportune condizioni di ambiente che diremo « meccanicamente dissipative e termicamente passive ». Dette condizioni comportano che il corpo sia soggetto a forze di volume e di superficie che ammettono potenziale ed eventualmente ad altre forze dissipative, e sia immerso in un ambiente senza sorgenti di calore e a temperatura uniforme, capace di assorbire, mantenendosi a temperatura costante, il calore emesso dal corpo.

Per arrivare alla estensione del criterio si è introdotta la cosiddetta « energia balistica »

$$I(\sigma) = E(\sigma) - \theta_e S(\sigma) + \Omega_e(\sigma)$$

dove σ è lo stato del sistema, E ed S rispettivamente la energia interna e l'entropia del corpo, θ_e la temperatura esterna costante, Ω_e l'energia potenziale delle forze

(*) Entrata in Redazione il 18 dicembre 1980.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. del C.N.R.

esterne. Gli stati di equilibrio stabile vengono caratterizzati con gli stati di minimo di detta funzione.

Tutti i lavori su questo argomento fanno riferimento a due importanti articoli di J. L. ERICKSEN per i sistemi termoelastici ([1], [2]). COLEMAN e DILL in [3] hanno esteso il criterio a materiali con « fading memory ». Nei lavori [4] e [5] GURTIN ha dato una trattazione più generale del problema, estendendo il criterio ad ampie classi di materiali.

Nel presente lavoro ci si propone di dare al problema della estensione del criterio a materiali generali una trattazione più soddisfacente avvalendosi dei risultati sullo studio dei materiali dati da NOLL in [6] e dei risultati sulla costruzione dei potenziali termodinamici dati da COLEMAN e OWEN in [9]. In questo modo nella nostra trattazione è stato possibile, rispetto a quella di GURTIN, fare a meno delle ipotesi di regolarità supposte per energia interna ed entropia, e della introduzione della applicazione « Equil » che ad ogni stato del sistema fa corrispondere uno stato di equilibrio.

Per chiarezza ci preme evidenziare gli elementi essenziali che caratterizzano la nostra trattazione e che giustificano la ripresa di questo argomento.

a) Abbiamo premesso allo studio della stabilità del corpo continuo, nelle condizioni di ambiente a cui si è fatto cenno sopra, una analisi dello « stato » termomeccanico del corpo, indipendentemente dall'ambiente in cui è immerso. In tale analisi la definizione dello « stato » è dato in base alla relazione tra « inputs » ed « outputs ». Ci si rifà sostanzialmente alla impostazione data da NOLL in [6] salvo che, analogamente a quanto fatto in [7], si assumono come « inputs » processi termocinetici definiti con valori nelle velocità (funzione di distribuzione delle velocità meccaniche nel corpo e funzione di distribuzione delle velocità di variazione della temperatura) e come « outputs », oltre al moto, il processo della potenza delle forze interne, quello del flusso di calore e quello del flusso di entropia. La struttura topologica sullo spazio degli stati viene costruita in modo naturale seguendo la linea di NOLL in [6].

b) È stata eliminata ogni ipotesi a priori che presupponga la esistenza nonché la continuità e la derivabilità dell'energia interna e dell'entropia del sistema. Qui, sulla base dei risultati di COLEMAN e OWEN in [9], ripresi in [7] per la teoria globale, si costruiscono dette funzioni e se ne deducono le proprietà. Per l'entropia non si assicura né l'unicità né la continuità.

c) Per applicare la teoria di COLEMAN e OWEN si sono introdotti i cosiddetti stati rilassati, che sono sostanzialmente stati di equilibrio interno, cioè stati che sono di equilibrio per opportune scelte delle condizioni esterne. L'introduzione degli stati rilassati, assieme alla impostazione seguita per caratterizzare gli stati, ha permesso di eliminare l'introduzione della funzione di « equilibrio », cioè di una funzione che associ ad ogni stato un corrispondente stato di equilibrio, come la applicazione « Equil » di GURTIN. La nostra impostazione permette invece di dare una

corrispondenza fra gli stati e le configurazioni del sistema; ne risulta una trattazione più generale. La funzione di «equilibrio» ad esempio si avrebbe per corpi semielastici dove si ha una corrispondenza biunivoca tra stati rilassati e configurazioni.

d) Le condizioni dell'ambiente in cui il corpo è immerso restano sostanzialmente le stesse che nei lavori precedenti. Nella nostra trattazione comunque viene evidenziata la distinzione tra la struttura interna del corpo e l'azione dell'ambiente; inoltre le relazioni di passività dell'ambiente vengono giustificate con qualche dettaglio in più.

e) Lo studio degli stati di equilibrio stabile viene affrontato in un primo momento, per semplicità di trattazione, nel caso di unicità della funzione entropia; ma in un secondo tempo anche nel caso generale. Non disponendo della continuità dei potenziali termodinamici rispetto alla topologia naturale, la trattazione della stabilità esige l'introduzione nello spazio degli stati di un opportuno raffinamento della topologia, analogamente a quanto sviluppato da GURTIN in [5].

I teoremi conclusivi forniscono condizioni sufficienti per la stabilità di uno stato di equilibrio: tali condizioni sono sostanzialmente riducibili alla minimizzazione della «energia balistica» I . Si hanno forme diverse di stabilità in relazione a condizioni più o meno strette di minimo per I . Accanto allo studio della stabilità viene data anche la dimostrazione che gli stati di equilibrio devono necessariamente essere stati rilassati.

2. - Struttura del sistema termomeccanico in oggetto.

Il sistema in oggetto sia un corpo continuo \mathcal{B} , costituito da un insieme di punti materiali X, Y, Z, \dots . Dato uno spazio euclideo \mathcal{E} a tre dimensioni, diremo *localizzazioni* di \mathcal{B} in \mathcal{E} le applicazioni $\psi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$ tali che la loro classe \mathcal{P} verifichi le seguenti condizioni:

- i) ogni applicazione $\psi \in \mathcal{P}$ è una biiezione da \mathcal{B} su sottoinsiemi aperti e limitati $\psi(\mathcal{B}) \subset \mathcal{E}$;
- ii) se $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{P}$ l'applicazione $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}: \psi_1(\mathcal{B}) \rightarrow \psi_2(\mathcal{B})$ è bilipschitziana.

Su \mathcal{B} possiamo allora introdurre la struttura di varietà topologica indotta dalle applicazioni $\psi \in \mathcal{P}$ (vedi [13]). Inoltre è possibile introdurre, a meno di isomorfismi, gli insiemi $\bar{\mathcal{B}}$ — chiusura di \mathcal{B} — e $\partial\mathcal{B}$ — frontiera di \mathcal{B} — mediante la stessa classe di applicazioni (vedi [12]).

Penseremo la classe \mathcal{P} dotata di una metrica, ad esempio quella generata dalla

distanza $\delta_\Psi: \Psi \times \Psi \rightarrow \mathbf{R}^+$ così definita:

$$(2.1) \quad \delta_\Psi(\psi_1, \psi_2) = \sup_{X \in \mathcal{B}} \delta_\mathcal{E}(\psi_1(X), \psi_2(X)) + \\ + \sup_{X, Y \in \mathcal{B}} |\delta_\mathcal{E}(\psi_1(X), \psi_1(Y)) - \delta_\mathcal{E}(\psi_2(X), \psi_2(Y))|,$$

dove $\delta_\mathcal{E}$ indica la distanza euclidea in \mathcal{E} .

Supporremo inoltre che sull'insieme \mathcal{B} sia assegnata una misura m che caratterizza la distribuzione di massa nel corpo. In corrispondenza ad ogni localizzazione $\psi \in \Psi$ risulterà definita una misura μ_ψ che determina la distribuzione di massa in $\psi(\mathcal{B})$.

Il moto del corpo \mathcal{B} nello spazio \mathcal{E} , nell'intervallo di tempo $[0, d]$, $d \in \mathbf{R}^+$, è assegnato da una funzione:

$$(2.2) \quad \tilde{\psi}: [0, d] \rightarrow \Psi$$

e $\psi_0 := \tilde{\psi}(0)$ verrà detta posizione iniziale del corpo.

Indicato con \mathcal{V} lo spazio traslato di \mathcal{E} , introduciamo la distribuzione delle velocità nel corpo \mathcal{B} mediante una applicazione continua e limitata

$$(2.3) \quad v: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V}$$

ed indichiamo con V la classe di tali funzioni. Diremo poi processo cinetico di durata d_v una funzione.

$$(2.4) \quad \tilde{v}: [0, d_v] \rightarrow V.$$

Sia \tilde{V} l'insieme dei processi cinetici cui viene sottoposto il corpo \mathcal{B} . Tale classe deve soddisfare le seguenti proprietà:

(P.1) Detto \tilde{O}_d il processo nullo di durata d , cioè il processo per cui

$$(2.5) \quad (\tilde{O}_d(t))(X) = \underline{0}, \quad \forall t \in [0, d], \forall X \in \mathcal{B}$$

dove $\underline{0}$ è l'elemento nullo di \mathcal{V} , allora deve essere

$$\tilde{O}_d \in \tilde{V}, \quad \forall d \in \mathbf{R}^{++}.$$

(P.2) Se $\tilde{v} \in \tilde{V}$ allora per ogni $t_1, t_2 \in [0, d_v]$, $t_1 < t_2$ si deve avere anche $\tilde{v}_{[t_1, t_2]} \in \tilde{V}$, dove

$$(2.6) \quad \tilde{v}_{[t_1, t_2]}(t) = \tilde{v}(t_1 + t), \quad t \in [0, t_2 - t_1].$$

(P.3) Se $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in \tilde{V}$ allora deve appartenere a \tilde{V} anche il processo $\tilde{v}_1 * \tilde{v}_2$, di durata $d_{v_1} + d_{v_2}$, definito da

$$(2.7) \quad (\tilde{v}_1 * \tilde{v}_2)(t) = \begin{cases} \tilde{v}_1(t) & \text{per } t \in [0, d_{v_1}] \\ \tilde{v}_2(t - d_{v_1}) & \text{per } t \in [d_{v_1}, d_{v_1} + d_{v_2}]. \end{cases}$$

(P.4) Per ogni $\psi_0, \psi_1 \in \mathcal{P}$ esiste $\tilde{v} \in \tilde{\mathcal{V}}$ tale che

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \tilde{\varphi}(t) &:= \psi_0 + \int_0^t \tilde{v}(\tau) d\tau \in \mathcal{P}, \quad \forall t \in [0, d_v), \\ \tilde{\varphi}(d_v) &= \psi_1. \end{aligned}$$

Assumeremo per $\tilde{\mathcal{V}}$ la classe delle funzioni \tilde{v} tali che per ogni $X \in \mathcal{B}$ le funzioni $t \mapsto (\tilde{v}(t))(X)$ siano continue a tratti nel senso che esistono il limite sinistro, per ogni $t \in (0, d_v]$, ed il limite destro — coincidente con il valore della funzione — per ogni $t \in [0, d_v)$: inoltre entrambi i limiti coincidono in $(0, d_v)$ ad eccezione di un numero finito di punti. È facile verificare come tale classe soddisfa le proprietà richieste purchè \mathcal{P} sia connesso per archi.

Assegnato $\psi_0 \in \mathcal{P}$ indicheremo con $\tilde{\mathcal{V}}_{\psi_0}$ l'insieme dei processi di $\tilde{\mathcal{V}}$ che soddisfano la (2.8)₁.

Consideriamo ora sul corpo \mathcal{B} le funzioni di distribuzione delle temperature

$$(2.9) \quad \theta: \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{R}^{++}$$

continue e limitate su \mathcal{B} ; sia Θ la classe di tali funzioni munite della metrica generata dalla distanza $\delta_\Theta: \Theta \times \Theta \rightarrow \mathbf{R}^+$

$$(2.10) \quad \delta_\Theta(\theta_1, \theta_2) = \sup_{X \in \mathcal{B}} |\theta_1(X) - \theta_2(X)| + \sup_{X, Y \in \mathcal{B}} \left| |\theta_1(X) - \theta_1(Y)| - |\theta_2(X) - \theta_2(Y)| \right|.$$

Introduciamo anche le funzioni di distribuzione delle velocità di variazione della temperatura

$$(2.11) \quad h: \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{R}$$

e indichiamo con H la classe delle funzioni h continue e limitate su \mathcal{B} .

Un processo termico per il corpo \mathcal{B} , di durata d_h , è una funzione

$$(2.12) \quad \tilde{h}: [0, d_h) \rightarrow H$$

tale che, per ogni $X \in \mathcal{B}$, la funzione $t \mapsto (\tilde{h}(t))(X)$ sia continua a tratti nel senso detto sopra. L'insieme \tilde{H} dei processi termici per \mathcal{B} soddisfa le proprietà (P.1)-(P.4) come si è detto per i processi cinetici.

DEFINIZIONE 2.1. — Diremo configurazioni termocinetiche di \mathcal{B} le coppie

$$(2.13) \quad g = (\psi, \theta), \quad \psi \in \mathcal{P}, \theta \in \Theta.$$

Indicheremo inoltre con

$$(2.14) \quad G = \Psi \times \Theta,$$

la classe delle configurazioni ammissibili per \mathcal{B} .

A partire dalle metriche su Ψ e Θ , definite in (2.1) e (2.10), possiamo introdurre su G la distanza $\delta_G: G \times G \rightarrow \mathbf{R}^+$ definita da

$$\delta_G(g_1, g_2) = \delta_G((\psi_1, \theta_1), (\psi_2, \theta_2)) = \sqrt{[\delta_\Psi(\psi_1, \psi_2)]^2 + [\delta_\Theta(\theta_1, \theta_2)]^2}.$$

Supporremo inoltre che G sia completo rispetto alla metrica generata da δ_G .

Possiamo poi definire le funzioni di distribuzione delle velocità termocinetiche mediante le coppie

$$(2.15) \quad p = (v, h): \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V} \times \mathbf{R}$$

e indicheremo con $P = V \times H$ la classe di tali funzioni.

DEFINIZIONE 2.2. - Diremo processo termocinetico su \mathcal{B} di durata d_p la coppia

$$(2.16) \quad \tilde{p} = (\tilde{v}, \tilde{h}): [0, d_p] \rightarrow P, \quad d_p = d_v = d_h;$$

ed indicheremo la classe di tali processi con

$$(2.17) \quad \tilde{P} = \{(\tilde{v}, \tilde{h}) \in \tilde{V} \times \tilde{H}: d_v = d_h\}.$$

Per i processi \tilde{p} valgono le proprietà (P.1)-(P.4) di cui si è detto per i processi cinetici.

Nel seguito indicheremo con \tilde{n}_d il processo termocinetico nullo di durata d , cioè la coppia $(\tilde{O}_d, \tilde{O}_d)$. Porremo inoltre

$$(2.18) \quad \tilde{N} = \{\tilde{n}_d \in \tilde{P}: d \in \mathbf{R}^{++}\}.$$

Useremo poi la notazione \tilde{p}_t per indicare il processo \tilde{p} troncato all'istante t .

Per ogni $g_0 = (\psi_0, \theta_0) \in G$ indicheremo con \tilde{P}_{g_0} l'insieme dei processi termocinetici $\tilde{p} = (\tilde{v}, \tilde{h})$ che soddisfano la condizione

$$(2.19) \quad g(t) = g_0 + \int_0^t \tilde{p}(\tau) d\tau \in G, \quad \forall t \in [0, d_p].$$

Il comportamento termomeccanico del sistema materiale per effetto dei processi di entrata introdotti sopra può essere caratterizzato, oltre che dal moto del corpo, dalle seguenti grandezze: la potenza \mathcal{F}_i delle forze interne di \mathcal{B} , il flusso di calore \mathcal{Q}

entrante in \mathcal{B} , il flusso di entropia \mathcal{M} entrante in \mathcal{B} . Tali grandezze hanno carattere intrinseco: una volta assegnati i processi termocinetici, i valori di \mathcal{F}_i , \mathcal{Q} , ed \mathcal{M} dipendono dalla natura del materiale di cui è fatto \mathcal{B} .

DEFINIZIONE 2.3. - Diremo processo di risposta del corpo \mathcal{B} la quaterna di funzioni $\tilde{u}_d = (\tilde{g}, \tilde{\mathcal{F}}_i, \tilde{\mathcal{Q}}, \tilde{\mathcal{M}})$, dove

$$\begin{aligned} \tilde{g}: [0, d] &\rightarrow G && \text{è il moto del corpo} \\ \tilde{\mathcal{F}}_i: [0, d] &\rightarrow \mathbf{R} && \text{è il processo della potenza delle forze interne} \\ \tilde{\mathcal{Q}}: [0, d] &\rightarrow \mathbf{R} && \text{è il processo del flusso di calore} \\ \tilde{\mathcal{M}}: [0, d] &\rightarrow \mathbf{R} && \text{è il processo del flusso di entropia} \end{aligned}$$

Detto $U = G \times \mathbf{R}^3$ l'insieme dei valori della risposta sia $\tilde{U} = \{\tilde{u}_d: d \in \mathbf{R}^{++}, \tilde{u}_d \in L^\infty(0, d; U)\}$ la classe dei processi di risposta per \mathcal{B} .

Volendo dare un carattere globale alla nostra teoria si rende necessario introdurre assiomaticamente le proprietà dei processi di risposta.

PROPRIETÀ.

I) Se il processo $\tilde{p} = (\tilde{v}, \tilde{h}) \in \tilde{P}$ ha $\tilde{v} = \tilde{O}_{a_p}$, allora il corrispondente processo della potenza delle forze interne è nullo: $\mathcal{F}_i(t) = 0, t \in [0, d_p]$.

II) Se il processo $\tilde{p} = (\tilde{v}, \tilde{h}) \in \tilde{P}$ ha $\tilde{h} = \tilde{O}_{a_p}$ ed inoltre il corrispondente moto è $\tilde{g}(t) = (\tilde{\varphi}(t), \theta_e), t \in [0, d_p]$, allora vale la seguente identità $\mathcal{M}(t) = \mathcal{Q}(t)/\theta_e$.

La natura termomeccanica del corpo \mathcal{B} è caratterizzata dalla relazione osservabile tra entrate ed uscite:

$$S \subset \tilde{P} \times \tilde{U}.$$

Questa relazione rappresenta un sistema temporale (v. [8], cap. II, § 2). Risulta comunque fisicamente plausibile supporre che la struttura del sistema materiale goda di ulteriori proprietà; in particolare supporremo che il sistema ammetta la seguente realizzazione dinamica non anticipatoria, invariante e minimale (v. [8], cap. II, 2c, 3b, 4a, 4c).

DEFINIZIONE 2.4. - Diremo sistema materiale relativo al corpo \mathcal{B} l'insieme

$$(2.20) \quad (\mathcal{B}, \mathcal{E}, G, \tilde{P}, \tilde{U}, \Sigma, \tilde{\eta}, \hat{\rho})$$

dove:

a) La terna $(\mathcal{B}, \mathcal{E}, G)$ definita in precedenza dà la struttura geometrica e termica del corpo.

- b) \tilde{P} e \tilde{U} sono rispettivamente le classi dei processi di entrata e di risposta per \mathfrak{B} .
- c) Σ è un insieme detto spazio degli stati.
- d) $\tilde{\eta}: \Sigma \diamond \tilde{P} \rightarrow \tilde{U}$ è detta funzione di risposta del sistema ed è definita su $\Sigma \diamond \tilde{P} \subset \Sigma \times \tilde{P}$ ⁽¹⁾. Detto

$$(2.21) \quad \tilde{P}_\sigma = \{\tilde{p} \in \tilde{P} : (\sigma, \tilde{p}) \in \Sigma \diamond \tilde{P}\},$$

l'insieme $\Sigma \diamond \tilde{P}$ deve essere tale che:

- i) $\tilde{N} \subset \tilde{P}_\sigma, \forall \sigma \in \Sigma$;
- ii) $\sigma \in \Sigma, \tilde{p} \in \tilde{P}_\sigma$ comporta $\tilde{p}_t \in \tilde{P}_\sigma, \forall t \in [0, d_p]$.
- e) Esprimendo $\tilde{\eta}$ per componenti $\tilde{\eta} = (\tilde{\eta}_\sigma, \tilde{\eta}_{\mathfrak{B}}, \tilde{\eta}_{\mathcal{Q}}, \tilde{\eta}_{\mathcal{K}})$ deve essere
- i) $\tilde{\eta}_\sigma$ strettamente non anticipatoria (v. [8], cap. II);
- ii) $(\tilde{\eta}_{\mathfrak{B}}, \tilde{\eta}_{\mathcal{Q}}, \tilde{\eta}_{\mathcal{K}})$ non anticipatorie.
- f) Lo spazio Σ sia ridotto, cioè se $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ sono tali che
- i) $\tilde{P}_{\sigma_1} = \tilde{P}_{\sigma_2}$; ii) $\tilde{\eta}(\sigma_1, \tilde{p}) = \tilde{\eta}(\sigma_2, \tilde{p}), \forall \tilde{p} \in \tilde{P}_{\sigma_1}$,
- allora si ha $\sigma_1 = \sigma_2$.
- g) La funzione $\hat{q}: \Sigma \diamond \tilde{P} \rightarrow \Sigma$ è detta funzione di transizione degli stati e soddisfa le seguenti proprietà:
- i) $\tilde{\eta}(\sigma, \tilde{p}_1 * \tilde{p}_2)|_{[d_{p_1}, d_{p_1} + d_{p_2})} = \tilde{\eta}(\hat{q}(\sigma, \tilde{p}_1), \tilde{p}_2)$
(proprietà di compatibilità tra $\tilde{\eta}$ e \hat{q});
- ii) $\hat{q}(\sigma, \tilde{p}_1 * \tilde{p}_2) = \hat{q}(\hat{q}(\sigma, \tilde{p}_1), \tilde{p}_2)$
(proprietà di semigruppato)
- per ogni $(\sigma, \tilde{p}_1 * \tilde{p}_2) \in \Sigma \diamond \tilde{P}$.
- h) Sono verificati gli Assiomi I-II enunciati sotto.

Indicheremo nel seguito con $\Sigma \diamond P$ l'insieme

$$\Sigma \diamond P = \{(\sigma, p) \in \Sigma \times P : p = \tilde{p}(0), (\sigma, \tilde{p}) \in \Sigma \diamond \tilde{P}\}.$$

(1) Osserviamo che lo spazio degli stati Σ potrebbe essere assegnato in modo che $\tilde{\eta}$ risulti non anticipatoria e definita su tutto $\Sigma \times \tilde{P}$. Nel nostro caso però occorre introdurre $\Sigma \diamond \tilde{P} \subset \Sigma \times \tilde{P}$ come dominio di $\tilde{\eta}$ in quanto richiederemo in seguito che esista su Σ una funzione $\hat{q}: \Sigma \rightarrow G$ legata alla stretta non anticipatorietà richiesta per $\tilde{\eta}_\sigma$.

OSSERVAZIONE 2.1. — Per la definizione 2.4 (e), i); e), ii)), tenendo presente [8], cap. II, 4.1, esiste una funzione $\hat{g}: \Sigma \rightarrow G$ definita da

$$(2.22) \quad \hat{g}(\sigma) = \tilde{\eta}_\sigma(\sigma, \tilde{p})(0), \quad \forall \tilde{p} \in \tilde{P}_\sigma, \sigma \in \Sigma,$$

Tale funzione si può scomporre nella coppia $\hat{g} = (\hat{\psi}, \hat{\theta})$ con

$$\hat{\psi}: \Sigma \rightarrow \Psi, \quad \hat{\theta}: \Sigma \rightarrow \Theta.$$

Esiste poi una terna di funzioni $(\eta_{\mathcal{G}}, \eta_{\mathcal{Q}}, \eta_{\mathcal{K}}): \Sigma \diamond P \rightarrow \mathbf{R}^3$ definite da

$$(2.23) \quad (\eta_{\mathcal{G}}, \eta_{\mathcal{Q}}, \eta_{\mathcal{K}})(\sigma, \tilde{p}(0)) = [(\tilde{\eta}_{\mathcal{G}}, \tilde{\eta}_{\mathcal{Q}}, \tilde{\eta}_{\mathcal{K}})(\sigma, \tilde{p})](0).$$

Per la (2.19), dato che

$$\tilde{\eta}_\sigma(\sigma, \tilde{p}) = \tilde{g},$$

vale

$$\hat{g}(\sigma) = \tilde{g}(0)$$

e quindi

$$\tilde{\eta}_\sigma(\sigma, \tilde{p})(t) = \hat{g}(\sigma) + \int_0^t \tilde{p}(\tau) d\tau.$$

Inoltre per la Proprietà I se $(\sigma, p) \in \Sigma \diamond P$ e se in $p = (v, h)$ si ha $v(X) = \underline{0}$, $\forall X \in \mathcal{B}$, allora vale

$$\eta_{\mathcal{G}}(\sigma, p) = 0.$$

In base alle definizioni (2.19), (2.21) e (2.22) si può infine osservare che vale ovviamente

$$\tilde{P}_\sigma \subset \tilde{P}_{\hat{g}(\sigma)}.$$

Una volta assegnato il sistema materiale è necessario avere per detto sistema l'espressione dell'energia cinetica. Questa è una funzione che non dipende dallo stato del sistema e che ha la stessa espressione qualunque sia il materiale che costituisce il corpo \mathcal{B} .

DEFINIZIONE 2.5. — Se P è l'insieme dei valori dei processi di entrata per un sistema materiale, l'energia cinetica $k: P \rightarrow \mathbf{R}^+$ è così definita per $p = (v, h) \in P$

$$(2.24) \quad k(p) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} [v(X)]^2 dm.$$

E per ogni processo di entrata $\tilde{p} \in \tilde{P}$ si può determinare il corrispondente processo dell'energia cinetica $\tilde{k}(\tilde{p}): [0, d_p] \rightarrow \mathbf{R}^+$ nel seguente modo:

$$(2.25) \quad \tilde{k}(\tilde{p})(t) = k(\tilde{p}(t)).$$

Per enunciare gli Assiomi a cui si è fatto cenno nella Definizione 2.4 occorre introdurre sullo spazio degli stati Σ una struttura topologica.

Posto

$$(2.26) \quad \mathfrak{D}(\tilde{p}) = \{\sigma \in \Sigma: (\sigma, \tilde{p}) \in \Sigma \diamond \tilde{P}\}, \quad \tilde{p} \in \tilde{P},$$

per la Definizione 2.4, *d*) vale

$$(2.27) \quad \begin{aligned} \mathfrak{D}(\tilde{n}_a) &= \Sigma, & \forall a \in \mathbf{R}^{++} \\ \mathfrak{D}(\tilde{p}_t) \supset \mathfrak{D}(\tilde{p}), & \quad \forall \tilde{p} \in \tilde{P}, t \in [0, d_p]; \end{aligned}$$

definiamo allora la topologia nel seguente modo.

DEFINIZIONE 2.6. - Dato $\tilde{p} \in \tilde{P}$, diremo *p*-uniformità naturale di $\mathfrak{D}(\tilde{p})$ la più rozza uniformità su $\mathfrak{D}(\tilde{p})$ che rende uniformemente continue le applicazioni

$$\tilde{\eta}_\sigma(\cdot, \tilde{p}^*)(t): \mathfrak{D}(\tilde{p}) \rightarrow G$$

per ogni $\tilde{p}^* \in \tilde{P}$ tale che $\mathfrak{D}(\tilde{p}^*) \supset \mathfrak{D}(\tilde{p})$ e $\forall t \in [0, d_p]$, e

$$[(\tilde{\eta}_x, \tilde{\eta}_Q, \tilde{\eta}_{\mathcal{M}})(\cdot, \tilde{p}^*)](t): \mathfrak{D}(\tilde{p}) \rightarrow \mathbf{R}^3$$

per ogni $\tilde{p}^* \in \tilde{P}$ tale che $\mathfrak{D}(\tilde{p}^*) \supset \mathfrak{D}(\tilde{p})$ e $\forall t \in [0, d_p]$.

ASSIOMA I. - Per ogni $\tilde{p} \in \tilde{P}$ l'insieme $\mathfrak{D}(\tilde{p})$ è completo rispetto alla *p*-uniformità naturale.

Per la (2.25)₁ si ha $\Sigma = \bigcup_{\tilde{p} \in \tilde{P}} \mathfrak{D}(\tilde{p})$; la topologia su Σ può quindi essere definita a partire dalle *p*-uniformità.

DEFINIZIONE 2.7. - Diremo topologia naturale di Σ la più fine topologia per cui le iniezioni canoniche

$$i_p: \mathfrak{D}(\tilde{p}) \rightarrow \Sigma \quad \text{con } i_p(\sigma) = \sigma$$

sono continue per ogni $\tilde{p} \in \tilde{P}$.

OSSERVAZIONE 2.2. - L'insieme Σ munito della topologia naturale è di Hausdorff. La funzione $\hat{q}(\cdot, \tilde{p}): \mathfrak{D}(\tilde{p}) \rightarrow \Sigma$ è continua, nella topologia naturale di Σ , per ogni $\tilde{p} \in \tilde{P}$.

DIMOSTRAZIONE. - Per la prima parte basterà dimostrare che è di Hausdorff ciascun $\mathcal{D}(\tilde{p})$, $\tilde{p} \in \tilde{P}$. Infatti per ogni rete $\{\sigma_i\}_{i \in I}$ convergente a $\sigma \in \mathcal{D}(\tilde{p})$ in Σ esiste $i^* \in I$ tale che se $i > i^*$ allora $\sigma_i \in \mathcal{D}(\tilde{p})$. Sia ora $\{\sigma_i\}_{i \in I}$ una rete di Cauchy, quindi convergente, in $\mathcal{D}(\tilde{p})$ e supponiamo che ammetta limiti distinti $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Per la Definizione 2.6 le applicazioni $\tilde{\eta}(\cdot, \tilde{p}^*)(t)$ sono uniformemente continue per ogni $t \in [0, d_p]$, e trasformano reti di Cauchy di Σ in reti di Cauchy di U . D'altra parte tale spazio è di Hausdorff e completo, per cui la rete $\{\tilde{\eta}(\sigma_i, \tilde{p}^*)(t)\}_{i \in I}$ ha un unico limite in U . Questo comporta che

$$\tilde{\eta}(\sigma_1, \tilde{p}^*) = \tilde{\eta}(\sigma_2, \tilde{p}^*)$$

per ogni $\tilde{p}^* \in \tilde{P}$ tale che $\mathcal{D}(\tilde{p}^*) \supset \mathcal{D}(\tilde{p})$; quindi $\tilde{P}_{\sigma_1} = \tilde{P}_{\sigma_2}$ e per la Definizione 2.4, f) abbiamo $\sigma_1 = \sigma_2$.

Per dimostrare la seconda parte dell'osservazione consideriamo su $\mathcal{D}(\tilde{p})$ la topologia indotta dalla p -uniformità naturale e dimostriamo che rispetto ad essa la funzione $\hat{\varrho}(\cdot, \tilde{p})$ è continua. Infatti abbiamo

$$\tilde{\eta}_\sigma(\cdot, \tilde{p})(t) = \hat{g}(\hat{\varrho}(\cdot, \tilde{p}_t)) \quad \text{per } t \in [0, d_p]$$

e poichè $\tilde{\eta}_\sigma$ e \hat{g} sono continue per la Definizione 2.6, anche $\hat{\varrho}(\cdot, \tilde{p})$ è continua (v. [6], Prop. 11.1).

Poichè la topologia indotta su $\mathcal{D}(\tilde{p})$ dalla p -uniformità è più rozza di quella indotta su di essa dalla topologia naturale di Σ , la funzione $\hat{\varrho}(\cdot, \tilde{p})$ è continua anche rispetto a quest'ultima. \square

Prima di introdurre l'Assioma II occorre definire alcuni stati di tipo particolare.

DEFINIZIONE 2.8. - Uno stato $\sigma^0 \in \Sigma$ tale che

$$\hat{\varrho}(\sigma^0, \tilde{n}_d) = \sigma^0, \quad \forall d \in \mathbf{R}^{++}$$

è detto stato stagnante. Indicheremo con Σ_{st} l'insieme di tali stati.

La caratterizzazione termodinamica degli stati stagnanti è fornita dalla seguente osservazione.

OSSERVAZIONE 2.3. - Per ogni stato stagnante σ^0 si ha

$$\tilde{\eta}(\sigma^0, \tilde{n}_d)(t) = (\hat{g}(\sigma^0), k_1(\sigma^0), k_2(\sigma^0), k_3(\sigma^0)), \quad t \in [0, d], \quad d \in \mathbf{R}^{++};$$

k_1, k_2, k_3 sono reali e costanti nel tempo. Inoltre $k_1(\sigma^0) = 0$.

DIMOSTRAZIONE. - Assegnato arbitrariamente $d \in \mathbf{R}^{++}$, dalla Definizione 2.4, g), i) e dalla Definizione 2.8 abbiamo

$$\tilde{\eta}(\sigma^0, \tilde{n}_t * \tilde{p})|_{[t, t+d_p]} = \tilde{\eta}(\hat{\varrho}(\sigma^0, \tilde{n}_t), \tilde{p}) = \tilde{\eta}(\sigma^0, \tilde{p})$$

per ogni $t \in [0, d)$ e $\tilde{p} \in \tilde{P}_{\sigma^0}$. Posto quindi $\tilde{p} = \tilde{n}_{a-t}$ otteniamo

$$\tilde{\eta}(\sigma^0, \tilde{n}_a)|_{[t, d)} = \tilde{\eta}(\sigma^0, \tilde{n}_{a-t}).$$

Ovviamente dalla Definizione 2.8 e dall'Osservazione 2.1 si ha

$$\tilde{\eta}_s(\sigma^0, \tilde{n}_{a-t})(s) = \hat{g}(\sigma^0), \quad \forall s$$

e

$$[(\tilde{\eta}_{\mathcal{F}_i}, \tilde{\eta}_{\mathcal{Q}}, \tilde{\eta}_{\mathcal{M}})(\sigma^0, \tilde{n}_{a-t})](0) = (\eta_{\mathcal{F}_i}, \eta_{\mathcal{Q}}, \eta_{\mathcal{M}})(\sigma^0, n_0)$$

dove $n_0 = \tilde{n}_a(0)$, quindi

$$\tilde{\eta}(\sigma^0, \tilde{n}_a)(t) = (\hat{g}(\sigma^0), \eta_{\mathcal{F}_i}(\sigma^0, n_0), \eta_{\mathcal{Q}}(\sigma^0, n_0), \eta_{\mathcal{M}}(\sigma^0, n_0)).$$

Data l'indipendenza del secondo membro da t e d , si può porre:

$$(2.28) \quad \begin{aligned} \eta_{\mathcal{F}_i}(\sigma^0, n_0) &= k_1(\sigma^0) \\ \eta_{\mathcal{Q}}(\sigma^0, n_0) &= k_2(\sigma^0) \\ \eta_{\mathcal{M}}(\sigma^0, n_0) &= k_3(\sigma^0). \end{aligned}$$

Per la Proprietà I è facile riconoscere che $k_1(\sigma^0)$ deve essere nulla per ogni stato stagnante σ^0 . \square

Le tre costanti k_1, k_2, k_3 associate ad ogni stato stagnante σ^0 corrispondono rispettivamente alla potenza meccanica e ai flussi di calore e di entropia entranti necessari affinché lo stato σ^0 si conservi quando ad esso viene applicato un processo nullo.

DEFINIZIONE 2.9. - Diremo stato rilassato uno stato σ^* che sia stagnante e per cui si abbia

$$k_1(\sigma^*) = k_2(\sigma^*) = k_3(\sigma^*) = 0.$$

Indicheremo con Σ_{ril} l'insieme degli stati rilassati.

Per essere in grado di enunciare l'Assioma II facciamo ancora la seguente posizione

$$(2.29) \quad \Sigma_\sigma = \{\hat{q}(\sigma, \tilde{p}) : \tilde{p} \in \tilde{P}_\sigma\},$$

e indichiamo con $\bar{\Sigma}_\sigma$ la sua chiusura nella topologia naturale di Σ .

ASSIOMA II. - Esiste almeno uno stato rilassato σ^\dagger detto « stato base », tale che

- i) $\bar{\Sigma}_{\sigma^\dagger} = \Sigma$;
- ii) per ogni $\sigma \in \Sigma$, $\sigma^\dagger \in \bar{\Sigma}_\sigma$.

OSSERVAZIONE 2.4. – L'Assioma II è equivalente al seguente enunciato di « connessione » dello spazio Σ : assegnati ad arbitrio due stati $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$, per ogni intorno \mathcal{O} di σ_2 esiste un processo $\tilde{p} \in \tilde{P}_{\sigma_1}$ tale che

$$\hat{q}(\sigma_1, \tilde{p}) \in \mathcal{O}.$$

DIMOSTRAZIONE. – Fissato l'intorno \mathcal{O} di σ_2 nella topologia naturale di Σ , per l'Assioma II esiste un processo $\tilde{p}' \in \tilde{P}_{\sigma_1}$ tale che $\hat{q}(\sigma_1, \tilde{p}') \in \mathcal{O}$. Inoltre, per la continuità di $\hat{q}(\cdot, \tilde{p}')$ esiste un intorno \mathcal{O}^+ di σ_1 , contenuto in $\mathcal{D}(\tilde{p}')$, tale che se $\sigma \in \mathcal{O}^+$ allora $\hat{q}(\sigma, \tilde{p}') \in \mathcal{O}$. Infatti \mathcal{O} è un intorno sia di σ_2 che di $\hat{q}(\sigma_1, \tilde{p}')$. Sempre dall'Assioma II si può determinare un processo $\tilde{p}'' \in \tilde{P}_{\sigma_1}$ tale che $\hat{q}(\sigma_1, \tilde{p}'') \in \mathcal{O}^+$ e per la Definizione 2.4, g), ii) otteniamo

$$\hat{q}(\sigma_1, \tilde{p}'' * \tilde{p}') = \hat{q}(\hat{q}(\sigma_1, \tilde{p}'') \tilde{p}') \in \mathcal{O}. \quad \square$$

3. – Potenziali termodinamici.

Il sistema materiale introdotto nel paragrafo precedente soddisfa la definizione di « sistema » contenuto in [9], Def. 2.1. Infatti lo spazio Σ è di Hausdorff e l'applicazione $\hat{q}(\cdot, \tilde{p})$ è continua su $\mathcal{D}(\tilde{p}) \subset \Sigma$ per ogni $\tilde{p} \in \tilde{P}$. Osserviamo anche che per il Th. 6.2 di [9] gli stati stagnanti introdotti sopra corrispondono nel lavoro citato a « stati stagnanti per la famiglia dei processi nulli ».

Sulla base della teoria sviluppata da COLEMAN e OWEN in [9] è dunque possibile introdurre il potenziale della energia interna E ed il soprapotenziale dell'entropia S per il corpo \mathcal{B} . Per procedere in questa linea richiameremo man mano alcune definizioni ed alcuni teoremi contenuti in [9]. In questi richiami adatteremo gli enunciati al nostro caso, omettendo le dimostrazioni, e citeremo espressamente i risultati a cui ci riferiamo.

DEFINIZIONE 3.1 ([9], Def. 2.2). – Diremo azione per il sistema materiale una funzione $a: \Sigma \diamond \tilde{P} \rightarrow \mathbf{R}$ tale che

- i) a è additiva; cioè per ogni stato $\sigma \in \Sigma$ e per ogni \tilde{p}_1 e \tilde{p}_2 di \tilde{P} , tali che $(\sigma, \tilde{p}_1) \in \Sigma \diamond \tilde{P}$ e $(\hat{q}(\sigma, \tilde{p}_1), \tilde{p}_2) \in \Sigma \diamond \tilde{P}$, si deve avere

$$(3.1) \quad a(\sigma, \tilde{p}_1 * \tilde{p}_2) = a(\sigma, \tilde{p}_1) + a(\hat{q}(\sigma, \tilde{p}_1), \tilde{p}_2)$$

- ii) a è continua in σ , cioè per ogni $\tilde{p} \in \tilde{P}$ la funzione $a(\cdot, \tilde{p}): \mathcal{D}(\tilde{p}) \rightarrow \mathbf{R}$ è continua rispetto alla topologia naturale su Σ .

Introduciamo ora per il sistema materiale $(\mathcal{B}, \mathcal{E}, G, \tilde{P}, \tilde{U}, \Sigma, \tilde{\eta}, \hat{\rho})$ le funzioni

$$e: \Sigma \diamond \tilde{P} \rightarrow \mathbf{R}, \quad s: \Sigma \diamond \tilde{P} \rightarrow \mathbf{R}$$

definite nel modo seguente:

$$(3.2) \quad e(\sigma, \tilde{p}) = \int_0^{d_p} [\tilde{\eta}_{\mathcal{F}_i}(\sigma, \tilde{p})(\tau) + \tilde{\eta}_{\mathcal{Q}}(\sigma, \tilde{p})(\tau)] d\tau$$

$$(3.3) \quad s(\sigma, \tilde{p}) = \int_0^{d_p} \tilde{\eta}_{\mathcal{M}}(\sigma, \tilde{p})(\tau) d\tau.$$

TEOREMA 3.1. - Le funzioni $e(\cdot, \cdot)$ ed $s(\cdot, \cdot)$ sono azioni.

DIMOSTRAZIONE. - Mostriamo prima l'additività. Se $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2 \in \tilde{P}$ sono tali che $(\sigma, \tilde{p}_1) \in \Sigma \diamond \tilde{P}$ e $(\hat{\rho}(\sigma, \tilde{p}_1), \tilde{p}_2) \in \Sigma \diamond \tilde{P}$, allora posto $\tilde{p} = \tilde{p}_1 * \tilde{p}_2$ otteniamo dalla Definizione 2.4, g), i)

$$\begin{aligned} e(\sigma, \tilde{p}) &= \int_0^{d_{\tilde{p}_1}} [\tilde{\eta}_{\mathcal{F}_i}(\sigma, \tilde{p}_1)(\tau) + \tilde{\eta}_{\mathcal{Q}}(\sigma, \tilde{p}_1)(\tau)] d\tau + \\ &\quad + \int_0^{d_{\tilde{p}_2}} [\tilde{\eta}_{\mathcal{F}_i}(\hat{\rho}(\sigma, \tilde{p}_1), \tilde{p}_2)(\tau) + \tilde{\eta}_{\mathcal{Q}}(\hat{\rho}(\sigma, \tilde{p}_1), \tilde{p}_2)(\tau)] d\tau = \\ &= e(\sigma, \tilde{p}_1) + e(\hat{\rho}(\sigma, \tilde{p}_1), \tilde{p}_2). \end{aligned}$$

Analogamente si ottiene

$$s(\sigma, \tilde{p}) = s(\sigma, \tilde{p}_1) + s(\hat{\rho}(\sigma, \tilde{p}_1), \tilde{p}_2).$$

Per mostrare la continuità consideriamo una successione $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{D}(\tilde{p})$, $\tilde{p} \in \tilde{P}$ convergente a σ in $\mathcal{D}(\tilde{p})$. Per la continuità di $\tilde{\eta}(\cdot, \tilde{p})$ abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\eta}(\sigma_n, \tilde{p})(t) = \tilde{\eta}(\sigma, \tilde{p})(t) \quad \forall t \in [0, d_p)$$

e poichè le funzioni $\tilde{\eta}_{\mathcal{F}_i}(\sigma, \tilde{p})$, $\tilde{\eta}_{\mathcal{Q}}(\sigma, \tilde{p})$, $\tilde{\eta}_{\mathcal{M}}(\sigma, \tilde{p})$ sono essenzialmente limitate su $[0, d_p)$ possiamo concludere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e(\sigma_n, \tilde{p}) = \int_0^{d_p} \lim_{n \rightarrow \infty} [\tilde{\eta}_{\mathcal{F}_i}(\sigma_n, \tilde{p})(\tau) + \tilde{\eta}_{\mathcal{Q}}(\sigma_n, \tilde{p})(\tau)] d\tau = e(\sigma, \tilde{p}).$$

Analogamente si ha la continuità della funzione s . \square

DEFINIZIONE 3.2 ([9], Def. 3.1 e Def. 4.1). - Sia $\sigma \in \Sigma$ e $a(\cdot, \cdot)$ una azione. Se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno \mathcal{O} di σ nella topologia di Σ tale che

$$\tilde{p} \in \tilde{P}_\sigma, \quad \hat{\rho}(\sigma, \tilde{p}) \in \mathcal{O} \quad \text{implica} \quad |a(\sigma, \tilde{p})| < \varepsilon$$

diremo che $a(\cdot, \cdot)$ gode della proprietà di conservazione in σ ; se

$$\tilde{p} \in \tilde{P}_\sigma, \quad \hat{g}(\sigma, \tilde{p}) \in \mathcal{O} \quad \text{implica} \quad a(\sigma, \tilde{p}) < \varepsilon$$

diremo che $a(\cdot, \cdot)$ gode della proprietà di Clausius in σ .

Sia σ^\dagger uno « stato base » introdotto nell'Assioma II; in base alle precedenti definizioni è possibile formulare il primo ed il secondo principio della termodinamica nel seguente modo ([9], § 5).

PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA. – L'azione $e(\cdot, \cdot)$ definita sopra gode della proprietà di conservazione in σ^\dagger .

SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA. – L'azione $s(\cdot, \cdot)$ definita sopra gode della proprietà di Clausius in σ^\dagger .

Possiamo ora sintetizzare alcuni risultati dati in [9] con il seguente teorema.

TEOREMA 3.2 ([9], Th. 3.1, Remark 3.1). – Se esiste uno stato $\sigma \in \Sigma$ nel quale una azione ha la proprietà di conservazione o di Clausius allora l'insieme di tutti gli stati in cui tale proprietà è verificata è denso in Σ ed inoltre contiene l'insieme Σ_σ degli stati raggiungibili da σ .

L'Assioma II ed il primo e secondo principio della Termodinamica ci garantiscono che le ipotesi del precedente teorema sono soddisfatte in almeno uno stato base σ^\dagger del sistema.

L'osservazione che segue mette in evidenza il ruolo particolare assunto dagli stati rilassati nella nostra trattazione: per essi infatti l'applicazione del processo nullo « congela » lo stato senza che vi sia nè produzione nè assorbimento di energia o di entropia.

OSSERVAZIONE 3.1. – Se $\sigma^* \in \Sigma$ è uno stato rilassato allora

$$(3.4) \quad e(\sigma^*, \tilde{n}_d) = s(\sigma^*, \tilde{n}_d) = 0, \quad \forall d \in \mathbf{R}^{++}.$$

Questo risultato si ottiene facilmente dalla Definizione 2.9 e dalle (3.2), (3.3) (v. [9], Th. 7.1).

Per gli stati stagnanti si ottiene invece, in virtù della Definizione 3.2 e della Osservazione 2.3, la seguente Osservazione (v. [9], Th. 6.4 e Th. 6.6).

OSSERVAZIONE 3.2. – Se $\sigma^0 \in \Sigma$ è uno stato stagnante in cui l'azione $e(\cdot, \cdot)$ gode della proprietà di conservazione e l'azione $s(\cdot, \cdot)$ della proprietà di Clausius, allora si ha

$$(3.5) \quad e(\sigma^0, \tilde{n}_d) = 0, \quad s(\sigma^0, \tilde{n}_d) \leq 0, \quad \forall d \in \mathbf{R}^{++}.$$

Introduciamo ora le nozioni di potenziale e di soprapotenziale per una azione.

DEFINIZIONE 3.3 ([9], Def. 3.2 e Def. 4.2). — Data una azione $a: \Sigma \diamond \tilde{P} \rightarrow \mathbf{R}$, una funzione A a valori reali è detta un potenziale (oppure un soprapotenziale) per $a(\cdot, \cdot)$ se

- i) il suo dominio $\mathcal{D}(A)$ è denso in Σ ;
- ii) dati $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{D}(A)$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno \mathcal{O} di σ_2 tale che

$$\tilde{p} \in \tilde{P}_{\sigma_1}, \quad \hat{q}(\sigma_1, \tilde{p}) \in \mathcal{O} \quad \text{implica} \quad |A(\sigma_2) - A(\sigma_1) - a(\sigma_1, \tilde{p})| < \varepsilon$$
 (oppure $A(\sigma_2) - A(\sigma_1) - a(\sigma_1, \tilde{p}) > -\varepsilon$).

A partire dal I e II principio della Termodinamica è possibile introdurre, mediante il seguente teorema, i potenziali e soprapotenziali termodinamici che interessano. Non daremo la dimostrazione rimandando ai risultati di COLEMAN e OWEN ([9], Th. 7.2 e Remark 7.4).

TEOREMA 3.3. — Esiste un insieme Σ^+ denso in Σ che contiene tutti gli stati accessibili da σ^+ (compreso σ^+) e tale che le azioni $e(\cdot, \cdot)$ ed $s(\cdot, \cdot)$ godono rispettivamente della proprietà di conservazione e della proprietà di Clausius in ogni stato di Σ^+ .

Esiste una funzione di stato $E: \Sigma^+ \rightarrow \mathbf{R}$ che è un potenziale per l'azione $e(\cdot, \cdot)$; inoltre per $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma^+$ si ha che

$$(3.6) \quad \tilde{p} \in \tilde{P}_{\sigma_1}, \quad \hat{q}(\sigma_1, \tilde{p}) = \sigma_2 \quad \text{implica} \quad E(\sigma_2) - E(\sigma_1) = e(\sigma_1, \tilde{p}).$$

Esiste una funzione di stato $S: \Sigma^+ \rightarrow \mathbf{R}$ che è un soprapotenziale per l'azione $s(\cdot, \cdot)$; inoltre per $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma^+$ si ha che

$$(3.7) \quad \tilde{p} \in \tilde{P}_{\sigma_1}, \quad \hat{q}(\sigma_1, \tilde{p}) = \sigma_2 \quad \text{implica} \quad S(\sigma_2) - S(\sigma_1) \geq s(\sigma_1, \tilde{p}).$$

Osserviamo che la funzione energia E è unica a meno di una costante (v. [9], Th. 4.5 e Th. 4.6), mentre la funzione entropia S non è tale. In ogni modo per entrambe le funzioni sceglieremo le seguenti condizioni di normalizzazione

$$(3.8) \quad E(\sigma^+) = S(\sigma^+) = 0$$

dove σ^+ è un assegnato stato base.

OSSERVAZIONE 3.3 ([9], Remark 7.4, Th. 7.2 e § 8). — Esiste un'unica funzione energia E definita su Σ^+ e nulla in σ^+ ; inoltre $E(\cdot)$ è continua nella topologia naturale di Σ .

Le funzioni entropia S definite su Σ^+ e nulle in σ^+ costituiscono un insieme \mathfrak{S} che è convesso, cioè

$$(3.9) \quad S_1, S_2 \in \mathfrak{S}, \quad \alpha \in (0, 1) \quad \text{implica} \quad \alpha S_1 + (1 - \alpha) S_2 \in \mathfrak{S};$$

inoltre contiene un elemento S^+ che è la più piccola funzione entropia, cioè

$$S(\sigma) \geq S^+(\sigma) \quad \text{per ogni } S \in \mathfrak{S}, \quad \sigma \in \Sigma^+,$$

e che è superiormente semicontinua. L'esistenza della più grande funzione entropia nell'insieme \mathfrak{S} è garantita solo imponendo condizioni più forti sull'azione $s(\cdot, \cdot)$ (v. [9], Remark 7.3); in tali ipotesi può essere formulato un criterio di unicità delle funzioni entropia (v. [9], Remark 7.5).

4. - Condizioni ambientali ed equilibrio.

Finora abbiamo studiato il comportamento termomeccanico di un dato corpo \mathcal{B} in uno spazio euclideo \mathcal{E} , che possiamo pensare associato ad un osservatore. Se consideriamo ora il corpo \mathcal{B} immerso in un « ambiente fisico », occorrerà non solo descriverne le proprietà relativamente ad un osservatore collegato con tale ambiente, ma anche tener conto di ogni « interazione » tra il corpo in esame e l'ambiente circostante.

Penseremo l'ambiente fisico come una struttura, più o meno complessa, alla quale sono associati uno spazio euclideo ed una serie di dati termodinamici caratteristici, quali: vincoli meccanici esterni, campi di forze, distribuzioni di temperatura, sorgenti di calore, ecc. La descrizione completa dell'ambiente richiede inoltre la specificazione del modo con cui esso agisce su di un corpo materiale \mathcal{B} di natura arbitraria.

Per gli scopi di questa sezione è sufficiente introdurre le seguenti grandezze.

- a) I vincoli esterni, cioè le limitazioni alla classe delle localizzazioni che il corpo può assumere. Ciò comporta semplicemente considerare un sottoinsieme di \mathcal{V} . Penseremo di avere già tenuto conto dei vincoli nel definire la classe \mathcal{V} .
- b) Le forze esterne di volume e di superficie. Possiamo caratterizzare l'effetto di tali campi di forze mediante la potenza totale delle forze esterne che indicheremo con \mathcal{F}_e . Tale potenza sarà funzione della massa, della posizione attuale ψ e della distribuzione delle velocità v sul corpo \mathcal{B} :

$$\mathcal{F}_e = \mathcal{F}_e(m, \psi, v).$$

- c) La distribuzione delle temperature, che indicheremo con la funzione

$$\theta_e: \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{R}^{++}.$$

- d) La distribuzione delle sorgenti di calore, che assegneremo mediante una funzione densità

$$r: \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{R}.$$

Analogamente a quanto svolto da GURTIN in [4] e [5] ci limiteremo a considerare un particolare « tipo » di ambiente, che diremo *meccanicamente dissipativo e termicamente passivo* (M.D.T.P.).

DEFINIZIONE 4.1. - Un ambiente $\mathcal{A} = \{\mathcal{E}, \Psi, \mathcal{F}_e, \theta_e, r\}$ si dice meccanicamente dissipativo (M.D.) se esiste una funzione continua

$$\Omega_e: \Psi \rightarrow \mathbf{R}$$

detta potenziale totale delle forze esterne, tale che

$$(4.1) \quad \int_0^{d_v} \mathcal{F}_e(m, \tilde{\psi}(t), \tilde{v}(t)) dt \leq \Omega_e(\tilde{\psi}(0)) - \Omega_e(\tilde{\psi}(d_v))$$

per un corpo \mathcal{B} immerso in \mathcal{A} e sottoposto ad un processo cinetico \tilde{v} tale che

$$\tilde{\psi}(t) = \tilde{\psi}(0) + \int_0^t \tilde{v}(\tau) d\tau.$$

DEFINIZIONE 4.2. - Un ambiente $\mathcal{A} = \{\mathcal{E}, \Psi, \mathcal{F}_e, \theta_e, r\}$ si dice termicamente passivo (T.P.) se, ad ogni istante,

- i) $r = 0$, cioè non vi sono sorgenti di calore;
- ii) $\theta_e(x) = \theta_e \in \mathbf{R}^{++}$ per ogni $x \in \mathcal{E}$, cioè la distribuzione delle temperature è uniforme;
- iii) il flusso di calore che entra nell'ambiente, \mathcal{Q}_e , è uguale ed opposto in segno al flusso che entra nel corpo \mathcal{B} ;
- iv) il flusso di entropia che entra nell'ambiente, \mathcal{M}_e , è maggiore o uguale al flusso che entra nel corpo \mathcal{B} cambiato di segno.

Salvo diversa indicazione, d'ora in poi penseremo il sistema materiale, definito in § 2, immerso in ambiente di tipo M.D.T.P. assegnato mediante la sola coppia

$$\mathcal{A}_\mathcal{E} = \{\Omega_e, \theta_e\}$$

in quanto abbiamo già introdotto le quantità \mathcal{E}, Ψ nella struttura del sistema.

Per la Definizione 4.2 devono essere soddisfatte le seguenti relazioni

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \tilde{\eta}_{\mathcal{M}}(\sigma, \tilde{p})(t) &\geq -\mathcal{M}_e(t) \\ \tilde{\eta}_{\mathcal{Q}}(\sigma, \tilde{p})(t) &= -\mathcal{Q}_e(t) \end{aligned}$$

per ogni $t \in [0, d_p)$, $\sigma \in \Sigma$ e per ogni processo $\tilde{p} \in \tilde{P}_\sigma$ cui può essere sottoposto il corpo \mathcal{B} quando si trova immerso in \mathcal{A}_g .

Come vedremo, le diseguaglianze (4.1) e (4.2) comportano limitazioni sui processi \tilde{p} a cui può essere sottoposto \mathcal{B} compatibilmente con l'ambiente assegnato \mathcal{A}_g . Innanzi tutto dalla (4.2) si può immediatamente ricavare una relazione tra processi di risposta del corpo. Infatti, per l'assenza di sorgenti e per l'uniformità della temperatura nell'ambiente, in ogni istante si ha

$$\mathcal{M}_e = \frac{\Omega_e}{\theta_e}$$

da cui otteniamo, se $\tilde{p} \in \tilde{P}_\sigma$,

$$(4.3) \quad \tilde{\eta}_{\mathcal{M}}(\sigma, \tilde{p})(t) \geq \frac{1}{\theta_e} \tilde{\eta}_{\Omega}(\sigma, \tilde{p})(t)$$

per ogni $\sigma \in \Sigma$ e $t \in [0, d_p)$.

Per sviluppare anche le restrizioni derivanti dalla relazione (4.1), introdurremo il seguente

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA TOTALE. — Siano dati un ambiente $\mathcal{A} = \{\mathcal{E}, \mathcal{V}, \mathcal{F}_e, \theta_e, r\}$ ed un corpo materiale \mathcal{B} immerso in esso e dotato della struttura di sistema descritta nei paragrafi precedenti. Per ogni $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma^\dagger$ e per ogni $\tilde{p} = (\tilde{v}, \tilde{h}) \in \tilde{P}_{\sigma_1}$, tale che $\hat{\rho}(\sigma_1, \tilde{p}) = \sigma_2$ si ha

$$E(\sigma_2) - E(\sigma_1) + \eta_k(\tilde{p}(d_p)) - \eta_k(\tilde{p}(0)) = \int_0^t [\mathcal{F}_e(m, \tilde{p}(\tau), \tilde{v}(\tau)) + \tilde{\eta}_{\Omega}(\sigma_1, \tilde{p})(\tau)] d\tau$$

dove $\tilde{p}(t) = \hat{\psi}(\sigma_1) + \int_0^t \tilde{v}(\tau) d\tau$.

Dal Principio ora esposto e dal Teorema 3.3 otteniamo il cosiddetto « Teorema dell'energia cinetica »

$$(4.4) \quad \eta_k(\tilde{p}(t)) - \eta_k(\tilde{p}(0)) = \int_0^t [\mathcal{F}_e(m, \tilde{p}(\tau), \tilde{v}(\tau)) - \tilde{\eta}_{\mathcal{F}_e}(\sigma, \tilde{p})(\tau)] d\tau$$

per ogni $\sigma \in \Sigma^\dagger$ dove $\tilde{p} = (\tilde{v}, \tilde{h}) \in \tilde{P}_\sigma$.

Per la (4.4) la relazione (4.1) diventa

$$(4.5) \quad \eta_k(\tilde{p}(t)) - \eta_k(\tilde{p}(0)) + \int_0^t \tilde{\eta}_{\mathcal{F}_e}(\sigma, \tilde{p})(\tau) d\tau \leq \Omega_e(\hat{\psi}(\sigma)) - \Omega_e(\hat{\psi}(\hat{\rho}(\sigma, \tilde{p})))$$

per ogni $\sigma \in \Sigma^\dagger$, $t \in [0, d_p)$, $\tilde{p} \in \tilde{P}_\sigma$.

Le relazioni (4.3) e (4.5), che esprimono matematicamente le condizioni di dissipazione meccanica e passività termica, coinvolgono sia i processi di risposta del sistema materiale relativo al corpo \mathcal{B} , sia le quantità $\theta_e, \Omega_e(\cdot)$ che definiscono l'am-

biente \mathcal{A} . Poichè quest'ultimo è assegnato, le (4.3) e (4.5), in generale, possono essere soddisfatte solo per particolari processi \tilde{p} di entrata, in corrispondenza ad ogni σ fissato.

DEFINIZIONE 4.3. - Sia $(\mathcal{B}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, \tilde{P}, \tilde{U}, \Sigma, \tilde{\eta}, \hat{\rho})$ il sistema materiale precedentemente definito e sia $\mathcal{A}_\mathcal{E} = (\Omega_\mathcal{E}, \theta_\mathcal{E})$ un dato ambiente M.D.T.P. Diremo processi termodinamici ammissibili rispetto all'ambiente $\mathcal{A}_\mathcal{E}$ quei processi $\tilde{p} \in \tilde{P}$ che soddisfano, per qualche $\sigma \in \Sigma$, le relazioni (4.3) e (4.5). Per ogni fissato $\sigma \in \Sigma$, indicheremo con $\tilde{I}_\sigma \subset \tilde{P}_\sigma$ il loro insieme.

Possiamo anche dire che \tilde{I}_σ è l'insieme delle soluzioni (nella classe \tilde{P}) delle disequazioni funzionali (4.3) e (4.5) con $\theta_\mathcal{E}$, $\Omega_\mathcal{E}$ e σ assegnati.

Daremo ora la nozione di « equilibrio » per il sistema materiale relativo ad un assegnato ambiente; poi esamineremo la relazione esistente tra stati di equilibrio e stati stagnanti e rilassati. D'ora in poi con il termine « sistema corpo-ambiente » intenderemo la terna costituita da:

- il sistema materiale relativo al corpo \mathcal{B} ;
- l'ambiente $\mathcal{A}_\mathcal{E}$ di tipo M.D.T.P.;
- l'insieme dei processi ammissibili $\tilde{I} = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \tilde{I}_\sigma$.

DEFINIZIONE 4.4. - Sia $\mathcal{A}_\mathcal{E} = (\Omega_\mathcal{E}, \theta_\mathcal{E})$; diremo che uno stato $\sigma \in \Sigma$ del sistema materiale $(\mathcal{B}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, \tilde{P}, \tilde{U}, \Sigma, \tilde{\eta}, \hat{\rho})$ è di equilibrio relativamente ad $\mathcal{A}_\mathcal{E}$, se

- i) $\hat{\rho}(\sigma, \tilde{n}_a) = \sigma$ per ogni $\tilde{n}_a \in \tilde{N}$,
- ii) $\{\tilde{p} \in \tilde{I}_\sigma: (\tilde{p}(0))(X) = (0, 0) \text{ per ogni } X \in \mathcal{B}\} = \tilde{N}$.

Ciò significa che uno stato σ è di equilibrio per il sistema corpo-ambiente se, a partire dalla quiete, l'unica evoluzione del sistema, compatibile con l'azione che l'ambiente esercita su di esso, è quella che conserva lo stato σ .

È immediato riconoscere che uno stato di equilibrio deve essere necessariamente uno stato stagnante del sistema materiale (vedi Definizione 2.8). Ma, per il particolare tipo di ambiente in cui consideriamo immerso \mathcal{B} , è possibile dimostrare che deve essere uno stato rilassato.

TEOREMA 4.1. - Sia $\sigma^0 \in \Sigma^+$ uno stato stagnante per il sistema materiale e sia $\mathcal{A}_\mathcal{E} = (\Omega_\mathcal{E}, \theta_\mathcal{E})$ l'ambiente in cui il sistema è immerso. Condizione necessaria e sufficiente affinché σ^0 sia rilassato è che i processi nulli siano ammissibili per σ^0 , cioè $\tilde{N} \subset \tilde{I}_{\sigma^0}$.

DIMOSTRAZIONE. - Sia $\sigma^* \in \Sigma_{\text{ril}}$; per ogni $\tilde{d} \in \mathbf{R}^{++}$ si ha:

$$\hat{\rho}(\sigma^*, \tilde{n}_a) = \sigma^* \quad \text{e} \quad \tilde{\eta}_{\mathcal{B}_1}(\sigma^*, \tilde{n}_a)(t) = \tilde{\eta}_{\mathcal{Q}}(\sigma^*, \tilde{n}_a)(t) = \tilde{\eta}_{\mathcal{M}}(\sigma^*, \tilde{n}_a)(t) = 0$$

DIMOSTRAZIONE. - (i) Supponiamo che esista un processo ammissibile $\tilde{p} \in \tilde{\Pi}_{\bar{\sigma}}$ tale che $d_p = d$ e $(\tilde{p}(0))(X) = (\underline{0}, 0)$ per ogni $X \in \mathcal{B}$; per il Teorema 5.1

$$\Gamma(\hat{q}(\bar{\sigma}, \tilde{p}_t)) \leq \Gamma(\bar{\sigma}), \quad \forall t \in [0, d]$$

e poichè $\bar{\sigma}$ è minimo globale stretto per Γ

$$\Gamma(\sigma) > \Gamma(\bar{\sigma}), \quad \forall \sigma \in \Sigma^+, \sigma \neq \bar{\sigma}$$

si ottiene allora

$$\hat{q}(\bar{\sigma}, \tilde{p}_t) = \bar{\sigma}, \quad \forall t \in [0, d].$$

Il processo \tilde{p} deve conservare, perciò, lo stato $\bar{\sigma}$ ed in particolare la configurazione $\hat{g}(\bar{\sigma})$: quindi deve essere $\tilde{p} = \tilde{n}_a$.

(ii) Se per ogni $d \in \mathbf{R}^{++}$ esiste un processo $\tilde{p} \in \tilde{\Pi}_{\bar{\sigma}}$ tale che $d_p = d$ e $(\tilde{p}(0))(X) = (\underline{0}, 0)$ per ogni $X \in \mathcal{B}$, allora per la (i): $\tilde{p} = \tilde{n}_a$ e $\hat{q}(\bar{\sigma}, \tilde{n}_a) = \bar{\sigma}$. Data l'arbitrarietà di d e ricordando la Definizione 4.4, lo stato $\bar{\sigma}$ è di equilibrio per il sistema corpo-ambiente. \square

COROLLARIO 5.1. - Se l'energia balistica Γ del sistema corpo-ambiente ha un minimo globale stretto nello stato rilassato $\bar{\sigma} \in \Sigma^+$, allora tale stato è di equilibrio.

Introdurremo ora alcune nozioni di stabilità

DEFINIZIONE 5.3. - Relativamente al sistema corpo-ambiente, precedentemente introdotto, diremo:

- a) che uno stato di equilibrio $\bar{\sigma} \in \Sigma^+$ è incondizionatamente stabile nell' α -topologia di Σ^+ se per ogni α -intorno \mathcal{O} di $\bar{\sigma}$ esistono una costante $\varepsilon > 0$ ed un α -intorno \mathcal{O}' di $\bar{\sigma}$ tali che, se $\sigma_0 \in \mathcal{O}'$ e se $\tilde{p} \in \tilde{\Pi}_{\sigma_0}$ con $\eta_k(\tilde{p}(0)) < \varepsilon$, allora

$$\hat{q}(\sigma_0, \tilde{p}_t) \in \mathcal{O} \quad \text{per ogni } t \in [0, d_p];$$

- b) che uno stato di equilibrio $\bar{\sigma} \in \Sigma^+$ è stabile nell' α -topologia di Σ^+ se per ogni α -intorno \mathcal{O} di $\bar{\sigma}$ esistono una costante $\varepsilon > 0$ ed un α -intorno \mathcal{O}' di $\bar{\sigma}$ tali che, se $\sigma_0 \in \mathcal{O}'$ e se $\tilde{p} \in \tilde{\Pi}_{\sigma_0}$ è un processo ammissibile per cui $\eta_k(\tilde{p}(0)) < \varepsilon$ ed inoltre l'applicazione $t \mapsto \hat{q}(\sigma_0, \tilde{p}_t)$ è continua, allora

$$\hat{q}(\sigma_0, \tilde{p}_t) \in \mathcal{O} \quad \text{per ogni } t \in [0, d_p].$$

Osserviamo che nel primo caso lo stato di equilibrio è stabile rispetto a qualunque processo ammissibile, purchè la relativa energia cinetica iniziale sia opportunamente piccola. Nel secondo caso, invece, la stabilità è limitata a quei processi che oltre a ciò inducono nello spazio degli stati Σ una evoluzione continua nel tempo.

DEFINIZIONE 5.1. - Diremo α -topologia su Σ^+ la più piccola topologia che contiene sia la topologia naturale di sottoinsieme sia la topologia indotta dalla pseudometrica l così definita

$$(5.5) \quad l(\sigma_1, \sigma_2) = |\Gamma(\sigma_1) - \Gamma(\sigma_2)|$$

per ogni $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma^+$.

L' α -topologia ha per base la famiglia di sottoinsiemi di Σ^+ che sono intersezione di un aperto della topologia naturale con un aperto della topologia indotta da l .

L'insieme Σ^+ munito dell' α -topologia è ovviamente ancora uno spazio di Hausdorff ed inoltre

OSSERVAZIONE 5.1. - La funzione Γ è continua rispetto all' α -topologia su Σ^+ . Introduciamo, dunque, le seguenti nozioni:

DEFINIZIONE 5.2. - Sia $f: \Sigma^+ \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua rispetto all' α -topologia. Diremo:

- a) che f ha un minimo globale stretto in $\bar{\sigma}$ se per ogni $\sigma \in \Sigma^+$, tale che $\sigma \neq \bar{\sigma}$, si ha $f(\sigma) > f(\bar{\sigma})$;
- b) che f ha un minimo globale forte in $\bar{\sigma}$ (rispetto all' α -topologia su Σ^+) se, per ogni aperto \mathcal{O} di una base di α -intorni per $\bar{\sigma}$, sono verificate le seguenti condizioni:
 - i) $f(\bar{\sigma}) \leq f(\sigma)$ per ogni $\sigma \in \mathcal{O}$,
 - ii) $f(\bar{\sigma}) < \inf \{f(\sigma) : \sigma \in \partial\mathcal{O}\}$;
- c) che f ha un minimo globale fondamentale in $\bar{\sigma}$ (rispetto all' α -topologia su Σ^+) se in tale stato ha un minimo globale forte ed inoltre, per ogni aperto \mathcal{O} di una base di α -intorni per $\bar{\sigma}$, è verificata la condizione:
 - se $\sigma' \in \Sigma^+$ è tale che $f(\sigma') < \inf \{f(\sigma) : \sigma \in \partial\mathcal{O}\}$ allora $\sigma' \in \mathcal{O}$.

Ovviamente (c) implica (b), (b) implica (a).

I Teoremi che seguono forniscono condizioni sufficienti per l'equilibrio e per la stabilità dell'equilibrio, che verrà opportunamente definita; essi generalizzano, in un certo senso, alcuni risultati dovuti a GURTIN, COLEMAN e DILL (vedi [5], Teorema 6.2 e Corollario 8.1 e [3], Teorema 6.2).

TEOREMA 5.2. - Sia Γ l'energia balistica del sistema corpo-ambiente. Se $\bar{\sigma} \in \Sigma^+$ è minimo globale stretto per Γ allora:

- i) per ogni $d \in \mathbf{R}^{++}$ esiste al più un processo termocinetico ammissibile di durata d che inizia in quiete; se tale processo esiste deve essere necessariamente nullo;
- ii) se per ogni $d \in \mathbf{R}^{++}$ esiste un tale processo, allora $\bar{\sigma}$ è stato di equilibrio del sistema corpo ambiente.

Γ e Φ sono dette rispettivamente « energia balistica » ed « energia libera canonica » ([10], Cap. XVI) del sistema termomeccanico corpo-ambiente. Per ogni $(\sigma, \tilde{p}) \in \Sigma^\dagger \diamond \tilde{P}$ è possibile definire la funzione

$$(5.4) \quad \tilde{\Phi}(\sigma, \tilde{p}): [0, d_p) \rightarrow \mathbf{R} \quad \text{con} \quad \tilde{\Phi}(\sigma, \tilde{p})(t) = \Phi(\hat{\rho}(\sigma, \tilde{p}_t), \tilde{p}(t)).$$

La funzione $\tilde{\Phi}$ è, perciò, una diversa espressione dell'energia libera canonica e soddisfa il classico teorema

TEOREMA 5.1. — Lungo ogni processo ammissibile, a partire da uno stato $\sigma \in \Sigma^\dagger$, l'energia libera canonica è non crescente; cioè

$$\tilde{\Phi}(\sigma, \tilde{p})(t) \leq \tilde{\Phi}(\sigma, \tilde{p})(0)$$

per ogni $\tilde{p} \in \tilde{\Pi}_\sigma$ e per ogni $t \in [0, d_p)$.

DIMOSTRAZIONE. — Nel seguito indicheremo con σ_t lo stato $\hat{\rho}(\sigma, p_t)$ ⁽³⁾. Per ogni $t \in [0, d_p)$, dalla (5.4) abbiamo

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\sigma, \tilde{p})(t) - \tilde{\Phi}(\sigma, \tilde{p})(0) &= E(\sigma_t) - E(\sigma) - \theta_e[S(\sigma_t) - S(\sigma)] + \\ &\quad + \Omega_e(\sigma_t) - \Omega_e(\sigma) + \eta_k(\tilde{p}(t)) - \eta_k(\tilde{p}(0)). \end{aligned}$$

Per il Teorema 3.3 otteniamo

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\sigma, \tilde{p})(t) - \tilde{\Phi}(\sigma, \tilde{p})(0) &\leq \int_0^t \tilde{\eta}_{S_t}(\sigma, \tilde{p}_t)(\tau) d\tau + \eta_k(\tilde{p}(t)) - \eta_k(\tilde{p}(0)) + \Omega_e(\sigma_t) - \Omega_e(\sigma) + \\ &\quad + \int_0^t \tilde{\eta}_{Q_t}(\sigma, \tilde{p}_t)(\tau) d\tau - \theta_e \int_0^t \tilde{\eta}_{M_t}(\sigma, \tilde{p}_t)(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Infine, poichè $\tilde{p} \in \tilde{\Pi}_\sigma$, cioè verifica le (4.3) e (4.5), segue la tesi

$$\tilde{\Phi}(\sigma, \tilde{p})(t) - \tilde{\Phi}(\sigma, \tilde{p})(0) \leq 0. \quad \square$$

Una volta assegnata la coppia $(\sigma, \tilde{p}) \in \Sigma^\dagger \diamond \tilde{P}$ possiamo scrivere senza ambiguità

$$\tilde{\Phi}(t) \leq \tilde{\Phi}(0)$$

che è la forma classica in cui viene formulato il precedente Teorema.

Occorre ora ricordare che, per la costruzione fatta nel § 3, la funzione S — e perciò anche Γ — non risulta continua rispetto alla topologia naturale su Σ^\dagger (v. Osservazione 3.3). È comunque possibile introdurre, a partire dalla funzione Γ , una nuova topologia su Σ^\dagger che contiene la precedente e che permette di affrontare adeguatamente i problemi di stabilità (vedi [5], § 2).

⁽³⁾ Si tenga presente che Σ^\dagger è chiuso rispetto a \tilde{P} , cioè se $\sigma \in \Sigma^\dagger$ allora $\Sigma_\sigma \subset \Sigma^\dagger$.

per ogni $t \in [0, d]$; quindi le relazioni (4.3) e (4.5) sono identicamente soddisfatte per tutti i processi nulli, cioè $\tilde{N} \subset \tilde{\Pi}_{\sigma^*}$.

Viceversa, sia $\sigma^0 \in \Sigma^+$ uno stato stagnante; per l'Osservazione 3.2

$$(4.6) \quad K_1(\sigma^0) = K_2(\sigma^0) = 0, \quad K_3(\sigma^0) \leq 0.$$

Sia $d \in \mathbf{R}^{++}$ e supponiamo inoltre che $\tilde{n}_d \in \tilde{\Pi}_{\sigma^0}$: sostituendo \tilde{p} con \tilde{n}_d e σ con σ^0 nelle (4.3), (4.5), otteniamo

$$(4.7) \quad K_3(\sigma^0) \geq \frac{1}{\theta_e} K_2(\sigma^0), \quad K_1(\sigma^0) \leq 0.$$

Combinando (4.6) e (4.7) si ottiene

$$K_1(\sigma^0) = K_2(\sigma^0) = K_3(\sigma^0) = 0$$

per cui σ^0 deve essere rilassato. \square

In base alla Definizione 4.4 ed al Teorema 4.1 si ottiene

COROLLARIO 4.1. — Se $\bar{\sigma} \in \Sigma^+$ è uno stato di equilibrio, nel senso della Definizione 4.4, allora è necessariamente uno stato rilassato per il sistema materiale.

Il Corollario 4.1 fornisce una condizione *necessaria* per l'equilibrio del sistema termomeccanico corpo-ambiente; nella prossima sezione determineremo condizioni *sufficienti* sia per l'equilibrio sia per la stabilità dell'equilibrio di tale sistema.

5. — Stabilità dell'equilibrio.

In una prima fase, per maggior chiarezza, faremo l'ipotesi che il soprapotenziale entropia S per il sistema materiale $(\mathcal{B}, \varepsilon, G, \tilde{P}, \tilde{U}, \Sigma, \tilde{\eta}, \hat{q})$, definito su Σ^+ e nullo nello stato base σ^+ :

$$(5.1) \quad S: \Sigma^+ \rightarrow \mathbf{R}, \quad S(\sigma^+) = 0,$$

sia univocamente determinato.

Come nel § 4, considereremo il corpo \mathcal{B} immerso in un ambiente \mathcal{A}_e di tipo M.D.T.P. caratterizzato dalla funzione potenziale Ω_e e della temperatura costante θ_e . Utilizzeremo, inoltre, le seguenti funzioni:

$$(5.2) \quad \Gamma: \Sigma^+ \rightarrow \mathbf{R} \quad \text{così definita} \quad \Gamma(\sigma) = E(\sigma) - \theta_e S(\sigma) + \Omega_e(\sigma) \quad (2)$$

$$(5.3) \quad \Phi: \Sigma^+ \diamond P \rightarrow \mathbf{R} \quad \text{così definita} \quad \Phi(\sigma, p) = \Gamma(\sigma) + \eta_k(p).$$

(2) Indicheremo ancora con $\Omega_e: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione $\Omega_e \circ \psi$: essa è continua in quanto composizione di funzioni continue.

TEOREMA 5.3. — Se l'energia balistica I del sistema corpo-ambiente ha un minimo globale forte nello stato rilassato $\bar{\sigma} \in \Sigma^+$ allora $\bar{\sigma}$ è stato di equilibrio stabile nell' α -topologia di Σ^+ .

DIMOSTRAZIONE. — Applicando il Corollario 5.1 si riconosce facilmente che $\bar{\sigma}$ deve essere stato di equilibrio per il sistema corpo-ambiente. Sia dunque \mathcal{O} un α -intorno di $\bar{\sigma}$ e sia

$$m = \inf \{I(\sigma) : \sigma \in \partial\mathcal{O}\}.$$

Per la Definizione 5.2, *b*) esiste $\varepsilon > 0$ tale che $m > I(\bar{\sigma}) + \varepsilon$. Si scelga quindi $m' \in \mathbf{R}$ tale che

$$m - \varepsilon > m' > I(\bar{\sigma}).$$

Per la continuità di I nell' α -topologia si può determinare un α -intorno $\bar{\mathcal{O}}$ di $\bar{\sigma}$ tale che $I(\sigma) < m', \forall \sigma \in \bar{\mathcal{O}}$. Sia $\mathcal{O}' = \mathcal{O} \cap \bar{\mathcal{O}}$; se inizialmente $\sigma_0 \in \mathcal{O}'$, allora per ogni processo $\tilde{p} \in \tilde{I}_{\sigma_0}$ tale che $\eta_k(\tilde{p}(0)) < \varepsilon$ si ha per il Teorema 5.1

$$I(\hat{q}(\sigma_0, \tilde{p}_t)) + \eta_k(\tilde{p}(t)) \leq I(\sigma_0) + \eta_k(\tilde{p}(0)) \leq m' + \varepsilon < m$$

e per la positività dell'energia cinetica

$$(5.6) \quad I(\hat{q}(\sigma_0, \tilde{p}_t)) < m, \quad \forall t \in [0, d_p].$$

Infine, la continuità della funzione $t \mapsto \hat{q}(\sigma_0, p_t)$ rispetto all' α -topologia ci assicura che

$$\hat{q}(\sigma_0, \tilde{p}_t) \in \mathcal{O} \quad \text{per ogni } t \in [0, d_p]. \quad \square$$

TEOREMA 5.4. — Se l'energia balistica I del sistema corpo-ambiente ha un minimo globale fondamentale dello stato rilassato $\bar{\sigma} \in \Sigma^+$ allora $\bar{\sigma}$ è stato di equilibrio incondizionatamente stabile nell' α -topologia di Σ^+ .

DIMOSTRAZIONE. — Poichè $\bar{\sigma}$ è minimo fondamentale, per la Definizione 5.2 è anche minimo forte per I . Quindi si può ottenere la (5.6) come nella precedente dimostrazione. A questo punto la Definizione 5.2, *c*) permette di concludere

$$\hat{q}(\sigma_0, \tilde{p}_t) \in \mathcal{O} \quad \text{per ogni } t \in [0, d_p]$$

indipendentemente dalla continuità delle applicazioni $t \mapsto \hat{q}(\sigma_0, \tilde{p}_t)$. \square

Esamineremo ora il problema della stabilità nel caso in cui la funzione entropia del sistema materiale non sia univocamente determinata. In tal caso, come abbiamo

osservato al termine del § 3, l'insieme \mathfrak{S} delle funzioni entropia definite su Σ^\dagger e nulle nello stato base σ^\dagger è un insieme convesso, dotato di minimo ed in generale non numerabile. Mediante un insieme di indici J possiamo porre

$$\mathfrak{S} = \{S_j; j \in J\};$$

esisterà inoltre un elemento $j^\dagger \in J$ per cui $S_{j^\dagger} = S^\dagger$, è l'elemento minimo di \mathfrak{S} . La funzione S^\dagger è superiormente semicontinua e tale che, per ogni $j \in J$,

$$S^\dagger(\sigma) \leq S_j(\sigma), \quad \forall \sigma \in \Sigma^\dagger.$$

Indicheremo analogamente

$$\begin{aligned} \Gamma_j(\sigma) &= E(\sigma) - \theta_e S_j(\sigma) + \Omega_e(\sigma) \\ \Gamma^\dagger(\sigma) &= E(\sigma) - \theta_e S^\dagger(\sigma) + \Omega_e(\sigma) \end{aligned} \quad \sigma \in \Sigma^\dagger$$

ed inoltre

$$\begin{aligned} \Phi_j(\sigma, p) &= \Gamma_j(\sigma) + \eta_k(p) \\ \Phi^\dagger(\sigma, p) &= \Gamma^\dagger(\sigma) + \eta_k(p) \end{aligned} \quad (\sigma, p) \in \Sigma^\dagger \diamond P$$

La funzione Γ^\dagger risulta essere inferiormente semicontinua e tale che, per ogni $j \in J$,

$$\Gamma^\dagger(\sigma) \geq \Gamma_j(\sigma), \quad \forall \sigma \in \Sigma^\dagger.$$

Se $j \in J$, diremo in seguito α_j -topologia su Σ^\dagger la più piccola topologia che contiene sia la topologia naturale sia la topologia indotta dalla pseudometrica l_j così definita

$$l_j(\sigma_1, \sigma_2) = |\Gamma_j(\sigma_1) - \Gamma_j(\sigma_2)|.$$

Ricordando il Teorema 3.3, possiamo affermare che i risultati dei precedenti Teoremi 5.1 - 5.2 - 5.3 - 5.4 e del Corollario 5.1 restano validi, in un certo senso, anche quando l'entropia S non è unica. Ciò è espresso sinteticamente dalle Osservazioni che seguono.

OSSERVAZIONE 5.2. - Per ogni $j \in J$ l'energia libera canonica, Φ_j , è non crescente lungo processi ammissibili.

OSSERVAZIONE 5.3. - Se esiste $j \in J$ tale che Γ_j ha un minimo globale stretto nello stato rilassato $\bar{\sigma} \in \Sigma^\dagger$, allora $\bar{\sigma}$ è stato di equilibrio per il sistema corpo-ambiente.

OSSERVAZIONE 5.4. - Se esiste $j \in J$ tale che Γ_j , rispetto all' α_j -topologia, ha un minimo globale forte (o fondamentale) nello stato rilassato $\bar{\sigma} \in \Sigma^\dagger$, allora $\bar{\sigma}$ è stato di equilibrio stabile (o incondizionatamente stabile) nell' α_j -topologia di Σ^\dagger .

BIBLIOGRAFIA

- [1] J. L. ERICKSEN, *A thermokinetic view of elastic stability theory*, Int. J. Solids Structures, **2** (1966), pp. 573-580.
- [2] J. L. ERICKSEN, *Thermoelastic stability*, Proc. 5th U.S. National Congr. Appl. Mech. (1966), pp. 187-193.
- [3] B. D. COLEMAN - E. H. DILL, *On thermodynamics and the stability of motions of materials with memory*, Arch. Rational Mech. Anal., **51** (1973), pp. 1-13.
- [4] M. E. GURTIN, *Thermodynamics and the energy criterion for stability*, Arch. Rational Mech. Anal., **52** (1973), pp. 93-103.
- [5] M. E. GURTIN, *Thermodynamics and stability*, Arch. Rational Mech. Anal., **59** (1975), pp. 63-95.
- [6] W. NOLL, *A new mathematical theory of simple materials*, Arch. Rational Mech. Anal., **48** (1972), pp. 1-50.
- [7] C. BANFI - M. FABRIZIO, *Global theory for thermodynamic behaviour of a continuous medium* (to appear).
- [8] M. D. MESAROVIC - Y. TAKAHARA, *General Systems Theory: Mathematical Foundations*, Academic Press, 1975.
- [9] B. D. COLEMAN - D. R. OWEN, *A mathematical foundation for thermodynamics*, Arch. Rational Mech. Anal., **54** (1974), pp. 1-103.
- [10] P. DUHEM, *Traité d'Energétique ou de Thermodynamique Générale*, Gauthier-Villars, 1911.
- [11] M. E. GURTIN, *Modern continuum thermodynamics*, in *Mechanics Today*, vol. I, Pergamon Press, 1973.
- [12] W. NOLL, *A general framework for problems in the statics of finite elasticity*, in *Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations*, de La Penha G. M. and Medeiros L. A. ed., 1978.
- [13] S. LANG, *Real Analysis*, Addison Wesley ed., 1969.