

Eine Bemerkung zur Weylschen Theorie vom Grenzkreis- und Grenzpunktfall (*).

ERNST MOHR (Berlin)

Summary. – *Into Weyl's theory of the limit-circle and the limit-point case we introduce a real proceeding with the consequence, that the boundary conditions become real, as it is usual with problems in Physics and Engineering. We study in this paper the limit-circle case for the interval $0 \leq s < \infty$; by itself result at some places also statements for the limit-point case. In a following paper, which will be based on the present, we shall deal with the interval $-\infty < s < \infty$ and also with the limit-point case.*

In die Weylsche Theorie vom Grenzkreis- und Grenzpunktfall wird ein *reeller Ansatz* eingeführt, der nach sich zieht, daß die *Randbedingungen reell* werden, wie das im allgemeinen bei Aufgaben in der Physik und in den Ingenieurwissenschaften der Fall ist. Wir betrachten in dieser Arbeit den Grenzkreisfall für das Intervall $0 \leq s < \infty$; von selbst ergeben sich dabei an einigen Stellen auch schon Aussagen über den Grenzpunktfall. In einer folgenden Arbeit, die sich auf die vorliegende stützt, betrachten wir das Intervall $-\infty < s < \infty$, sowie den Grenzpunktfall.

I. – Der Weylsche Grenzkreis = und Grenzpunktfall.

I. – Wir halten uns soweit als möglich an die Bezeichnungen von WEYL [1]: es sei $0 \leq s < \infty$, und es seien: $p(s), q(s), k(s)$ reelle Funktionen, stetig bis auf endlich viele Sprungstellen, $p(s) > 0, k(s) > 0, p(0) = \lim p(s)$ für $s \rightarrow 0, \dots$

Mit $u = u(s), \dot{u} = du/ds$ lautet die Differentialgleichung (dabei stets: $p\dot{u}$ stetig, $(p\dot{u})$ stückweise stetig)

$$(1) \quad \frac{1}{k}Lu + \lambda u = 0, \quad Lu = (p\dot{u}) - qu$$

mit der *festen Randbedingung*

$$(2) \quad \cos h \cdot u - \sin h \cdot (p\dot{u}) = 0 \quad \text{in } s = 0; \quad 0 \leq h < \pi.$$

$U(s, \lambda), V(s, \lambda)$ sei das Fundamentalsystem mit der Eigenschaft, daß in $s = 0$ *unab-*

(*) Entrato in Redazione l'11 dicembre 1980; modificato il 28 aprile 1981.

hängig von λ

$$(3) \quad \begin{pmatrix} U & V \\ p\dot{U} & p\dot{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad U = 1 \quad V = 0 \\ p\dot{U} = 0 \quad p\dot{V} = 1$$

ist, und $\vartheta(s, \lambda), \eta(s, \lambda)$, das Fundamentalsystem

$$(4) \quad \begin{cases} \vartheta(s, \lambda) = \cos h \cdot U(s, \lambda) - \sin h \cdot V(s, \lambda) \\ \eta(s, \lambda) = \sin h \cdot U(s, \lambda) + \cos h \cdot V(s, \lambda) \end{cases}$$

mit der Eigenschaft

$$(5) \quad \begin{pmatrix} \vartheta & \eta \\ p\dot{\vartheta} & p\dot{\eta} \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} \cos h & \sin h \\ -\sin h & \cos h \end{pmatrix}.$$

Die Funktion $\eta(s, \lambda)$ genügt für jedes λ der Randbedingung (2) in $s = 0$.

Wir erinnern an die Bezeichnungen und Formeln

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(s) \in L_k^2 \Leftrightarrow \int_0^\infty ds k(s) |f(s)|^2 < \infty \\ f(s) \perp g(s) \Leftrightarrow \int_0^\infty ds k(s) f(s) \bar{g}(s) = 0; \quad f, g \in L_k^2 \end{array} \right.$$

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} [u(s), v(s)] = [u, v] = \begin{vmatrix} u & v \\ p\dot{u} & p\dot{v} \end{vmatrix} \\ [u, v]_a = [u(s), v(s)] \quad \text{für } s = a \\ [u, v]_\infty = \lim [u(s), v(s)] \quad \text{für } s \rightarrow \infty, \end{array} \right.$$

falls der Limes existiert. Es gilt die Greensche Formel ($k = k(s)$)

$$(8) \quad \int_0^a ds k \left\{ u \frac{1}{k} Lv - v \frac{1}{k} Lu \right\} = [u, v]_a - [u, v]_0.$$

Es ist

$$(9) \quad [\vartheta, \eta] = [\vartheta(s, \lambda), \eta(s, \lambda)] \equiv 1$$

und die reelle Randbedingung (2) gleichwertig mit

$$(10) \quad [\eta(s, \mu), u(s)]_0 = 0; \quad \mu \text{ reell.}$$

2. – Weyl fordert, wenn das dortige i nach dem Vorgang von TITCHMARSH [2] durch ein λ mit $\text{Im } \lambda > 0$ ersetzt wird, daß für ein $l = l(\lambda)$ die Funktion

$$(11) \quad \beta^{l(\lambda)}(s, \lambda) = \vartheta(s, \lambda) + l(\lambda)\eta(s, \lambda)$$

in $s = a$ ($a > 0$, später $a \rightarrow \infty$) einer reellen Randbedingung

$$(12) \quad \cos j \cdot \beta^{l(\lambda)}(a, \lambda) + \sin j \cdot p(a)\beta^{l(\lambda)}(a, \lambda) = 0, \quad 0 \leq j < \pi$$

genügt; das verlangt von $l = l(\lambda) = l(\lambda; a)$

$$(13) \quad l(\lambda; a) = \frac{\vartheta(a, \lambda) \cdot [-\text{ctg } j] - p(a)\dot{\vartheta}(a, \lambda)}{-\eta(a, \lambda) \cdot [-\text{ctg } j] + p(a)\dot{\eta}(a, \lambda)};$$

das ist eine in $x = [-\text{ctg } j]$ lineare Transformation mit der Determinante 1 nach (9). Durchläuft x wachsend die volle reelle Achse, so durchläuft $l = l(\lambda; a)$ einen Kreis $K(\lambda; a)$ mit dem Radius $r(\lambda; a)$, die nach Weyl durch

$$(14) \quad K(\lambda; a): \int_0^a ds k(s) |\beta^{l(\lambda; a)}(s, \lambda)|^2 = \frac{\text{Im } l(\lambda; a)}{\text{Im } \lambda}$$

$$(15) \quad r(\lambda; a) = \left\{ 2 \cdot \text{Im } \lambda \cdot \int_0^a ds k(s) |\eta(s, \lambda)|^2 \right\}^{-1}$$

gegeben sind; für einen Punkt l im Innern von $K(\lambda; a)$ steht in (14) rechts: $<$ statt $=$; l ist dann das Bild eines Punktes $z = x + iy$ mit $y > 0$. Wegen $\text{Im } \lambda > 0$ ist nach (14) auch $\text{Im } l(\lambda; a) > 0$, und ferner $K(\lambda; b)$ im Innern von $K(\lambda; a)$ für $0 < a < b$.

Daraus folgt nach Weyl die Unterscheidung der zwei Fälle, von uns kurz mit I) und II) bezeichnet:

I) der *Grenzkreisfall*: die sich einschachtelnden Kreise $K(\lambda; a)$ liefern für $a \rightarrow \infty$ den « Grenzkreis » $K(\lambda; \infty)$ mit dem Radius $r(\lambda; \infty) > 0$, wobei sich $r(\lambda; \infty)$ aus (15) für $a \rightarrow \infty$ ergibt.

II) der *Grenzpunktfall*: die Kreise $K(\lambda; a)$ schrumpfen für $a \rightarrow \infty$ auf einen Punkt, den « Grenzpunkt » $l(\lambda; \infty)$ mit $\text{Im } l(\lambda; \infty) > 0$ zusammen; gleichwertig damit ist: $r(\lambda; \infty) = 0$; $l(\lambda; \infty)$ ist holomorph in $\text{Im } \lambda > 0$.

Ist l ein Punkt auf dem Grenzkreis $K(\lambda; \infty)$ oder der Grenzpunkt $l(\lambda; \infty)$, so gilt nach Weyl stets

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta^l(s, \lambda) = \vartheta(s, \lambda) + l\eta(s, \lambda) \in L_k^2 \\ \int_0^\infty ds k(s) |\beta^l(s, \lambda)|^2 = \frac{\text{Im } l}{\text{Im } \lambda}. \end{array} \right.$$

Im Fall I) ist jede Lösung von (1): $\in L_2^k$; im Fall II) ist nach (15) infolge $r(\lambda; a) \rightarrow 0$: $\eta(s, \lambda) \notin L_k^2$.

3. – Im Fall I) entspricht nach Weyl jedem Punkt $l \in K(\lambda; \infty)$ eine Greensche Funktion

$$(17) \quad G^l(s, t; \lambda) = \begin{cases} \eta(s, \lambda) \beta^l(t, \lambda), & 0 \leq s \leq t < \infty \\ \eta(t, \lambda) \beta^l(s, \lambda), & 0 \leq t \leq s < \infty \end{cases}$$

und damit eine Randbedingung in $s = \infty$; diese lautet

$$(18) \quad [\beta^l(s, \lambda), u(s)]_\infty = 0, \quad l \in K(\lambda; \infty)$$

und kommt zu der Randbedingung (2) oder (10) in $s = 0$ hinzu. Im Fall II) ist $G^l(s, t; \lambda)$ bereits durch die Randbedingung in $s = 0$ eindeutig festgelegt; eine Randbedingung in $s = \infty$ kommt nicht in Frage.

4. – Wir beachten: in der Beziehung (13) für $l(\lambda; a)$ kann man den Limes $a \rightarrow \infty$ nicht unmittelbar ausführen. Ohne Gefahr eines Mißverständnisses schreiben wir (13) in Matrizen wie folgt

$$(19) \quad \begin{pmatrix} l(\lambda; a) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vartheta(s, \lambda) & -p(s) \dot{\vartheta}(s, \lambda) \\ -\eta(s, \lambda) & p(s) \dot{\eta}(s, \lambda) \end{pmatrix}_a \begin{pmatrix} [-\text{ctg } j] \\ 1 \end{pmatrix}$$

und beachten dabei, daß es bei einer solchen Gleichung auf einen gemeinsamen Faktor $\neq 0$ der viergliedrigen Matrix nicht ankommt.

II. – Vorbereitende Betrachtungen.

5. – In diesem Abschnitt sind alle auftretenden Funktionen und Zahlen, speziell auch λ , reell. $z(s, \lambda)$ bedeutet irgendeine Lösung von (1), die $\neq 0$ ist; jede (von selbst einfache) Nullstelle von $z(s, \lambda)$ auf $0 < s < \infty$ heißt «Knoten». Wir stützen uns auf eine grundlegende Arbeit von RELLIÖH [3] und stellen einige für uns wichtige Ergebnisse ohne Beweis zusammen. Nach [3], p. 349 gilt: entweder haben für das reelle λ alle Lösungen $z(s, \lambda)$ von (1) nur endlich viele Knoten, oder unendlich viele Knoten mit dem einzigen Häufungspunkt ∞ ; im ersten Fall heisst die Differentialgleichung (1) nicht oszillierend in $s = \infty$, im zweiten Fall oszillierend in $s = \infty$, immer für das betreffende λ . Liegt der erste Fall für $\lambda = \alpha$ vor, so nach einem bekannten Vergleichssatz auch für jedes $\lambda < \alpha$; liegt der zweite Fall für $\lambda = \beta$ vor, so aus demselben Grund für $\lambda > \beta$. Das Alles berechtigt zu der Definition der «Oszillationsgrenze» ω der Differentialgleichung (1):

$$(20) \quad \begin{cases} \omega = \sup_{\alpha} \{ \alpha | \eta(s, \alpha) \text{ oszilliert nicht} \} \\ -\infty \leq \omega \leq \infty. \end{cases}$$

$\omega = \infty$ bedeutet: jede Lösung $\eta(s, \lambda)$ von (1) und (2) oszilliert nicht ($-\infty < \lambda < \infty$);
 $\omega = -\infty$ bedeutet: jede solche Lösung oszilliert; $-\infty < \omega < \infty$ bedeutet: $\eta(s, \lambda)$
 oszilliert nicht für $\lambda < \omega$ und oszilliert für $\lambda > \omega$; für $\lambda = \omega$ bleibt es offen, welcher
 der zwei Fälle eintritt.

6. - *Das spezielle Courantsche Variationsproblem $\hat{C}(a)$ mit dem Spektrum $\hat{S}(a)$; $0 < a < \infty$.*

Dasselbe lautet mit den üblichen Bezeichnungen und unter den üblichen Voraussetzungen, vergleiche [4], Kapitel VI,

$$(21) \quad D_a[\chi] = \int_0^a \{p\dot{\chi}^2 + q\chi^2\}, \quad H_a[\chi] = \int_0^a k\chi^2$$

($\chi = \chi(s)$, das Integrationselement ds hier und im folgenden oft unterdrückt) mit dem Winkel h in (2)

$$(22) \quad \begin{cases} D_a[\chi] + [\text{ctg } h] \cdot \chi^2(0) = \min \lambda; & H_a[\chi] = 1 \\ & \chi(a) = 0; \end{cases}$$

ist $h = 0$, d.h. $[\text{ctg } h] = \infty$, so entfällt der Randbeitrag und es tritt an seine Stelle die Bedingung $\chi(0) = 0$. Dem Problem (22) entspringt ein Spektrum $\hat{S}(a)$ plus zugehörigen Eigenfunktionen

$$(23) \quad \begin{cases} \hat{S}(a): -\infty < \hat{\lambda}_1(a) < \hat{\lambda}_2(a) < \dots; & \hat{\lambda}_n(a) \uparrow \infty. \\ & \chi_1(s) \quad \chi_2(s) \quad \dots \end{cases}$$

Die n -te nicht normierte Eigenfunktion lautet:

$$(24) \quad \chi_n(s): \eta(s, \hat{\lambda}_n(a)),$$

die « Wurzelgleichung » für die Eigenwerte

$$(25) \quad \eta(a, \lambda) = 0: \eta(a, \hat{\lambda}_n(a)) = 0 \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots;$$

es gilt der « Knotensatz »: $\eta(s, \hat{\lambda}_n(a))$ hat genau $(n - 1)$ Knoten auf $0 < s < a$, sowie der « Trennungssatz »: die Knoten von $\eta(s, \hat{\lambda}_n(a))$ und $\eta(s, \hat{\lambda}_{n+1}(a))$ trennen sich gegenseitig.

Für $0 < a < b$ ist $\hat{\lambda}_n(a) > \hat{\lambda}_n(b)$ und es existiert der Limes

$$(26) \quad \begin{cases} \lim \hat{\lambda}_n(a) = \hat{\lambda}_n(\infty), & (a \rightarrow \infty), \\ -\infty \leq \hat{\lambda}_1(\infty) \leq \hat{\lambda}_2(\infty) \leq \dots \end{cases}$$

7. - Nach (26) haben wir die Fallunterscheidung

$$(27) \quad 1^\circ: -\infty = \hat{\lambda}_1(\infty); \quad 2^\circ: -\infty < \hat{\lambda}_1(\infty).$$

Man überzeugt sich, daß die folgenden Aussagen gelten.

$$1^\circ: -\infty = \hat{\lambda}_1(\infty) \\ \dots \dots \dots$$

Hier ist

$$(28) \quad -\infty = \hat{\lambda}_1(\infty) = \hat{\lambda}_2(\infty) = \hat{\lambda}_3(\infty) = \dots$$

und dies ist gleichbedeutend mit $\omega = -\infty$: jede Lösung oszilliert.

$$2^\circ: -\infty < \hat{\lambda}_1(\infty) \\ \dots \dots \dots$$

Hier gilt: aus $\hat{\lambda}_1(\infty) = \hat{\lambda}_2(\infty)$ folgt: alle $\hat{\lambda}_n(\infty)$ sind einander gleich, ferner $\eta(s, \hat{\lambda}_1(\infty)) > 0$ für $s > 0$ und $\omega = \hat{\lambda}_1(\infty)$.

Analog: aus $\hat{\lambda}_1(\infty) < \hat{\lambda}_2(\infty) = \hat{\lambda}_3(\infty)$ folgt: alle $\hat{\lambda}_n(\infty)$ für $n \geq 2$ sind einander gleich; $\eta(s, \hat{\lambda}_1(\infty))$ hat 0, $\eta(s, \hat{\lambda}_2(\infty))$ genau 1 Knoten auf $0 < s < \infty$ und $\omega = \hat{\lambda}_2(\infty)$.

Ebenso: aus $\hat{\lambda}_1(\infty) < \hat{\lambda}_2(\infty) < \hat{\lambda}_3(\infty) = \hat{\lambda}_4(\infty)$ folgt: alle $\hat{\lambda}_n(\infty)$ für $n \geq 3$ sind einander gleich; $\eta(s, \hat{\lambda}_1(\infty))$, $\eta(s, \hat{\lambda}_2(\infty))$ und $\eta(s, \hat{\lambda}_3(\infty))$ haben 0, 1 und 2 Knoten auf $0 < s < \infty$ und $\omega = \hat{\lambda}_3(\infty)$; und so fort.

8. - *Das Courantsche « Grenzspektrum » $\hat{S}(\infty)$ im Grenzkreisfall I) bei $-\infty < \hat{\lambda}_1(\infty)$.*

Da $\eta(s, \hat{\lambda}_1(\infty)) > 0$ für $s > 0$ ist, so folgt nach RELICH [3], p. 353: $\omega = \infty$ und daraus nach 7. die Existenz des diskreten « Grenzspektrums » ($a \rightarrow \infty$) $\hat{S}(\infty) = \lim \hat{S}(a)$:

$$(29) \quad \hat{S}(\infty): -\infty < \hat{\lambda}_1(\infty) < \hat{\lambda}_2(\infty) < \dots; \quad \hat{\lambda}_n(\infty) \uparrow \infty.$$

Für die (nicht normierten) Eigenfunktionen $\eta(s, \hat{\lambda}_n(\infty))$ gilt der Knotensatz: $\eta(s, \hat{\lambda}_n(\infty))$ hat genau $(n - 1)$ Knoten auf $0 < s < \infty$. Für $n = 1$ ist das klar; ist $n \geq 2$, so hat $\eta(s, \hat{\lambda}_n(a))$ genau $(n - 1)$ Knoten $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a$; es ist dann $\hat{\lambda}_n(a) = \hat{\lambda}_{n-1}(a_{n-1})$; $a_{n-1} \rightarrow \infty$ ($a \rightarrow \infty$) ist unmöglich.

9. - *Das allgemeine Courantsche Variationsproblem $O(j; a)$ mit dem Spektrum $S(j; a)$, $0 \leq j < \pi$, $0 < a < \infty$.*

Hier tritt anstelle von (22) die Aufgabe ($\psi = \psi(s)$)

$$(30) \quad \begin{cases} D_a[\psi] + [\text{ctg } h] \cdot \psi^2(0) + [\text{ctg } j] \cdot \psi^2(a) = \min \lambda \\ \cdot H_a[\psi] = 1; \end{cases}$$

wieder mit der Vereinbarung: für $j = 0$ d.h. $[\text{ctg } j] = \infty$ entfällt der Randbeitrag in a und es tritt an seine Stelle die Bedingung: $\psi(a) = 0$.

Das zeigt bereits:

$$(31) \quad C(0; a) = \hat{C}(a); \quad S(0; a) = \hat{S}(a).$$

Im Gegensatz zu h darf j variieren; es variiert dann auch das Spektrum $S(j; a)$ mit j .

Dabei ist *stets*

$$(32) \quad -\infty < [\text{ctg } j] \leq \infty.$$

Den Randbeitrag $[\text{ctg } j] \cdot \psi^2(a)$ deuten wir als (doppelte) potentielle Energie, die in $s = a$ konzentriert ist und bezeichnen dementsprechend $[\text{ctg } j]$ als «Energiekonstante». Es erhellt dann die Entsprechung angedeutet durch \leftrightarrow

$$(33) \quad [\text{ctg } j] > 0 \leftrightarrow \text{dämpfende Wirkung}$$

$$(34) \quad [\text{ctg } j] < 0 \leftrightarrow \text{anfachende Wirkung.}$$

Wächst $[\text{ctg } j]$ in (33), so wird das Spektrum nach rechts getrieben; fällt $[\text{ctg } j]$ in (33), so wird das Spektrum nach links getrieben.

Die Randbedingung in $s = a$ lautet gemäß (30)

$$(35) \quad \begin{cases} [\text{ctg } j] \cdot \psi(a) + p(a)\dot{\psi}(a) = 0; \\ \psi(a) = 0 \quad \text{für } j = 0, [\text{ctg } j] = \infty. \end{cases}$$

Der Aufgabe (30) entspringt ein Spektrum $S(j; a)$ plus Eigenfunktionen

$$(36) \quad \begin{cases} S(j; a): -\infty < \lambda_1(j; a) < \lambda_2(j; a) < \dots; \quad \lambda_n(j; a) \uparrow \infty; \\ \psi_1(s) \quad \psi_2(s) \quad \dots \end{cases}$$

die n -te nichtnormierte Eigenfunktion lautet

$$(37) \quad \psi_n(s): \eta(s, \lambda_n(j; a))$$

und die Wurzelgleichung nach (35)

$$(38) \quad \cos j \cdot \eta(a, \lambda) + \sin j \cdot p(a)\dot{\eta}(a, \lambda) = 0,$$

und es gilt wieder der Knotensatz für $0 < s < a$, und ebenso der Trennungssatz.

Ist für *einen* Zeiger n : $\lambda_n(j; a) = \hat{\lambda}_n(a)$, so ist $j = 0$, $[\text{ctg } j] = \infty$ und $S(j; a) = \hat{S}(a)$; dem entspricht die größte Energiekonstante: $[\text{ctg } j] = \infty$.

10. – Sei jetzt: $0 < j < \pi$. Klar ist: $\lambda_n(j; a) < \hat{\lambda}_n(a)$. Man überzeugt sich auf Grund des Knotensatzes, daß $\hat{\lambda}_n(a) < \lambda_{n+1}(j; a)$ ist.

Es gilt also

$$(39) \quad \hat{\lambda}_n(a) < \lambda_{n+1}(j; a) < \hat{\lambda}_{n+1}(a); \quad n = 1, 2, 3, \dots;$$

wir nennen (39) kurz die «Kasteneigenschaft» des Spektrums $S(j; a)$: $\lambda_{n+1}(j; a)$ bleibt im Kasten $\hat{\lambda}_n(a) \dots \hat{\lambda}_{n+1}(a)$.

Für $j \uparrow \pi$, $[\text{ctg } j] \downarrow -\infty$ ergibt die Aufgabe (30): $\lambda_1(j; a) \downarrow -\infty$; jeder höhere Eigenwert $\lambda_n(j; a)$, wo $n \geq 2$, nimmt ebenfalls streng monoton ab und hat wegen (39) einen Limes, der $\geq \hat{\lambda}_n(a)$ und wie die Aufgabe (30) zeigt, dann notwendig: $= \hat{\lambda}_n(a)$ ist (da $\psi(a) = 0$ werden muß):

$$(40) \quad \lambda_{n+1}(j; a) \downarrow \hat{\lambda}_n(a), \quad [\text{ctg } j] \downarrow -\infty; \quad n = 1, 2, \dots$$

Das zieht, wie man sich überzeugt, Folgendes nach sich: die zugehörige Eigenfunktion $\eta(s, \lambda_{n+1}(j; a))$ verliert genau den letzten Knoten $< a$ an $s = a$; wir sprechen kurz vom «Knotenverlust».

Wir vereinbaren in den folgenden Diagrammen: ein Punkt \bullet bedeutet stets einen Eigenwert $\hat{\lambda}_n(a)$, ein Kreuz \times stets einen Eigenwert $\lambda_n(j; a)$; die darüber bzw. darunter gesetzte Zahl gibt die jeweilige Nummer von $\hat{\lambda}_n(a)$ bzw. $\lambda_n(j; a)$ an. Dann hat man die ohne weiteres verständlichen Diagramme der Fig. 1 in der Reihenfolge

1) $[\text{ctg } j] = \infty$; 2) $-\infty < [\text{ctg } j] < \infty$; 3) $[\text{ctg } j] \downarrow -\infty$.

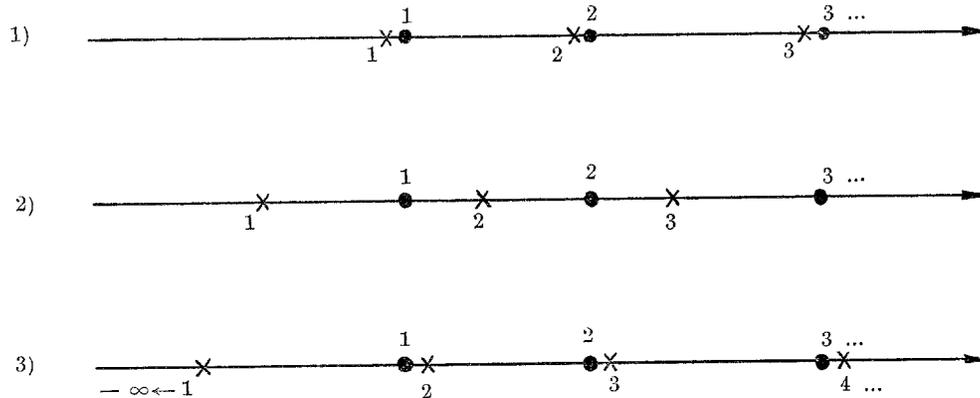


Fig. 1.

Bei 3) ist der Punkt \times_1 nach $-\infty$ gerückt. Den Übergang von 1) zu 3) bezeichnen wir als «Sprungeffekt», hervorgerufen durch den Übergang der Energiekonstanten

von ∞ nach $-\infty$ (dabei $-\infty$ stets als Limes verstanden) und verbunden mit dem Knotenverlust an $s = a$.

III. – Der reelle Ansatz für $0 \leq s \leq a$, $0 < a < \infty$.

II. – Es ist im folgenden stets:

1° μ reell, beliebig und dann fest; μ der sogenannte Bezugspunkt;

2° m ein reeller Parameter: $-\infty < m < \infty$; $m = \infty$ wird später von selbst miterfasst;

3° $\beta^m(s, \mu)$ die reelle Funktion

$$(41) \quad \beta^m(s, \mu) = \vartheta(s, \mu) + m\eta(s, \mu);$$

bei konkreten Aufgaben wird man μ möglichst bequem wählen.

Die Funktion $\beta^m(s, \mu)$ genügt in $s = a$ einer reellen Randbedingung mit einem Winkel $j^m(\mu; a)$, $0 \leq j^m(\mu; a) < \pi$:

$$(42) \quad \cos j^m(\mu; a) \cdot \beta^m(a, \mu) + \sin j^m(\mu; a) \cdot p(a) \dot{\beta}^m(a, \mu) = 0;$$

gleichbedeutend damit ist

$$(43) \quad [\text{ctg } j^m(\mu; a)] = \left\{ \frac{-p(s) \dot{\beta}^m(s, \mu)}{\beta^m(s, \mu)} \right\}_a; \quad -\infty < [\text{ctg } j^m(\mu; a)] \leq \infty;$$

$$(44) \quad \begin{pmatrix} -[\text{ctg } j^m(\mu; a)] \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(s) \dot{\eta}(s, \mu) & p(s) \dot{\vartheta}(s, \mu) \\ \eta(s, \mu) & \vartheta(s, \mu) \end{pmatrix}_a \cdot \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix};$$

das entspricht einer reellen linearen Transformation von m in $-[\text{ctg } j^m(\mu; a)]$ mit der Determinante 1.

Wir tragen (44) in (19) rechts ein und bekommen für das dortige

$$(45) \quad l(\lambda; a) = l^m(\lambda; \mu; a)$$

die folgenden drei gleichwertigen Formeln (wobei (7) und (8) benutzt wurden):

$$(46) \quad \begin{pmatrix} l^m(\lambda; \mu; a) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\vartheta(s, \lambda), \eta(s, \mu)] & [\vartheta(s, \lambda), \vartheta(s, \mu)] \\ [-\eta(s, \lambda), \eta(s, \mu)] & [-\eta(s, \lambda), \vartheta(s, \mu)] \end{pmatrix}_a \cdot \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(47) \quad l^m(\lambda; \mu; a) = \left\{ \frac{[\vartheta(s, \lambda), \beta^m(s, \mu)]}{[-\eta(s, \lambda), \beta^m(s, \mu)]} \right\}_a$$

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} l^m(\lambda; \mu; a) = \\ = \frac{\left\{ 1 + (\lambda - \mu) \int_0^a k \vartheta(s, \lambda) \eta(s, \mu) \right\} \cdot m + \left[(\lambda - \mu) \int_0^a k \vartheta(s, \lambda) \vartheta(s, \mu) \right]}{\left\{ -(\lambda - \mu) \int_0^a k \eta(s, \lambda) \eta(s, \mu) \right\} \cdot m + \left[1 - (\lambda - \mu) \int_0^a k \eta(s, \lambda) \vartheta(s, \mu) \right]} \end{array} \right.;$$

die Determinante der Matrix in (46) bzw. der in m linearen Transformation in (48) ist: $= 1$; daraus folgt: 1) Zähler und Nenner in (48) haben als Funktionen von λ keine gemeinsame Nullstelle (infolge $\operatorname{Im} l^m(\lambda; \mu; a) > 0$ für $\operatorname{Im} \lambda > 0$ ist eine solche einfach); 2) die zwei Klammern $\{ \}$ und $[\]$ im Zähler bzw. im Nenner können nie gleichzeitig verschwinden. Es erhellt auch, daß nachträglich $m = \infty$ mitefassen ist: (47), (48) und (43) ergeben hierfür

$$(49) \quad l^\infty(\lambda; \mu; a) = \left\{ \frac{[\vartheta(s, \lambda), \eta(s, \mu)]}{[-\eta(s, \lambda), \eta(s, \mu)]} \right\}_a$$

$$(50) \quad l^\infty(\lambda; \mu; a) = \frac{\left\{ 1 + (\lambda - \mu) \int_0^a k \vartheta(s, \lambda) \eta(s, \mu) \right\}}{\left\{ -(\lambda - \mu) \int_0^a k \eta(s, \lambda) \eta(s, \mu) \right\}}$$

$$(51) \quad [\operatorname{ctg} j^\infty(\mu; a)] = \left\{ \frac{-p(s) \dot{\eta}(s, \mu)}{\eta(s, \mu)} \right\}_a; \quad -\infty < [\operatorname{ctg} j^\infty(\mu; a)] \leq \infty;$$

dem entspricht die Übereinkunft

$$(52) \quad \beta^\infty(s, \mu) = \eta(s, \mu) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \beta^m(s, \mu) \quad \text{für } m \rightarrow \infty.$$

Alle Formeln bleiben sinnvoll, wenn λ reell wird; speziell ist

$$(53) \quad l^m(\mu; \mu; a) = m; \quad -\infty < m < \infty, \quad m = \infty.$$

Der Ansatz (42) garantiert im vornhinein

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{für } -\infty < m < \infty & \text{ist } \mu \text{ nie Eigenwert} \\ \text{für } m = \infty & \text{ist } \mu \text{ stets Eigenwert.} \end{array} \right.$$

In den $U(s, \lambda), V(s, \lambda)$ von (3) schreibt sich (46)

$$(55) \quad \begin{pmatrix} l^m(\lambda; \mu; a) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos h & \sin h \\ -\sin h & \cos h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [U(s, \lambda), V(s, \mu)] & [U(s, \lambda), U(s, \mu)] \\ [-V(s, \lambda), V(s, \mu)] & [-V(s, \lambda), U(s, \mu)] \end{pmatrix}_a \begin{pmatrix} \cos h & -\sin h \\ \sin h & \cos h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix}.$$

12. – Durchläuft in (48) das m die volle reelle Achse, so durchläuft der Punkt $l = l^m(\lambda; \mu; a)$ für ein λ mit $\text{Im } \lambda > 0$ den Kreis $K(\lambda; a) = K(\lambda; \mu; a)$ in (14): dadurch ist dieser Kreis umkehrbar eindeutig auf die volle reelle $m =$ Achse abgebildet; ist λ reell, so durchläuft auch der Punkt $l = l^m(\lambda; \mu; a)$ die volle reelle $l =$ Achse.

13. – Wir drücken (43) bzw. (51) dahin aus, daß wir sagen: in $s = a$ wird die Randbedingung durch $\beta^m(s, \mu)$ wenn m endlich, bzw. durch $\eta(s, \mu)$, wenn $m = \infty$ « aufgeprägt ». Einer Funktion $u = u(s)$ in $s = a$ die Randbedingung durch $\beta^m(s, \mu)$ oder $\eta(s, \mu)$ aufprägen, verlangt:

$$(56) \quad \begin{cases} [\beta^m(s, \mu), u(s)]_a = 0, & -\infty < m < \infty \\ [\eta(s, \mu), u(s)]_a = 0, & m = \infty; \end{cases}$$

(das setzt stets voraus: es existiert $p(s)\dot{u}(s)$ als stetige Funktion). In diesem Sinne hat man für eine Lösung $u = u(s)$ von (1) und (2) auf der Stufe $0 \dots a$ die Randbedingungen

$$(57) \quad \begin{cases} 0 = [\eta(s, \mu), u(s)]_0; & s = 0 \\ 0 = [\beta^m(s, \mu), u(s)]_a; & s = a. \end{cases}$$

Dem entspricht die Wurzelgleichung

$$(58) \quad [\beta^m(s, \mu), \eta(s, \lambda)]_a = 0; \quad -\infty < m < \infty;$$

$$(59) \quad [\eta(s, \mu), \eta(s, \lambda)]_a = 0; \quad m = \infty;$$

die linke Seite von (58) ist der Nenner in (47) bzw. (48), die linke Seite von (59) der Nenner in (49) bzw. (50).

14. – Die (stets einfachen) Nullstellen von (58) bzw. (59) liefern das Spektrum $S^m(\mu; a)$ bzw. $S^\infty(\mu; a)$ in bezug auf den Punkt μ :

$$(60) \quad \begin{cases} S^m(\mu; a); & -\infty < m < \infty \\ \dots < A_{-1}^m(\mu; a) < \mu < A_1^m(\mu; a) < A_2^m(\mu; a) < \dots \end{cases}$$

$$(61) \quad \begin{cases} S^\infty(\mu; a); & m = \infty \\ \dots < A_{-1}^\infty(\mu; a) < \mu < A_1^\infty(\mu; a) < A_2^\infty(\mu; a) < \dots; \\ \mu = A_0^\infty(\mu; a) \end{cases}$$

die Eigenwerte $< \mu$ treten in endlicher Anzahl auf, und können auch wegfallen. Die zugehörigen (nicht normierten) Eigenfunktionen lauten: bei (60)

$$(60^*) \quad \eta(s, A_v^m(\mu; a)); \quad v = \begin{cases} 1, 2, 3, \dots \\ -1, -2, \dots \end{cases}$$

und bei (61)

$$(61^*) \quad \begin{cases} \eta(s, \mu) = \eta(s, A_0^\infty(\mu; a)) \\ \eta(s, A_v^\infty(\mu; a)); \quad v = \begin{cases} 1, 2, 3, \dots, \\ -1, -2, \dots \end{cases} \end{cases}$$

15. – Die Abhängigkeit von μ . Wir ersetzen μ durch $\hat{\mu}$ und entsprechend den Parameter m durch \hat{m} und verlangen, daß die Randbedingung (42), angeschrieben in den $\hat{\mu}, \hat{m}$ dasselbe aussagt wie (42) d.h. daß

$$(62) \quad [\text{ctg } j^{\hat{m}}(\hat{\mu}; a)] = [\text{ctg } j^m(\mu; a)]$$

ist; das bedeutet: die rechte Seite von (44) ist gleich

$$(63) \quad \begin{pmatrix} p(s) \dot{\eta}(s, \hat{\mu}) & p(s) \dot{\vartheta}(s, \hat{\mu}) \\ \eta(s, \hat{\mu}) & \vartheta(s, \hat{\mu}) \end{pmatrix}_a \cdot \begin{pmatrix} \hat{m} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$(64) \quad \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\vartheta(s, \mu), \eta(s, \hat{\mu})] & [\vartheta(s, \mu), \vartheta(s, \hat{\mu})] \\ [-\eta(s, \mu), \eta(s, \hat{\mu})] & [-\eta(s, \mu), \vartheta(s, \hat{\mu})] \end{pmatrix}_a \cdot \begin{pmatrix} \hat{m} \\ 1 \end{pmatrix}$$

d.h.

$$(65) \quad m = \hat{l}^m(\mu; \hat{\mu}; a),$$

und, da sich in beiden Fällen nach Konstruktion derselbe Punkt l ergibt

$$(66) \quad \begin{cases} \hat{l}^m(\lambda; \hat{\mu}; a) = l^m(\lambda; \mu; a) \\ m = \hat{l}^m(\mu; \hat{\mu}; a). \end{cases}$$

Nach (64) sind m und \hat{m} durch eine reelle lineare Transformation von der Determinante 1 miteinander verbunden, die noch von a abhängt. Die Umkehrung von (65) lautet

$$\hat{m} = l^m(\hat{\mu}; \mu; a).$$

In den Größen $\hat{\mu}, \hat{m}$ ergibt sich dasselbe Spektrum wie früher:

$$(67) \quad S^{\hat{m}}(\hat{\mu}; a) = S^m(\mu; a); \quad m = \hat{l}^m(\mu; \hat{\mu}; a).$$

Schließlich zeigen (59) und (64): $m = \infty$ und $\hat{m} = \infty$ entsprechen sich genau dann nicht, wenn

$$(67^*) \quad \hat{\mu} \notin S^\infty(\mu; a)$$

ist; wird $\hat{\mu}$ so gewählt, so gehört dazu ein endlicher Parameter \hat{m} .

IV. – Die reelle Greensche Funktion und die zugehörige Courantsche quadratische Integralform.

Erster Fall: m endlich; μ ist nie Eigenwert

16. – Da μ kein Eigenwert ist, existiert sie, ist eindeutig bestimmt und lautet

$$(68) \quad G^m(s, t; \mu) = \begin{cases} \eta(s, \mu) \cdot \beta^m(t, \mu); & 0 \leq s \leq t \leq a \\ \eta(t, \mu) \cdot \beta^m(s, \mu); & 0 \leq t \leq s \leq a; \end{cases}$$

speziell ist

$$(69) \quad G^0(s, t; \mu) = \begin{cases} \eta(s, \mu) \vartheta(t, \mu); & 0 \leq s \leq t \leq a \\ \eta(t, \mu) \vartheta(s, \mu); & 0 \leq t \leq s \leq a; \end{cases}$$

für ein festes t , $0 < t < a$, springt $p(s)G^m(s, t; \mu)$ wenn s von $t - 0$ nach $t + 0$ geht, um: -1 .

Nach (60) hat $G^m(s, t; \mu)$ die Eigenwerte

$$(70) \quad \{A_v^m(\mu; a) - \mu\} \neq 0, \quad v = \begin{cases} 1, 2, 3, \dots \\ -1, -2, \dots \end{cases}$$

und nach COURANT [4], Kapitel III gewinnt man die reziproken Zahlen

$$(71) \quad \{A_1^m(\mu; a) - \mu\}^{-1}, \quad \{A_2^m(\mu; a) - \mu\}^{-1}, \quad \dots$$

als sukzessive Maxima und

$$(72) \quad \{A_{-1}^m(\mu; a) - \mu\}^{-1}, \quad \{A_{-2}^m(\mu; a) - \mu\}^{-1}, \quad \dots$$

als sukzessive Minima der zu $G^m(s, t; \mu)$ gehörigen quadratischen Integralform ($Q(a)$ das Quadrat: $0 \leq s \leq a, 0 \leq t \leq a; f(s)$ reell)

$$(73) \quad \begin{cases} \int_0^a \int_0^a ds dt k(s)k(t)G^m(s, t; \mu)f(s)f(t) \\ \int_0^a ds k(s)f^2(s) = 1. \end{cases}$$

17. – Für $a \uparrow \infty$ gilt: die Maxima (71) rücken nach rechts, die Minima (72) rücken nach links. Das bedeutet in (60):

- 1) die Eigenwerte $> \mu$ rücken nach links und bleiben: $> \mu$;
- 2) die Eigenwerte $< \mu$ rücken nach rechts und bleiben: $< \mu$.

Es existieren daher die Grenzwerte ($a \rightarrow \infty$)

$$(74) \quad \lim A_v^m(\mu; a) = A_v^m(\mu; \infty)$$

$$(75) \quad \dots \leq A_{-1}^m(\mu; \infty) \leq \mu \leq A_1^m(\mu; \infty) \leq A_2^m(\mu; \infty) \leq \dots$$

Zweiter Fall: $m = \infty$; μ ist stets Eigenwert

18. – Hier interessieren nur die Eigenwerte $\neq \mu$, und deren Eigenfunktionen: $\perp \eta(s, \mu)$. Es existiert eine Greensche Funktion im erweiterten Sinne, die aber jetzt von a abhängt, und vorläufig mit

$$(76) \quad \Gamma(s, t; \mu; a)$$

bezeichnet wird. Sie ist bei festem t ($0 < t < a$) als Funktion von s : $w(s) = \Gamma(s, t; \mu; a)$ eindeutig festgelegt durch die Eigenschaften ([4], p. 307)

- 1) $[\eta(s, \mu), w(s)]_0 = 0$, $[\eta(s, \mu), w(s)]_a = 0$;
- 2) $p(s) \dot{w}(s) \begin{cases} s = t + 0 \\ s = t - 0 \end{cases} = -1$;
- 3) in $0 \leq s < t$ und $t < s \leq a$ genügt sie der Differentialgleichung ($k = k(s)$)

$$(77) \quad \begin{cases} \frac{1}{k} Lw(s) + \mu w(s) = \frac{\eta(s, \mu) \eta(t, \mu)}{c^2(a)} \\ c^2(a) = \int_0^a k \eta^2(s, \mu); \end{cases}$$

- 4) $w(s) \perp \eta(s; \mu)$;

von selbst ist sie dann symmetrisch

$$5) \Gamma(s, t; \mu; a) = \Gamma(t, s; \mu; a).$$

Diese Funktion hat nach (61) die Eigenwerte

$$(78) \quad \{A_v^\infty(\mu; a) - \mu\} \neq 0; \quad v = \begin{cases} 1, 2, 3, \dots \\ -1, -2, \dots; \end{cases}$$

die reziproken Zahlen sind wie in **16.** als sukzessive Maxima bzw. Minima der quadratischen Integralform ($\varphi = \varphi(s)$) erhältlich (vergleiche damit (73))

$$(79) \quad \left\{ \begin{array}{l} \iint_{a(a)} \bar{d}s \bar{d}t k(s)k(t)I(s, t; \mu; a)\varphi(s)\varphi(t) \\ 1) \int_0^a \bar{d}s k(s)\varphi^2(s) = 1; \quad 2) \varphi(s) \perp \eta(s, \mu). \end{array} \right.$$

Eine Rechnung ergibt, daß diese Integralform infolge der Bedingung 2) in (79) gleich der folgenden ist:

$$(80) \quad \iint_{a(a)} \bar{d}s \bar{d}t k(s)k(t)G^0(s, t; \mu)\varphi(s)\varphi(t)$$

ist, $G^0(s, t; \mu)$ die Funktion in (69).

Daraus folgt:

1° Die Schlüsse und Ergebnisse in **17.** (m endlich) gelten unverändert für $m = \infty$;

2° infolge der verschärfenden Bedingung $\varphi(s) \perp \eta(s, \mu)$ in (79): entfernt man aus dem Spektrum $S^\infty(\mu; a)$ den Eigenwert μ , so entsteht das verbleibende Spektrum aus $S^0(\mu; a)$ dadurch, daß jeder Eigenwert von $S^0(\mu; a)$ von μ weggeschoben wird.

V. – Das zugeordnete Courantsche Variationsproblem $C^m(\mu; a)$ mit dem Spektrum $S^m(\mu; a)$.

Erster Fall: m endlich; μ ist nie Eigenwert

19. – Mit der Energiekonstanten aus (43) lautet das Problem in Übereinstimmung mit **9.**, $\varphi = \varphi(s)$ reell, auf der Stufe $0 \dots a$

$$(81) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_a[\varphi] + [\text{ctg } h] \cdot \varphi^2(0) + [\text{ctg } j^m(\mu; a)] \cdot \varphi^2(a) = \min \lambda \\ H_a[\varphi] = 1; \end{array} \right.$$

dabei ist stets

$$(82) \quad -\infty < [\text{ctg } j^m(\mu; a)] = \left\{ \frac{-p(a)\beta^m(\mu, a)}{\beta^m(\mu, a)} \right\} \leq \infty,$$

und speziell für ein a mit $\beta^m(\mu, a) \neq 0$:

$$(83) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\text{ctg } j^m(\mu; a)] > 0 \Leftrightarrow \beta^m(a, \mu)\beta^m(a, \mu) < 0 \\ [\text{ctg } j^m(\mu; a)] < 0 \Leftrightarrow \beta^m(a, \mu)\beta^m(a, \mu) > 0. \end{array} \right.$$

Hat $\beta^m(s, \mu)$ Knoten

$$(84) \quad 0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots,$$

so ist die Aufgabe (81) für die a der einzelnen Intervalle

$$(85) \quad 0 < a \leq a_1, \quad a_1 < a \leq a_2, \quad a_2 < a \leq a_3, \quad \dots$$

sinnvoll und liefert damit für jedes $a > 0$ das Spektrum $S^m(\mu; a)$ aus (60), das wir aber jetzt wie üblich schreiben:

$$(86) \quad \left\{ \begin{array}{l} S^m(\mu; a); \quad -\infty < m < \infty \\ -\infty < \lambda_1^m(\mu; a) < \lambda_2^m(\mu; a) < \dots; \quad \lambda_n^m(\mu; a) \uparrow \infty \\ \lambda_n^m(\mu; a) \neq \mu \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{array} \right.$$

20. - $\beta^m(s, \mu)$ hat entweder den Verlauf der Fig. 2 oder den der Fig. 3.

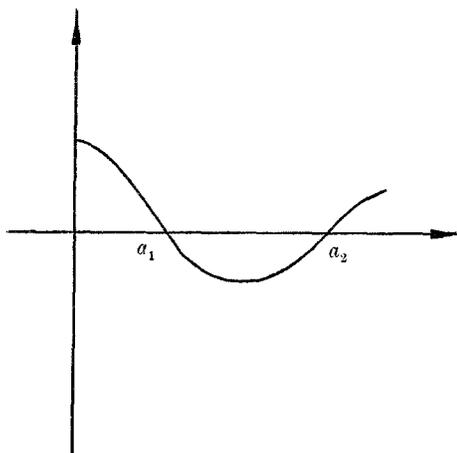


Fig. 2.

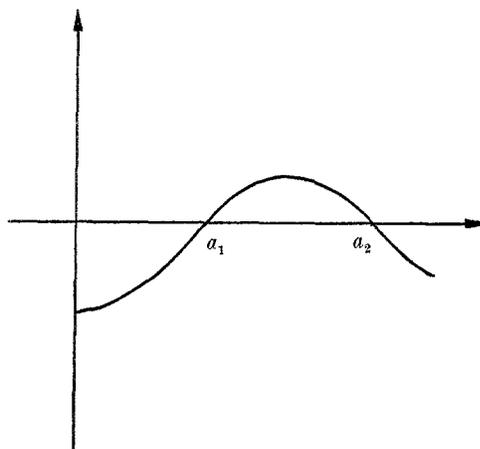


Fig. 3.

Eine einfache Rechnung mittels (8) ergibt

$$(87) \quad \mu < \hat{\lambda}_1(a_1) \quad (\text{Fig. 2})$$

$$(88) \quad \hat{\lambda}_1(a_1) < \mu < \hat{\lambda}_2(a_1) \quad (\text{Fig. 3}).$$

In jedem Fall gilt: für $a \rightarrow a_i - 0$ ist $[\text{ctg } j^m(\mu; a)] \uparrow \infty$, d.h. nach (23)

$$(89) \quad S^m(\mu; a_i) = \hat{S}(a_i).$$

21. – Bei jedem Durchgang durch einen Knoten schlägt die Energiekonstante um: von ∞ nach $-\infty$. Für $a = a_1 + \varepsilon$, wo $\varepsilon > 0$ und ε beliebig klein sein kann, wird die Energiekonstante für $\varepsilon \downarrow 0$ in «beliebige Nähe» von $-\infty$ getrieben und damit auch der erste Eigenwert $\lambda_1^m(\mu; a)$: es tritt der «Sprungeffekt» von 1) zu 3) in der Fig. 1 auf, verbunden mit einem Knotenverlust an $s = a_1$. Verglichen mit **10.** ist jetzt a variabel; wächst a stetig, so gilt:

1) $\hat{S}(a)$ rückt stetig nach links;

2) innerhalb jedes Intervalles wie zum Beispiel $a_1 + \varepsilon \leq a \leq a_2$ ($\varepsilon > 0$ beliebig und dann fest) ändert sich $S^m(\mu; a)$ ebenfalls stetig und zwar nach **17.** So: ein Eigenwert $< \mu$ wandert nach rechts und bleibt $< \mu$, ein Eigenwert $> \mu$ wandert nach links und bleibt $> \mu$.

Man überzeugt sich, daß auf jeder Stufe $0 \dots a$ die Kasteneigenschaft (39) in der Form

$$(90) \quad \hat{\lambda}_n(a) < \lambda_{n+1}^m(\mu; a) < \hat{\lambda}_{n+1}(a); \quad a \neq a_1, a_2, \dots$$

gilt, und daß in leichtverständlicher Schreibung

$$(91) \quad \text{für } a \rightarrow a_i - 0: \lambda_n^m(\mu; a) \rightarrow \hat{\lambda}_n(a_i)$$

$$(92) \quad \text{für } a \rightarrow a_i + 0: \begin{cases} \lambda_{n+1}^m(\mu; a) \rightarrow \hat{\lambda}_n(a_i) \\ \lambda_1^m(\mu; a) \rightarrow -\infty \end{cases}$$

ist.

In der Bezeichnung von Fig. 1 hat man im Falle der Fig. 2 (bei Fig. 3 ist es ähnlich) die Diagramme der Fig. 4.

Dabei beachte man z.B. bei $a_2 + 0$ die Lage $\overset{1}{\bullet} \times \frac{1}{2}$; da $\times \frac{1}{2}$ links von μ ist und $< \mu$ bleibt, so muß für $a_2 - 0$ der Punkt $\overset{2}{\bullet}$ links von μ liegen, Nach dem ersten Durchgang von $a_1 - 0$ zu $a_1 + 0$ ist der erste Eigenwert $\times \frac{1}{1}$ links von μ , nach dem zweiten Durchgang auch der zweite Eigenwert $\times \frac{2}{2}$ links von μ ...; allgemein: nach dem l -ten Durchgang ist der l -te Eigenwert $\times \frac{l}{l}$ links von μ , und der $(l + 1)$ -te Eigenwert rechts von μ ; für $a \rightarrow a_i - 0$ treffen sich die Spektren $S^m(\mu; a)$ und $\hat{S}(a)$ in der Anordnung $\times \frac{1}{1} \overset{1}{\bullet}, \times \frac{2}{2} \overset{2}{\bullet}, \dots$ und für $a \rightarrow a_i + 0$ in der Anordnung $\overset{1}{\bullet} \times \frac{1}{2}, \overset{2}{\bullet} \times \frac{2}{3}, \dots$

Zweiter Fall: $m = \infty$; μ ist stets Eigenwert

22. – Die Randbedingung in $s = a$ wird jetzt durch die Funktion $\eta(s, \mu)$ aufgeprägt, deren Graph wie in Fig. 2 ist (Knoten vorausgesetzt). Hier ist

$$(93) \quad \mu = \hat{\lambda}_1(a_1) = \hat{\lambda}_2(a_2) = \hat{\lambda}_3(a_3) = \dots$$

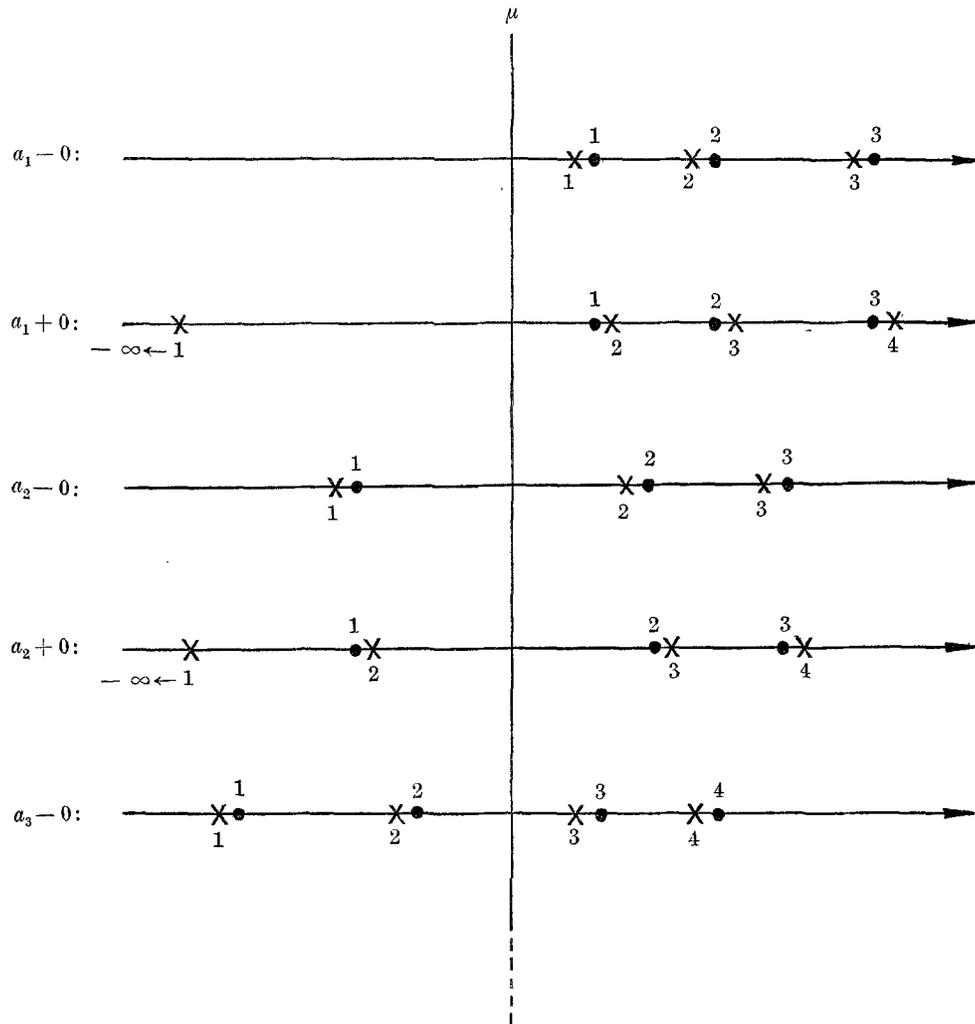


Fig. 4.

und in der Schreibung (92), dort m durch ∞ ersetzt

$$(94) \quad \begin{cases} \mu = \lambda_1^\infty(\mu; a); & 0 < a \leq a_1 \\ \mu = \lambda_2^\infty(\mu; a); & a_1 < a \leq a_2 \\ \mu = \lambda_3^\infty(\mu; a); & a_2 < a \leq a_3 \\ \vdots & \end{cases}$$

Der «Sprung» beim Durchgang durch einen Knoten geschieht jetzt stets über die

« Zwischenstation μ ». Anstelle der Fig. 4 hat man die ohne weiteres verständliche Fig. 5.

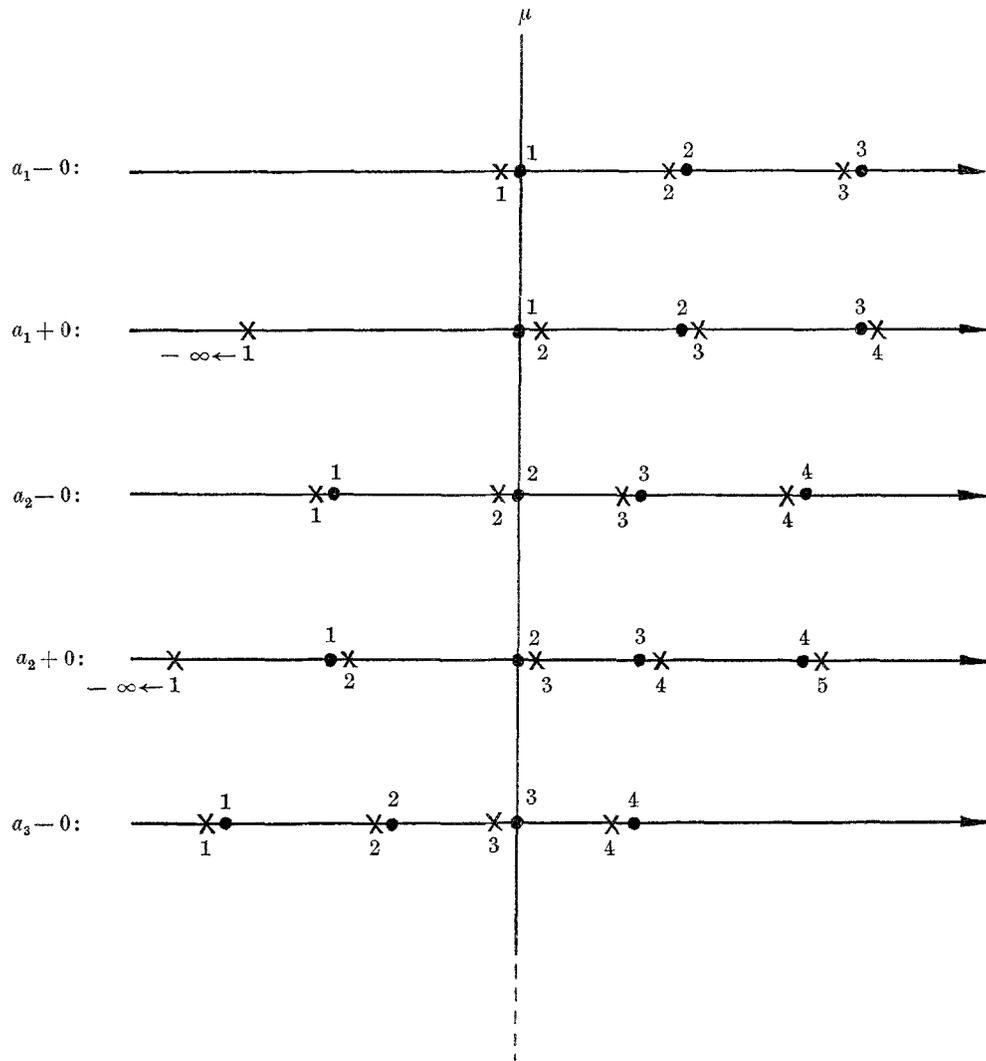


Fig. 5.

23. - In beiden Fällen erhellt auch:

1) in der Schreibung (60) und (61) sind auf jeder Stufe $0 \dots a$ endlich viele Nullstellen der Wurzelgleichung: $< \mu$;

2) bei jedem Durchgang von a_i-0 zu a_i+0 ändert sich bei dieser Schreibung das Spektrum als Ganzes *nicht*: es handelt sich ja um die Menge der Nullstellen, und diese ändert sich dabei nicht; was sich ändert ist die Numerierung bei der Schreibung (92).

VI. – Eine bequeme Rechenvorschrift.

24. – Bei vielen Aufgaben (vergleiche das Beispiel in **X**) hat man für (1) ein bequemes Fundamentalsystem für $\text{Im } \lambda > 0$ (jedoch nicht notwendig für beliebiges reelles λ)

$$(95) \quad \begin{cases} \Phi = \Phi(s, \lambda) \\ \Psi = \Psi(s, \lambda) \end{cases} \quad [\Phi, \Psi] = \Delta(\lambda) \neq 0 \text{ für } \text{Im } \lambda > 0,$$

und anderseits ein bequemes Fundamentalsystem für das reelle μ

$$(96) \quad \begin{cases} \varphi = \varphi(s, \mu) \\ \psi = \psi(s, \mu) \end{cases} \quad [\varphi, \psi] = \delta(\mu) > 0.$$

Mit den Abkürzungen

$$(97) \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} p(0)\dot{\Psi}(0, \lambda) & p(0)\dot{\Phi}(0, \lambda) \\ \Psi(0, \lambda) & \Phi(0, \lambda) \end{pmatrix}}{\det: = \Delta(\lambda) \neq 0} \end{cases}$$

$$(98) \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} a(\mu) & b(\mu) \\ c(\mu) & d(\mu) \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} p(0)\dot{\psi}(0, \mu) & p(0)\dot{\varphi}(0, \mu) \\ \psi(0, \mu) & \varphi(0, \mu) \end{pmatrix}}{\det: = \delta(\mu) > 0} \end{cases}$$

ergibt sich für die mittlere Matrix in (55) rechts

$$(99) \quad \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\Phi, \psi] & [\Phi, \varphi] \\ [-\Psi, \psi] & [-\Psi, \varphi] \end{pmatrix}_a \begin{pmatrix} a(\mu) & b(\mu) \\ c(\mu) & d(\mu) \end{pmatrix}^{-1};$$

die mittlere Matrix für $s = a$ lautet ausführlich

$$(100) \quad \begin{pmatrix} [\Phi(s, \lambda), \psi(s, \mu)] & [\Phi(s, \lambda), \varphi(s, \mu)] \\ [-\Psi(s, \lambda), \psi(s, \mu)] & [-\Psi(s, \lambda), \varphi(s, \mu)] \end{pmatrix}_a.$$

Man braucht also dann nur noch diese Matrix für $a \rightarrow \infty$ in $\text{Im } \lambda > 0$ zu untersuchen. Die Matrix (97) ist in $\text{Im } \lambda > 0$ holomorph. Die Matrix in (99) rechts darf nach 4. Schluß durch die Matrix

$$(101) \quad \begin{pmatrix} d(\mu) & -b(\mu) \\ -c(\mu) & a(\mu) \end{pmatrix}$$

ersetzt werden. Mit den Abkürzungen

$$(102) \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} L^m(\lambda; \mu; a) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos h & -\sin h \\ \sin h & \cos h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l^m(\lambda; \mu; a) \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} M \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(\mu) & b(\mu) \\ c(\mu) & d(\mu) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \cos h & -\sin h \\ \sin h & \cos h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

entsteht mit M als Variabler anstelle von m

$$(103) \quad \begin{pmatrix} L^m(\lambda; \mu; a) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\Phi, \psi] & [\Phi, \varphi] \\ [-\Psi, \psi] & [-\Psi, \varphi] \end{pmatrix}_a \begin{pmatrix} M \\ 1 \end{pmatrix}.$$

VII. – Der Limes $a \rightarrow \infty$ im Grenzkreisfall I.

25. – In diesem Fall kann man in den früheren Formeln in III den Limes $a \rightarrow \infty$ unmittelbar ausführen; es existiert

$$(104) \quad \left\{ \lim_{a \rightarrow \infty} l^m(\lambda; \mu; a) = l^m(\lambda; \mu; \infty); \quad -\infty < m < \infty, \quad m = \infty. \right.$$

Aus (48) wird

$$(105) \quad l^m(\lambda; \mu; \infty) = \frac{\left\{ 1 + (\lambda - \mu) \int_0^\infty k \vartheta(s, \lambda) \eta(s, \mu) \right\} \cdot m + \left[(\lambda - \mu) \int_0^\infty k \vartheta(s, \lambda) \vartheta(s, \mu) \right]}{\left\{ -(\lambda - \mu) \int_0^\infty k \eta(s, \lambda) \eta(s, \mu) \right\} \cdot m + \left[1 - (\lambda - \mu) \int_0^\infty k \eta(s, \lambda) \vartheta(s, \mu) \right]}$$

mit der Determinante 1; Zähler und Nenner ganze Funktionen in λ , und aus (53)

$$(106) \quad l^m(\mu; \mu; \infty) = m; \quad -\infty < m < \infty, \quad m = \infty.$$

Für ein λ mit $\text{Im } \lambda > 0$ durchläuft $l = l^m(\lambda; \mu; \infty)$ den zu λ gehörigen Grenzkreis $K(\lambda; \infty)$: derselbe erscheint durch (105) umkehrbar eindeutig auf die volle reelle $m = \text{Achse}$ abgebildet; ist λ reell, so durchläuft auch $l = l^m(\lambda; \mu; \infty)$ mit m die volle reelle Achse. *Jeder reellen Zahl m , sowie $m = \infty$ entspricht genau eine mögliche Randbedingung in $s = \infty$, die nach (56) so lautet*

$$(107) \quad \begin{cases} [\beta^m(s, \mu), u(s)]_\infty = 0; & -\infty < m < \infty \\ [\eta(s, \mu), u(s)]_\infty = 0; & m = \infty. \end{cases}$$

Die entsprechenden Wurzelgleichungen lauten nach (58) und (59)

$$(108) \quad [\beta^m(s, \mu), \eta(s, \lambda)]_\infty = 0; \quad -\infty < m < \infty$$

$$(109) \quad [\eta(s, \mu), \eta(s, \lambda)]_\infty = 0; \quad m = \infty;$$

die linken Seiten hiervon: der Nenner von (105) für endliches m bzw. für $m = \infty$; ausführlich:

$$(110) \quad 0 = \left\{ -(\lambda - \mu) \int_0^\infty k\eta(s, \lambda)\eta(s, \mu) \cdot m + \left[1 - (\lambda - \mu) \int_0^\infty k\eta(s, \lambda)\vartheta(s, \mu) \right] \right\}$$

$$(111) \quad 0 = \left\{ -(\lambda - \mu) \int_0^\infty k\eta(s, \lambda)\eta(s, \mu) \right\}.$$

26. – Die Spektren sind diskret: aus $S^m(\mu; a)$ wird $S^m(\mu; \infty)$; in (75) steht überall $<$ statt \leq :

$$(112) \quad \left\{ \begin{array}{l} S^m(\mu; \infty); \quad -\infty < m < \infty \\ \dots < A_{-1}^m(\mu; \infty) < \mu < A_1^m(\mu; \infty) < A_2^m(\mu; \infty) < \dots \end{array} \right.$$

$$(113) \quad \left\{ \begin{array}{l} S^\infty(\mu; \infty); \quad m = \infty \\ \dots < A_{-1}^\infty(\mu; \infty) < \mu < A_1^\infty(\mu; \infty) < A_2^\infty(\mu; \infty) < \dots \\ \mu = A_0^\infty(\mu; \infty). \end{array} \right.$$

Die Intervalle

$$(112^*) \quad A_{-1}^m(\mu; \infty) < x < A_1^m(\mu; \infty)$$

$$(113^*) \quad A_{-1}^\infty(\mu; \infty) < x < \mu, \quad \mu < x < A_1^\infty(\mu; \infty)$$

sind für jedes $a > 0$ frei von Eigenwerten und wirken als «Sperrzonen» in den Figuren 4 und 5.

27. – Aus den Formeln (110), (111) liest man ab:

1) eine reelle Zahl $\lambda = \lambda'$ kann nicht Eigenwert für zwei verschiedene Zahlen m ($m = \infty$ zugelassen) sein;

2) zu einem reellen λ' , $-\infty < \lambda' < \infty$ gibt es genau ein $m = m'$ ($m' = \infty$ zugelassen), so daß für dieses m' das λ' Eigenwert wird.

In Formeln ausgedrückt, wobei \emptyset die leere Menge und \mathbf{R} die Menge der reellen (endlichen) Zahlen ist:

$$(114) \quad \mathbb{N} \left\{ \begin{array}{l} S^{m'}(\mu; \infty) \cap S^{m''}(\mu; \infty) = \emptyset \\ m' \neq m''; \text{ eine der Zahlen kann: } = \infty \text{ sein;} \end{array} \right.$$

$$(115) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bigcup S^m(\mu; \infty) = \mathbf{R} \\ -\infty < m < \infty \\ \text{und } m = \infty. \end{array} \right.$$

Weiß man also, daß eine (reelle) Zahl ein Eigenwert ist, so ist sie nach (114) und (115) in genau einem Spektrum $S^m(\mu; \infty)$ enthalten, und wird durch die zu diesem m gehörige Randbedingung (108) bzw. (109) erfaßt.

28. – *Die Abhängigkeit von μ für $a \rightarrow \infty$.*

Hier ergibt sich aus den Formeln in **15**.

$$(116) \quad m = l^{\hat{m}}(\mu; \hat{\mu}; \infty);$$

das ist eine reelle lineare Transformation von \hat{m} in m mit der Determinante 1; die Umkehrung lautet

$$(117) \quad \hat{m} = l^m(\hat{\mu}; \mu; \infty).$$

$m = \infty$ und $\hat{m} = \infty$ entsprechen sich genau dann *nicht*, wenn

$$(118) \quad \hat{\mu} \notin S^\infty(\mu; \infty)$$

ist; wird $\hat{\mu}$ so gewählt, so gehört dazu ein Parameter \hat{m} , \hat{m} endlich. Aus (67) wird

$$(119) \quad S^{\hat{m}}(\hat{\mu}; \infty) = S^m(\mu; \infty), \quad m = l^{\hat{m}}(\mu; \hat{\mu}; \infty).$$

29. – *Die Greensche Funktion für $0 \leq s < \infty$.*

Für endliches m lautet sie wie in (68) und hat die Eigenwerte

$$(120) \quad \{A_v^m(\mu; \infty) - \mu\} \neq 0, \quad v = \begin{cases} 1, 2, 3, \dots \\ -1, -2, \dots \end{cases}$$

Für $m = \infty$ existiert der Limes von (78) und liefert die Greensche Funktion im erweiterten Sinne

$$(121) \quad \left\{ \lim_{a \rightarrow \infty} I(s, t; \mu; a) = G^\infty(s, t; \mu); \right.$$

man kann aber $G^\infty(s, t; \mu)$ auch direkt nach dem Muster von **18.** gewinnen; anstelle von (77) tritt jetzt

$$(122) \quad \begin{cases} \frac{1}{k} Lw(s) + \mu w(s) = \frac{\eta(s, \mu)\eta(t, \mu)}{c^2(\infty)} \\ c^2(\infty) = \int_0^\infty k\eta^2(s, \mu) . \end{cases}$$

$G^\infty(s, t; \mu)$ ist wieder symmetrisch in s, t und hat die Eigenwerte

$$(123) \quad \{\Lambda_\nu^\infty(\mu; \infty) - \mu\} \neq 0; \quad \nu = \begin{cases} 1, 2, 3, \dots \\ -1, -2, \dots \end{cases}$$

Die Parsevalsche Gleichung, sowie ein bekanntes Theorem von Beppo Levi betr. gliedweise Integration ([5], p. 180) ergibt für m endlich und $m = \infty$

$$(124) \quad \begin{cases} \iint_{Q(\infty)} ds dt k(s)k(t)\{G^m(s, t; \mu)\}^2 = \sum_\nu \frac{1}{\{\Lambda_\nu^\infty(\mu; \infty) - \mu\}^2} . \\ (Q(\infty): 0 \leq s < \infty, 0 \leq t < \infty) \end{cases}$$

Ist $-\infty < \hat{\lambda}_1(\infty)$, so ergibt sich nach dem Satz von Mercer ([4], p. 117) für endliches m

$$(125) \quad \int_0^\infty ds k(s) G^m(s, s; \mu) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\{\hat{\lambda}_n^m(\mu; \infty) - \mu\}};$$

dieselbe Gleichung gilt für $m = \infty$, wenn rechts der Eigenwert $\lambda^m(\mu; \infty) = \mu$ unterdrückt wird, was wir so andeuten

$$(125^*) \quad \int_0^\infty ds k(s) G^\infty(s, s; \mu) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\{\hat{\lambda}_n^\infty(\mu; \infty) - \mu\}} .$$

Mit dieser Verabredung notieren wir für m endlich und für $m = \infty$

$$(126) \quad \sum_{\nu=-\infty}^\infty \frac{1}{\{\Lambda_\nu^m(\mu; \infty)\}^2} < \infty; \quad -\infty = \hat{\lambda}_1(\infty)$$

$$(127) \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{|\hat{\lambda}_n^m(\mu; \infty)|} < \infty; \quad -\infty < \hat{\lambda}_1(\infty);$$

von einem Zeiger an ist von selbst: $\lambda_n^m(\mu; \infty) > 0$.

VIII. – Grenzkreis = und Grenzpunktfall.

30. – Im Grenzpunktfall II) wissen wir nach Weyl im vornhinein: für ein λ mit $\text{Im } \lambda > 0$ existiert der folgende Limes für $a \rightarrow \infty$ und zwar *unabhängig von m und unabhängig von μ* :

$$(128) \quad \left\{ \lim_{a \rightarrow \infty} l^m(\lambda; \mu; a) = l^m(\lambda; \mu; \infty) = l(\lambda) \right.$$

$l(\lambda)$ holomorph in $\text{Im } \lambda > 0$ mit $\text{Im } l(\lambda) > 0$.

Wir bleiben hier zweckmäßig bei der Schreibung $l^m(\lambda; \mu; \infty)$, da sie auch den Grenzkreisfall I) erfasst: $l^m(\lambda; \mu; \infty)$ ist dann meromorph in λ , und von m und μ abhängig. Im Fall II) existiert nur *eine* Funktion $l(\lambda)$ und daher auch nur *ein* Spektrum.

31. – Wir beachten den Anfang von 24. und nehmen an, daß der Grenzpunktfall II) vorliegt. Für ein λ mit $\text{Im } \lambda > 0$ hat dann die Matrix (100) ein « Führungsglied »: ist z.B. für $s = a_n, a_n \uparrow \infty$

$$[\Phi(s, \lambda), \varphi(s, \mu)]_{s=a_n}$$

das absolut größte Glied, so ist notwendig

$$(129) \quad [\Phi(s, \lambda), \varphi(s, \mu)]_{s=a_n} \rightarrow \infty.$$

Andernfalls wären die vier Glieder der Matrix absolut $\leq K, K > 0$ eine Konstante; nach einem Theorem von Montel [6], p. 674 hätte dann die Matrix für eine Teilfolge von a_n einen Limes, und es hätte die Grenzmatrix die Determinante $\{\Delta(\lambda)\}^{-1} \cdot \delta(\mu) \neq 0$; sie wäre also nichtsingulär und damit $l(\lambda)$ abhängig von m , d.h. es läge der Grenzkreisfall I) vor. Es gilt somit (129).

Wir ziehen das Glied (129) als Faktor heraus und werfen ihn ab (was erlaubt ist); so verbleibt die Matrix

$$(130) \quad \begin{pmatrix} \frac{[\Phi, \psi]}{[\Phi, \varphi]} & 1 \\ \frac{[-\Psi, \psi]}{[\Phi, \varphi]} & \frac{[-\Psi, \varphi]}{[\Phi, \varphi]} \end{pmatrix},$$

in der jedes Glied absolut: ≤ 1 ist. Jede « Limes-Matrix » davon (sie existieren nach Montel) ist dann singulär (Determinante: = 0). Man überzeugt sich, daß Folgendes gilt:

1° *der* Term in der Spalte, welche die 1 besitzt, hat stets ein und denselben

Limes, im obigen Beispiel:

$$\lim \frac{[-\Psi, \varphi]}{[\Phi, \varphi]} = \chi(\lambda), \quad |\chi(\lambda)| \leq 1;$$

2° jeder mögliche Limes der anderen Spalte, hier der ersten ist ein Multiplum der Spalte

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \chi(\lambda) \end{pmatrix}$$

und ohne Einfluß auf die Bildung von $l(\lambda) = l^m(\lambda; \mu; \infty)$.

32. – Liegt jedoch I) vor, so hat die Matrix (100) stets einen Limes und es ist die Grenzmatrix nicht singulär (Determinante: $= \{A(\lambda)\}^{-1} \cdot \delta(\mu) \neq 0$).

Es ergibt sich durch unsern reellen Ansatz in $\text{Im } \lambda > 0$ ganz von selbst, welcher der zwei Fälle I), II) vorliegt: der Grenzpunktfall II) liegt genau dann vor, wenn für ein λ mit $\text{Im } \lambda > 0$ die Matrix (120) für $a \rightarrow \infty$ nicht beschränkt ist; man vergleiche damit Friedrichs [7], p. 2.

IX. – Das ausgezeichnete Spektrum im Grenzkreisfall unter der Voraussetzung:
 $-\infty < \hat{\lambda}_1(\infty)$.

33. – Wir nehmen in **6.** die erste Eigenfunktion

$$(131) \quad \begin{cases} \eta(s, \hat{\lambda}_1(a)) > 0, & 0 < s < a \\ \eta(a, \hat{\lambda}_1(a)) = 0, & p(a) \dot{\eta}(a, \hat{\lambda}_1(a)) < 0. \end{cases}$$

Die Wurzelgleichung (25) für die weiteren Eigenwerte $\hat{\lambda}_2(a), \hat{\lambda}_3(a), \dots$ ist dann gleichbedeutend mit

$$(132) \quad \begin{cases} 0 = [\eta(s, \hat{\lambda}_1(a)), \eta(s, \lambda)]_a = \\ = \{\hat{\lambda}_1(a) - \lambda\} \cdot \int_0^a ds k(s) \eta(s, \lambda) \eta(s, \hat{\lambda}_1(a)). \end{cases}$$

Für $a \rightarrow \infty$ wird daraus

$$(133) \quad \begin{cases} 0 = [-\eta(s, \lambda), \eta(s, \hat{\lambda}_1(\infty))]_{\infty} = \\ = -\{\lambda - \hat{\lambda}_1(\infty)\} \cdot \int_0^{\infty} ds k(s) \eta(s, \lambda) \eta(s, \hat{\lambda}_1(\infty)). \end{cases}$$

Der Vergleich mit **26.** und **11.** zeigt

$$(134) \quad \left\{ \begin{array}{l} S^\infty(\mu; \infty) \\ \mu = \hat{\lambda}_1(\infty) \end{array} \right\} = \hat{S}(\infty)$$

$$\lambda_n^\infty(\hat{\lambda}_1(\infty), \infty) = \hat{\lambda}_n(\infty); \quad n = 1, 2, 3, \dots;$$

in Worten: prägt man in $s = a$ die Randbedingung durch

$$(135) \quad \eta(s, \hat{\lambda}_1(\infty)), \quad \eta(s, \hat{\lambda}_1(\infty)) > 0; \quad s > 0$$

auf, so kommt im Limes $a \rightarrow \infty$ das Courantsche Grenzspektrum $\hat{S}(\infty) = \lim \hat{S}(a)$ in (29) heraus:

$$(136) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim S^\infty(\mu; a) = S^\infty(\mu; \infty) = \hat{S}(\infty) . \\ \mu = \hat{\lambda}_1(\infty) \end{array} \right.$$

Von jetzt ab ist stets

$$(137) \quad \mu = \hat{\lambda}_1(\infty);$$

dann erscheint unter allen Spektren $S^m(\mu; \infty)$ dasjenige für $m = \infty$ ausgezeichnet: $S^\infty(\mu; \infty) = \hat{S}(\infty)$; der kleinste Eigenwert ist maximal: $= \hat{\lambda}_1(\infty)$, ebenso der n -te Eigenwert maximal: $= \hat{\lambda}_n(\infty)$.

Da $\eta(s, \mu)$ den Verlauf von Fig. 2, jetzt aber ohne einen Knoten, hat, tritt an die Stelle von Fig. 5 die Fig. 6.

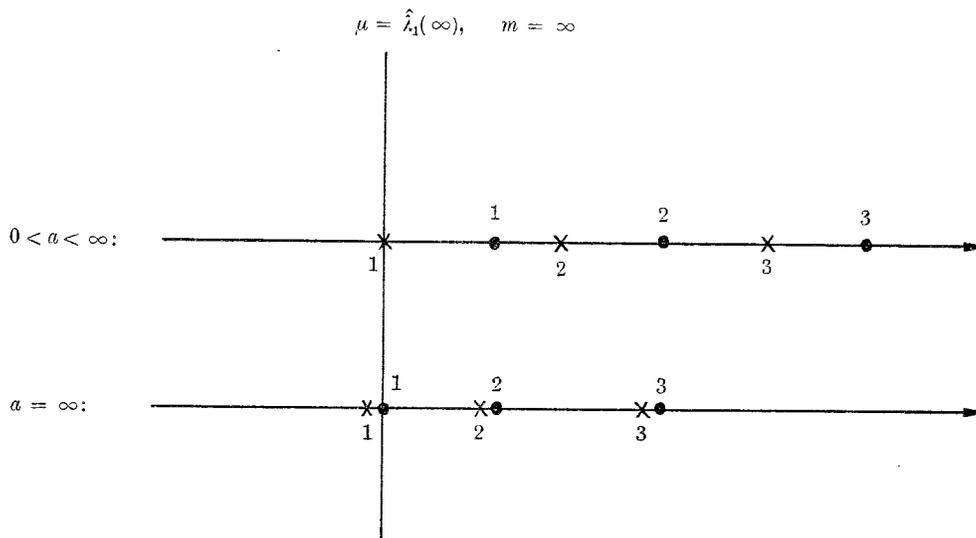


Fig. 6.

(ist $\eta(0, \mu) = 0$ d.h. $h = 0$, so ist $\lim \omega(s) = 1, s \rightarrow 0$) mit den Eigenschaften

$$(141) \quad \psi(s) > 0, \quad \omega(s) > 0 \quad \text{für } s > 0$$

$$(142) \quad [\omega(s), \psi(s)] = 1$$

$$(143) \quad \lim \left\{ \frac{\omega(s)}{\psi(s)} \right\} = 0 \quad \text{für } s \rightarrow \infty.$$

Mittels (142) und $[\vartheta, \eta] = 1$ ergibt sich

$$(144) \quad \begin{cases} \vartheta(s, \mu) = -m\psi(s) + \omega(s); & m \text{ eine Konstante,} \\ & -\infty < m < \infty. \end{cases}$$

Wir prägen mit diesem m durch

$$\omega(s) = \vartheta(s, \mu) + m\eta(s, \mu) = \beta^m(s, \mu)$$

in $s = a$ die Randbedingung auf; sollte $\beta^m(s, \mu)$ einen Knoten a_1 haben ($0 < a_1 < \infty$), so sei bereits $a > a_1$. Es ist dann ($p = p(s)$)

$$[\text{ctg } j^m(\mu; a)] = \left\{ \frac{-p\dot{\omega}(s)}{\omega(s)} \right\}_a = \left\{ \frac{-p\dot{\beta}^m(s, \mu)}{\beta^m(s, \mu)} \right\}_a; \quad a > a_1.$$

Aus (141) und (142) folgt

$$\frac{p\dot{\psi}}{\psi} - \frac{p\dot{\omega}}{\omega} = \frac{1}{\psi \cdot \omega} > 0 \quad (s > 0)$$

und also

$$\frac{-p(s)\dot{\omega}(s)}{\omega(s)} = \frac{-p(s)\dot{\psi}(s)}{\psi(s)} + \frac{1}{\psi(s)\omega(s)} > \frac{-p(s)\dot{\psi}(s)}{\psi(s)},$$

ausführlich

$$\left\{ \frac{-p(s)\dot{\beta}^m(s, \mu)}{\beta^m(s, \mu)} \right\}_a > \left\{ \frac{-p(s)\dot{\eta}(s, \mu)}{\eta(s, \mu)} \right\}_a; \quad a > a_1.$$

Für das Variationsproblem $C^m(\mu; a)$ bedeutet das speziell für den ersten Eigenwert

$$\lambda_1^m(\mu; a) > \lambda_1^\infty(\mu; a);$$

daraus für $a \rightarrow \infty$ (beachte (136))

$$\lambda_1^m(\mu; \infty) \geq \lambda_1^\infty(\mu; \infty) = \hat{\lambda}_1(\infty);$$

da andererseits stets $\lambda_1^m(\mu; \infty) \leq \hat{\lambda}_1(\infty)$ ist, so folgt

$$\lambda_1^m(\mu; \infty) = \lambda_1^\infty(\mu; \infty) = \hat{\lambda}_1(\infty), \quad -\infty < m < \infty$$

im Widerspruch zu (138). (139) hat auf einen Widerspruch geführt und es gilt somit

$$(145) \quad \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{p(s)\{\eta(s, \mu)\}^2} = \infty; \quad \mu = \hat{\lambda}_1(\infty); \quad s_0 > 0.$$

35. – Jetzt haben wir aufgrund von (145) nach RELICH [3] das Fundamentalsystem

$$(146) \quad \begin{cases} \omega(s) = \eta(s, \mu) \\ \psi(s) = \left\{ \int_{s_0}^s \frac{dt}{p(t)\{\eta(t, \mu)\}^2} \right\} \cdot \eta(s, \mu); \quad s_0 > 0 \end{cases}$$

mit den Eigenschaften

$$(147) \quad \omega(s) > 0, \quad \psi(s) > 0 \quad \text{für } s > s_0$$

$$(148) \quad [\omega(s), \psi(s)] = 1$$

$$(149) \quad \lim \left\{ \frac{\omega(s)}{\psi(s)} \right\} = 0 \quad \text{für } s \rightarrow \infty.$$

Mittels (148) und $[\vartheta, \eta] = 1$ ergibt sich

$$\vartheta(s, \mu) = -\psi(s) + B\omega(s), \quad B \text{ eine Konstante,} \\ -\infty < B < \infty.$$

Für ein beliebiges und dann festes reelles endliches m folgt für

$$\beta^m(s, \mu) = \vartheta(s, \mu) + m\eta(s, \mu) = -\psi(s) + (B + m)\omega(s)$$

nach (149)

$$(150) \quad \lim \frac{\beta^m(s, \mu)}{\psi(s)} = -1 \quad \text{für } s \rightarrow \infty.$$

Wir schreiben $[\beta^m(s, \mu), \eta(s, \mu)] = 1$ ausführlich an, dividieren durch $\beta^m(s, \mu)\eta(s, \mu)$ und bekommen

$$\left\{ \frac{-p(s)\beta^m(s, \mu)}{\beta^m(s, \mu)} \right\} = \left\{ \frac{-p(s)\dot{\eta}(s, \mu)}{\eta(s, \mu)} \right\} + \frac{1}{\beta^m(s, \mu)\eta(s, \mu)};$$

der zweite Summand rechts ist nach (150) für $s > s_1$ negativ. Wir notieren in etwas anderer Schreibung

$$(151) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \frac{-p(a)\dot{\beta}^m(a, \mu)}{\beta^m(a, \mu)} \right\} < \left\{ \frac{-p(a)\dot{\eta}(a, \mu)}{\eta(a, \mu)} \right\} \\ -\infty < m < \infty, \quad a > A = A(m) \end{array} \right.$$

in Worten: für jedes endliche m ist die Energiekonstante für $\beta^m(s, \mu)$ kleiner als die Energiekonstante, die zu $m = \infty$ d.h. zu $\eta(s, \mu)$ gehört, sofern nur a genügend groß ist.

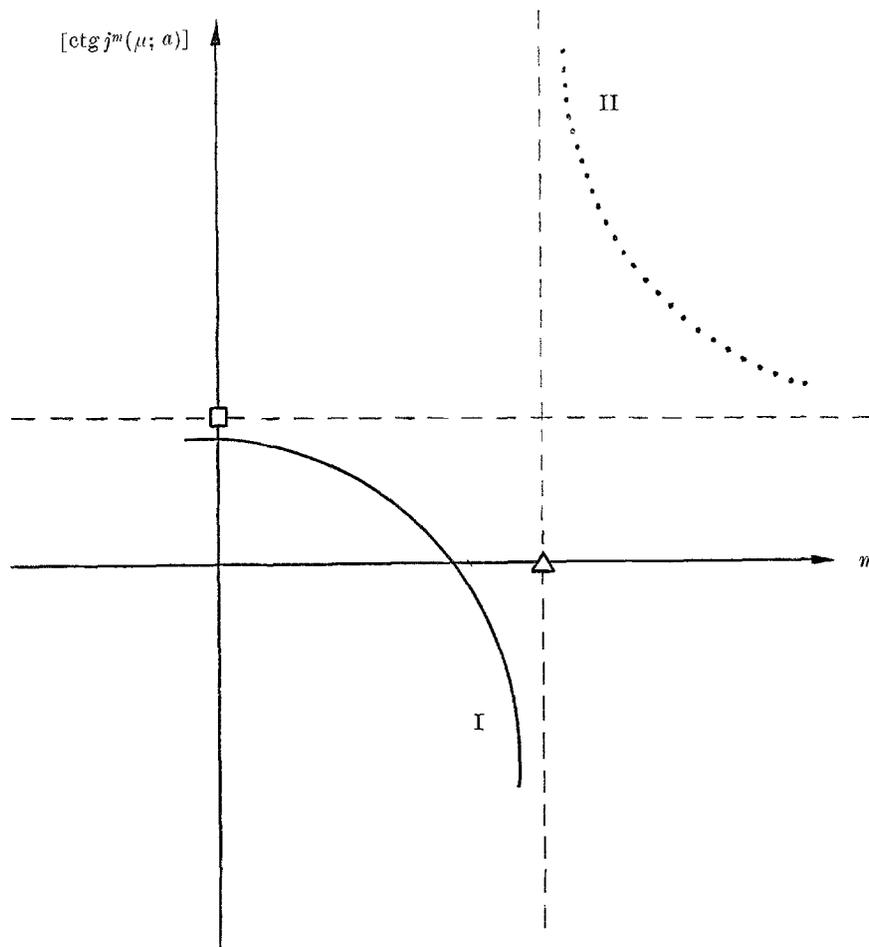


Fig. 8.

36. - *Geometrische Deutung von (151).*

Die linke Seite von (151) ist

$$[\text{ctg } j^m(\mu; a)] = -\frac{p(a)\dot{\eta}(a, \mu) \cdot m + p(a)\dot{\vartheta}(a, \mu)}{\eta(a, \mu) \cdot m + \vartheta(a, \mu)};$$

für ein festes a und *variables* m stellt die rechte Seite eine Hyperbel dar, wie in Fig. 8 angedeutet, die wagrechte Asymptote durch den Punkt \square hat die *Ordinate*

$$\square: \left\{ \frac{-p(a)\dot{\eta}(a, \mu)}{\eta(a, \mu)} \right\}$$

die senkrechte Asymptote durch den « Pol » Δ hat die *Abszisse*

$$\Delta: m = \left(\frac{-\vartheta(a, \mu)}{\eta(a, \mu)} \right) = m_{\infty}(a);$$

zwischen beiden Asymptoten liegen die Äste der Hyperbel:

der Ast I unterhalb der wagrechten Asymptote;

der Ast II oberhalb der wagrechten Asymptote.

Wir denken uns diese Figur für unendlich viele $a = a_n$, wo $a_n \uparrow \infty$, gezeichnet und fassen in jeder dieser Figuren den zu *einem festen* m_0 ($-\infty < m_0 < \infty$) gehörigen Hyperbelpunkt ins Auge. Dann besagt (151): von einem Zeiger N_0 an liegt in jeder Figur, die zu $a = a_n$, $n \geq N_0$, gehört, dieser Hyperbelpunkt auf dem Ast I; speziell muß also

$$m_0 < m_{\infty}(a_n) = \left(\frac{-\vartheta(a_n, \mu)}{\eta(a_n, \mu)} \right)$$

sein; da m_0 beliebig war, so folgt für $a \rightarrow \infty$

$$(152) \quad \lim m_{\infty}(a) = \lim \left(\frac{-\vartheta(a, \mu)}{\eta(a, \mu)} \right) = \infty; \quad \mu = \hat{\lambda}_1(\infty),$$

ganz unabhängig davon, wie sich für $a \rightarrow \infty$ die horizontale Asymptote d.h.

$$\left\{ \frac{-p(a)\dot{\eta}(a, \mu)}{\eta(a, \mu)} \right\}$$

verhält. Anschaulich gesprochen: für jedes m (m fest, endlich) wird für die Energiekonstante $[\text{ctg } j^m(\mu; a)]$ der Ast II « wirkungslos », wenn nur a genügend groß ist; sie liegt dann stets auf dem Ast I und unterhalb der wagrechten Asymptote d.h. ist kleiner als die zu $m = \infty$ gehörige Energiekonstante

$$[\text{ctg } j^{\infty}(\mu; a)] = \frac{-p(a)\dot{\eta}(a, \mu)}{\eta(a, \mu)}.$$

Wir beachten noch: für den Ast I hat die Energiekonstante $[\text{ctg } j^m(\mu; a)]$ ihr « Maximum » in $m = m_0 = -\infty$, und nimmt von da mit wachsendem m streng monoton nach $-\infty$ ab.

ZUSATZ. – Man überzeugt sich, daß das μ aus (137) durch irgend ein $\tilde{\mu} = \hat{\lambda}_r(\infty) \in \hat{S}(\infty)$ ersetzt werden kann; auch dann gilt

$$(153) \quad S^\infty(\tilde{\mu}; \infty) = \hat{S}(\infty); \quad \tilde{\mu} = \hat{\lambda}_r(\infty).$$

37. – Wir bleiben bei der bisherigen Bedeutung von μ und m und schreiben für die im Ansatz in **II.** so bezeichneten Größen zum Unterschied jetzt $\hat{\mu}$ und \hat{m} . Sobald dann

$$\hat{\mu} \notin S^\infty(\mu; \infty) = \hat{S}(\infty)$$

gilt, was in der Regel der Fall sein wird, schreibt sich das ausgezeichnete Spektrum nach (119) in **29.** wie folgt (dort \hat{m} durch \hat{m}_0 ersetzt)

$$(154^a) \quad S^\infty(\mu; \infty) = S^{\hat{m}_0}(\hat{\mu}; \infty), \quad -\infty < \hat{m}_0 < \infty,$$

mit

$$(154^b) \quad \hat{m}_0 = \frac{[\vartheta(s, \hat{\mu}), \eta(s, \mu)]_\infty}{[-\eta(s, \hat{\mu}), \eta(s, \mu)]_\infty}.$$

Für ein $\hat{m} \neq \hat{m}_0$ ist analog zu (151)

$$(151^*) \quad [\text{ctg } j^{\hat{m}}(\hat{\mu}; a)] < [\text{ctg } j^{\hat{m}_0}(\hat{\mu}; a)], \quad a \gg 0$$

mit einer (151) entsprechenden geometrischen Deutung.

Der Beziehung (152) entspricht jetzt

$$(152^*) \quad \left\{ \frac{-\vartheta(a, \hat{\mu})}{\eta(a, \hat{\mu})} \right\} \uparrow \hat{m}_0 \quad (a \uparrow \infty).$$

Ein Beispiel dafür in **X** (dort wieder μ und m anstelle von $\hat{\mu}$, \hat{m} geschrieben).

Man überzeugt sich: die ausgezeichnete Randbedingung von RELICH in [3], § 3 liefert gerade das ausgezeichnete Spektrum. Ferner: für jedes Spektrum $S^m(\mu; \infty)$ gilt der Knotensatz.

38. – Der Physiker und Ingenieur interessiert sich in erster Linie für das ausgezeichnete Spektrum: $S^\infty(\mu; \infty) = \hat{S}(\infty)$; $\mu = \hat{\lambda}_1(\infty)$. Zu $S^\infty(\mu; \infty) = \lim S^\infty(\mu; a)$ ge-

hört das Variationsproblem $C^\infty(\mu; a)$, zu $\hat{S}(\infty) = \lim \hat{S}(a)$ gehört das Variationsproblem $\hat{C}(a)$; beide Probleme liefern im Limes $a \rightarrow \infty$ dasselbe Spektrum, eben das ausgezeichnete. Es erhebt sich aber die Frage: was bedeuten die anderen Spektren $S^m(\mu; \infty)$ für $-\infty < m < \infty$? Zu

$$S^m(\mu; \infty) = \lim_{a \rightarrow \infty} S^m(\mu; a)$$

gehört das Variationsproblem $C^m(\mu; a)$ und dem entspricht nach unserem reellen Ansatz, daß die in $s = a$ konzentrierte potentielle Energie gegenüber $C^\infty(\mu; a)$ verkleinert wird, was einer anfachenden Wirkung entspricht, durch die das Spektrum als Ganzes, und zwar auch für $a \rightarrow \infty$ nach links getrieben wird. Man vergleiche dazu auch RELICH [8], p. 716.

X. – Ein Beispiel.

39. – Als solches wählen wir die gewöhnliche Legendresche Differentialgleichung

$$(155) \quad \begin{cases} \{(1-s^2)\dot{u}\} + \lambda u = 0, & -1 < s < 1. \\ h = 0 & \text{in } (2) \end{cases}$$

wobei wir uns hier auf das Intervall $0 \leq s < 1$ beschränken.

Wir wählen $\mu = 0$, wofür

$$(155^*) \quad \vartheta(s, 0) = 1, \quad \eta(s, 0) = \frac{1}{2} \log \frac{1+s}{1-s}$$

ein Fundamentalsystem mit $(p = p(s) = 1 - s^2)$

$$\begin{pmatrix} \vartheta & \eta \\ p\dot{\vartheta} & p\dot{\eta} \end{pmatrix}_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist. Offensichtlich liegen für $0 \leq s < 1$ die Voraussetzungen von IX vor.

40. – *Die Energiekonstante.* Mit (155*) ist

$$\begin{aligned} \beta^m(s, 0) &= 1 + m \frac{1}{2} \log \frac{1+s}{1-s} \\ [\text{ctg } j^m(0; a)] &= \frac{-m}{1 + m \frac{1}{2} \log (1+a)/(1-a)} = \frac{-m}{1 + m \cdot \alpha(a)} \\ \alpha(a) &= \frac{1}{2} \log \frac{1+a}{1-a}; \quad \alpha(a) \uparrow \infty \quad \text{für } a \uparrow 1. \end{aligned}$$

Daraus erhellt

$$(156) \quad [\operatorname{ctg} j^m(0; a)]: \begin{cases} = 0 \Leftrightarrow m = 0 \\ < 0 \Leftrightarrow m \neq 0, & a \uparrow 1. \end{cases}$$

$m = 0$ liefert die maximale Energiekonstante, das heißt das ausgezeichnete Spektrum.

Fig. 9 zeigt den Graphen: für $a \rightarrow 1 - 0$ wird der punktierte Ast wirkungslos; sie entspricht der Fig. 8.

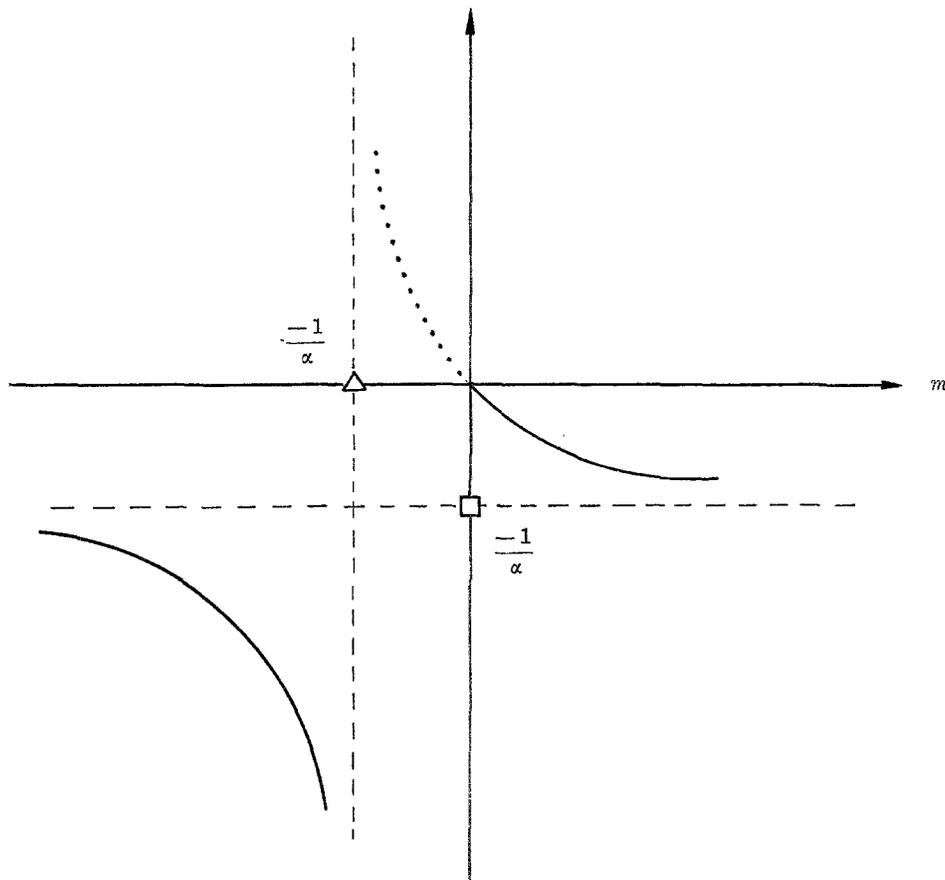


Fig. 9.

Wächst m von 0 an über das Unendliche und von $-\infty$ weiter bis $(-1)/\alpha$, so nimmt die Energiekonstante streng monoton ab von 0 bis $-\infty$.

Für das Variationsproblem $C^m(\mu; a)$ ergibt sich für $m = 0$ (μ ist $= 0$) die Randbedingung: $\dot{u}(a) = 0$, d.h. die « natürliche » Randbedingung. Für das Variations-

problem $\hat{C}(a)$ lautet die Randbedingung: $u(a) = 0$. Man kann sich auch direkt davon überzeugen, daß beide Probleme für $a \uparrow 1$ dasselbe (ausgezeichnete) Spektrum liefern.

41. – Wir stützen uns auf [9]: $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ ist die hypergeometrische Funktion p. 291, $P_\nu(s)$ die Kugelfunktion $P_\nu(s)$ p. 307 (dort n durch ν , z durch s ersetzt). Wir erinnern an **VII**, und setzen für ein λ , $\text{Im } \lambda > 0$:

$$(157) \quad \lambda = \nu(\nu + 1), \quad \nu = -\frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{\mu}},$$

die Wurzel für den Hauptwert genommen; Fig. 10 und 11 zeigen den Zusammenhang. Das Spektrum werden wir in der $\nu =$ Ebene beschreiben.

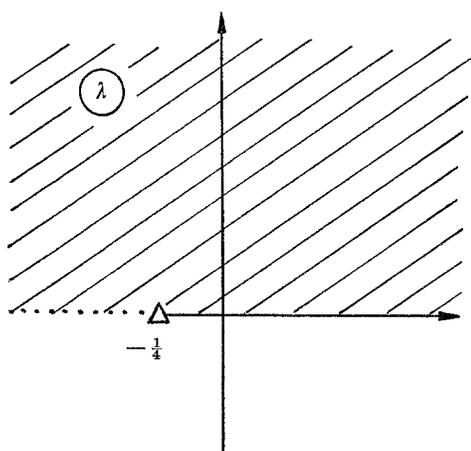


Fig. 10.

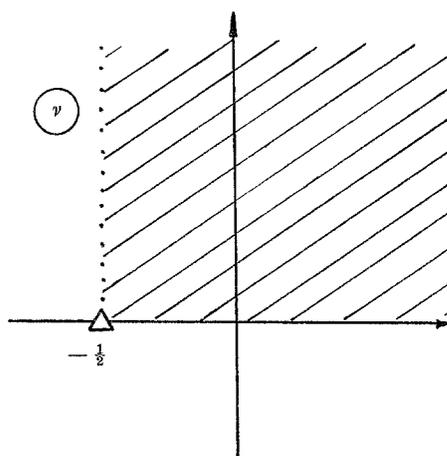


Fig. 11.

Wir erinnern an die Rechenvorschrift **VI** und haben in der dortigen Bezeichnung (vergleiche (155*))

$$(158) \quad \begin{cases} \Phi(s, \lambda) = F\left(-\nu, \nu + 1; 1; \frac{1-s}{2}\right) = P_\nu(s) \\ \Psi(s, \lambda) = F\left(-\nu, \nu + 1; 1; \frac{1+s}{2}\right); \end{cases}$$

$$(159) \quad \begin{cases} \varphi(s, 0) = 1 \\ \psi(s, 0) = \frac{1}{2} \log \frac{1+s}{1-s}. \end{cases}$$

Wir berechnen den Limes der Matrix (100), jetzt für $a \rightarrow 1$. Das Verhalten von $\Psi(s, \lambda)$ für $s \rightarrow 1$ entnehmen wir [10], p. 291; die Rechnung ergibt

$$(160) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\chi(\nu) & -2 \frac{\sin \nu\pi}{\pi} \end{pmatrix}$$

mit $\Gamma(z)$ die Gammafunktion, γ die Eulersche Konstante)

$$(161) \quad \chi(\nu) = \frac{\sin \nu\pi}{\pi} \left[2\gamma + \frac{\Gamma'(-\nu)}{\Gamma(-\nu)} + \frac{\Gamma'(1+\nu)}{\Gamma(1+\nu)} \right].$$

Die Matrix (97) lautet hier

$$(162) \quad \begin{pmatrix} -\dot{P}_\nu(0) & \dot{P}_\nu(0) \\ P_\nu(0) & P_\nu(0) \end{pmatrix}.$$

Es kommt für den Limes

$$(163) \quad l^m(\lambda; \mu; 1) = \lim l^m(\lambda; 0; a), \quad a \rightarrow 1$$

$$(164) \quad l^m(\lambda; 0; 1) = 2 \frac{\left[\frac{\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)} \right]^2 \cdot \frac{\sin \frac{\nu\pi}{2} \{\chi(\nu) + 1\} \cdot m + 2 \frac{\sin \nu\pi}{\pi}}{\cos \frac{\nu\pi}{2} [\chi(\nu) - 1] \cdot m + 2 \frac{\sin \nu\pi}{\pi}}.$$

42. - Wir beachten jetzt, daß

$$(165) \quad \chi(k) = (-1)^k; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

ist, und daß infolge dessen die Ausdrücke

$$(166) \quad \frac{\{\chi(\nu) + 1\}}{\cos \frac{\nu\pi}{2}}, \quad \frac{[\chi(\nu) - 1]}{\sin \frac{\nu\pi}{2}}$$

auch für reelles ν , $\nu \geq -\frac{1}{2}$ sinnvoll bleiben. Wir notieren noch die Formeln

$$(167) \quad \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{[\chi(\nu) - 1]}{\sin \frac{\nu\pi}{2}} = 0$$

$$(168) \quad \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{\{\chi(\nu) + 1\}}{\cos \frac{\nu\pi}{2}} > 0$$

$$(169) \quad \chi\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4 \log 2}{\pi}, \quad 0 < \frac{4 \log 2}{\pi} < 1.$$

Mithilfe dieser Formeln schreibt sich (164) so

$$(170) \quad l^m(\lambda; 0; 1) = 2 \frac{\left[\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right) \right]^2}{\left[\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right) \right]} \cdot \frac{\left\{ \frac{\chi(\nu) + 1}{\cos \frac{\nu\pi}{2}} \right\} \cdot m + 4 \frac{\sin \frac{\nu\pi}{2}}{\pi}}{\left[\frac{\chi(\nu) - 1}{\sin \frac{\nu\pi}{2}} \right] \cdot m + 4 \frac{\cos \frac{\nu\pi}{2}}{\pi}}$$

$m = 0$ liefert das ausgezeichnete Spektrum $S^0(0; 1)$:

$$(171) \quad l^0(\lambda; 0; 1) = 2 \frac{\left[\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right) \right]^2}{\left[\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right) \right]} \cdot \frac{\sin \frac{\nu\pi}{2}}{\cos \frac{\nu\pi}{2}}$$

mit den Eigenwerten $(2n - 1)$ und Eigenfunktionen $P_{2n-1}(s)$.

$m = \infty$ ergibt nach (154) als ersten Eigenwert 0 mit der Eigenfunktion

$$\frac{1}{2} \log \frac{1+s}{1-s} > 0 \quad \text{in } 0 < s < 1.$$

43. - Für beliebiges m ergibt sich ein Spektrum $S^m(0; 1)$ in der $\nu =$ Ebene, wie das die Figur 12 andeutet: die Punkte \bullet entsprechen dabei dem ausgezeichneten Spektrum (171), die Punkte \times dem Spektrum $S^m(0; 1)$.

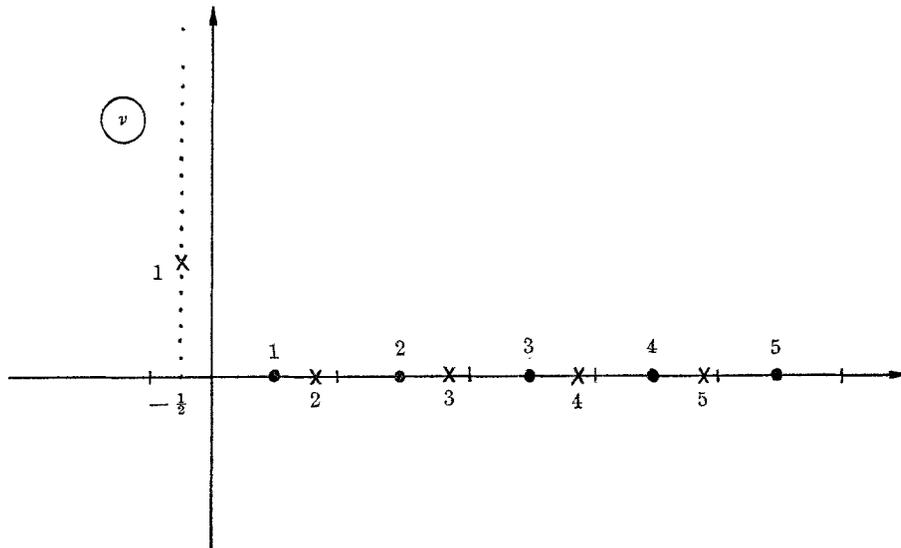


Fig. 12.

Wenn m wächst, wandert der erste Eigenwert λ_1 in der Fig. 12 stetig wie folgt:

für $0 \leq m \leq \infty$:	von dem Punkt \bullet^1 nach 0;
für $-\infty \leq m \leq m_1 < 0$:	von 0 weiter bis $(-1)/2$;
für $m_1 \leq m < 0$:	$\left\{ \begin{array}{l} \text{von } (-1)/2 \text{ auf der punktierten Vertikalen nach} \\ (-1)/2 + i\infty; \end{array} \right.$

(infolge (169) ist $m_1 < 0$).

Dabei wandert der zweite Eigenwert λ_2 von \bullet^2 nach \bullet^1 , der dritte Eigenwert λ_3 von \bullet^3 nach \bullet^2 ,

Berichtigung bei der Korrektur vom 28-9-1981.

Im Anschluß an (129) und (130) wird irrtümlich auf ein Theorem von Montel verwiesen, während offenbar nur benutzt wird: jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

LITERATUR

- [1] H. WEYL, *Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen*, Math. Annalen, **68** (1910), pp. 220-269.
- [2] E. C. TITCHMARSH, *Eigenfunction Expansion*, Part I, Oxford at the Clarendon Press. (1962).
- [3] F. RELICH, *Halbbeschränkte gewöhnliche Differentialoperatoren zweiter Ordnung*, Math. Annalen, **122** (1951), pp. 343-368.
- [4] R. COURANT - D. HILBERT, *Methoden der mathematischen Physik I, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften XII*, Verlag von Julius Springer, Berlin (1931).
- [5] B. SZ.-NAGY, *Introduction to Real Function and Orthogonal Expansions*, New York, Oxford University Press, 1965.
- [6] E. GOURSAT, *Cours d'Analyse II*, vol. 5° (ed. 1949).
- [7] K. FRIEDRICHS, *Über die ausgezeichnete Randbedingung in der Spektraltheorie der halb-beschränkten Differentialoperatoren zweiter Ordnung*, Math. Annalen, **112** (1935), pp. 1-23.
- [8] F. RELICH, *Die zulässigen Randbedingungen bei den singulären Eigenwertproblemen der mathematischen Physik (Gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung)*, Math. Zeitschrift, **49** (1943-44), pp. 703-723.
- [9] E. T. WHITTAKER - G. N. WATSON, *A Course of Modern Analysis*, Fourth Edition, Cambridge at the University Press, 1952.