Superficie cubiche di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ a curve sottoinsieme intersezione completa (*) (**).

P. C. CRAIGHERO - R. GATTAZZO - M. C. RONCONI (Padova) (***)

Summary. – *In this paper we classify the algebraic cubic surfaces $\mathcal{F}$ of the affine space $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ where $\mathbb{C}$ is the complex field, whose algebraic curves are set-theoretic complete intersections of $\mathcal{F}$; in other words surfaces $\mathcal{F}$ such that every prime ideal of height 1 in the coordinate ring $\mathbb{C}[\mathcal{F}]$ of $\mathcal{F}$ is the radical of a principal ideal; if $\mathcal{F}$ is non singular in codimension 1 this means that $\mathbb{C}[\mathcal{F}]$ is semifactorial. We give the equations of such surfaces within linear isomorphisms of $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ providing also methods by which one can construct the equations of the surfaces cutting on $\mathcal{F}$ its curves as set-theoretic complete intersections. Moreover for each of these surfaces we determine the minimum positive number λ such that every algebraic curve of $\mathcal{F}$, with multiplicity of intersection λ, is complete intersection of $\mathcal{F}$ itself with another surface $\mathcal{G}$ (see the table in § 8 where the results are summarized). We tackle also the problem of such a classification over algebraically closed fields k different from $\mathbb{C}$.*

Introduzione.

Una superficie algebrica irriducibile $\mathcal{F}$ di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, o di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$, si dice a curve sottoinsieme intersezione completa quando per ogni sua curva algebrica irriducibile c esiste una opportuna superficie algebrica $\mathcal{G}$ di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, o di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$, tale che $\mathsf{c} = \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Le superficie algebriche cubiche irriducibili dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ a curve sottoinsieme intersezione completa sono state classificate da E. STAGNARO in [8]: queste, a meno di isomorfismi lineari, sono tre. Lo stesso E. STAGNARO rilevava in un seminario che l'analogo problema di classificare le superficie algebriche cubiche dello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ a curve sottoinsieme intersezione completa, a meno di isomorfismi lineari di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$, presentava nuovi aspetti e difficoltà non ancora risolte, inerenti alla natura affine del problema, sostanzialmente dovuti al fatto che su una superficie affine $\mathcal{F}$ una curva c può essere sottoinsieme intersezione completa di $\mathcal{F}$ e di un'altra superficie $\mathcal{G}$, mentre ciò non si verifica per le chiusure proiettive, $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathsf{c}}$, di $\mathcal{F}$ e di c. Può infatti accadere che per ogni superficie $\mathcal{G}$ che definisca c su $\mathcal{F}$, $\tilde{\mathcal{G}}$ definisca su $\tilde{\mathcal{F}}$ oltre a c una curva residua (necessariamente all'infinito). Una delle questioni non ancora risolte, ad esempio, era se una superficie cubica $\mathcal{F}$, con la curva all'infinito riducibile e la cui chiusura proiettiva è non singolare, è a curve sottoinsieme intersezione completa (l'analogo problema nel caso delle quadriche è ben noto; nel caso delle cubiche troviamo un risultato del tutto differente, cfr. Oss. 2.2 seguente).

(*) Entrata in Redazione il 20 novembre 1980.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.
(***) Indirizzo degli autori: Istituto di Matematica Applicata, Via Belzoni 7, Padova.

In questa nota si risolve il problema determinando tutte le superficie algebriche cubiche affini di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ a curve sottoinsieme intersezione completa: di tali superficie vengono date le equazioni a meno di isomorfismi lineari di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$. Da alcune dimostrazioni presentate si ricavano elementi che permettono di calcolare esplicitamente per ogni curva c, di una tale superficie $\mathcal{F}$, le equazioni delle superficie $\mathcal{G}$ tali che $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \mathsf{c}$.

L'analisi di ciascuna superficie $\mathcal{F}$ ottenuta è inoltre completata stabilendo il minimo intero positivo λ per cui ogni curva algebrica di $\mathcal{F}$, con molteplicità di intersezione λ, è intersezione completa di $\mathcal{F}$ con un'altra superficie $\mathcal{G}$. Si forniscono inoltre dei criteri che permettono, quando $\lambda > 1$, di individuare, per ogni λ', $1 \leqslant \lambda' < \lambda$, una curva $\mathsf{c} \subset \mathcal{F}$ che non è intersezione completa di $\mathcal{F}$ con molteplicità di intersezione λ'. In particolare risulta che per le superficie cubiche a curve sottoinsieme intersezione completa, λ è minore od uguale a 6 e può assumere tutti i valori da 1 a 6.

Tutte le considerazioni di questa nota sulle superficie algebriche cubiche definite su $\mathbb{C}$ valgono in effetti su un qualunque campo k algebricamente chiuso di caratteristica zero e più che numerabile.

Le superficie le cui equazioni sono quelle contenute nella tabella riassuntiva (cfr. paragrafo 8 seguente) sono tutte superficie cubiche a curve sottoinsieme intersezione completa se il campo k è algebricamente chiuso di caratteristica $\neq 2, 3$. Se però k è (algebricamente chiuso) di caratteristica positiva, oppure k è numerarile, esistono superficie cubiche a curve sottoinsieme intersezione completa non comprese nella suddetta classificazione: ad esempio un cono o un cilindro proiettante una cubica ellittica piana, definito sopra un campo k che sia la chiusura algebrica di un campo finito, è a curve sottoinsieme intersezione completa (cfr. Oss. 5.2 seguente). Rimane così aperto il problema di completare la classificazione delle superficie cubiche di $\mathbb{A}^3_k$ a curve sottoinsieme intersezione completa nel caso in cui k sia (algebricamente chiuso) di caratteristica positiva oppure k sia numerabile: ad esempio non ci risulta noto se, nelle ipotesi dette su k, una rigata (compresi i cilindri) con retta doppia (al finito) e curva all'infinito riducibile o un cono con una retta doppia siano a curve sottoinsieme intersezione completa.

Ricordiamo che una superficie $\mathcal{F}$ è a curve intersezione completa (cioè per $\mathcal{F}$ si ha $\lambda = 1$) se e solo se l'anello delle coordinate affini $\mathbb{C}[\mathcal{F}]$ di $\mathcal{F}$ è un anello fattoriale (cfr. [2]) e che una superficie normale $\mathcal{F}$ (normale equivale ad essere non singolare in codimensione 1, cfr. [6], pagg. 390-391) è a curve sottoinsieme intersezione completa se e solo se $\mathbb{C}[\mathcal{F}]$ è semifattoriale (cfr. [9] oppure [11]). Pertanto la classificazione effettuata in questa nota delle superficie cubiche affini a curve sottoinsieme intersezione completa, essendo tutte le superficie trovate non singolari in codimensione 1, equivale dal punto di vista algebrico alla determinazione di tutti gli anelli $\mathbb{C}[X, Y, Z]/(F)$, dove F è un polinomio irriducibile di grado tre, che sono fattoriali o semifattoriali, o ciò che è lo stesso, alla determinazione degli anelli $\mathbb{C}[X, Y, Z]/(F)$ tali che ogni loro ideale primo di altezza 1 ha una potenza simbolica che è un ideale principale.

Osservato poi che per ogni superficie irriducibile e normale $\mathcal{F} = \{F = 0\}$ a curve sottoinsieme intersezione completa il numero λ definito sopra coincide con l'ordine dell'anello $\mathbb{C}[\mathcal{F}] = \mathbb{C}[X, Y, Z]/(F)$, (cfr. ad esempio [11], pag. 4), e ricordando che, come sopra si è detto, per ogni superficie trovata $\mathcal{F}$, si riesce a determinare l'ordine dell'anello $\mathbb{C}[\mathcal{F}]$, la classificazione fornita permette in effetti di determinare per ogni λ (che può variare da 1 a 6) tutti gli anelli $\mathbb{C}[X, Y, Z]/(F)$, con F polinomio irriducibile di grado 3, che sono semifattoriali di ordine λ.

A differenza del caso proiettivo, risulta infine che le classi di superficie cubiche affini a curve sottoinsieme intersezione completa, modulo l'equivalenza per isomorfismi lineari, sono infinite pur essendo possibile distribuire, sempre a meno di isomorfismi lineari, tutte le superficie cubiche affini a curve sottoinsieme intersezione completa in un numero finito di famiglie di cui solo 6 dipendono (linearmente) da un parametro.

Notazioni.

Sia $\mathbb{A}^n_k$, $(\mathbb{P}^n_k)$, lo spazio affine, (proiettivo), di dimensione n sopra un campo k. Supporremo che $\mathbb{A}^n_k$ sia immerso in $\mathbb{P}^n_k$ tramite la mappa

$$(X_1, \ldots, X_n) \to (1, X_1, \ldots, X_n)\,.$$

Per $n = 3$ indicheremo più semplicemente (X_1, X_2, X_3) con (X, Y, Z) e X_0 con T.

Per ogni isomorfismo lineare σ di $\mathbb{A}^n_k$ indicheremo con $\tilde{\sigma}$ la sua estensione a $\mathbb{P}^n_k$: cioè se

$$\sigma\colon (X_1, \ldots, X_n) \to \big(\sigma(X_1), \ldots, \sigma(X_n)\big)$$

con $\sigma(X_i) = b_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j$, $(i = 1, \ldots, n)$ e la matrice $[a_{ij}] \in GL(n, k)$, l'estensione $\tilde{\sigma}$ di σ, a meno di un fattore non nullo di proporzionalità, sarà:

$$\tilde{\sigma}\colon (X_0, \ldots, X_n) \to \Big(X_0, b_1X_0 + \sum_{j=1}^{n} a_{1j}X_j, \ldots, b_nX_0 + \sum_{j=1}^{n} a_{nj}X_j\Big)\,.$$

Per *ipersuperficie, varietà, sottovarietà* si intenderà sempre *ipersuperficie, varietà, sottovarietà algebriche ridotte.*

Le ipersuperficie di $\mathbb{A}^n_k$ saranno indicate con $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, ... e si scriverà rispettivamente: $\mathcal{F} = \{F = 0\}$, $\mathcal{G} = \{G = 0\}$, ... se $F = 0$ e $G = 0$ sono, nell'ordine, delle loro equazioni, essendo F e G generatori degli ideali principali di $\mathcal{F}$ e di $\mathcal{G}$.

$\{X_0 = 0\}$ sarà chiamato *iperpiano all'infinito* di $\mathbb{A}^n_k$.

La chiusura proiettiva di $\mathcal{F}$ in $\mathbb{P}^n_k$ verrà indicata con $\hat{\mathcal{F}}$.

Si indicheranno con a, b, ... sottovarietà, non necessariamente irriducibili, di codimensione 2 di $\mathbb{A}^n_k$ o di $\mathbb{P}^n_k$. Nel caso in cui a, b, ... siano sottovarietà di $\mathbb{A}^n_k$, $\tilde{\mathsf{a}}$, $\tilde{\mathsf{b}}$, ... indicheranno le rispettive chiusure proiettive in $\mathbb{P}^n_k$, mentre Supp a_∞, Supp b_∞, ...

indicheranno gli insiemi $\tilde{\mathsf{a}} \cap \{X_0 = 0\}$, $\tilde{\mathsf{b}} \cap \{X_0 = 0\}$, ... Se r è una retta di $\mathbb{A}_k^3$, con r_∞ si denoterà il punto all'infinito di r.

Siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due ipersuperficie di $\mathbb{A}_k^n$ e c una sottovarietà irriducibile di $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ di codimensione 1 in $\mathcal{F}$ e in $\mathcal{G}$. Con *molteplicità di intersezione* di $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ lungo c si intenderà l'intero

$$I(\mathsf{c}, \mathcal{F} \cap \mathcal{G}) = \dim_k k[X_1, \ldots, X_n]_\mathfrak{q}/(F, G)k[X_1, \ldots, X_n]_\mathfrak{q}$$

dove $\mathfrak{q}$ è l'ideale primo di c in $k[X_1, \ldots, X_n]$ e $k[X_1, \ldots, X_n]_\mathfrak{q}$ è l'anello locale di $\mathbb{A}_k^n$ in c. Si ricordi che se c non è luogo di punti singolari di una delle due ipersuperficie $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, ad esempio di $\mathcal{F}$, ed $\mathcal{F}$ è inoltre irriducibile, si ha $I(\mathsf{c}, \mathcal{F} \cap \mathcal{G}) = v_\mathfrak{p}(\overline{G})$, dove $\mathfrak{p}$ indica l'ideale primo di c in $k[\mathcal{F}] = k[X_1, \ldots, X_n]/(F)$ e $v_\mathfrak{p}$ indica la valutazione del campo dei quozienti dell'anello locale $\mathcal{R} = k[\mathcal{F}]_\mathfrak{p}$ di $\mathcal{F}$ in c e $\overline{G}$ l'immagine canonica di G in $\mathcal{R}$. Essendo la molteplicità di intersezione un fatto locale, quanto detto per il caso affine si estende a $\tilde{\mathcal{F}}$, $\tilde{\mathcal{G}}$ e ad una qualunque sottovarietà irriducibile c di $\tilde{\mathcal{F}} \cap \tilde{\mathcal{G}}$ di codimensione 1 in $\tilde{\mathcal{F}}$ e in $\tilde{\mathcal{G}}$, riconducendo il calcolo di $I(\mathsf{c}, \tilde{\mathcal{F}} \cap \tilde{\mathcal{G}})$ ad un opportuno aperto affine $X \subset \mathbb{P}_k^n$ tale che $X \cap \mathsf{c} \neq \emptyset$. Come sopra, si può notare che se c non è luogo di punti singolari di $\tilde{\mathcal{F}} = \{F = 0\}$ o di $\tilde{\mathcal{G}} = \{G = 0\}$, ad esempio di $\tilde{\mathcal{F}}$, e $\tilde{\mathcal{F}}$ è inoltre irriducibile, si ha che $I(\mathsf{c}, \tilde{\mathcal{F}} \cap \tilde{\mathcal{G}}) = v_\mathfrak{p}(\overline{G})$ dove $\mathfrak{p}$ è l'ideale primo omogeneo di c in $k[X_0, \ldots, X_n]/(F)$ e $\overline{G}$ è l'immagine canonica di G nell'anello locale $(k[X_0, \ldots, X_n]/(F))_\mathfrak{p}$.

Sia $\mathcal{F}$ una ipersuperficie di $\mathbb{P}_k^n$ (o di $\mathbb{A}_k^n$). Nel seguito con *divisori* di $\mathcal{F}$ intenderemo *divisori di Weil* di $\mathcal{F}$, cioè elementi del gruppo abeliano libero generato dalle sottovarietà irriducibili di $\mathcal{F}$ di codimensione 1 in $\mathcal{F}$. Indicato con $\Delta = \Sigma\lambda_i \mathsf{a}_i$ un divisore effettivo di $\mathcal{F}$, cioè tale per cui sia $\lambda_i \geqslant 0$, la varietà $\bigcup_{i \in J} \mathsf{a}_i$, dove J è il sottoinsieme degli indici i per cui $\lambda_i > 0$, sarà detta il *supporto* di Δ e indicata con Supp Δ. Un divisore effettivo $\Delta = \Sigma\lambda_i \mathsf{a}_i$ per il quale si abbia $\lambda_i \in \{0, 1\}$ si dirà *ridotto*; per comodità di linguaggio spesso identificheremo un divisore ridotto col suo supporto.

Siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due ipersuperficie di $\mathbb{A}_k^n$. Si chiamerà *intersezione completa* di $\mathcal{F}$ e di $\mathcal{G}$, e si denoterà con il simbolo $\mathcal{F} \cdot \mathcal{G}$, il divisore di $\mathcal{F}$ (e di $\mathcal{G}$) $\mathcal{F} \cdot \mathcal{G} = \Sigma\lambda_i \mathsf{a}_i$ dove le a_i sono le componenti irriducibili della varietà $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ e $\lambda_i = I(\mathsf{a}_i, \mathcal{F} \cap \mathcal{G})$. Analogo significato avrà il simbolo $\tilde{\mathcal{F}} \cap \tilde{\mathcal{G}}$. Risulta inoltre $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \operatorname{Supp}(\mathcal{F} \cdot \mathcal{G})$ e $\tilde{\mathcal{F}} \cap \tilde{\mathcal{G}} = \operatorname{Supp}(\tilde{\mathcal{F}} \cdot \tilde{\mathcal{G}})$.

Sia $\mathcal{F} = \{F = 0\}$ una ipersuperficie irriducibile non singolare in codimensione 1 di $\mathbb{P}_k^n$, H un qualunque polinomio omogeneo non nullo di $k[X_0, \ldots, X_n]$. Intenderemo con divisore su $\mathcal{F}$ definito dal polinomio H, e denoteremo con $\operatorname{div}_\mathcal{F}(H)$ il divisore $\Sigma v_\mathfrak{p}(\overline{H})\mathsf{c}$, con $\mathfrak{p}$ ideale primo omogeneo di c in $k[X_0, \ldots, X_n]/(F)$, c variabile nell'insieme delle sottovarietà irriducibili di codimensione 1 di $\mathcal{F}$, e $\overline{H}$ immagine canonica di H in $(k[X_0, \ldots, X_n]/(F))_\mathfrak{p}$.

Per ogni ipersuperficie $\mathcal{F} \subset \mathbb{A}_k^n$, $\mathcal{F}_\infty$ indicherà il divisore $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F} \cdot \{X_0 = 0\}$ e verrà detto il *divisore all'infinito* di $\mathcal{F}$. Si osservi che Supp $\mathcal{F}_\infty = \tilde{\mathcal{F}} \cap \{X_0 = 0\}$.

Siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due ipersuperficie di $\mathbb{A}_k^n$ e $\mathcal{F}_\infty$ e $\mathcal{G}_\infty$ i rispettivi divisori all'infinito. Posto $\mathcal{F}_\infty = \Sigma\lambda_i \mathsf{a}_i$ e $\mathcal{G}_\infty = \Sigma\mu_i \mathsf{a}_i$, $\mathcal{F}_\infty \geqslant \mathcal{G}_\infty$ indicherà, come d'uso, che $\lambda_i \geqslant \mu_i$ per ogni indice i.

I punti di Supp $\mathcal{F}_\infty$ (di Supp a_∞) saranno detti anche *punti all'infinito* di $\mathcal{F}$ (di a); inoltre un punto di $\mathcal{F}$ (di a) che non sia all'infinito sarà detto punto al finito.

Se O è un punto di $\mathbb{A}_k^3$ e P (s) un punto (una retta) di $\{X_0 = 0\}$, con *retta affine* OP (con *piano affine* Os) si intenderà la retta r per O con $\mathsf{r}_\infty = \mathsf{P}$ (il piano $\mathcal{S}$ per O con $\mathcal{S}_\infty = \mathsf{s}$).

Sia $\mathcal{F} \subset \mathbb{A}_k^3$ una superficie algebrica. Diremo *curva* di $\mathcal{F}$ il supporto di un divisore effettivo di $\mathcal{F}$. Analoga definizione di curva su di una superficie di $\mathbb{P}_k^3$.

Sia $\mathcal{F}$ una ipersuperficie irriducibile di $\mathbb{A}_k^n$ e c una sottovarietà irriducibile di $\mathcal{F}$ di codimensione 1 in $\mathcal{F}$. Diremo che c è *sottoinsieme intersezione completa* di $\mathcal{F}$ (brevemente s.i.c. di $\mathcal{F}$) se esiste una ipersuperficie $\mathcal{G} \subset \mathbb{A}_k^n$ tale che $\mathcal{F} \cdot \mathcal{G} = \lambda \mathsf{c}$, dove si ha $\lambda = I(\mathsf{c}, \mathcal{F} \cap \mathcal{G}) \geqslant 1$. Analoga definizione si dà nel caso proiettivo.

Sia $\mathcal{F}$ una ipersuperficie irriducibile di $\mathbb{A}_k^n$ (o di $\mathbb{P}_k^n$). Diremo che $\mathcal{F}$ è a *sottovarietà di codimensione* 1 *sottoinsieme intersezione completa* se ogni sua sottovarietà irriducibile di codimensione 1 è s.i.c. di $\mathcal{F}$.

Una superficie $\mathcal{F}$ di $\mathbb{A}_k^3$ (o di $\mathbb{P}_k^3$) a sottovarietà di codimensione 1 sottoinsieme intersezione completa sarà detta a *curve sottoinsieme intersezione* completa o più semplicemente a curve s.i.c.

1. – Superficie algebriche affini contenenti una curva sottoinsieme intersezione completa e loro divisori all'infinito.

Premettiamo alcuni Lemmi che valgono sopra un campo k algebricamente chiuso arbitrario.

LEMMA 1.1. – *Siano $\mathcal{F}$ una ipersuperficie di $\mathbb{A}_k^n$ (eventualmente singolare e riducibile) e c una sua sottovarietà pura di codimensione 1 le cui componenti sono s.i.c. di $\mathcal{F}$. Esiste allora una ipersuperficie $\mathcal{G} \subset \mathbb{A}_k^n$ tale che*:

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \mathsf{c}\,, \qquad \mathcal{G}_\infty \ngeqslant \mathcal{F}_\infty\,.$$

DIMOSTRAZIONE. – Dalle ipotesi segue l'esistenza di una ipersuperficie $\mathcal{H} \subset \mathbb{A}_k^n$ tale che $\mathcal{F} \cap \mathcal{H} = \mathsf{c}$. Se $\mathcal{H}_\infty \ngeqslant \mathcal{F}_\infty$ l'esistenza di $\mathcal{G}$ è provata assumendo $\mathcal{G} = \mathcal{H}$. Se $\mathcal{H}_\infty \geqslant \mathcal{F}_\infty$ nell'insieme non vuoto delle ipersuperficie $\mathcal{H}$ tali che $\mathcal{F} \cap \mathcal{H} = \mathsf{c}$ e $\mathcal{H}_\infty \geqslant \mathcal{F}_\infty$, sia $\mathcal{H}^*$ una di ordine minimo. Posto $\mathcal{F} = \{F = 0\}$ e $\mathcal{H}^* = \{H^* = 0\}$, siano

$$F = F_r + F_{r-1} + \dots + F_0\,, \qquad H^* = H_s^* + H_{s-1}^* + \dots + H_0^*$$

dove F_i, H_j^* sono polinomi omogenei di grado i, j rispettivamente, $0 \leqslant i \leqslant r$, $0 \leqslant j \leqslant s$.

Per provare che $\operatorname{div}_{\{X_0=0\}}(\bar{F}_r) = \mathcal{F}_\infty$ e che $\operatorname{div}_{\{X_0=0\}}(\bar{H}_s^*) = \mathcal{H}_\infty$, si ponga

$$F_r = A_1^{n_1} \dots A_u^{n_u}, \qquad H_s = B_1^{m_1} \dots B_v^{m_v}$$

con A_i, B_j polinomi omogenei irriducibili, e

$$\mathsf{a}_i = \{A_i = 0\} \cdot \{X_0 = 0\}, \qquad \mathsf{b}_j = \{B_j = 0\} \cdot \{X_0 = 0\}$$

con $1 \leqslant i \leqslant u$, $1 \leqslant j \leqslant v$. Essendo $\tilde{\mathcal{F}} = \{F_r + X_0 F_{r-1} + \dots + X_0^r F_0 = 0\}$, le componenti di $\tilde{\mathcal{F}} \cap \{X_0 = 0\}$ sono $\mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_u$. Detto $\mathfrak{p}_i$ l'ideale omogeneo di a_i in $k[X_0, \dots, X_n]/(X_0)$ con $1 \leqslant i \leqslant u$, si ha

$$I(\mathsf{a}_i, \tilde{\mathcal{F}} \cap \{X_0 = 0\}) = v_{\mathfrak{p}_i}\overline{(F_r + X_0 F_{r-1} + \dots + X_0^r F_0)} = v_{\mathfrak{p}_i}(\bar{F}_r) = v_{\mathfrak{p}_i}(\bar{A}_1^{n_1} \dots \bar{A}_u^{n_u}) = n_i$$

e, valendo questa relazione per ogni $i = 1, \dots, u$, segue che $\operatorname{div}_{\{X_0=0\}}(\bar{F}_r) = n_1 \mathsf{a}_1 + \dots + n_u \mathsf{a}_u = \tilde{\mathcal{F}} \cdot \{X_0 = 0\} = \mathcal{F}_\infty$. Analogamente si ottiene $\operatorname{div}_{\{X_0=0\}}(\bar{H}_s^*) = m_1 \mathsf{b}_1 + \dots + m_v \mathsf{b}_v = \tilde{\mathcal{H}}^* \cdot \{X_0 = 0\} = \mathcal{H}_\infty^*$.

Da $\mathcal{H}_\infty^* \geqslant \mathcal{F}_\infty$ segue che $u \leqslant v$ e che esiste una permutazione $(t_1, \dots, t_v)$ di $(1, \dots, v)$ per cui $A_{t_i} = d_i B_i$ e $n_{t_i} \geqslant m_i$, con d_i costanti opportune non nulle, per $1 \leqslant i \leqslant u$. Esiste pertanto un polinomio omogeneo P_{s-r}, di grado $s - r \geqslant 0$, per cui $H_s^* = P_{s-r} F_r$; allora il polinomio

$$Q = H^* - P_{s-r} F = -P_{s-r}(F_{r-1} + \dots + F_0) + H_{s-1}^* + \dots + H_0^*$$

ha grado minore di quello di H^*. Detta $\mathcal{G}$ la ipersuperficie luogo degli zeri di Q, risulta $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \mathcal{F} \cap \mathcal{H}^* = \mathsf{c}$, e, se $\mathcal{G} = \{G = 0\}$, risulta $\deg G \leqslant \deg Q < \deg H^*$, e dunque per l'ipotesi su $\mathcal{H}^*$ risulta $\mathcal{G}_\infty \ngeqslant \mathcal{F}_\infty$.

Il seguente corollario del Lemma 1.1 può essere considerato come un criterio per stabilire quando una sottovarietà irriducibile di codimensione 1 di una ipersuperficie irriducibile $\mathcal{F} \subset \mathbb{A}_k^n$ non è s.i.c. di $\mathcal{F}$.

Corollario 1.1. – *Siano $\mathcal{F}$ una ipersuperficie irriducibile di $\mathbb{A}_k^n$ e c una sua sottovarietà irriducibile di codimensione 1. Se per ogni ipersuperficie $\mathcal{G} \subset \mathbb{A}_k^n$ vale l'implicazione*

$$\{\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \mathsf{c}\} \Rightarrow \mathcal{G}_\infty \geqslant \mathcal{F}_\infty$$

allora c non è s.i.c. di $\mathcal{F}$. (Quindi $\mathcal{F}$ non è a sottovarietà di codimensione 1 s.i.c.).

Osservazione 1.1. – Si noti che se su una ipersuperficie irriducibile $\mathcal{F}$ non singolare in codimensione 1 esiste una sottovarietà irriducibile c di codimensione 1 non s.i.c. di $\mathcal{F}$, ogni altra sottovarietà irriducibile $\mathsf{d} \subset \mathcal{F}$, tale che $\lambda\mathsf{c} + \mu\mathsf{d} = \mathcal{F} \cdot \mathcal{G}$ per qualche $\mathcal{G} \subset \mathbb{A}_k^3$, non è s.i.c. di $\mathcal{F}$ (cfr. Lemma 2.1 seguente); analogamente da d

si possono ottenere altre sottovarietà irriducibili di codimensione 1 non s.i.c. di $\mathcal{F}$ e così via.

Del seguente lemma diamo una dimostrazione valevole qualunque sia la caratteristica del campo k.

LEMMA 1.2. – *Siano $\mathcal{F}$ una ipersuperficie irriducibile di ordine $r \geqslant 2$ di $\mathbb{P}_k^n$, con $n \geqslant 3$, e $\mathcal{T}$ un iperpiano di $\mathbb{P}_k^n$ tale che*

$$\mathcal{F} \cdot \mathcal{T} = \lambda \mathsf{l} + \mathsf{v} \qquad \text{con } \lambda \geqslant 2$$

ove l è una sottovarietà lineare di $\mathcal{F}$ di codimensione 1. Allora $\mathcal{F}$ possiede almeno un punto singolare su l.

DIMOSTRAZIONE. – Sia σ un isomorfismo lineare di $\mathbb{P}_k^n$ tale che $\sigma(\mathcal{T}) = \{X_0 = 0\}$ e $\sigma(\mathsf{l}) = \{X_0 = X_1 = 0\}$. Detta $\mathcal{F}' = \sigma(\mathcal{F})$ e $\mathcal{F}' = \{F' = 0\}$, si può supporre $F' = X_0 H + X_1 G$ con H, G polinomi omogenei di grado $r - 1 \geqslant 1$ e $G \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Poichè $n \geqslant 3$ esiste almeno un punto $\mathsf{Q} \in \{H = 0\} \cap \{X_0 = X_1 = 0\}$ e non è restrittivo ammettere che σ sia stato scelto in modo che $\mathsf{Q} = (0, 0, \ldots, 0, 1)$. Inoltre dovendo essere ovviamente $I(\sigma(\mathsf{l}), \mathcal{F}' \cap \{X_0 = 0\}) = \lambda \geqslant 2$, deve esistere un polinomio omogeneo G' tale che $G = X_1 G'$. Poichè $F' = X_0 H + X_1^2 G'$ e $\mathsf{Q} = (0, 0, \ldots, 0, 1) \in \{H = 0\}$, il grado di H rispetto ad X_n è $\leqslant r - 2$ e dunque il grado di F' rispetto ad X_n è $\leqslant r - 2$; ne segue che Q è punto almeno doppio per $\mathcal{F}'$. Il punto $\mathsf{P} = \sigma^{-1}(\mathsf{Q}) \in \mathsf{l}$ sarà allora almeno doppio per $\mathcal{F}$.

LEMMA 1.3. – *Sia $\mathcal{F}$ una superficie di $\mathbb{A}_k^3$ di ordine $r \geqslant 2$. Supponiamo che $\mathcal{F}_\infty \geqslant \mathsf{l}$, con l retta priva di punti singolari di $\tilde{\mathcal{F}}$, e che d sia una curva di $\mathcal{F}$ complanare con l. Allora per ogni superficie $\mathcal{G} \subset \mathbb{A}_k^3$ tale che $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \mathsf{d}$, risulta $\mathcal{G}_\infty \geqslant \mathsf{l}$.*

DIMOSTRAZIONE. – Siano $\mathcal{T}(t) \subset \mathbb{A}_k^3$, $t \in k$, i piani del fascio improprio di sostegno l, supponiamo che $\mathcal{T}(0)$ sia il piano contenente d. Poichè l è priva di punti singolari di $\tilde{\mathcal{F}}$, per il Lemma 1.2 la molteplicità di intersezione di $\mathcal{F}$ e $\mathcal{T}(t)$ lungo l deve essere 1 per ogni $t \in k$. Essendo inoltre l'ordine di $\mathcal{F}$ $r \geqslant 2$, possiamo scrivere, qualunque sia $t \in k$,

$$\tilde{\mathcal{F}} \cdot \tilde{\mathcal{T}}(t) = \mathsf{l} + \Sigma \lambda_i(t)\, \tilde{\mathsf{a}}_i(t)$$

con $\Sigma \lambda_i(t)\, \tilde{\mathsf{a}}_i(t)$ divisore effettivo e $\mathsf{a}_i(t)$ curva irriducibile di $\mathcal{F}$.

Posto $\mathsf{a}(t) = \operatorname{Supp} \Sigma \lambda_i(t)\, \mathsf{a}_i(t)$, si osservi che in ogni punto $\mathsf{P} \in \operatorname{Supp} \mathsf{a}(t)_\infty \subset \mathsf{l}$ il piano tangente a $\tilde{\mathcal{F}}$ in P è $\tilde{\mathcal{T}}(t)$. Pertanto se $t_1 \neq t_2$ risulta $\operatorname{Supp} \mathsf{a}(t_1)_\infty \cap \operatorname{Supp} \mathsf{a}(t_2)_\infty = \emptyset$ altrimenti in un punto $\mathsf{Q} \in \operatorname{Supp} \mathsf{a}(t_1)_\infty \cap \operatorname{Supp} \mathsf{a}(t_2)_\infty \subset \mathsf{l}$, che risulta semplice per $\tilde{\mathcal{F}}$, $\tilde{\mathcal{F}}$ avrebbe ivi due piani tangenti distinti $\tilde{\mathcal{T}}(t_1)$ e $\tilde{\mathcal{T}}(t_2)$. Se ora $\mathcal{G}$ è una superficie tale che $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \mathsf{d}$, essendo $\mathcal{T}(0) \supset \mathsf{a}(0) \supset \mathsf{d}$, $\mathcal{T}(t) \supset \mathsf{a}(t)$ e $\mathcal{T}(0) \cap \mathcal{T}(t) = \emptyset$ per ogni $t \neq 0$, ne segue che $\mathcal{G} \cap \mathsf{a}(t) = \emptyset$ per ogni $t \neq 0$; quindi $\operatorname{Supp} \mathcal{G}_\infty \cap \operatorname{Supp} \mathsf{a}(t)_\infty \neq \emptyset$ per ogni $t \neq 0$ e pertanto $\operatorname{supp} \mathcal{G}_\infty$ contiene infiniti punti di l e dunque $\mathcal{G}_\infty \geqslant \mathsf{l}$.

OSSERVAZIONE 1.2. – Il Lemma 1.3 non si può generalizzare ad una ipersuperficie $\mathcal{F} \subset \mathbb{A}_k^n$ per $n \geqslant 4$, che contenga una varietà lineare l di dimensione $n-2$ perchè in tale caso esiste almeno un punto di l singolare per $\tilde{\mathcal{F}}$.

LEMMA 1.4. – *Sia $\mathcal{F}$ una superficie di $\mathbb{A}_k^3$ di ordine $r \geqslant 2$. Siano c, d curve di $\mathcal{F}$ tali che $\tilde{\mathsf{c}} \cap \tilde{\mathsf{d}} = \emptyset$; supponiamo inoltre che esista una componente irriducibile a di* Supp $\mathcal{F}_\infty$ *tale che $\mathsf{a} \supset$* Supp d_∞ *e che, se b è una (eventuale) componente irriducibile di* Supp $\mathcal{F}_\infty$ *diversa da a, si abbia $\mathsf{b} \cap$* Supp $\mathsf{d}_\infty = \emptyset$. *Allora se $\mathcal{G}$ è una superficie di $\mathbb{A}_k^3$ per cui $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \mathsf{c}$, risulta $\mathcal{G}_\infty \geqslant \mathsf{a}$.*

DIMOSTRAZIONE. – Essendo $\tilde{\mathcal{G}}$ e $\tilde{\mathsf{d}}$ varietà di $\mathbb{P}_k^3$ di dimensione 2 e 1 rispettivamente, risulta $\tilde{\mathcal{G}} \cap \tilde{\mathsf{d}} \neq \emptyset$. Inoltre da $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \mathsf{c}$ e $\mathsf{c} \cap \mathsf{d} = \emptyset$ segue che $\mathcal{G} \cap \mathsf{d} = \emptyset$ e quindi $\tilde{\mathcal{G}} \cap \tilde{\mathsf{d}} \subset$ Supp d_∞. Esiste dunque almeno un punto $\mathsf{P} \in$ (Supp $\mathsf{d}_\infty \cap$ Supp $\mathcal{G}_\infty$) $\subset$ $\subset$ (Supp $\mathcal{F}_\infty \cap$ Supp $\mathcal{G}_\infty$). Sia v una componente irriducibile di $\tilde{\mathcal{F}} \cap \tilde{\mathcal{G}}$ passante per P; v ha dimensione 1. Proviamo che v è una curva del piano $\{X_0 = 0\}$. Infatti se così non fosse, la sua parte affine sarebbe contenuta in c e quindi v coinciderebbe con una componente irriducibile di $\tilde{\mathsf{c}}$. Poichè $\mathsf{P} \in \mathsf{v} \subset \tilde{\mathsf{c}}$ ne seguirebbe: $\mathsf{P} \in \tilde{\mathsf{c}} \cap \tilde{\mathsf{d}}$ contro le ipotesi. Pertanto $\mathsf{v} \subset$ (Supp $\mathcal{F}_\infty \cap$ Supp $\mathcal{G}_\infty$); dalle ipotesi su a segue che $\mathsf{a} =$ $= \mathsf{v} \leqslant \mathcal{G}_\infty$.

OSSERVAZIONE 1.3. – A differenza del Lemma 1.3, il Lemma 1.4 può essere esteso ad una ipersuperficie $\mathcal{F} \subset \mathbb{A}_k^n$ con $n \geqslant 4$ e a sottovarietà c, d di codimensione 1 per le quali sia $\dim(\tilde{\mathsf{c}} \cap \tilde{\mathsf{d}}) < n-3$.

Ci si è limitati al caso $n = 3$ perchè è quello che viene usato in questa nota.

2. – Superficie cubiche affini prive di punti singolari al finito e all'infinito.

Iniziamo la trattazione riguardante le superficie cubiche irriducibili. Il fatto che una superficie cubica $\tilde{\mathcal{F}}$ non singolare di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ possegga esattamente 27 rette e le proprietà della loro configurazione erano noti sin dal secolo scorso (cfr. [3] paragrafo 11.2, pag. 241). Per una trattazione di questo argomento che prescinda dalla caratteristica zero e dal campo dei numeri complessi, si veda per esempio [5], cap. V, paragrafo 4.

Tra le proprietà della configurazione delle 27 rette di una superficie cubica $\tilde{\mathcal{F}}$ non singolare di $\mathbb{P}_k^3$ saranno usate le seguenti:

a) esistono almeno due rette sghembe di $\tilde{\mathcal{F}}$;

b) ad ogni retta $\mathsf{r} \subset \tilde{\mathcal{F}}$ si appoggiano esattamente altre 10 rette di $\tilde{\mathcal{F}}$;

c) a due rette sghembe arbitrarie di $\tilde{\mathcal{F}}$ si appoggiano esattamente 5 rette di $\tilde{\mathcal{F}}$.

OSSERVAZIONE 2.1. – Sia $\mathcal{F}$ una superficie cubica di $\mathbb{A}_k^3$. Se $\tilde{\mathcal{F}}$ non possiede punti singolari sul piano all'infinito $\{X_0 = 0\}$, allora per ogni retta $\mathsf{r} \subset \mathcal{F}$ si ha che r_∞ non è punto singolare di Supp $\mathcal{F}_\infty$. Infatti, se lo fosse, $\{X_0 = 0\}$ sarebbe il piano tangente in tale punto a $\tilde{\mathcal{F}}$ in r_∞, ma ciò è assurdo perchè il piano tangente in tale punto a $\tilde{\mathcal{F}}$ deve contenere r.

PROPOSIZIONE 2.1. – *Ogni superficie cubica affine irriducibile $\mathcal{F} \subset \mathbb{A}^3_k$, con k campo algebricamente chiuso di caratteristica arbitraria, tale che $\tilde{\mathcal{F}}$ è non singolare, non è a curve sottoinsieme intersezione completa.*

DIMOSTRAZIONE. – Osserviamo innanzi tutto che, in base al Lemma 1.2, $\mathcal{F}_\infty$ risulta essere ridotto. Distinguiamo i tre casi:

Caso 1). – $\mathcal{F}_\infty$ è una cubica irriducibile. Siano c, d due rette sghembe arbitrarie di $\mathcal{F}$. Applicando il Lemma 1.4 alle rette c, d, si ha che per ogni superficie $\mathcal{G} \subset \mathbb{A}^3_k$ tale che $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \mathsf{c}$ risulta $\mathcal{G}_\infty \geqslant \mathcal{F}_\infty$.

Caso 2). – $\mathcal{F}_\infty = \mathsf{r} + \mathsf{c}$, con r retta e c conica irriducibile. Esiste almeno una retta $\mathsf{g} \subset \mathcal{F}$ che si appoggia ad r (in g_∞). Fra le 26 rette di $\tilde{\mathcal{F}}$ distinte da r, 10 si appoggiano a r [proprietà *b*) delle 27 rette di $\tilde{\mathcal{F}}$]; le rimanenti 16 si appoggiano a c e, per l'Oss. 2.1, non a r. Fra di esse al più 9 (oltre ad r) si possono appoggiare a g; ne esiste perciò almeno una d sghemba con g. Per ogni superficie $\mathcal{G} \subset \mathbb{A}^3_k$ per cui $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \mathsf{g}$ risulta $\mathcal{G}_\infty \geqslant \mathsf{r}$ per il Lemma 1.3 e $\mathcal{G}_\infty \geqslant \mathsf{c}$ per il Lemma 1.4, da cui $\mathcal{G}_\infty \geqslant \mathcal{F}_\infty$.

Caso 3). – $\mathcal{F}_\infty = \mathsf{r} + \mathsf{s} + \mathsf{t}$, con r, s, t rette distinte (concorrenti in un punto o no). Sia d una retta di $\mathcal{F}$ appoggiantesi a r. Delle 10 rette di $\tilde{\mathcal{F}}$ appoggiantesi a t solo 5 si appoggiano a d perchè d e t sono sghembe [proprietà *c*) delle 27 rette di $\tilde{\mathcal{F}}$]; rimangono 5 rette che si appoggiano a t e che sono sghembe con d. Di esse una almeno, e sia c', appartiene a $\mathcal{F}$. Ogni superficie $\mathcal{G} \subset \mathbb{A}^3_k$ per cui $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \mathsf{d}$ è tale che $\mathcal{G}_\infty \geqslant \mathsf{r}$ per il Lemma 1.3, e $\mathcal{G}_\infty \geqslant \mathsf{t}$ per il Lemma 1.4. Analogamente, per la stessa $\mathcal{G}$ risulta $\mathcal{G}_\infty \geqslant \mathsf{s}$ in relazione ad una retta c'' di $\mathcal{F}$ appoggiantesi a s e sghemba con d. In conclusione $\mathcal{G}_\infty \geqslant \mathcal{F}_\infty$.

In ognuno dei casi 1), 2), 3) il Corollario 1.1 permette di concludere che $\mathcal{F}$ non è a curve sottoinsieme intersezione completa.

OSSERVAZIONE 2.2. – L'analoga della. Prop. 2.1 non vale nel caso di quadriche affini $\mathcal{Q}$ non singolari. Infatti se Supp $\mathcal{Q}_\infty$ risulta riducibile allora la quadrica $\mathcal{Q}$ è a curve s.i.c.; più precisamente ogni curva di $\mathcal{Q}$ è intersezione completa di $\mathcal{Q}$, cioè $\mathcal{Q}$ è fattoriale perchè, a meno di un isomorfismo lineare di $\mathbb{A}^3_k$, si può supporre $\mathcal{Q} = \{XY - Z = 0\}$.

3. – Superficie cubiche affini singolari con soli punti doppi isolati (al finito) e prive di punti singolari all'infinito.

Per comodità del lettore riportiamo alcuni lemmi che saranno usati nel seguito. Osserviamo subito che, nella ipotesi del presente paragrafo, $\tilde{\mathcal{F}}$ risulta un monoide non singolare in codimensione 1, cioè una superficie di ordine n con un punto $(n-1)$-plo.

In questo e nel prossimo paragrafo, k è un campo algebricamente chiuso.

LEMMA 3.1 (D. Gallarati). – *Sia $\mathcal{F}$ una superficie irriducibile di $\mathbb{P}_k^3$ non singolare in codimensione 1 e $\mathcal{G}$ una superficie di $\mathbb{P}_k^3$ tale che*

$$\mathcal{F}\cdot\mathcal{G} = q_1\mathsf{c}_1 + \ldots + q_t\mathsf{c}_t$$

dove c_i indica una curva irriducibile e $q_i = I(\mathsf{c}_i, \mathcal{F}\cap\mathcal{G})$, $i = 1, \ldots, t$.

Se esiste una superficie $\mathcal{H}\subset\mathbb{P}_k^3$ tale che $\mathcal{F}\cdot\mathcal{H} = s\mathsf{c}_1$, allora esiste anche una superficie $\mathcal{H}'\subset\mathbb{P}_k^3$ tale che $\mathcal{F}\cdot\mathcal{H}' = s'(q_2\mathsf{c}_2 + \ldots + q_t\mathsf{c}_t)$, con s, s' interi positivi e $s'\leqslant s$.

Per la dimostrazione di questo Lemma si procede come nell'ultima parte della dimostrazione del Lemma 3.2 seguente; oppure si veda [8], pag. 139.

LEMMA 3.2 (D. Gallarati). – *Se un monoide $\mathcal{F}\subset\mathbb{P}_k^3$ di ordine n, $n\geqslant 2$, è privo di rette singolari, allora condizione necessaria e sufficiente affinchè ogni curva algebrica c (irriducibile o non) sia s.i.c. di $\mathcal{F}$ è che ciò avvenga per le rette r_i di $\mathcal{F}$, $i = 1, \ldots, s$, con $1\leqslant s\leqslant n(n-1)$, uscenti da un punto $(n-1)$-plo P del monoide $\mathcal{F}$. Più precisamente se r_i contata ν_i volte è intersezione completa di $\mathcal{F}$, allora c contata ad esempio $\nu = m.c.m.\{\nu_1, \ldots, \nu_s\}$ volte è intersezione completa di $\mathcal{F}$.*

Esponiamo la dimostrazione del Lemma 3.2, seguendo [10] (Prop. 1, pag. 107), fornendo qualche precisazione ulteriore anche perchè dalla dimostrazione del Lemma stesso si può ricavare un metodo per calcolare le equazioni delle superficie che individuano su un monoide $\mathcal{F}$ a curve s.i.c. le curve di $\mathcal{F}$, note che siano le superficie definenti su $\mathcal{F}$ le sue rette per il punto P.

DIMOSTRAZIONE (del Lemma 3.2). – Se $\mathcal{F}$ è a curve s.i.c. allora lo sono necessariamente tutte le rette uscenti dal punto P $(n-1)$-plo del monoide $\mathcal{F}$.

Proviamo ora la sufficienza della condizione. Sia c una curva di $\mathcal{F}$, diversa da $\mathsf{r}_1, \ldots, \mathsf{r}_s$, che non è restrittivo supporre irriducibile. Sia $\mathcal{H}$ il cono (irriducibile) che proietta c dal punto P. Risulta, come non è difficile verificare,

$$\mathcal{F}\cdot\mathcal{H} = \mu\mathsf{c} + \mu_1\mathsf{r}_1 + \ldots + \mu_s\mathsf{r}_s \quad \text{con } \mu_i\geqslant 0,\ \mu\geqslant 1,\ 1\leqslant s\leqslant n(n-1)\,.$$

Il valore assunto da μ in tale relazione è necessariamente $\mu = 1$. Questo ultimo fatto è noto, tuttavia non siamo riusciti a trovarne una esplicita dimostrazione. Per ragioni di completezza ci sembra utile fornirne una prova. Essa discende dalle seguenti considerazioni:

1) essendo P punto $(n-1)$-plo di $\mathcal{F}$, P è almeno $(n-1)$-plo per l'intersezione di $\mathcal{F}$ con ogni retta per P;

2) la curva c non risulta luogo di punti singolari nè per il monoide $\mathcal{F}$, nè per il cono $\mathcal{H}$;

3) se $\mathcal{G}$ è una superficie passante per c e risulta $I(\mathsf{c}, \mathcal{F} \cap \mathcal{G}) > 1$, allora in ogni punto $\mathsf{Q} \in \mathsf{c}$, che sia semplice per $\mathcal{F}$ e per $\mathcal{G}$, le superficie $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ hanno ivi lo stesso piano tangente.

La 1) e la 2) sono evidenti. Dimostriamo la 3). Essendo la natura del fatto puramente locale e invariante rispetto ad isomorfismi lineari di $\mathbb{P}_k^3$, si può assumere $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ superficie affini di equazioni $F = 0$ e $G = 0$ rispettivamente e $\mathsf{Q} = (0, 0, 0)$. Sia t un parametro uniformizzante nell'anello locale $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$ di $\mathcal{F}$ in c, essendo $\mathfrak{p}$ l'ideale di c in $\mathcal{R} = k[X_1, X_2, X_3]/(F)$. Sia $\bar{G}$ l'immagine di G in $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$. Dall'ipotesi $I(\mathsf{c}, \mathcal{F} \cap \mathcal{G}) > 1$ segue $\bar{G} = t^\alpha u$, con $\alpha > 1$ e u unità in $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$. Questa relazione implica che $G = T^\alpha U + AF$, ove T, U sono polinomi rappresentanti di t e u ed A un opportuno polinomio. Ora il grado inferiore di $T^\alpha U$ (brevemente deg. inf. $(T^\alpha U)$) risulta maggiore di 1 mentre deg. inf. $(A) = 0$ in quanto deg. inf. $(G) =$ deg. inf. $(F) = 1$; ne segue che F e G hanno forme iniziali proporzionali e quindi $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ hanno lo stesso piano tangente in Q.

Veniamo alla prova che $\mu = 1$. Consideriamo uno degli infiniti punti $\mathsf{Q} \in \mathsf{c} - \{\mathsf{P}\}$ semplice per $\mathcal{F}$ e per $\mathcal{H}$; se fosse $I(\mathsf{c}, \mathcal{F} \cap \mathcal{H}) > 1$, avendo $\mathcal{F}$ e $\mathcal{H}$ in Q il medesimo piano tangente, tale piano conterrebbe la retta PQ che avrebbe in Q molteplicità di intersezione almeno 2 con $\mathcal{F}$. Per la considerazione 1) e per il teorema di Bézout la retta $\mathsf{PQ} \subset \mathcal{F}$. Poichè gli infiniti punti Q di cui sopra devono appartenere ad infinite generatrici di $\mathcal{H}$ ne seguirebbe che, per il teorema di Bézout relativo alle superficie, $\mathcal{F} = \mathcal{H}$ e ciò è assurdo perchè P non è n-plo per $\mathcal{F}$.

Siano ora $\mathcal{G}_i \subset \mathbb{P}_k^3$ superficie tali che $\mathcal{F} \cdot \mathcal{G}_i = \nu_i \mathsf{r}_i$ per $i = 1, ..., s$. Consideriamo $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}_i$, r_i, c e $\mathcal{H}$ quali coni affini di $\mathbb{A}_k^4$. Poichè $\mathcal{F}$ è non singolare in codimensione 1, il suo anello delle coordinate affini $\mathcal{A} = k[X_0, X_1, X_2, X_3]/I(\mathcal{F})$, con $I(\mathcal{F})$ ideale omogeneo di $\mathcal{F}$, è integralmente chiuso nel suo campo dei quozienti $\mathbb{K}$ (cfr. [6], Prop. 2, pag. 391).

Siano ora $\bar{G}_i$ e $\bar{H}$ le immagini in $\mathcal{A}$ dei polinomi definenti $\mathcal{G}_i$ e $\mathcal{H}$ rispettivamente. Se $v_\mathfrak{p}$ indica la valutazione del campo $\mathbb{K}$ con centro nell'ideale $\mathfrak{p} = I(\mathsf{a})$ omogeneo di una sottovarietà irriducibile a di $\mathcal{F}$ di codimensione 1, posto

$$\bar{G} = \prod_{i=1}^{s} (\bar{G}_i)^{\mu_i \nu/\nu_i} \quad \text{e} \quad \bar{B} = \bar{H}^\nu/\bar{G} \quad \text{con } \nu = \text{m.c.m.}\{\nu_i\},\ 1 \leqslant i \leqslant s\,,$$

si ha che

$$v_\mathfrak{p}(\bar{B}) = \nu \quad \text{se } \mathfrak{p} = I(\mathsf{c})\,,$$
$$v_\mathfrak{p}(\bar{B}) = 0 \quad \text{se } \mathfrak{p} = I(\mathsf{a}) \quad \text{con } \mathsf{a} \neq \mathsf{c}\,.$$

Poichè $\mathcal{A}$ è integralmente chiuso in $\mathbb{K}$, per il teorema di struttura dei domini noetheriani integralmente chiusi, si ha che $\bar{B} \in \mathcal{A}$. Non è difficile riconoscere che tra i rappresentanti di $\bar{B}$ in $k[X_0, X_1, X_2, X_3]$ ne esiste almeno uno omogeneo che denotiamo con D. Sia G' un fattore irriducibile di D tale che $0 < \nu' = v_\mathfrak{p}(\bar{G}') \leqslant v_\mathfrak{p}(\bar{B}) = \nu$, se $\mathfrak{p} = I(\mathsf{c})$, e $v_{\mathfrak{p}}(\bar{G}') = 0$ se $\mathfrak{p} = I(\mathsf{a})$ con $\mathsf{a} \neq \mathsf{c}$. Detta $\mathcal{G}'$ la ipersuperficie $\mathcal{G}' = \{G' = 0\} \subset \mathbb{A}_k^4$ e ricordando che $v_{\mathfrak{p}}(\bar{G}') = I(\mathsf{c}, \mathcal{F} \cap \mathcal{G}')$ quando $\mathfrak{p} = I(\mathsf{c})$, si ha $\mathcal{F} \cdot \mathcal{G}' = \nu' \mathsf{c}$ con $0 < \nu' \leqslant \nu$. Poichè $G' \in k[X_0, X_1, X_2, X_3]$ è omogeneo, $G' = 0$ rappresenta in $\mathbb{P}_k^3$ una superficie; riconsiderando ora $\mathcal{F}$ e c quali varietà proiettive di $\mathbb{P}_k^3$, la relazione $\mathcal{F} \cdot \{G' = 0\} = \nu' \mathsf{c}$ in $\mathbb{P}_k^3$ dà esattamente il risultato enunciato nel Lemma 3.2.

OSSERVAZIONE 3.1. – Con un adattamento della dimostrazione del Lemma 3.2 si può provare che, nelle stesse ipotesi su $\mathcal{F}$, se c è una curva irriducibile di $\mathcal{F}$ ed esistono superficie $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ tali che $\mathcal{F} \cdot \mathcal{G}_1 = s_1 \mathsf{c}$ e $\mathcal{F} \cdot \mathcal{G}_2 = s_2 \mathsf{c}$, con $s_1 > s_2$, ne segue che esiste una superficie $\mathcal{G}$ tale che $\mathcal{F} \cdot \mathcal{G} = (s_1 - s_2)\mathsf{c}$.

OSSERVAZIONE 3.2. – Dalla dimostrazione dei Lemmi 3.1 e 3.2 risulta che essi valgono anche quando al posto di $\mathbb{P}_k^3$ si sostituisce $\mathbb{A}_k^3$. (Nella versione affine del Lemma 3.2 per monoide $\mathcal{F} \subset \mathbb{A}_k^3$ si intenderà una superficie di ordine n avente un punto P $(n-1)$-plo al finito).

Illustriamo il procedimento della determinazione di una superficie $\mathcal{G}$ tagliante su una superficie cubica affine $\mathcal{F}$ a curve s.i.c. una data curva, note che siano le superficie che intersecano su $\mathcal{F}$ le rette per il punto doppio di $\mathcal{F}$, col seguente

ESEMPIO 3.1. – Si consideri la superficie a curve s.i.c. $\mathcal{F}$:

$$F \equiv (X^2 + Y)Z + XY^2 = 0 \, .$$

$\mathcal{F}$ possiede il punto doppio $\mathsf{O} = (0, 0, 0)$ e per O le rette OX_∞, OY_∞, OZ_∞. Risulta $\mathcal{F} \cdot \{X^2 + Y = 0\} = 5\,\mathsf{OZ}_\infty$, ed inoltre

$$\mathcal{F} \cdot \{X = 0\} = \mathsf{OY}_\infty + \mathsf{OZ}_\infty, \qquad \mathcal{F} \cdot \{Y = 0\} = \mathsf{OX}_\infty + 2\,\mathsf{OZ}_\infty,$$
$$\mathcal{F} \cdot \{Z = 0\} = 2\,\mathsf{OX}_\infty + \mathsf{OY}_\infty \, .$$

Nel campo dei quozienti dell'anello $k[\mathcal{F}] = k[X, Y, Z]/(F) = k[\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}]$ valgono, ad esempio, le relazioni:

$$\bar{X}^2 + \bar{Y} = -\frac{\bar{X}\bar{Y}^2}{\bar{Z}}, \qquad \bar{Z}\bar{X}^2 = -\bar{Y}(\bar{Z} + \bar{X}\bar{Y}), \qquad \bar{Z}\bar{Y} = -\bar{X}(\bar{Y}^2 + \bar{X}\bar{Z}) \, .$$

Per determinare una superficie $\mathcal{G}_1 \subset \mathbb{A}_k^3$ definente su $\mathcal{F}$ la retta OY_∞ si osservi dapprima che valgono le relazioni

$$\frac{\bar{X}^5}{\bar{X}^2 + \bar{Y}} = -\frac{\bar{X}^5\bar{Z}}{\bar{X}\bar{Y}^2} = -\frac{\bar{X}^4\bar{Z}}{\bar{Y}^2} = \frac{\bar{X}^2(\bar{Z} + \bar{X}\bar{Y})}{\bar{Y}} = \frac{\bar{X}^2\bar{Z}}{\bar{Y}} + \bar{X} = -\bar{Z} - \bar{X}\bar{Y} + \bar{X}^3 \, .$$

Basta assumere $\mathcal{G}_1 = \{X^3 - XY - Z = 0\}$. Analogamente per ottenere una superficie $\mathcal{G}_2$ definente su $\mathcal{F}$ la retta OX_∞ basta assumere $\mathcal{G}_2 = \{Y^3 + XYZ - Z^2 = 0\}$ perchè si ha

$$\frac{\bar{Y}^5}{(\bar{X}^2 + \bar{Y})^2} = \frac{\bar{Y}^5\bar{Z}^2}{\bar{Y}^4\bar{X}^2} = \frac{\bar{Y}\bar{Z}^2}{\bar{X}^2} = -\frac{\bar{Z}(\bar{Y}^2 + \bar{X}\bar{Z})}{\bar{X}} =$$
$$= -\bar{Z}^2 + \bar{Y}(\bar{Y}^2 + \bar{X}\bar{Z}) = \bar{Y}^3 + \bar{X}\bar{Y}\bar{Z} - \bar{Z}^2 .$$

Troviamo infine una superficie $\mathcal{G}_3$ definente su $\mathcal{F}$ la conica $\mathsf{c} = \{X - Y = 0, X^2 + Z(X + 1) = 0\}$. Il cono $\mathcal{K}$ proiettante c da O è $\mathcal{K} = \{X - Y = 0\}$. Risulta

$$\mathcal{F} \cdot \mathcal{K} = \mathsf{c} + \mathsf{OZ}_\infty .$$

Tenuto conto che $\mathcal{F} \cdot \{X^2 + Y = 0\} = 5\mathsf{OZ}_\infty$, per trovare $\mathcal{G}_3$ basta determinare un polinomio $G_3 \in k[X, Y, Z]$ tale che

$$\bar{G}_3 = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})^5}{\bar{X}^2 + \bar{Y}} = \frac{\bar{Z}(\bar{Y} - \bar{X})^5}{\bar{X}\bar{Y}^2} = \frac{\bar{Z}\bar{Y}^3}{\bar{X}} - 5\bar{Z}\bar{Y}^2 + 10\bar{Z}\bar{Y}\bar{X} - 10\bar{Z}\bar{X}^2 + 5\frac{\bar{Z}\bar{X}^3}{\bar{Y}} - \frac{\bar{Z}\bar{X}^4}{\bar{Y}^2} =$$
$$= -\bar{Y}^2(\bar{Y}^2 + \bar{Z}\bar{X}) - 5\bar{Z}\bar{Y}^2 + 10\bar{X}\bar{Y}\bar{Z} - 10\bar{X}^2\bar{Z} + 5\bar{X}(\bar{Z} + \bar{X}\bar{Y}) + \frac{\bar{X}^2}{\bar{Y}}(\bar{Z} + \bar{X}\bar{Z}) =$$
$$= -\bar{Y}^4 - \bar{X}\bar{Y}^2\bar{Z} - 5\bar{Y}^2\bar{Z} + 10\bar{X}\bar{Y}\bar{Z} - 10\bar{X}^2\bar{Z} + 5\bar{X}\bar{Z} + 5\bar{X}^2\bar{Y} + \bar{X}^3 - \bar{Z} - \bar{X}\bar{Y} .$$

Si assuma

$$G_3 = -Y^4 - XY^2Z - 5Y^2Z + 10XYZ - 10X^2Z + 5XZ + 5X^2Y + X^3 - XY .$$

LEMMA 3.3. - (E. STAGNARO), (*cfr.* [10], *prop.* 2, *pag.* 108). *Sia $\mathcal{F}$ un monoide di ordine n, $n \geq 2$, di $\mathbb{P}_k^3$ non singolare in codimensione* 1. *Supponiamo che $\mathcal{F}$ abbia equazione $F \equiv AX_0 - B = 0$, con $A, B \in k[X_1, X_2, X_3]$, e che per una retta* r *passante per* $\mathsf{O} = (1, 0, 0, 0)$ *si abbia: $\mathcal{F} \cdot \mathcal{G} = \varrho\mathsf{r}$ con $\mathcal{G} = \{G = 0\}$ superficie di $\mathbb{P}_k^3$. Allora:*

1) *se $A = A_0^d$, con A_0 forma irriducibile, esiste $\nu > 0$ tale che $G = A_0^\nu + C_0F$;*

2) *se $A = A_1^{d_1}A_2^{d_2}$, con A_1, A_2 forme lineari non proporzionali, si hanno due possibilità:*

I) *$G = A_i^{\nu_i} + C_iF$, $\nu_i > 0$ con $i = 1$ oppure $i = 2$;*

II) *$G = (A_i^{\nu_i} + C_i'F)/A_j^{\nu_j}$ con $\nu_1 \cdot \nu_2 > 0$ e $(i, j) = (1, 2)$ oppure $(i, j) = (2, 1)$, con $C_0, C_1, C_2, C_1', C_2'$ convenienti polinomi omogenei di $k[X_0, X_1, X_2, X_3]$.*

OSSERVAZIONE 3.3. - Nell'ipotesi del Lemma 3.3, 1) sul monoide $\mathcal{F}$ non esiste alcuna retta s diversa da r per O che sia s.i.c. di $\mathcal{F}$: infatti se $\mathcal{F} \cdot \mathcal{K} = \sigma\mathsf{s}$, con $\mathcal{K} = \{H = 0\}$, lo stesso Lemma 3.3 in relazione alla retta s porge $H = A_0^{\nu'} + C_0'F$, da cui $\mathsf{s} = \mathcal{K} \cap \mathcal{F} = \{A_0 = 0\} \cap \mathcal{F} = \mathsf{r}$.

Nell'ipotesi del Lemma 3.3, 2) sul monoide $\mathcal{F}$ può esistere al più una sola retta s, diversa da r, per O che sia s.i.c. di $\mathcal{F}$. Infatti ricordando che le rette di $\mathcal{F}$ per O sono le componenti di $\mathcal{F} \cap \{A_1 A_2 = 0\}$, sia s una retta s.i.c. di $\mathcal{F}$ per O, con $\mathsf{r} \neq \mathsf{s}$. In tale caso non può darsi che sia $\mathcal{F} \cap \{A_1 = 0\} = \mathcal{F} \cap \{A_2 = 0\} = \mathsf{r}$. Sia $\mathcal{F} \cap \cap \{A_1 = 0\} \neq \mathsf{r}$; allora dalla dimostrazione del Lemma 3.3, caso 2), si deduce che possono presentarsi due situazioni:

(∘) $\mathcal{F} \cap \{A_2 = 0\} = \mathsf{r}$;

(∘∘) uno fra i piani $\{A_i = 0\}$ interseca su $\mathcal{F}$ r ed un'altra retta t, $\mathsf{t} \neq \mathsf{r}$, mentre $\mathcal{F} \cap \{A_j = 0\} = \mathsf{t}$, $(i, j) = (1, 2)$ oppure $(i, j) = (2, 1)$.

Nella situazione (∘) $\mathsf{s} \subset \{A_1 = 0\}$; se $\mathcal{F} \cap \{A_1 = 0\} = \mathsf{s}$, le uniche rette s.i.c. di $\mathcal{F}$ per O sono due: r e s; se invece $\mathcal{F} \cap \{A_1 = 0\} \neq \mathsf{s}$, allora il Lemma 3.3, applicato ad s, comporta che $\{A_1 = 0\}$ interseca $\mathcal{F}$ secondo due rette distinte s, t con $\mathsf{t} = \mathcal{F} \cap \{A_2 = 0\} = \mathsf{r}$. Se ne conclude ancora che le uniche rette s.i.c. di $\mathcal{F}$ per O sono due: r e s.

Nella situazione (∘∘) è evidente che $\mathsf{t} \cup \mathsf{r} = \mathcal{F} \cap \{A_1 A_2 = 0\}$. Dunque $\mathsf{t} = \mathsf{s}$ e ne risulta ancora che le uniche rette s.i.c. di $\mathcal{F}$ per O sono due: r e s.

OSSERVAZIONE 3.4. – Dal Lemma 3.1 si deduce che una superficie cubica irriducibile $\mathcal{F} \subset \mathbb{A}^3_k$, tale che Supp $\mathcal{F}_\infty$ è una cubica irriducibile o una retta, e $\tilde{\mathcal{F}}$ è non singolare in codimensione 1, è a curve s.i.c. se e solo se $\tilde{\mathcal{F}} \subset \mathbb{P}^3_k$ lo è. D'altra parte le superficie cubiche di $\mathbb{P}^3_k$ a curve s.i.c. sono, a meno di isomorfismi lineari di $\mathbb{P}^3_k$, le tre superficie determinate in [8]. Pertanto le superficie $\mathcal{F} \subset \mathbb{A}^3_k$ soddisfacenti le ipotesi di questo paragrafo, a curve s.i.c. ed aventi Supp $\mathcal{F}_\infty$ irriducibile, sono tutte e sole quelle per cui $\tilde{\mathcal{F}}$ è una delle tre superficie sopra dette (a meno di isomorfismi lineari di $\mathbb{P}^3_k$).

PROPOSIZIONE 3.1. – *Sia $\mathcal{F} \subset \mathbb{A}^3_k$ una superficie cubica irriducibile con un punto doppio isolato che, a meno di isomorfismi lineari, possiamo assumere sia $\mathsf{O} = (0, 0, 0)$. Sia inoltre $\tilde{\mathcal{F}}$ non singolare all'infinito (e quindi non singolare in codimensione* 1). *Sia $\mathcal{F} = \{B - A = 0\}$ con A, B polinomi omogenei di grado* 2 *e* 3; *posto rispettivamente $\mathcal{B}$ e $\mathcal{A}$ le superficie luogo degli zeri di B e di A, allora $\mathcal{F}$ è a curve s.i.c. se e solo se $\mathcal{B}_\infty$ e $\mathcal{A}_\infty$ rientrano in uno dei seguenti casi:*

a) $\mathcal{B}_\infty$ cubica irriducibile e $\mathcal{A}_\infty$ di uno dei seguenti tipi:

a_1) $\mathcal{A}_\infty$ conica irriducibile e surosculatrice a $\mathcal{B}_\infty$ in un suo punto sestatico P, cioè tale che $\mathcal{B}_\infty \cdot \mathcal{A}_\infty = 6\mathsf{P}$;

a_2) $\mathcal{A}_\infty = \mathsf{t}$, con t retta tangente a $\mathcal{B}_\infty$ in un suo flesso;

a_3) $\mathcal{A}_\infty = \mathsf{t}_1 + \mathsf{t}_2$, con t_1 e t_2 rette tangenti a $\mathcal{B}_\infty$ in due suoi flessi;

a_4) $\mathcal{A}_\infty = \mathsf{s} + \mathsf{t}$, con s retta tangente a $\mathcal{B}_\infty$ in un suo punto sestatico P e t retta tangente a $\mathcal{B}_\infty$ nel flesso Q tangenziale di P;

b) $\mathcal{B}_\infty = \mathsf{r} + \mathsf{c}$, *con* r *retta e* c *conica irriducibile, e* $\mathcal{A}_\infty$ *di uno dei seguenti tipi*:

b_1) $\mathcal{A}_\infty$ *conica irriducibile iperosculatrice a* c *e tangente a* r (r *non tangente a* c);

b_2) $\mathcal{A}_\infty = \mathsf{t}$, *con* t *retta tangente a* c *in un punto non appartenente ad* r;

b_3) $\mathcal{A}_\infty = \mathsf{t}_1 + \mathsf{t}_2$, *con* $\mathsf{t}_1, \mathsf{t}_2$ *rette tangenti a* c *in due punti semplici distinti e non appartenenti ad* r, *e* $\mathsf{t}_1, \mathsf{t}_2$ *concorrenti in un punto di* r;

c) $\mathcal{B}_\infty = \mathsf{a} + \mathsf{b} + \mathsf{c}$, *con* $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}$ *rette distinte non concorrenti, e* $\mathcal{A}_\infty$ *di uno dei seguenti tipi*:

c_1) $\mathcal{A}_\infty$ *conica irriducibile e tangente alle tre rette* $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}$;

c_2) $\mathcal{A}_\infty = \mathsf{s}$ *con* s *retta arbitraria non passante per alcun punto comune a due fra le rette* $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}$;

d) $\mathcal{B}_\infty = \mathsf{a} + \mathsf{b} + \mathsf{c}$, *con* $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}$ *rette distinte e concorrenti, e* $\mathcal{A}_\infty = \mathsf{s}$, *con* s *retta non passante per il punto comune ad* $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}$.

Dimostrazione. – Nella attuale ipotesi le componenti di $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ sono tutte le rette di $\mathcal{F}$ per O. Per esse vale l'Oss. 2.1; quindi nessuna retta di $\mathcal{F}$ per O ha, quale punto all'infinito, un punto doppio di Supp $\mathcal{F}_\infty$. Osserviamo che $\mathcal{A}$ risulta essere un piano se e solo se il polinomio A è il quadrato di una forma lineare omogenea A_0. Esaminiamo i vari casi possibili.

Caso a). – Sia $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{B}_\infty$ cubica irriducibile. Supponiamo che $\mathcal{F}$ sia a curve s.i.c. Ogni retta $\mathsf{r} \subset \mathcal{F}$ passante per O è s.i.c. di $\mathcal{F}$ con una superficie $\mathcal{G} \subset \mathbb{A}^3_k$, cioè $\mathcal{F} \cdot \mathcal{G} = \mu \mathsf{r}$, $\mu \geqslant 1$; in base al Lemma 1.1 non è restrittivo supporre che $\mathcal{G}_\infty \not\geqslant \mathcal{F}_\infty$. Pertanto, essendo $\mathcal{B}_\infty$ irriducibile, risulta $\tilde{\mathcal{F}} \cdot \tilde{\mathcal{G}} = \mu \tilde{\mathsf{r}}$. Essendo $\tilde{\mathcal{F}}$ un monoide di $\mathbb{P}^3_k$, ad $\tilde{\mathcal{F}}$ e a ciascuna delle rette $\tilde{\mathsf{r}} \subset \tilde{\mathcal{F}}$ passanti per O, si può applicare il Lemma 3.3 e Oss. 3.2.

Sia A irriducibile; allora di rette di $\mathcal{F}$ passanti per O ce n'è una sola (cfr. Oss. 3.3), dunque $\mathcal{B} \cdot \mathcal{A} = 6\mathsf{r}$; quindi $\mathcal{B}_\infty \cdot \mathcal{A}_\infty = 6\mathsf{r}_\infty$. Ne segue che r_∞, che è punto semplice per $\mathcal{B}_\infty$, deve essere un punto sestatico di $\mathcal{B}_\infty$ e $\mathcal{A}_\infty$ deve essere la conica suroscu-latrice in r_∞ a $\mathcal{B}_\infty$. Si ha così il *caso* a_1).

Sia $A = A_0^2$ con A_0 forma lineare; anche in questo caso vi è una sola retta, sia r, di $\mathcal{F}$ passante per O (cfr. Oss. 3.3); essendo $\mathcal{B} \cdot \{A_0 = 0\} = 3\mathsf{r}$ e quindi $\mathcal{B}_\infty \cdot \{A_0 = 0\}_\infty = 3\mathsf{r}_\infty$, si ha che la retta $\mathsf{t} = \{A_0 = 0\}_\infty$ è la tangente a $\mathcal{B}_\infty$ nel suo flesso r_∞, cioè $\mathcal{A}_\infty = \mathsf{t}$. Si ha così il *caso* a_2).

Sia $A = A_1 A_2$, con A_1 e A_2 forme lineari non proporzionali. Si ponga $\mathcal{A}_i = \{A_i = 0\}$, $i = 1, 2$. Le rette di $\mathcal{F}$ passanti per O sono due. Se infatti esistesse una sola retta di $\mathcal{F}$, r, per O, poichè $\mathcal{B}_\infty$ è irriducibile, e $\mathcal{A}_i$, $i = 1, 2$, interseca $\mathcal{F}$ secondo rette per O, si ha necessariamente $\mathcal{F} \cdot \mathcal{A}_i = 3\mathsf{r}$ per $i = 1, 2$ e ne seguirebbe che r è luogo di punti doppi per $\mathcal{F}$ contro l'ipotesi su $\mathcal{F}$. Dall'Oss. 3.3 segue che le rette di $\mathcal{F}$ per O sono solo due: p e q. Dal Lemma 3.3, 2) segue che, a meno dello scambio di $\mathcal{A}_1$ con $\mathcal{A}_2$ o di p con q, le situazioni possibili sono le seguenti:

$$\tilde{\mathcal{B}}\cdot\tilde{\mathcal{A}}_1 = 3\tilde{\mathsf{p}}\,, \quad \tilde{\mathcal{B}}\cdot\tilde{\mathcal{A}}_2 = 3\tilde{\mathsf{q}} \quad \text{oppure} \quad \tilde{\mathcal{B}}\cdot\tilde{\mathcal{A}}_1 = \tilde{\mathsf{p}} + 2\mathsf{q}\,, \quad \tilde{\mathcal{B}}\cdot\tilde{\mathcal{A}}_2 = 3\tilde{\mathsf{p}}\,.$$

Nella prima situazione si ha che le rette $\mathsf{t}_1 = \mathcal{A}_{1\infty}$ e $\mathsf{t}_2 = \mathcal{A}_{2\infty}$ sono tangenti a $\mathcal{B}_\infty$ rispettivamente nei flessi p_∞ e q_∞. Si ha così il *caso* a_3). Nella seconda situazione si ha che la retta $\mathsf{t} = \mathcal{A}_{2\infty}$ è tangente a $\mathcal{B}_\infty$ nel flesso p_∞, ed essendo $\mathcal{B}_\infty\cdot\mathcal{A}_{1\infty} = \mathsf{p}_\infty + 2\mathsf{q}_\infty$, risulta che q_∞ è punto sestatico di $\mathcal{B}_\infty$ (p_∞ e q_∞ sono semplici per Supp $\mathcal{B}_\infty$). Si ha così il *caso* a_4).

Si è così provato che, nel caso a), se $\mathcal{F}$ è a curve s.i.c., necessariamente deve verificarsi una delle situazioni a_1), a_2), a_3), a_4).

Proviamo ora che il verificarsi di ciascuna di esse è sufficiente perchè $\mathcal{F}$ sia a curve s.i.c. In base al Lemma 3.2 e Oss. 3.2, è sufficiente provare che le rette di $\mathcal{F}$ per O, cioè le componenti di $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$ sono s.i.c. di $\mathcal{F}$. Nel caso a_1) esiste una sola retta r di $\mathcal{F}$ passante per O: essa è $\mathsf{r} = \mathsf{OP}$ e risulta $\mathcal{F}\cdot\mathcal{A} = \mathcal{B}\cdot\mathcal{A} = 6\mathsf{r}$. Nel caso a_2), detto $\mathsf{Q}\in\mathsf{t}$ il flesso di $\mathcal{B}_\infty$, esiste una sola retta r di $\mathcal{F}$ per O, $\mathsf{r} = \mathsf{OQ}$. Detto $\mathcal{C}$ il piano affine Ot, risulta $\mathcal{F}\cdot\mathcal{C} = 3\mathsf{r}$. Nel caso a_3) le rette di $\mathcal{F}$ per O sono intersecate su $\mathcal{F}$ dai piani affini $\mathcal{A}_i = \mathsf{Ot}_i$, $i = 1, 2$, Nel caso a_4) siano $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ i piani affini Os e Ot rispettivamente. Le rette di $\mathcal{F}$ per O sono due, p e q rispettivamente intersezione di $\mathcal{F}$ con $\mathcal{A}_1$ e con $\mathcal{A}_2$ e risulta, per l'ipotesi attuale, che $\mathsf{p}_\infty = \mathsf{P}$, $\mathsf{q}_\infty = \mathsf{Q}$ ed inoltre $\mathcal{F}\cdot\mathcal{A}_1 = 3\mathsf{p}$, $\mathcal{F}\cdot\mathcal{A}_2 = \mathsf{p} + 2\mathsf{q}$. In base al Lemma 3.1 e Oss. 3.2 esiste allora una superficie $\mathcal{G}\subset\mathbb{A}^3_k$ tale che $\mathcal{F}\cap\mathcal{G} = \mathsf{q}$.

Caso b). - Sia $\mathcal{B}_\infty = \mathsf{r} + \mathsf{c}$, con r retta e c conica irriducibile. Si ponga $\mathsf{c}\cap\mathcal{A}_\infty = \{\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \mathsf{A}_3, \mathsf{A}_4\}$ e $\mathsf{r}\cap\mathcal{A}_\infty = \{\mathsf{B}_1, \mathsf{B}_2\}$ dove i punti A_i non sono necessariamente distinti; analogamente per i B_j. Ad esempio $\{\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \mathsf{A}_3, \mathsf{A}_4\}$ potrebbe essere costituito da tre, due o da un solo punto e $\{\mathsf{B}_1, \mathsf{B}_2\}$ da un solo punto, come accadrà se $\mathcal{A}$ risulta essere un piano.

Esaminiamo le varie situazioni che si presentano. Nei casi in cui sarà possibile determinare due rette sghembe g, h di $\mathcal{F}$ di cui una si appoggia a r e l'altra a c, poichè nessuno dei punti h_∞ e g_∞ appartiene a $\mathsf{r}\cap\mathsf{c}$, in base ai Lemmi 1.3 e 1.4 si potrà dedurre che una di esse non è s.i.c. di $\mathcal{F}$ e quindi $\mathcal{F}$ non è a curve s.i.c.

Almeno tre dei punti $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_4$ siano distinti, e quindi non allineati; siano ad esempio $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \mathsf{A}_3$. Allora detto B_{ij} il punto di r allineato con A_i e A_j ($i \neq j$; $i, j = 1, 2, 3$), $\mathsf{B}_{12}, \mathsf{B}_{13}, \mathsf{B}_{23}$ sono tre punti distinti su r e quindi almeno uno, sia B_{12}, non appartiene a Supp $\mathcal{A}_\infty$. Allora il piano affine $\mathsf{OA}_1\mathsf{A}_2$ interseca $\mathcal{F}$ secondo le rette affini OA_1, OA_2 ed una terza retta g passante per B_{12} e non passante per O. La retta $\mathsf{h} = \mathsf{OA}_3\subset\mathcal{F}$, come è facile verificare, risulta sghemba con g. In questo caso $\mathcal{F}$ non è a curve s.i.c.

Solo due dei punti $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_4$ siano distinti, e sia ad esempio $\mathsf{A}_1 \neq \mathsf{A}_2$. Supponiamo $\mathcal{A}_\infty$ conica irriducibile. Detto, ad esempio, A_1 il punto in cui $\mathcal{A}_\infty$ e c risultano tangenti e detta t la retta tangente a c in A_1, si ha che il punto $\mathsf{B} = \mathsf{r}\cap\mathsf{t}$ è diverso da B_1 e da B_2. Pertanto il piano affine $\mathsf{OA}_1\mathsf{B}$ individua su $\mathcal{F}$ la retta OA_1

contata 2 volte e una retta g per B, non passante per O, che risulta sghemba con la retta $h = OA_2 \subset \mathcal{F}$: $\mathcal{F}$ non è a curve s.i.c.

Sia $\mathcal{A}_\infty$ la retta A_1A_2. Detta t la tangente a c in A_1 e $\{T\} = r \cap t$ (senz'altro diverso da $\{B\} = r \cap \mathcal{A}_\infty$) il piano affine OA_1T individua su $\mathcal{F}$ la retta OA_1 contata due volte: infatti attualmente $\mathcal{F} = \{A_0^2 - B = 0\}$, ove $\mathcal{A} = \{A_0 = 0\}$ e il piano OA_1T risulta tangente lungo OA_1 alla superficie $\tilde{\mathcal{B}} = \{B = 0\}$. Poichè $\{T\} \in \in \{\widetilde{OA_1T}\} \cap \tilde{\mathcal{F}}$, esisterà una retta $h \subset OA_1T \cap \mathcal{F}$ con $h_\infty = T$. La retta h non passa per O e risulta sghemba con $g = OA_2 \in \mathcal{F}$: $\mathcal{F}$ non è a curve s.i.c. Sia $\mathcal{A}_\infty = s + t$, ove $s = A_1A_2$ e t è la retta tangente a c, ad esempio in A_1. Detta q la tangente a c in A_2, sia $\{S\} = t \cap q$. Se $S \notin r$ sia $\{B_2\} = t \cap r$ e $\{B_1\} = s \cap r$. Consideriamo ora il piano affine OA_2B_2. Questo interseca $\mathcal{F}$ secondo le rette OA_2, OB_2 ed una terza retta che non passa per O, h, con h_∞ ulteriore intersezione di A_2B_2 con c. Le rette h e OB_1 di $\mathcal{F}$ risultano sghembe: $\mathcal{F}$ non è a curve s.i.c. Consideriamo ora il caso in cui $S \in r$, cioè $B_2 = S$. Detto $\mathcal{C}$ il piano affine OA_2S, risulta $\mathcal{F} \cap \mathcal{C} = \{OS, OA_2, h\}$ con h retta per A_2 ma non passante per O. Infatti $\tilde{\mathcal{F}}$ non è singolare nei punti di Supp $\mathcal{F}_\infty$; il piano tangente in S a $\tilde{\mathcal{F}}$ è quindi Or. Se h passasse per S, il piano tangente in S a $\tilde{\mathcal{F}}$ sarebbe $\mathcal{C} \neq Or$: il che è assurdo. Dunque h passa per A_2. Si osservi inoltre che $h \neq OA_2$: infatti la molteplicità di intersezione di $\mathcal{F}$ con $\mathcal{A}$ lungo OA_2 risulta 1. Dunque h non passa per O e risulta sghemba con OB_1. Anche in questo caso $\mathcal{F}$ non è a curve s.i.c.

Sia $\mathcal{A}_\infty = t_1 + t_2$, con t_1 e t_2 rette tangenti a c in A_1 e A_2 rispettivamente e $\{B_1\} = r \cap t_1 \neq \{B_2\} = r \cap t_2$: Il piano affine OA_2B_1 individua su $\mathcal{F}$ le rette OB_1 e OA_2 ed una terza retta h non passante per O che risulta sghemba con la retta $g = OB_2 \in \mathcal{F}$: $\mathcal{F}$ non è a curve s.i.c.

Sia $\mathcal{A}_\infty = t_1 + t_2$, con t_1 e t_2 rette tangenti a c come sopra, ma $\{B_1\} = \{B_2\} = t_1 \cap t_2$. Allora si verifica la *situazione* b_3).

I quattro punti $A_1, \ldots, A_4$ coincidano e sia $B_1 \neq B_2$. In tale caso $\mathcal{A}_\infty$ è certamente irriducibile. Ne segue che la retta A_1B_1 taglia su c un ulteriore punto $B \notin r$. Allora il piano affine OA_1B individua su $\mathcal{F}$ le rette OA_1, OB_1 ed una terza retta h non passante per O, con $h_\infty = B$. La retta h risulta sghemba con la retta $g = OB_2 \in \mathcal{F}$: $\mathcal{F}$ non è a curve s.i.c. I quattro punti $A_1, \ldots, A_4$ coincidano e sia $B_1 = B_2$ con $A_1 \neq B_1$ altrimenti A_1 sarebbe un punto doppio di $\tilde{\mathcal{F}}$. Allora o $\mathcal{A}_\infty$ è una conica irriducibile (in tale caso $\mathcal{A}_\infty$ è tangente a r in B_1 e iperosculatrice a c in A_1, inoltre r non è tangente a c essendo $A_1 \neq B_1$); oppure è $\mathcal{A}_\infty = t$ con t retta tangente a c in A_1. Si ottengono così superficie che rientrano nei *casi* b_1) e b_2) rispettivamente.

Si è così provato che nel caso b) se $\mathcal{F}$ è a curve s.i.c. $\mathcal{F}$ rientra necessariamente in una delle situazioni b_1), b_2) e b_3).

Proviamo ora che ognuna di queste è sufficiente perchè $\mathcal{F}$ sia a curve s.i.c.

Se si verifica la b_3) esistono tre rette di $\mathcal{F}$ per O: OA_1, OA_2, OB_1. La retta affine OB_1 è s.i.c. di $\mathcal{F}$ col piano affine Or e risulta $\mathcal{F} \cdot Or = 2OB_1$. Inoltre detti $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ i piani affini Ot_1 e Ot_2 rispettivamente, si ha $\mathcal{F} \cdot \mathcal{C}_1 = OB_1 + 2OA_1$ e $\mathcal{F} \cdot \mathcal{C}_2 = OB_1 + 2OA_2$. Dal Lemma 3.1 e Oss. 3.2 si ha che anche le rette OA_1 e

OA_2 sono s.i.c. di $\mathcal{F}$. Pertanto dal Lemma 3.2 e Oss. 3.2 segue che $\mathcal{F}$ è a curve s.i.c.

Nei casi b_1) e b_2) si ha che le rette di $\mathcal{F}$ per O sono solo OA_1 e OB_1. Il piano affine Or è tale che $\mathcal{F} \cdot Or = 2OB_1$ e dunque OB_1 è s.i.c. di $\mathcal{F}$; inoltre nel caso b_1) $\mathcal{F} \cdot \mathcal{A} = \mathcal{B} \cdot \mathcal{A} = 4OA_1 + 2OB_1$, mentre nel caso b_2) $\mathcal{F} \cdot \mathcal{A} = \mathcal{B} \cdot \mathcal{A} = 2OA_1 + OB_1$. Applicando in entrambi i casi il Lemma 3.1 e Oss. 3.2 si ottiene dapprima che OA_1 è s.i.c. di $\mathcal{F}$ e poi, per il Lemma 3.2 e Oss. 3.2 si conclude che $\mathcal{F}$ è a curve s.i.c.

Caso c). - Sia $\mathcal{B}_\infty = a + b + c$, con a, b, c rette distinte e non concorrenti. Sia inoltre $\mathcal{A}_\infty$ una conica irriducibile. Si ponga $a \cap \mathcal{A}_\infty = \{A_1, A_2\}$, $b \cap \mathcal{A}_\infty = \{B_1, B_2\}$, $c \cap \mathcal{A}_\infty = \{C_1, C_2\}$ ove, come nel caso *b*), può darsi che si abbia una o più coincidenze $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$, $C_1 = C_2$. Si osservi innanzi tutto che nessuno dei punti A_i, B_j, C_k può coincidere con uno dei punti $a \cap b$, $a \cap c$, $b \cap c$ (cfr. Oss. 2.1 e si tenga presente che le rette di $\mathcal{F}$ per O sono quelle che hanno per punti all'infinito A_i, B_j, C_k con $i, j, k = 1, 2$). Se $\mathcal{A}_\infty$ non è tangente ad a, b, c, sia ad esempio $A_1 \neq A_2$. Il piano affine OA_1B_1 individua su $\mathcal{F}$ le rette OA_1 e OB_1 ed una retta p, non passante per O perchè si appoggia a c in $\{p_\infty\} \in c \cap A_1B_1$ con $p_\infty \notin \{C_1, C_2\}$ altrimenti la retta A_1B_1 incontrerebbe la conica $\mathcal{A}_\infty$ nei punti A_1, B_1, p_∞ e ciò è assurdo essendo $\mathcal{A}_\infty$ irriducibile. Analogamente il piano affine OA_1C_1 individua su $\mathcal{F}$ le rette OA_1 OC_1 e una retta q, non passante per O perchè si appoggia a $\{q_\infty\} \in$ $\in b \cap A_1C_1$ con $q_\infty \notin \{B_1, B_2\}$. Le rette p e q risultano entrambe sghembe con la retta $g = OA_2$. Per ogni superficie $\mathcal{G} \subset \mathbb{A}^3_k$ tale che $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = g$ risulta per il Lemma 1.3 $\mathcal{G}_\infty \geqslant a$ e per il Lemma 1.4 $\mathcal{G}_\infty \geqslant b + c$. Quindi $\mathcal{G}_\infty \geqslant \mathcal{F}_\infty$. Per il Corollario 1.1 dunque g non è s.i.c. di $\mathcal{F}$. Affinchè $\mathcal{F}$ sia a curve s.i.c. è dunque necessario che $\mathcal{A}_\infty$ sia tangente alle tre rette a, b, c (*caso* c_1).

Sia ora $\mathcal{B}_\infty = a + b + c$, con a, b, c rette distinte non concorrenti e sia inoltre $\mathcal{A}_\infty = s + t$ con s e t rette distinte. Si ponga $\{A_1\} = a \cap s$, $\{B_1\} = b \cap s$, $\{C_1\} =$ $= c \cap s$, $\{A_2\} = a \cap t$, $\{B_2\} = b \cap t$, $\{C_2\} = c \cap t$. Come sopra osservato, nessuno dei punti A_i, B_j, C_k ($i, j, k = 1, 2$) può coincidere con uno dei punti $a \cap b$, $b \cap c$, $a \cap c$. Poichè t non coincide con s, sia ad esempio $A_1 \neq A_2$; allora almeno su un'altra delle rette b, c le due intersezioni sono distinte: sia $B_1 \neq B_2$. Il piano affine OA_1B_2 interseca su $\mathcal{F}$ le rette OA_1, OB_2 ed una retta g con $\{g_\infty\} \in c \cap A_1B_2$ che non passa per O essendo g_∞ certamente diverso da C_1 e da C_2. Ragionando come sopra si trova che g non è s.i.c. di $\mathcal{F}$ e quindi che $\mathcal{F}$ non è a curve s.i.c.

Si è così verificato che, nel caso *c*), se $\mathcal{F}$ è a curve s.i.c. $\mathcal{F}$ rientra necessariamente nelle *situazioni* c_1) e c_2).

Vediamo ora che ciascuna delle situazioni c_1) e c_2) è sufficiente affinchè $\mathcal{F}$ sia a curve s.i.c. Infatti detti $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_3$ i piani affini passanti per O ed aventi come retta all'infinito a, b, c rispettivamente e posto $\{A\} = a \cap \mathcal{A}_\infty$, $\{B\} = b \cap \mathcal{A}_\infty$, $\{C\} =$ $= c \cap \mathcal{A}_\infty$ si ha (in entrambe le situazioni) $\mathcal{F} \cdot \mathcal{T}_1 = 2OA$, $\mathcal{F} \cdot \mathcal{T}_2 = 2OB$ e $\mathcal{F} \cdot \mathcal{T}_3 =$ $= 2OC$. Dal Lemma 3.2 e Oss. 3.2 segue che $\mathcal{F}$ è a curve s.i.c.

Caso d). - La dimostrazione della proposizione nel caso *d*) si consegue con considerazioni analoghe a quelle usate nel caso *c*).

Con ciò la dimostrazione è completata.

4. – Superficie cubiche affini non singolari in codimensione 1 e con almeno un punto doppio all'infinito.

Formuliamo ora i seguenti adattamenti al caso affine dei Lemmi 3.2 e 3.3 relativi ad una superficie affine irriducibile $\mathcal{F} \subset \mathbb{A}_k^3$ di ordine n, $n \geqslant 2$, con un punto $(n-1)$-plo all'infinito; essi saranno sufficienti per la classificazione delle superficie a curve s.i.c. soddisfacenti le attuali ipotesi che verrà effettuata nel paragrafo [8] seguente.

LEMMA 4.1. – *Sia $\mathcal{F} \subset \mathbb{A}_k^3$ una superficie algebrica irriducibile di ordine n, $n \geqslant 2$, che possiede un punto all'infinito D $(n-1)$-plo per $\tilde{\mathcal{F}}$ ed è priva di rette singolari (al finito). Allora possono presentarsi le situazioni:*

1) *se non esistono rette di $\mathcal{F}$ aventi D come punto all'infinito ogni curva algebrica c su $\mathcal{F}$ è intersezione completa di $\mathcal{F}$ col cilindro proiettante c da D, cioè la superficie $\mathcal{F}$ è fattoriale;*

2) *se le rette di $\mathcal{F}$ aventi D come punto all'infinito sono $\mathsf{r}_1, \ldots, \mathsf{r}_s$ con $1 \leqslant s \leqslant n(n-1)$, condizione necessaria e sufficiente affinchè ogni curva $\mathsf{c} \subset \mathcal{F}$ sia s.i.c. di $\mathcal{F}$ è che lo siano tutte le rette r_i. Più precisamente se r_i contata v_i volte è intersezione completa di $\mathcal{F}$, allora c contata, ad esempio, $v = \text{m.c.m.}\{v_1, \ldots, v_s\}$ volte risulta intersezione completa di $\mathcal{F}$.*

(La dimostrazione è un facile adattamento di quella del Lemma 3.2).

Sia ora $\mathcal{F} \subset \mathbb{A}_k^3$ una superficie irriducibile di ordine n, $n \geqslant 2$, non singolare in codimensione 1 con un punto $(n-1)$-plo all'infinito che possiamo supporre sia $\mathsf{Z}_\infty = (0, 0, 0, 1)$. $\mathcal{F}$ risulta definita da un polinomio $F = AZ + B$ con A, B polinomi di $k[X, Y]$ tali che $\deg A \leqslant n-1$ e $\deg B \leqslant n$.

PROPOSIZIONE 4.1. – *Sia $\mathcal{F} = \{F = 0\} \subset \mathbb{A}_k^3$ una superficie irriducibile di ordine n, $n \geqslant 2$, soddisfacente le condizioni sopra indicate. Siano r una retta s.i.c. di $\mathcal{F}$ per Z_∞ e Γ l'insieme delle superficie $\mathcal{G} = \{G = 0\} \subset \mathbb{A}_k^3$ tali che $\mathcal{F} \cdot \mathcal{G} = \mu\mathsf{r}$, $\mu \geqslant 1$ (ove μ dipende da $\mathcal{G}$).*

1) *Se $A = A_0^{d_0}$, con $d_0 > 0$, $A_0 \in k[X, Y]$ irriducibile, allora $G = A_0^\delta \bmod (F)$ per ogni $\mathcal{G} \in \Gamma$. (In particolare $\{A_0 = 0\} \in \Gamma$.)*

2) *Se $A = A_1^{d_1} A_2^{d_2}$, con $d_i > 0$, $A_i \in k[X, Y]$ di grado 1 non proporzionali, $i = 1, 2$, si possono presentare due possibilità:*

2′) *almeno uno dei due piani $\{A_i = 0\}$, $i = 1, 2$, appartiene a Γ; quando entrambi appartengono a Γ la molteplicità di intersezione di almeno uno di essi con $\mathcal{F}$ lungo r deve essere 1;*

2″) *nessuno dei due piani $\{A_i = 0\}$, $i = 1, 2$, appartiene a Γ, tuttavia uno di essi individua la retta r e un'altra retta s, mentre l'altro figura tra le superficie la cui intersezione completa con $\mathcal{F}$ è $v\mathsf{s}$, $v \geqslant 1$, e la molteplicità di intersezione di almeno uno fra i piani $\{A_i = 0\}$, $i = 1, 2$, con $\mathcal{F}$ lungo s deve essere 1.*

Dimostrazione. – Sia r una retta di $\mathcal{F}$ per Z_∞ e sia $G = 0$ l'equazione di una superficie $\mathcal{G} \in \Gamma$. Procedendo come nella dimostrazione della Prop. 2, pag. 140 di [8] si prova il caso 1) della Prop. 4.1. Per il caso 2) si prova ancora che, posto $\bar{G}, \bar{A}_1, \bar{A}_2$ le immagini di G, A_1, A_2 nell'anello delle coordinate $k[\mathcal{F}]$, nel campo delle frazioni di $k[\mathcal{F}]$ si possono presentare i due sottocasi:

I) $\bar{G} = \bar{A}_1^{m_1}\bar{A}_2^{m_2}$, con $m_i \geqslant 0$ e $m_1 + m_2 \neq 0$, $i = 1, 2$;

II) $\bar{G} = \dfrac{\bar{A}_i^{m_i}}{\bar{A}_j^{m_j}}$, con $m_i > 0$, $m_j > 0$ e $(i, j) = (1, 2)$ oppure $(i, j) = (2, 1)$.

Esaminiamo i casi I) e II).

I) Quando $m_i = 0$ si ha $G = A_j^{m_j} + DF$, con $D \in k[X, Y, Z]$, $i \neq j$. Nel caso in cui $m_1 m_2 \neq 0$, allora $\{A_1 = 0\}$, $\{A_2 = 0\}$ definiscono su $\mathcal{F}$ solo r e la molteplicità di intersezione di almeno uno di essi con $\mathcal{F}$ lungo r è uguale a 1, perchè altrimenti r risulterebbe almeno doppia per $\mathcal{F}$. Questo caso cade nella possibilità 2′) dell'enunciato.

II) Se $\{A_i = 0\}$ definisce su $\mathcal{F}$ solo r, anche $\{A_j = 0\}$ deve definire su $\mathcal{F}$ solo r e quindi la molteplicità di intersezione di $\mathcal{F}$ con almeno uno dei due piani lungo r deve essere 1: si ricade così nella possibilità 2′). D'altra parte è evidente che $\{A_i = 0\}$ non può definire su $\mathcal{F}$ più di due rette distinte altrimenti il piano $\{A_j = 0\}$ dovrebbe definire su $\mathcal{F}$ almeno due tra le rette definite da $\{A_i = 0\}$ e perciò i due piani coinciderebbero contro l'ipotesi. Se allora $\{A_i = 0\}$ definisce su $\mathcal{F}$ esattamente due rette r e s, essendo A_i non proporzionale ad A_j, si ha che $\{A_j = 0\}$ deve definire su $\mathcal{F}$ la retta s e solo questa; essendo $\mathcal{F}$ non singolare in codimensione 1, la molteplicità di intersezione di $\mathcal{F}$ lungo s con almeno uno dei due piani deve essere 1. Si presenta così la possibilità 2″) dell'enunciato.

Osservazione 4.1. – L'equazione delle superficie $\mathcal{G} \in \Gamma$ di cui nella Prop. precedente è data da $G = A_0^\delta + DF = 0$ nel caso 1), da $G = A_1^{\nu_1} + D_1F$ oppure da $G = A_2^{\nu_2} + D_2F = 0$ nel caso 2′) con $D, D_1, D_2 \in k[X, Y, Z]$. Per la determinazione delle stesse nel caso 2″) si usino il Lemma 3.1 e l'Oss. 3.2.

Osservazione 4.2. – Considerazioni analoghe a quelle dell'Oss. 3.3 permettono di provare che:

nel caso 1) dell'enunciato della Prop. 4.1 esiste *al più una* retta s.i.c. di $\mathcal{F}$ per O;

nel caso 2) le rette s.i.c. di $\mathcal{F}$ per O sono *al più due.*

5. – Superficie cubiche $\mathcal{F}$ con $\tilde{\mathcal{F}}$ cono non singolare in codimensione 1.

PROPOSIZIONE 5.1. – *Ogni superficie cubica irriducibile* $\mathcal{F} \subset \mathbb{A}_k^3$ *la cui chiusura proiettiva* $\tilde{\mathcal{F}}$ *è un cono non singolare in codimensione* 1, *con* k *campo algebricamente chiuso di caratteristica zero e più che numerabile, non è a curve s.i.c.*

DIMOSTRAZIONE. – Le superficie $\mathcal{F}$ che soddisfano le ipotesi sono coni o cilindri affini. Supponiamo che $\mathcal{F}$ sia un cono con vertice V: V risulta essere l'unico punto singolare di $\mathcal{F}$. Un piano $\mathcal{A} \subset \mathbb{A}_k^3$ non passante per V interseca $\mathcal{F}$ secondo una cubica ellittica e. Se $\mathcal{F}$ fosse a curve s.i.c. ogni sua retta sarebbe s.i.c. di $\mathcal{F}$ con una opportuna superficie. Per ogni punto $\mathsf{P} \in \mathsf{e}$, sia p la retta $\mathsf{p} = \mathsf{PV}$ e $\mathcal{S}$ la superficie tale che $\mathcal{F} \cap \mathcal{S} = \mathsf{p}$ e $\mathsf{c} = \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$. È chiaro che $\mathsf{c} \cap \mathsf{e} = \{\mathsf{P}\}$. Quindi la curva piana ellittica e sarebbe a punti s.i.c. contro quanto stabilito in [9], pag. 171.

Nel caso in cui $\mathcal{F}$ sia un cilindro, le stesse argomentazioni applicate alle curve sezioni di $\mathcal{F}$ con un piano $\mathcal{A}$, tale che $\tilde{\mathcal{A}}$ non passi per il punto triplo di $\tilde{\mathcal{F}}$, permettono di concludere che $\mathcal{F}$ non è a curve s.i.c.

OSSERVAZIONE 5.1. – Secondo una informazione data da S. S. ABHYANKAR in [1], pag. 1137, A. WEIL e D. MUMFORD hanno provato che su una curva ellittica piana e definita sopra un campo algebricamente chiuso k che non sia la chiusura algebrica di un campo finito, esistono sempre punti P che non sono s.i.c. di e. Ne segue che la Prop. 5.1 può essere estesa anche a superficie cubiche definite sopra un campo k algebricamente chiuso che non sia la chiusura di un campo finito.

OSSERVAZIONE 5.2. – Se il campo k è la chiusura algebrica di un campo finito, allora la Prop. 5.1 è falsa. Infatti in questo caso tutti i punti di una curva ellittica piana e sono s.i.c. di e (cfr. [9], esempio 8, pag. 173). L'anello delle coordinate $\mathscr{A} = k[\mathsf{e}]$ è quindi semifattoriale (cfr. [11]); pertanto lo è anche l'anello $\mathscr{A}[T]$, con T trascendente sopra $\mathscr{A}$ (cfr. [11]). D'altra parte $\mathscr{A}[T]$ può essere inteso come l'anello delle coordinate di un cilindro che ha e come curva direttrice e che risulta pertanto a curve s.i.c. Analoghe considerazioni valgono per un cono che abbia e come curva direttrice (cfr. [11]).

6. – Superficie cubiche affini singolari in codimensione 1 (al finito).

PROPOSIZIONE 6.1. – *Ogni superficie cubica irriducibile* $\mathcal{F} \subset \mathbb{A}_k^3$ *singolare in codimensione* 1, *con* k *campo algebricamente chiuso di caratteristica zero e più che numerabile, non è a curve s.i.c.*

DIMOSTRAZIONE. – Sia Σ l'insieme algebrico costituito dai punti singolari di $\mathcal{F}$. Essendo $\mathcal{F}$ irriducibile, con facili considerazioni, si vede che Σ non può essere che una retta doppia per $\mathcal{F}$, cioè luogo di punti doppi per $\mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ risulta essere perciò una superficie rigata. Sia $\mathcal{A}$ un piano di $\mathbb{A}_k^3$ che incide la retta Σ senza contenerla e tale che $\mathcal{F}\cdot\mathcal{A} = \mathsf{c}$ sia una cubica irriducibile (l'esistenza di un tale piano è assicurata dal teorema di Bertini). A norma di un risultato di E. STAGNARO (cfr. [9], Prop. 11, Corollario 1, pagg. 171-172) la curva c, risultando una cubica piana affine singolare, non è a punti s.i.c. Sia P un punto qualunque di c e r una retta di $\mathcal{F}$ per P. Se $\mathcal{F}$ fosse a curve s.i.c., esisterebbe una superficie $\mathcal{G}\subset\mathbb{A}_k^3$ tale che $\mathcal{F}\cap\mathcal{G} = \mathsf{r}$. Allora, indicato con $\mathsf{g} = \mathcal{A}\cap\mathcal{G}$, si avrebbe $\mathsf{g}\cap\mathsf{c} = \{P\}$, cioè c sarebbe a punti s.i.c. e ciò è assurdo.

7. – Sull'ordine dell'anello $k[\mathcal{F}]$ di una superficie cubica $\mathcal{F}\subset\mathbb{A}_k^3$ a curve sottoinsieme intersezione completa.

Data una superficie cubica irriducibile $\mathcal{F}\subset\mathbb{A}_k^3$ a curve s.i.c., che per quanto visto sopra non è singolare in codimensione 1, per poter stabilire il minimo intero λ per cui ogni curva algebrica su $\mathcal{F}$, con molteplicità λ, è intersezione completa di $\mathcal{F}$ con un'altra superficie $\mathcal{G}$, cioè per determinare l'ordine dell'anello semifattoriale $k[\mathcal{F}]$ (cfr. [11], pag. 4) si ricorrerà nel seguito sistematicamente al Lemma 4.1, alla Prop. 4.1 e alle seguenti Prop. 7.1 e 7.2.

La dimostrazione della Prop. 7.1, pur presentando analogie con quella della Prop. 4.1, richiede diversi accorgimenti e porge risultati più complessi.

Il campo k si suppone algebricamente chiuso e di caratteristica arbitraria.

PROPOSIZIONE 7.1. – *Sia $\mathcal{F}\subset\mathbb{A}_k^3$ una superficie irriducibile di ordine n, $n\geq 2$, con un punto $(n-1)$-plo in $\mathsf{O} = (0, 0, 0)$. Rappresentata $\mathcal{F}$ con l'equazione $F\equiv B - A = 0$, dove $A, B\in k[X, Y, Z]$ sono polinomi omogenei di grado $n-1$ e n rispettivamente, e indicata con r una retta passante per O s.i.c. di $\mathcal{F}$, si considerino le superficie $\mathcal{G}\subset\mathbb{A}_k^3$ tali che $\mathcal{F}\cdot\mathcal{G} = \mu\mathsf{r}$, $\mu\geq 1$; indicato con $\bar{H}$ l'immagine di un qualunque $H\in k[X, Y, Z]$ nella proiezione canonica $k[X, Y, Z]\to k[X, Y, Z]/(F)$ e con $G\in k[X, Y, Z]$ un polinomio definente $\mathcal{G}$, risulta che $\bar{G}$ è prodotto di potenze ad esponente intero delle proiezioni canoniche di fattori irriducibili di B e di potenze ad esponente intero non negativo delle proiezioni canoniche di fattori irriducibili di A.*

DIMOSTRAZIONE. – Si ponga:

$$G = G_t + G_{t-1} + \ldots + G_1 + G_0$$

con G_i polinomi omogenei di $k[X, Y, Z]$ di grado $i = 0, \ldots, t$. Essendo $\bar{A} = \bar{B}$, risulta, in $k[X, Y, Z]/(F)$:

$$\bar{B}^t\bar{G} = \bar{A}^t\bar{G}_t + \bar{A}^{t-1}\bar{G}_{t-1}\bar{B} + \ldots + \bar{A}\bar{G}_1\bar{B}^{t-1} + \bar{G}_0\bar{B}^t\,. \qquad (\circ)$$

Si indichi con C il polinomio di $k[X, Y, Z]$, omogeneo di grado nt,

$$C = A^t G_t + A^{t-1} G_{t-1} B + \ldots + A G_1 B^{t-1} + G_0 B^t ;$$

proviamo che ogni zero di C è zero di AB.

Sia $\mathsf{R} = (r_1, r_2, r_3) \neq \mathsf{O}$ uno zero di C; se R non è zero di B, allora dalla relazione

$$C(\mathsf{R}) = A(\mathsf{R})^t G_t(\mathsf{R}) + A(\mathsf{R})^{t-1} G_{t-1}(\mathsf{R}) B(\mathsf{R}) + \ldots + A(\mathsf{R}) G_1(\mathsf{R}) B(\mathsf{R})^{t-1} + G_0 B(\mathsf{R})^t = 0$$

segue che

$$(\circ\circ) \qquad \left[\frac{A(\mathsf{R})}{B(\mathsf{R})}\right]^t G_t(\mathsf{R}) + \left[\frac{A(\mathsf{R})}{B(\mathsf{R})}\right]^{t-1} G_{t-1}(\mathsf{R}) + \ldots + \left[\frac{A(\mathsf{R})}{B(\mathsf{R})}\right] G_1(\mathsf{R}) + G_0 = 0 .$$

Indicato con S il punto

$$\mathsf{S} = \left(\frac{A(\mathsf{R})}{B(\mathsf{R})} r_1 , \quad \frac{A(\mathsf{R})}{B(\mathsf{R})} r_2 , \quad \frac{A(\mathsf{R})}{B(\mathsf{R})} r_3 \right)$$

appartenente alla retta OR, essendo G_i polinomio omogeneo di grado $i = 0, \ldots, t$, dalla $(\circ\circ)$ segue che

$$G_t(\mathsf{S}) + G_{t-1}(\mathsf{S}) + \ldots + G_1(\mathsf{S}) + G_0 = 0$$

e perciò S è zero del polinomio G; inoltre essendo i polinomi A, B omogenei di grado $n-1$ e n rispettivamente, si ha

$$F(\mathsf{S}) = B(\mathsf{S}) - A(\mathsf{S}) = \left[\frac{A(\mathsf{R})}{B(\mathsf{R})}\right]^n B(\mathsf{R}) - \left[\frac{A(\mathsf{R})}{B(\mathsf{R})}\right]^{n-1} A(\mathsf{R}) = \\ = \left[\frac{A(\mathsf{R})}{B(\mathsf{R})}\right]^{n-1} [A(\mathsf{R}) - A(\mathsf{R})] = 0 .$$

Quindi S è zero anche di F. Ne segue che S, soluzione del sistema $G = F = 0$, è un punto della retta $\mathsf{r} = \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Poichè nelle ipotesi della Prop. 7.1 $\mathsf{r} = \{A = 0\} \cap \cap \{B = 0\}$ dovrà risultare, in particolare $A(\mathsf{S}) = 0$.

Essendo d'altra parte $A(\mathsf{S}) = A(\mathsf{R})^n / B(\mathsf{R})^{n-1}$, segue che $A(\mathsf{R}) = 0$. Ciò prova che R è zero di AB.

Dal teorema degli zeri di Hilbert si deduce che

$$(AB)^s = CM \qquad \text{con } M \in k[X, Y, Z],\ s > 0 ;$$

da ciò risulta che C è prodotto di potenze ad esponente intero positivo di fattori irriducibili di AB, e passando alle immagini canoniche tramite $k[X, Y, Z] \rightarrow \rightarrow k[X, Y, Z]/(F)$, $\bar{C}$ è prodotto di potenze ad esponente intero positivo delle proiezioni canoniche degli stessi fattori irriducibili di AB. Dalla $(\circ)$ e dalla definizione di C segue che $\bar{C} = \bar{B}^t \bar{G}$. Da ciò e da quanto si è detto di $\bar{C}$, si deduce la tesi.

Osservazione 7.1. – La Prop. precedente poteva essere usata per dimostrare la Prop. 3.1. Si è tuttavia preferito dimostrare quest'ultima come si è fatto, oltre che per esigenze di continuità e di unità con il metodo del paragrafo 2 relativo a superficie cubiche irriducibili $\tilde{\mathcal{F}}$ non singolari, perchè quel metodo permette di indicare, nei casi di superficie $\mathcal{F}$ irriducibili che non sono a curve s.i.c., una curva (che risultava essere sempre una retta) che non è s.i.c. di $\mathcal{F}$.

Sia $\mathcal{F} \subset \mathbb{A}_k^3$ una superficie cubica a curve s.i.c. soddisfacente le ipotesi indicate nel paragrafo 3 con un punto doppio in $\mathsf{O} = (0, 0, 0)$ oppure nel paragrafo 4 con un punto doppio in Z_∞. Siano $\mathsf{r}_1, \dots, \mathsf{r}_s$, con $s \geqslant 0$, le rette di $\mathcal{F}$ rispettivamente per O oppure per Z_∞ (nel qual caso potendosi avere $s = 0$). Indicata con c una curva irriducibile di $\mathcal{F}$ diversa da $\mathsf{r}_1, \dots, \mathsf{r}_s$, ricordiamo che se $s = 0$ $\mathcal{F}$ risulta fattoriale, e, se $s > 0$, indicata con $\mathcal{G}_i$ una superficie di $\mathbb{A}_k^3$ tale che

$$\mathcal{F} \cdot \mathcal{G}_i = \mu_i \mathsf{r}_i \,, \qquad i = 1, \dots, s \,,$$

allora esiste una superficie $\mathcal{G} \subset \mathbb{A}_k^3$ tale che

$$\mathcal{F} \cdot \mathcal{G} = \mu \mathsf{c} \qquad \text{con } \mu = \text{m.c.m. } \{\mu_1, \dots, \mu_s\} \,.$$

Si veda per questo il Lemma 3.2 e Oss. 3.2 nel caso in cui il punto doppio di $\mathcal{F}$ sia O e il Lemma 4.1 nel caso in cui il punto doppio di $\tilde{\mathcal{F}}$ sia Z_∞.

Proposizione 7.2. – *Siano $\mathcal{F}$ una superficie cubica irriducibile di $\mathbb{A}_k^3$ soddisfacente le ipotesi di cui sopra, e $\mathsf{r}_1, \dots, \mathsf{r}_s$ le rette di $\mathcal{F}$ per O o Z_∞: Sia ν_i il minimo intero positivo per cui esiste una superficie $\mathcal{G}_i \subset \mathbb{A}_k^3$ tale che $\mathcal{F} \cdot \mathcal{G}_i = \nu_i \mathsf{r}_i$ per $i = 1, \dots, s$. Allora l'ordine dell'anello $k[\mathcal{F}]$ risulta essere*

$$\lambda = \text{m.c.m. } \{\nu_1, \dots, \nu_s\} \,.$$

Dimostrazione. – Infatti ciò è vero per $s = 0$ in quanto in tale caso $\lambda = 1$ per il Lemma 4.1, 1) e d'altronde m.c.m. $\{\emptyset\} = 1$. Per $s > 0$ dai Lemmi 3.2 e 4.1, 2) segue $\lambda \leqslant$ m.c.m. $\{\nu_1, \dots, \nu_s\}$; d'altra parte per ogni $i = 1, \dots, s$, ν_i deve dividere λ: infatti se fosse $\lambda = \nu_i \varrho_i + \sigma_i$, $0 < \sigma_i < \nu_i$, a norma dell'Oss. 3.1, si otterrebbe che $\sigma_i \mathsf{r}_i$ è intersezione completa di $\mathcal{F}$, il che è assurdo essendo $\sigma_i < \nu_i$. Ne segue che m.c.m. $\{\nu_1, \dots, \nu_s\}$ divide λ e perciò $\lambda \geqslant$ m.c.m. $\{\nu_1, \dots, \nu_s\}$. Dunque $\lambda =$ m.c.m. $\{\nu_1, \dots, \nu_s\}$.

Osservazione 7.2. – Nelle ipotesi della Prop. 7.2, quando $\lambda > 1$, per ogni λ', con $1 \leqslant \lambda' < \lambda$, fra le rette di $\mathcal{F}$ per O o per Z_∞ ne esiste almeno una, e sia r_j, la quale non è intersezione completa di $\mathcal{F}$ con molteplicità di intersezione λ': infatti basta scegliere r_j in guisa che ν_j non divida $\lambda' < \lambda =$ m.c.m. $\{\nu_1, \dots, \nu_s\}$.

Per la determinazione dei minimi ν_i, nel caso delle superficie soddisfacenti le condizioni del paragrafo 3, faremo di volta in volta riferimento alle Prop. 7.1 e 7.2;

per le superficie soddisfacenti alle condizioni del paragrafo 4, facendo riferimento alla Prop. 4.1 e Oss. 4.1, risulteranno utili le seguenti osservazioni.

OSSERVAZIONI 7.3. – 1) Con riferimento al caso 1) della Prop. 4.1, poichè l'equazione di ogni superficie $\mathcal{G}$ definente su $\mathcal{F}$ l'unica retta r per Z_∞ è del tipo $G = 0$ con $G = A_0^\delta + DF$, si ha $\mathcal{F}\cdot\mathcal{G} = \delta\mathcal{F}\cdot\{A_0 = 0\}$; ne segue che $\{A_0 = 0\}$ è la superficie che individua r su $\mathcal{F}$ con molteplicità minima e che, posto $\mathcal{F}\cdot\{A_0 = 0\} = \nu\mathsf{r}$, l'ordine di $k[\mathcal{F}]$ è $\lambda = \nu$.

2) Con riferimento al caso 2′) della Prop. 4.1 si ha che se r è una retta per Z_∞ che è s.i.c. di $\mathcal{F}$, allora essa è, con opportuna molteplicità, o completa intersezione di $\mathcal{F}$ con uno solo dei due piani $\{A_i = 0\}$, oppure con entrambi. Nella prima situazione sia $\mathcal{G} = \{G = 0\} \subset \mathbb{A}_k^3$ una superficie tale che $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \mathsf{r}$. Per la Prop. 4.1, 2) si ha che $\overline{G} = \overline{A}_i^{m_i}\overline{A}_j^{m_j}$ con $(i, j) = (1, 2)$ oppure $(i, j) = (2, 1)$ e $m_i > 0$. Allora risulta, detta v_r la valutazione del campo dei quozienti di $k[X, Y, Z]/(F)$ centrata sulla retta r, che $v_\mathsf{r}(\overline{G}) = m_i v_\mathsf{r}(\overline{A}_i) + m_j v_\mathsf{r}(\overline{A}_j)$. Poichè $\mathcal{F} \cap \{A_j = 0\} \neq \mathsf{r}$, può essere o $\mathcal{F} \cap \{A_j = 0\} = \emptyset$ oppure $\mathcal{F} \cap \{A_j = 0\} \supset \mathsf{s} \neq \mathsf{r}$; nel primo caso $v_\mathsf{r}(\overline{A}_j) = 0$, nel secondo necessariamente $m_j = 0$. In ogni caso $v_\mathsf{r}(\overline{G}) = m_i v_\mathsf{r}(\overline{A}_i)$ e perciò il minimo ν relativo alla retta r è $\nu = v_\mathsf{r}(\overline{A}_i)$.

Nella seconda situazione si ha che la molteplicità di intersezione di almeno uno dei piani $\{A_1 = 0\}$, $\{A_2 = 0\}$ lungo r, con $\mathcal{F}$ deve essere 1 e quindi il minimo ν relativo ad r è $\nu = 1$.

3) Con riferimento al caso 2″) della Prop. 4.1, per ogni superficie $\{G = 0\}$ tale che $\mathcal{F}\cdot\{G = 0\} = \gamma\mathsf{r}$, si ha

$$\overline{G} = \frac{\overline{A}_i^{m_i}}{\overline{A}_j^{m_j}} \qquad \text{con } m_i > 0,\ m_j > 0 \text{ e } (i, j) = (1, 2) \text{ oppure } (i, j) = (2, 1)\,.$$

Se $\mathcal{F}\cdot\{A_i = 0\} = \mu\mathsf{r} + \sigma\mathsf{s}$ e $\mathcal{F}\cdot\{A_j = 0\} = \varrho\mathsf{s}$, risultando

$$\gamma\mathsf{r} = \mathcal{F}\cdot\{G = 0\} = m_i(\mu\mathsf{r} + \sigma\mathsf{s}) - m_j\varrho\mathsf{s} = m_i\mu\mathsf{r} + (m_i\sigma - m_j\varrho)\mathsf{s}\,,$$

si deve avere $m_i\sigma - m_j\varrho = 0$. Quindi $m_i = m_j\varrho/\sigma$, $\gamma = m_j(\mu\varrho)/\sigma$; ne segue che il minimo intero ν per cui $\nu\mathsf{r}$ è intersezione completa di $\mathcal{F}$ è maggiore od uguale di $(\mu\varrho)/\sigma$; pertanto anche l'ordine dell'anello $k[\mathcal{F}]$ è maggiore od uguale di $(\mu\varrho)/\sigma$. Osserviamo però che quando $\sigma = 1$, allora il minimo ν risulta un multiplo di $\mu\varrho$ e quindi anche λ è un multiplo di $\mu\varrho$.

8. – Classificazione delle superficie cubiche affini irriducibili di $\mathbb{A}_k^3$ a curve sottoinsieme intersezione completa.

In questo paragrafo il campo k si suppone algebricamente chiuso, di caratteristica diversa da 2 e da 3 e più che numerabile.

Iniziamo ora la classificazione delle superficie cubiche irriducibili $\mathcal{F} \subset \mathbb{A}_k^3$ a curve s.i.c. a meno di isomorfismi lineari (brevemente i.l.) di $\mathbb{A}_k^3$; per ciascuna di esse diamo, oltre ad una loro equazione, le equazioni delle superficie che intersecano su $\mathcal{F}$ le singole rette che passano per uno dei punti doppi di $\tilde{\mathcal{F}}$. Si osservi che tali equazioni sono sufficienti (in base ai Lemmi 3.1, 3.2, 4.1, al metodo usato nelle loro dimostrazioni e all'Oss. 3.2) per determinare per ogni curva $\mathsf{c} \subset \mathcal{F}$ la superficie la cui completa intersezione con $\mathcal{F}$ è c contata con opportuna molteplicità (cfr. Esempio 3.1).

Per ciascuna delle superficie $\mathcal{F}$ in esame determiniamo inoltre l'ordine λ dell'anello $k[\mathcal{F}]$, i punti singolari di $\tilde{\mathcal{F}}$, il loro tipo (secondo le notazioni usate in [7], cap. XV) e la configurazione di $\mathcal{F}_\infty$. Questi ultimi elementi, talvolta non precisati nel corso della classificazione, sono riportati nella tabella riassuntiva.

8.1. *Superficie cubiche affini a curve s.i.c. che sono superficie con soli punti doppi isolati e con chiusura proiettiva non singolare all'infinito.*

Riferendoci alla Prop. 3.1 e alle notazioni ivi usate, esaminiamo il *caso* a_1) in cui $\mathcal{B}_\infty$ è una cubica irriducibile e $\mathcal{A}_\infty$ è la conica surosculatrice in un punto sestatico di $\mathcal{B}_\infty$. $\mathcal{B}_\infty$ non può essere una cubica cuspidata perchè, come è stato osservato in [9], pag. 171, nota 5, essendo la caratteristica di k diversa da 2 e da 3, una tale cubica non avrebbe punti sestatici. Come è noto, a meno di isomorfismi lineari di $\mathbb{A}_k^3$, l'equazione del cono $\mathcal{B}$ proiettante $\mathcal{B}_\infty$ da O può essere assunta nella forma di Weierstrass:

$$Y^2Z + X(X+Z)(X+tZ) = 0 \qquad \text{con } t \in k \text{ e} \begin{cases} t \neq 0, 1 & \text{se } \mathcal{B}_\infty \text{ è non singolare,} \\ t = 1 & \text{se } \mathcal{B}_\infty \text{ è nodata.} \end{cases}$$

Risulta Z^∞ punto sestatico di $\mathcal{B}_\infty$ e Y_∞ flesso di $\mathcal{B}_\infty$ tangenziale di Z_∞. Il cono $\mathcal{A}$ proiettante $\mathcal{A}_\infty$ da O, dovendo $\mathcal{A}_\infty$ essere la conica surosculatrice in Z_∞ a $\mathcal{B}_\infty$, ha equazione $Y^2 + (t+1)X^2 + tXZ = 0$. Dunque le superficie relative al caso a_1) sono l.i. a quelle di equazione $Y^2Z + X(X+Z)(X+tZ) + q[Y^2 + (t+1)X^2 + tXZ] = 0$ con $q \in k$, $q \neq 0$. Ciascuna di esse d'altronde viene trasformata dall'i.l. di $\mathbb{A}_k^3$: $(X, Y, Z) \to (X/q, Y/q, Z/q)$ nella

$$(') \qquad Y^2Z + X^3 + (t+1)X^2Z + tXZ^2 + Y^2 + (t+1)X^2 + tXZ = 0 \qquad \text{con } t \in k \text{ e } t \neq 0\,.$$

Si verifica che ogni superficie $\mathcal{F}$ di equazione (') possiede, oltre al punto doppio conico O, un punto doppio biplanare di tipo B_6 in $A = (0, 0, -1)$ e che $\tilde{\mathcal{F}}$ non ha altri punti singolari.

Poichè ci interessa individuare le superficie a meno di i.l. di $\mathbb{A}_k^3$, dobbiamo precisare in (') per quali valori di t le superficie risultano linearmente isomorfe. Indicata con $\mathcal{F}(t)$ la superficie corrispondente al valore $t \in k$, $t \neq 0$, è evidente che $\mathcal{F}(1)$ non è isomorfa a nessun'altra $\mathcal{F}(t)$ con $t \neq 1$, essendo $\mathcal{F}(1)$ l'unica tra le $\mathcal{F}(t)$ ad avere $\mathcal{F}_\infty$ singolare. Supponiamo ora $t \neq 0$ e $t \neq 1$. Sia σ un i.l. di $\mathbb{A}^3_k$ tale che $\sigma(\mathcal{F}(t_1)) = \mathcal{F}(t_2)$. È intanto evidente che $\sigma(\mathsf{O}) = \mathsf{O}$, $\sigma(\mathsf{A}) = \mathsf{A}$. Quindi per σ la retta $\mathsf{r} = \{X = Y = 0\}$ è luogo di punti uniti. Poichè l'estensione $\tilde{\sigma}$ di σ a $\mathbb{P}^3_k$ subordina un i.l. fra le curve $\mathcal{F}(t_1)_\infty$ e $\mathcal{F}(t_2)_\infty$ per il quale il punto Z_∞ è unito e poichè $\mathcal{F}(t)_\infty$, per ogni $t \in k$, ha in Z_∞ per tangente la retta $\mathsf{Y}_\infty\mathsf{Z}_\infty$, risulta $\tilde{\sigma}(\mathsf{Y}_\infty\mathsf{Z}_\infty) = \mathsf{Y}_\infty\mathsf{Z}_\infty$. Poichè inoltre per ogni $t \in k$, $\mathsf{Y}_\infty \in \mathcal{F}(t)_\infty$ e la tangente in Y_∞ ad $\mathcal{F}(t)_\infty$ è la retta $\mathsf{X}_\infty\mathsf{Y}_\infty$, ne segue che $\tilde{\sigma}(\mathsf{Y}_\infty) = \mathsf{Y}_\infty$, $\tilde{\sigma}(\mathsf{X}_\infty\mathsf{Y}_\infty) = \mathsf{X}_\infty\mathsf{Y}_\infty$. Non è difficile riconoscere che allora risulta $t_2 = 1/t_1$ e che $\mathcal{F}(t_1)$ e $\mathcal{F}(1/t_1)$ sono l.i. mediante $(X, Y, Z) \to (t_1^{-1}X, t_1^{-(3/2)}Y, Z)$.

Dimostriamo ora che l'ordine dell'anello $k[\mathcal{F}]$ è $\lambda = 6$ per ogni superficie $\mathcal{F}$ di equazione ($'$). Infatti esiste una sola retta $\mathsf{r} = \{X = Y = 0\}$ di $\mathcal{F}$ passante per O e risulta $\mathcal{F}\cdot\mathcal{A} = \mathcal{F}\cdot\mathcal{B} = \mathcal{A}\cdot\mathcal{B} = 6\mathsf{r}$. D'altra parte, in base alla Prop. 7.1, per ogni superficie $\{G = 0\} \subset \mathbb{A}^3_k$ per cui $\mathcal{F}\cdot\{G = 0\} = \nu\mathsf{r}$, $\nu \geq 1$, si ha $\bar{G} = \bar{A}^m\bar{B}^n$, con m, n interi e $m \geq 0$. Quindi $\mathcal{F}\cdot\{G = 0\} = \nu\mathsf{r} = 6(m+n)\mathsf{r}$; da cui $\nu \geq 6$. Dalla Prop. 7.2 si deduce allora che $\lambda = 6$.

Nella famiglia ($'$) si possono distinguere le

1: $$Y^2Z + X^3 + (t+1)X^2Z + tXZ^2 + Y^2 + (t+1)X^2 + tXZ = 0$$

con $t \in k$, $t \neq 0, 1$;

2: $$Y^2Z + X^3 + 2X^2Z + XZ^2 + Y^2 + 2X^2 + XZ = 0\,.$$

Esaminiamo ora il *caso a_2*) in cui $\mathcal{B}_\infty$ è una cubica irriducibile e $\mathcal{A}_\infty = \mathsf{t}$, con t retta tangente a $\mathcal{B}_\infty$ in un suo flesso. Distinguiamo due casi: $\mathcal{B}_\infty$ è non singolare o nodata; $\mathcal{B}_\infty$ è cuspidata. Nel primo caso, a meno di un i.l. di $\mathbb{A}^3_k$, (cfr. caso a_1)), possiamo supporre che il flesso di $\mathcal{B}_\infty$ in questione sia Y_∞ e che il cono proiettante $\mathcal{B}_\infty$ da O abbia equazione $X^3 + (t+1)X^2Z + tXZ^2 + Y^2Z = 0$, con $t \in k$, $t \neq 0$. L'equazione di $\mathcal{F}$ è perciò, a meno di i.l. come si è visto nel caso precedente,

$$('') \qquad X^3 + (t+1)X^2Z + tXZ^2 + Y^2Z + Z^2 = 0 \qquad \text{con } t \in k,\ t \neq 0\,.$$

Si verifica che ogni superficie $\mathcal{F}(t)$ corrispondente al valore $t \in k$, $t \neq 0$, ha un solo punto doppio uniplanare di tipo U_8 in O, che $\tilde{\mathcal{F}}$ non ha altri punti singolari, che ognuna di esse contiene una sola retta r per O, $\mathsf{r} = \mathsf{O}\mathsf{Y}_\infty$, e che $\mathsf{X}_\infty\mathsf{Y}_\infty$ è la tangente di flesso in Y_∞ a $\mathcal{B}_\infty$. Come sopra, è evidente che $\mathcal{F}(1)$ non è l.i. a nessun'altra $\mathcal{F}(t)$, con $t \neq 1$, essendo $\mathcal{F}(1)$ l'unica tra le superficie ($''$) ad avere la curva all'infinito singolare. Sia ora $t \neq 0, 1$; supponiamo che esista un i.l. di $\mathbb{A}^3_k$ tale che $\sigma(\mathcal{F}(t_1)) = \mathcal{F}(t_2)$. È evidente che $\sigma(\mathsf{O}) = \mathsf{O}$, $\sigma(\mathsf{r}) = \mathsf{r}$ e che, se $\tilde{\sigma}$ è l'estensione di σ a $\mathbb{P}^3_k$, $\tilde{\sigma}(\mathsf{Y}_\infty) = \mathsf{Y}_\infty$ e $\tilde{\sigma}(\mathsf{X}_\infty\mathsf{Y}_\infty) = \mathsf{X}_\infty\mathsf{Y}_\infty$. Si riconosce allora che necessariamente $t_2 \in \Sigma$, con

$$\Sigma = \{1/t_1,\ 1 - t_1,\ 1/(1 - t_1),\ t_1/(t_1 - 1),\ (t_1 - 1)/t_1\}$$

e che, viceversa, se $t_2 \in \Sigma$, $\mathcal{F}(t_2)$ e $\mathcal{F}(t_1)$ sono l.i. e precisamente risulta:

$$\mathcal{F}(t_1) \text{ è l.i. a } \mathcal{F}(1/t_1) \quad \text{tramite } (X, Y, Z) \to (t_1^2 X, t_1^{\frac{3}{2}} Y, t_1^3 Z)$$

$$\mathcal{F}(t_1) \text{ è l.i. a } \mathcal{F}(1-t_1) \text{ tramite } (X, Y, Z) \to (X+Z, (-1)^{\frac{1}{2}} Y, -Z)$$

$$\mathcal{F}(t_1) \text{ è l.i. a } \mathcal{F}(t_1/(t_1-1)) \text{ tramite } (X, Y, Z) \to$$
$$\to \big((t_1-1)^2(X+t_1 Z), (1-t_1)^{\frac{3}{2}} Y, (1-t_1)^3 Z\big)$$

e, mediante opportuni prodotti di tali isomorfismi, $\mathcal{F}(t_1)$ è l.i. a $\mathcal{F}(1/(1-t_1))$ e a $\mathcal{F}((t_1-1)/t_1)$.

Dimostriamo che l'ordine dell'anello $k[\mathcal{F}]$ è $\lambda = 3$ per ogni superficie $\mathcal{F}$ data dalla ($''$). r è l'unica retta di $\mathcal{F}$ passante per O e risulta $\mathcal{F}\cdot\{Z=0\} = 3\mathsf{r}$; pertanto $\lambda \leqslant 3$. D'altra parte, scritta l'equazione di $\mathcal{F}$ nella forma $B - A_0^2 = 0$, dalla Prop. 7.1 risulta che, per ogni superficie $\{G=0\}$ tale che $\mathcal{F}\cdot\{G=0\} = \nu\mathsf{r}$, $\nu \geqslant 1$, $\bar{G} = \bar{Z}^m \bar{B}^n$ con m, n interi e $m \geqslant 0$, essendo Z l'unico fattore irriducibile di A e B irriducibile. Essendo d'altra parte $\mathcal{F}\cdot\{Z=0\} = \{B=0\}\cdot\{A_0=0\} = 3\mathsf{r}$ e $\mathcal{F}\cdot\{B=0\} = 2(\{A_0=0\}\cdot\{B=0\}) = 6\mathsf{r}$, si ha $\mathcal{F}\cdot\{G=0\} = 3(m+2n)\mathsf{r}$; pertanto $\nu \geqslant 3$. Dalla Prop. 7.2 segue che $\lambda = 3$.

Nella famiglia ($''$) si possono distinguere:

3: $$X^3 + (t+1)X^2Z + tXZ^2 + Y^2Z + Z^2 = 0\,, \quad t \in k,\ t \neq 0,\ 1;$$

4: $$X^3 + 2X^2Z + XZ^2 + Y^2Z + Z^2 = 0\,.$$

Nel caso in cui $\mathcal{B}_\infty$ sia cuspidata, a meno di un i.l. si può supporre che: Z_∞ coincida con la cuspide, Y_∞ sia il flesso di $\mathcal{B}_\infty$, la retta $\mathsf{X}_\infty\mathsf{Z}_\infty$ sia la tangente cuspidale e $\mathsf{X}_\infty\mathsf{Y}_\infty$ sia la tangente t nel flesso Y_∞. Sotto tali ipotesi l'equazione di $\mathcal{F}$ è, a meno di i.l.,

5: $$X^3 + Y^2Z + Z^2 = 0\,.$$

Con un ragionamento analogo al precedente, si ottiene che l'ordine dell'anello corrispondente a tale superficie è $\lambda = 3$.

Le singolarità della chiusura proiettiva della superficie **5**, e di quelle che seguiranno, verranno riportate nella tabella finale.

Esaminiamo il *caso a_3*) in cui $\mathcal{B}_\infty$ è una cubica irriducibile e $\mathcal{A}_\infty = \mathsf{t}_1 + \mathsf{t}_2$ con t_1, t_2 rette tangenti a $\mathcal{B}_\infty$ in due suoi flessi (si osservi che in questo caso $\mathcal{B}_\infty$ non può essere cuspidata). Possiamo supporre che X_∞ e Y_∞ siano due flessi di $\mathcal{B}_\infty$, che $\mathsf{P}_\infty(0, 1, 1, 0)$ sia il flesso di $\mathcal{B}_\infty$ allineato con essi e che le rette $\mathsf{X}_\infty\mathsf{Z}_\infty$ e $\mathsf{Y}_\infty\mathsf{Z}_\infty$ siano t_1 e t_2. Il cono proiettante $\mathcal{B}_\infty$ da O ha allora equazione $X^2Y - XY^2 - 3tXYZ + Z^3 = 0$, $t \in k$, dove per $t^3 = -1$ $\mathcal{B}_\infty$ risulta nodata. L'equazione di $\mathcal{F}$ è perciò, a meno di i.l.,

$$X^2Y - XY^2 - 3tXYZ + Z^3 + XY = 0\,, \quad t \in k\,, \tag{$\circ$}$$

Si verifica che ciascuna superficie $\mathcal{F}$ di equazione ($\circ$) ha tre punti doppi biplanari di tipo B_3 in O, $\mathsf{B}' = (-1, 0, 0)$, $\mathsf{B}'' = (0, 1, 0)$ e che $\tilde{\mathcal{F}}$ non ha altri punti singolari. Detta $\mathcal{F}(t)$ la superficie corrispondente al valore $t \in k$, ogni i.l. σ di $\mathbb{A}_k^3$ che muti $\mathcal{F}(t_1)$ in $\mathcal{F}(t_2)$ deve permutare i tre punti doppi. Si verifica allora che $\mathcal{F}(t)$, per ogni $t \in k$, $t \neq 0$, è l.i. solo a $\mathcal{F}(\varepsilon t)$ e a $\mathcal{F}(\varepsilon^2 t)$, con $\varepsilon^3 = 1$, tramite ad esempio gli isomorfismi σ_1: $(X, Y, Z) \to (X, Y, \varepsilon^2 Z)$, σ_2; $(X, Y, Z) \to (X, Y, \varepsilon Z)$ nell'ordine. $\mathcal{F}(0)$ invece non è l.i. a nessun'altra $\tilde{\mathcal{F}}(t)$, con $t \neq 0$.

Le sole rette delle superficie ($\circ$) per O sono: $\mathsf{r} = \mathsf{OY}_\infty$ e $\mathsf{s} = \mathsf{OX}_\infty$: Poichè $\mathcal{F} \cdot \{Y = 0\} = 3\mathsf{s}$, $\mathcal{F} \cdot \{X = 0\} = 3\mathsf{r}$ e $\mathcal{F} \cdot \{B = 0\} = 3\mathsf{r} + 3\mathsf{s}$, ragionando come nel caso a_2), si conclude che il minimo intero ν_1 per il quale esiste $\mathcal{G}_1 \subset \mathbb{A}_k^3$ tale che $\mathcal{F} \cdot \mathcal{G}_1 = \nu_1 \mathsf{r}$ è $\nu_1 = 3$. Analogamente per la retta s si trova $\nu_2 = 3$. Applicando ora la Prop. 7.2 si trova che l'ordine dell'anello $k[\mathcal{F}]$ è $\lambda = 3$.

Nella famiglia ($\circ$) si possono distinguere le

6: $$X^2Y - XY^2 + 3XYZ + Z^3 + XY = 0;$$

7: $$X^2Y - XY^2 - 3tXYZ + Z^3 + XY = 0\,, \qquad t \in k,\ t^3 \neq -1\,.$$

Esaminiamo ora il *caso* a_4) in cui $\mathcal{B}_\infty$ è una cubica irriducibile e $\mathcal{A}_\infty = \mathsf{s} + \mathsf{t}$ con s retta tangente a $\mathcal{B}_\infty$ in un suo punto sestatico P_∞ e t retta tangente a $\mathcal{B}_\infty$ nel flesso tangenziale di P_∞. È lecito assumere, come nel caso a_1), Z_∞ in P_∞ e Y_∞ nel flesso di $\mathcal{B}_\infty$ tangenziale di Z_∞. L'equazione del cono proiettante $\mathcal{B}_\infty$ da O risulta pertanto $Y^2Z + X^3 + (t+1)X^2Z + tXZ^2 = 0$, $t \in k$ e $t \neq 0$, dove per $t = 1$ $\mathcal{B}_\infty$ è nodata. L'equazione di $\mathcal{F}$, a meno di i.l., cfr. caso a_1), è

$$(\circ\circ) \qquad Y^2Z + X^3 + (t+1)X^2Z + tXZ^2 + XZ = 0\,, \qquad t \in k,\ t \neq 0.$$

Si verifica che i punti singolari di ogni superficie di equazione ($\circ\circ$) sono O, doppio biplanare di tipo B_6, e $\mathsf{C}(0, 0, -1/t)$, doppio di tipo C_2. L'isomorfismo lineare di $\mathbb{A}_k^3$: $(X, Y, Z) \to (-tX, -tY, -tZ - 1)$ trasforma la superficie $\mathcal{F}(t)$ di equazione ($\circ\circ$) nella superficie $\mathcal{F}(t)$ di equazione ($'$) già esaminata nel caso a_1) e alla quale rimandiamo per la discussione.

Si noti che si sono ottenute le stesse superficie nei casi a_1) e a_4) corrispondendo questi alla diversa scelta del punto O che viene a coincidere con il punto doppio conico in a_1) e con il punto doppio biplanare in a_4).

Esaminiamo ora il *caso* b_1) in cui $\mathcal{B}_\infty = \mathsf{r} + \mathsf{c}$, con r retta e c conica irriducibile non tangenti tra loro, e $\mathcal{A}_\infty$ conica irriducibile iperosculatrice a c e tangente ad r. A meno di i.l., possiamo supporre X_∞ e Z_∞ nei punti di intersezione di r e c, $(0, -1, 0, 1)$ nel punto di tangenza di r con $\mathcal{A}_\infty$, $(0, -1, 1, 1)$ nel punto di contatto di c e $\mathcal{A}_\infty$ ed inoltre Y_∞ nel polo di r rispetto a c. Pertanto $\mathcal{B}$ e $\mathcal{A}$ hanno rispettivamente equazioni $Y(XZ + Y^2) = 0$, $4(XZ + Y^2) + (X + 2Y - Z)^2 = 0$. A meno di un i.l. di $\mathbb{A}_k^3$, l'equazione di $\mathcal{F}$ è

8: $$(XZ + Y^2)(Y + 4) + (X + 2Y - Z)^2 = 0\,.$$

$\mathcal{F}$ possiede due rette passanti per O: $\mathsf{u} = \{Y = X + Z = 0\}$ e $\mathsf{v} = \{X + 2Y - Z = X + Y = 0\}$ e risulta $\mathcal{F}\cdot\{Y = 0\} = 2\mathsf{u}$ e $\mathcal{F}\cdot\{XZ + Y^2 = 0\} = 4\mathsf{v}$.

Proviamo che l'ordine dell'anello $k[\mathcal{F}]$ è $\lambda = 4$. Dal Lemma 3.2 segue che $\lambda \leqslant 4$. Indicata con $\{G = 0\}$ una superficie di $\mathbb{A}^3_k$ tale che $\mathcal{F}\cdot\{G = 0\} = \gamma\mathsf{v}$, $\gamma \geqslant 1$, e posto $A = 4(XZ + Y^2) + (X + 2Y - Z)^2$, $B_1 = Y$, $B_2 = XZ + Y^2$, a norma della Prop. 7.1 risulta $\bar{G} = \bar{A}^m \bar{B}_1^{n_1} \bar{B}_2^{n_2}$ con m, n_1, n_2 interi e $m \geqslant 0$. Pertanto $\mathcal{F}\cdot\{G = 0\} = m(4\mathsf{v} + 2\mathsf{u}) + n_1(2\mathsf{u}) + n_2(4\mathsf{v}) = \gamma\mathsf{v}$ per cui deve essere $m = -n_1$ e $\gamma = 4(-n_1 + n_2) \geqslant 4$. Ne segue che $\lambda = 4$.

Nel *caso* b_2) in cui $\mathcal{B}_\infty = \mathsf{r} + \mathsf{c}$, con r retta e c conica irriducibile, e $\mathcal{A}_\infty = \mathsf{t}$, con t retta tangente a c in un punto semplice di Supp $\mathcal{B}_\infty$, si possono presentare due sottocasi: b_2') e b_2'') a seconda che le componenti di $\mathcal{B}_\infty$, r e c, siano tangenti o no.

Sottocaso b_2'). Possiamo supporre Z_∞ nel punto di tangenza di t e c, X_∞ nel punto di tangenza di r e c, Y_∞ nel punto comune a r e t. Si ha $\mathcal{A} = \{X = 0\}$. A meno di un i.l. si può supporre $\mathcal{B} = \{Z(XZ + Y^2) = 0\}$. Risulta allora che ogni superficie relativa al sottocaso in esame è l.i. alla

9: $$Z(XZ + Y^2) + X^2 = 0 .$$

Tale superficie $\mathcal{F}$ possiede due rette per O: $\mathsf{u} = \mathsf{OY}_\infty$ e $\mathsf{v} = \mathsf{O}_\infty\mathsf{Z}$. Si ha $\mathcal{F}\cdot\{Z = 0\} = 2\mathsf{u}$, $\mathcal{F}\cdot\{XZ + Y^2 = 0\} = 4\mathsf{v}$. In modo analogo al caso b_1) si verifica che $\lambda = 4$.

Sottocaso b_2''). Assunti X_∞ e Z_∞ nei punti di intersezione di r e c, Y_∞ coincidente col polo di r rispetto a c e $(0, -1, 1, 1)$ nel punto di tangenza di t con c, si ha $\mathcal{A} = \{X + 2Y - Z = 0\}$, $\mathcal{B} = \{Y(XZ + Y^2) = 0\}$. Le superfici di questo sottocaso sono l.i. alla

10: $$Y(XZ + Y^2) + (X + 2Y - Z)^2 = 0 .$$

In $\mathcal{F}$ esistono due rette uscenti da O: $\mathsf{u} = \{Y = X - Z = 0\}$ e $\mathsf{v} = \{X + 2Y - Z = X + Y = 0\}$. Risulta $\mathcal{F}\cdot\{Y = 0\} = 2\mathsf{u}$ e $\mathcal{F}\cdot\{XZ + Y^2 = 0\} = 4\mathsf{v}$. Si verifica anche in questo caso che $\lambda = 4$.

Caso b_3). - $\mathcal{B}_\infty = \mathsf{r} + \mathsf{c}$, con r retta e c conica irriducibile, e $\mathcal{A}_\infty = \mathsf{t}_1 + \mathsf{t}_2$ con t_1 e t_2 rette tangenti a c in due punti semplici di Supp $\mathcal{B}_\infty$ e intersecantisi su r. È evidente che r non può essere tangente a c. A meno di i.l. si possono assumere X_∞ e Y_∞ nei punti di tangenza con c di t_1 e di t_2 rispettivamente, Z_∞ nel punto comune a t_1, t_2 e r, e $\{X + Y = 0\}$ coincidente con il piano affine Or. Sotto tali ipotesi le equazioni delle superficie in esame sono $(XY + t_1 Z^2)(X + Y) + t_2 XY = 0$, $t_1, t_2 \in k$, e $t_1 t_2 \neq 0$. Ciascuna delle superficie è l.i. tramite $(X, Y, Z) \to (X/t_2, Y/t_2, Z(t_1)^{\frac{1}{2}}/t_2)$ alla

11: $$(X + Y)(XY + Z^2) + XY = 0 .$$

Su tale superficie $\mathcal{F}$ esistono tre rette passanti per O: $\mathsf{u} = \mathsf{OX}_\infty$, $\mathsf{v} = \mathsf{OY}_\infty$ e e $\mathsf{w} = \mathsf{OZ}_\infty$. Risulta:

$$\mathcal{F}\cdot\{XY + Z^2 + Y = 0\} = 4\mathsf{u},\ \mathcal{F}\cdot\{XY + Z^2 + X = 0\} = 4\mathsf{v},\ \mathcal{F}\cdot\{X + Y = 0\} = 2\mathsf{w}\,.$$

Dal Lemma 3.2 e Oss. 3.2 si ha $\lambda \leqslant 4$. Proviamo che $\lambda = 4$. Posto $A_1 = X$, $A_2 = Y$, $B_1 = XY + Z^2$, $B_2 = X + Y$, risulta $\mathcal{F}\cdot\{A_1 = 0\} = 2\mathsf{v} + \mathsf{w}$, $\mathcal{F}\cdot\{A_2 = 0\} = 2\mathsf{u} + \mathsf{w}$, $\mathcal{F}\cdot(B_1 = 0\} = 2\mathsf{u} + 2\mathsf{v}$, $\mathcal{F}\cdot\{B_2 = 0\} = 2\mathsf{w}$. Indicata con $\{G = 0\} \subset \mathbb{A}^3_k$ una superficie tale che $\mathcal{F}\cdot\{G = 0\} = \mu\mathsf{u}$, $\mu \geqslant 1$, dalla Prop. 7.1 segue che $\bar{G} = \bar{A}_1^{m_1}\bar{A}_2^{m_2}\bar{B}_1^{n_1}\bar{B}_2^{n_2}$ e quindi $\mathcal{F}\cdot\{G = 0\} = (2n_1 + 2m_2)\mathsf{u} + (2n_1 + 2m_1)\mathsf{v} + (m_1 + m_2 + 2n_2)\mathsf{w} = \mu\mathsf{u}$. Pertanto $m_1 + m_2 + 2n_2 = 0$, $m_1 + n_1 = 0$ e quindi $\mu = 4(n_1 - n_2) \geqslant 4$. Dunque $\lambda = 4$.

Esaminiamo il *caso* c_1) in cui $\mathcal{B}_\infty = \mathsf{a} + \mathsf{b} + \mathsf{c}$, con a, b, c rette distinte non concorrenti e $\mathcal{A}_\infty$ conica irriducibile tangente alle tre rette a, b, c in U_∞, V_∞, W_∞ rispettivamente. A meno di i.l. si possono assumere $\{\mathsf{X}_\infty\} = \mathsf{a} \cap \mathsf{b}$, $\{\mathsf{Y}_\infty\} = \mathsf{a} \cap \mathsf{c}$, $\{\mathsf{Z}_\infty\} = \mathsf{b} \cap \mathsf{c}$, $(0,1,1,0) = \mathsf{U}_\infty$ e $(0,1,0,1) = \mathsf{V}_\infty$; W_∞ è quindi $(0,0,1,1)$ e l'equazione del cono proiettante $\mathcal{A}_\infty$ da O è $X^2 + Y^2 + Z^2 - 2XY - 2XZ - 2YZ = 0$. Le superficie relative a questo caso sono l.i. alla superficie

12: $$XYZ + X^2 + Y^2 + Z^2 - 2XY - 2XZ - 2YZ = 0\,.$$

Le sole rette per O di tale superficie $\mathcal{F}$ sono: $\mathsf{u} = \mathsf{OU}_\infty$, $\mathsf{v} = \mathsf{OV}_\infty$, $\mathsf{w} = \mathsf{OW}_\infty$ e risulta $\mathcal{F}\cdot\{Z = 0\} = 2\mathsf{u}$, $\mathcal{F}\cdot\{Y = 0\} = 2\mathsf{v}$, $\mathcal{F}\cdot\{X = 0\} = 2\mathsf{w}$. Applicando le Prop. 7.1 e 7.2 si vede, analogamente al caso della superficie **11**, che $\lambda = 2$.

Caso c_2). – $\mathcal{B}_\infty$ come nel caso c_1) e $\mathcal{A}_\infty = \mathsf{s}$, con s retta arbitraria non passante per alcun punto comune a due delle rette a, b, c. Assunti X_∞, Y_∞, Z_∞ come nel caso c_1), si può supporre che il piano $\{X + Y + Z = 0\}$ sia il piano affine Os. A meno di un i.l. si ottiene la sola superficie

13: $$XYZ + (X + Y + Z)^2 = 0\,.$$

Le sole rette di tale superficie $\mathcal{F}$ per O sono: $\mathsf{u} = \{X = Y + Z = 0\}$, $\mathsf{v} = \{Y = X + Z = 0\}$, $\mathsf{w} = \{Z = X + Y = 0\}$ e risulta $\mathcal{F}\cdot\{X = 0\} = 2\mathsf{u}$, $\mathcal{F}\cdot\{Y = 0\} = 2\mathsf{v}$, $\mathcal{F}\cdot\{Z = 0\} = 2\mathsf{w}$; anche in questo caso si vede che $\lambda = 2$.

Esaminiamo infine il *caso* d) in cui $\mathcal{B}_\infty = \mathsf{a} + \mathsf{b} + \mathsf{c}$, con a, b, c rette distinte concorrenti e $\mathcal{A}_\infty = \mathsf{s}$, con s retta non passante per il punto comune ad a, b, c. Si può assumere Z_∞ nel punto comune ad a, b, c, il piano $\{Z = 0\}$ coincidente col piano affine Os, $\{\mathsf{X}_\infty\} = \mathsf{a} \cap \mathsf{s}$, $\{\mathsf{Y}_\infty\} = \mathsf{b} \cap \mathsf{s}$ e $\{\mathsf{P}_\infty\} = \{(0,1,-1,0)\} = \mathsf{c} \cap \mathsf{s}$. A meno di i.l. si trova la

14: $$XY(X + Y) + Z^2 = 0\,.$$

Le sole rette di tale superficie $\mathcal{F}$ per O sono: $\mathsf{u} = \mathsf{OX}_\infty$, $\mathsf{v} = \mathsf{OY}_\infty$, $\mathsf{w} = \mathsf{OP}_\infty$. Risulta $\mathcal{F}\cdot\{Y = 0\} = 2\mathsf{u}$, $\mathcal{F}\cdot\{X = 0\} = 2\mathsf{v}$, $\mathcal{F}\cdot\{X + Y = 0\} = 2\mathsf{w}$; anche in questo caso $\lambda = 2$.

8.2. *Superficie cubiche affini a curve s.i.c. con almeno un punto doppio all'infinito.*

Le superficie del tipo ora in esame sono, a norma della Prop. 6.1, non singolari in codimensione 1. Ogni loro eventuale retta per un punto doppio all'infinito non è perciò luogo di punti singolari; tale circostanza è anche sufficiente perchè una superficie cubica affine con un punto doppio all'infinito sia non singolare in codimensione 1.

Le superficie cubiche irriducibili $\mathcal{F}$, non singolari in codimensione 1 ed aventi almeno un punto doppio all'infinito, a meno di i.l. di $\mathbb{A}_k^3$, si possono supporre $\mathcal{F} = \{AZ + B = 0\}$ con $A, B \in k[X, Y]$ non nulli e di grado al più due o tre rispettivamente. Per le superficie di tale tipo, e non singolari in codimensione 1, ci possiamo riferire alla Prop. 4.1 ed alle notazioni ivi usate.

Posti $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ rispettivamente i luoghi degli zeri di A e B, per individuare tra le superficie del tipo $\mathcal{F} = \{AZ + B = 0\}$ quelle a curve s.i.c., consideriamo i due casi:

1) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$;

2) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$.

Nel caso 1) la superficie è non singolare in codimensione 1 ed è fattoriale (cfr. Lemma 4.1, 1)); nel caso 2) condizione necessaria e sufficiente perchè $\mathcal{F}$ sia a curve s.i.c. è che ogni retta di $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ non sia luogo di punti singolari per $\mathcal{F}$ e che sia s.i.c. di $\mathcal{F}$ (cfr. Prop. 6.1 e Lemma 4.1, 2)). Per verificare che le superficie **15**, ..., **82** seguenti non sono singolari in codimensione 1 si rimanda alla tabella riassuntiva.

La classificazione delle superficie $\mathcal{F}$ a curve s.i.c. viene ora condotta distinguendo le varie situazioni che si presentano in relazione ad A:

caso *e*) $\deg A = 2$, A irriducibile, il cilindro $\tilde{\mathcal{A}}$ individua sul piano all'infinito $\{T = 0\}$ due rette coincidenti;

f) $\deg A = 2$, A irriducibile, $\tilde{\mathcal{A}}$ individua su $\{T = 0\}$ due rette distinte;

g) $\deg A = 2$, ma $A = A_1 A_2$ con A_1, A_2 polinomi di grado 1 non proporzionali e tali che $\{A_1 = 0\}$ e $\{A_2 = 0\}$ sono due piani paralleli;

h) $\deg A = 2$, $A = A_1 A_2$, con A_1, A_2 come sopra, ma tali che i piani $\{A_1 = 0\}$ e $\{A_2 = 0\}$ sono due piani non paralleli;

i) $\deg A = 2$, $A = A_0^2$ con A_0 polinomio lineare;

l) $\deg A = 1$, in tale caso necessariamente B è di grado 3;

m) $\deg A = 0$ e $\deg B = 3$.

OSSERVAZIONE 8.1. – Ricordiamo che se $\tilde{\mathcal{A}} = \{\widetilde{A = 0}\}$ è una superficie irriducibile in $\mathbb{P}_k^3$ non singolare in codimensione 1 e C, D sono polinomi omogenei di $k[T, X, Y, Z]$ tali che $\operatorname{div}_{\tilde{\mathcal{A}}}(\bar{C}) = \operatorname{div}_{\tilde{\mathcal{A}}}(\bar{D})$, allora esiste $t \in k$, $t \neq 0$, per cui $C - tD = A'M$, con $\{A' = 0\} = \tilde{\mathcal{A}}$, $M \in k[T, X, Y, Z]$ e opportuno. In particolare se A', C,

$D \in k[T, X, Y]$ allora anche $M \in k[T, X, Y]$. Ciò è conseguenza del fatto che $k[\tilde{\mathcal{A}}]$ è integralmente chiuso.

Caso e). – Si ponga $\mathcal{A}_\infty = 2\mathsf{a}$. Perchè $AZ + B = 0$ definisca una superficie $\mathcal{F}$ a curve s.i.c. è necessario e sufficiente che sia o $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ (cfr. Prop. 4.1 e Oss. 4.3) oppure che $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathsf{r}$ con r retta non singolare di $\mathcal{F}$.

Sia ora $\mathcal{F}$ una superficie a curve s.i.c. del caso *e)*. A meno di i.l. si può supporre che sia $A = X^2 + Y$ e che la retta r, qualora $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$, sia OZ_∞. In tal modo risulta $\tilde{\mathcal{A}} \cdot \widetilde{\{X = 0\}} = \widetilde{\mathsf{O}}\mathsf{Z}_\infty + \mathsf{a}$ e $\tilde{\mathcal{A}} \cdot \widetilde{\{Y = 0\}} = 2\widetilde{\mathsf{OZ}}_\infty$. Il polinomio $B' = T^3 B(X/T, Y/T) \in k[T, X, Y]$ è omogeneo di grado 3 qualunque sia B, con $0 \leqslant \deg B \leqslant 3$. Risulta allora

$$\operatorname{div}_{\tilde{\mathcal{A}}}(B') = (6 - \nu)\mathsf{a} + \nu\mathsf{r}$$

con ν arbitrario intero tale che $0 \leqslant \nu \leqslant 6$ se $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathsf{r}$, e $\nu = 0$ se $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Il divisore su $\tilde{\mathcal{A}}$ individuato da B' può essere ottenuto come combinazione lineare a coefficienti interi non negativi di $\operatorname{div}_{\tilde{\mathcal{A}}}(T) = 2\mathsf{a}$, di $\operatorname{div}_{\tilde{\mathcal{A}}}(X) = \mathsf{a} + \widetilde{\mathsf{O}}\mathsf{Z}_\infty$, di $\operatorname{div}_{\tilde{\mathcal{A}}}(Y) = 2\widetilde{\mathsf{O}}\mathsf{Z}_\infty$. Infatti nel caso in cui $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$, $\operatorname{div}_{\tilde{\mathcal{A}}}(B') = 6\mathsf{a} = 3\operatorname{div}_{\tilde{\mathcal{A}}}(T)$. Nel caso in cui $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathsf{r}(= \mathsf{OZ}_\infty)$:

$$\operatorname{div}_{\tilde{\mathcal{A}}}(B') = (3 - \nu/2)\operatorname{div}_{\tilde{\mathcal{A}}}(T) + (\nu/2)\operatorname{div}_{\tilde{\mathcal{A}}}(Y) \qquad \text{se } \nu = 2, 4, 6;$$

$$\operatorname{div}_{\tilde{\mathcal{A}}}(B') = \big(3 - (\nu + 1)/2\big)\operatorname{div}_{\tilde{\mathcal{A}}}(T) + \operatorname{div}_{\tilde{\mathcal{A}}}(X) + \big((\nu - 1)/2\big)\operatorname{div}_{\tilde{\mathcal{A}}}(Y) \qquad \text{se } \nu = 1, 3, 5\,.$$

Pertanto esiste $t \in k$, $t \neq 0$, tale che $B' = tX^m Y^n T^p + (X^2 + YT)C'$ con C' forma lineare di $k[T, X, Y]$ e m, n, p coefficienti delle combinazioni lineari sopra scritte nei vari casi considerati. Ricordando che $B = B'(1, X, Y)$ e posto $C = C'(1, X, Y)$, risulta $B = tX^m Y^n + AC$ con (m, n) coppie di interi forniti dalla tabella

m	0	1	0	1	0	1	0
n	0	0	1	1	2	2	3

Le equazioni delle superficie in questione son quindi fra quelle del tipo $(X^2 + Y)Z + tX^m Y^n + (X^2 + Y)C = 0$ con $t \in k$, $t \neq 0$, e C arbitrario polinomio di grado al più uno. Ogni superficie di tale famiglia è d'altra parte isomorfa mediante $(X, Y, Z) \to \big(X, Y, (Z + C)/t\big)$ ad una delle superficie di equazione $(X^2 + Y)Z + X^m Y^n = 0$. Otteniamo in definitiva le superficie:

15: $(X^2 + Y)Z + 1 = 0$

16: $(X^2 + Y)Z + X = 0$

17: $(X^2 + Y)Z + Y = 0$

18: $(X^2 + Y)Z + XY = 0$

19: $$(X^2+Y)Z+Y^2=0$$

20: $$(X^2+Y)Z+XY^2=0$$

21: $$(X^2+Y)Z+Y^3=0\,.$$

Ogni superficie a curve s.i.c. del caso e) è l.i. ad una delle superficie **15**, ..., **21**. Ognuna, $\mathcal{F}$, di queste superficie è d'altra parte, non singolare in codimensione 1, come si verifica direttamente, ed ogni sua eventuale retta di $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$ è s.i.c. di $\mathcal{F}$; quindi $\mathcal{F}$ è a curve s.i.c. del tipo e).

La superficie **15** è fattoriale; poichè sulle superficie **16**, ..., **21** esiste la sola retta r per Z_∞ che risulta s.i.c. di $\mathcal{F}$ con $\mathcal{A}$ con molteplicità 1, ..., 6 rispettivamente, dall'Oss. 7.3,1) e Prop. 7.2 segue che per i corrispondenti anelli $k[\mathcal{F}]$, $\lambda=1, ..., 6$ nell'ordine.

Nei casi e sottocasi che si affronteranno nel seguito si riconoscerà, procedendo in modo analogo al caso e), che ogni superficie a curve s.i.c. del caso o sottocaso in esame è l.i. ad una appartenente ad una certa sottofamiglia di superficie del caso o sottocaso in oggetto, che verranno progressivamente numerate, dando per acquisito il fatto che ciascuna di tali superficie sia a sua volta a curve s.i.c. come si può verificare d'altronde in modo diretto.

Caso f). – Si ponga $\mathcal{A}_\infty=\mathsf{a}+\mathsf{b}$. Anche in questo caso perchè $\mathcal{F}=\{AZ+B=0\}$ sia a curve s.i.c. è necessario e sufficiente che sia $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}=\emptyset$ oppure $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}=\mathsf{r}$, con r retta non singolare per $\mathcal{F}$. Sia $\mathcal{F}=\{AZ+B=0\}$ a curve s.i.c.. A meno di i.l. si può supporre che $A=XY-1$, con $\{X=0\}_\infty=\mathsf{a}$ e $\{Y=0\}_\infty=\mathsf{b}$ ed inoltre, quando $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}=\mathsf{r}$, che $\mathsf{r}=\widetilde{\mathsf{QZ}_\infty}$ ove $\mathsf{Q}=(-1,-1,0)$. Risulta $\tilde{\mathcal{A}}\cdot\widetilde{\{X=0\}}=2\mathsf{a}$, $\tilde{\mathcal{A}}\cdot\widetilde{\{X+1=0\}}=\mathsf{a}+\widetilde{\mathsf{QZ}_\infty}$, $\tilde{\mathcal{A}}\cdot\widetilde{\{X+Y+2=0\}}=2\,\widetilde{\mathsf{QZ}_\infty}$, $\tilde{\mathcal{A}}\cdot\{T=0\}=\mathsf{a}+\mathsf{b}$, $\tilde{\mathcal{A}}\cdot\widetilde{\{Y=0\}}=2\mathsf{b}$, $\tilde{\mathcal{A}}\cdot\widetilde{\{Y+1=0\}}=\mathsf{b}+\widetilde{\mathsf{QZ}_\infty}$. Posto B' come in e), risulta

$$\mathrm{div}_{\tilde{\mathcal{A}}}(B')=\mu\mathsf{r}+\nu\mathsf{a}+\varrho\mathsf{b}$$

con μ, ν, ϱ interi non negativi tali che $\mu+\nu+\varrho=6$ e $\mu=0$ se e solo se $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}=\emptyset$.

Per tutti i casi in cui $\nu\geqslant\varrho$ risulta, in modo analogo al precedente caso e), (omettiamo la verifica per motivi di brevità), che

$$\mathrm{div}_{\tilde{\mathcal{A}}}(B')=m\,\mathrm{div}_{\tilde{\mathcal{A}}}(X)+n\,\mathrm{div}_{\tilde{\mathcal{A}}}(X+T)+p\,\mathrm{div}_{\tilde{\mathcal{A}}}(X+Y+2T)+q\,\mathrm{div}_{\tilde{\mathcal{A}}}(T)$$

in cui (m, n, p) sono forniti dalla seguente tabella

m	3	2	1	0	2	1	0	2	1	0	1	0	1	0	0	0
n	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0
p	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	3

e $q=3-(m+n+p)$.

Come per il caso *e*) risulta $B = tX^m(X+1)^n(X+Y+2)^p + AC$ con $t \in k$, $t \neq 0$ e $C \in k[X, Y]$ di grado al più uno. Le superficie attualmente in esame appartengono dunque alla famiglia $(XY-1)Z + tX^m(X+1)^n(X+Y+2)^p + AC = 0$ con $t \in k$, $t \neq 0$, e C arbitrario polinomio di $k[X, Y]$ di grado al più uno. Ognuna delle superficie di tale famiglia risulta, tramite lo stesso i.l. usato nel caso *e*), l.i. ad una delle superficie $(XY-1)Z + X^m(X+1)^n(X+Y+2)^p = 0$. Otteniamo in definitiva le:

22: $(XY-1)Z + X^3 = 0$

23: $(XY-1)Z + X^2 = 0$

24: $(XY-1)Z + X = 0$

25: $(XY-1)Z + 1 = 0$

26: $(XY-1)Z + X^2(X+1) = 0$

27: $(XY-1)Z + X(X+1) = 0$

28: $(XY-1)Z + X + 1 = 0$

29: $(XY-1)Z + X^2(X+Y+2) = 0$

30: $(XY-1)Z + X(X+Y+2) = 0$

31: $(XY-1)Z + X + Y + 2 = 0$

32: $(XY-1)Z + X(X+1)(X+Y+2) = 0$

33: $(XY-1)Z + (X+1)(X+Y+2) = 0$

34: $(XY-1)Z + X(X+Y+2)^2 = 0$

35: $(XY-1)Z + (X+Y+2)^2 = 0$

36: $(XY-1)Z + (X+1)(X+Y+2)^2 = 0$

37: $(XY-1)Z + (X+Y+2)^3 = 0\,.$

Per $\nu \leqslant \varrho$ si trova che

$$\operatorname{div}_{\tilde{\mathcal{A}}}(B') = m \operatorname{div}_{\tilde{\mathcal{A}}}(Y) + n \operatorname{div}_{\tilde{\mathcal{A}}}(Y+T) + p \operatorname{div}_{\tilde{\mathcal{A}}}(X+Y+2T) + q \operatorname{div}_{\tilde{\mathcal{A}}}(T)$$

con (m, n, p, q) date dalla precedente tabella. Ne segue che le equazioni delle superficie relative a tali situazioni sono del tipo

$$(*) \qquad (XY-1)Z + tY^m(Y+1)^n(X+Y+2)^p + (XY-1)\,C = 0$$

con $t \in k$, $t \neq 0$, $C \in k[X, Y]$ di grado al più uno. È d'altronde chiaro che per ogni $t \in k$, $t \neq 0$, e per ogni $C \in k[X, Y]$ di grado al più uno e m, n, p forniti dalla tabella precedente, ognuna delle superficie $(*)$, mediante l'isomorfismo $(X, Y, Z) \to (Y, X, (Z + C)/t)$, si trasforma in una delle **22**, ..., **37**.

Le superficie **22**, ..., **25** sono fattoriali. Sulle superficie **26**, ..., **37** esiste una sola retta r per Z_∞ che risulta s.i.c. di $\mathcal{F}$ con $\mathcal{A}$ con molteplicità $\mu = 1$ nel caso delle **26**, **27**, **28**; $\mu = 2$ per le **29**, **30**, **31**; $\mu = 3$ per le **32**, **33**; $\mu = 4$ per le **34**, **35**; $\mu = 5$ per la **36** e $\mu = 6$ per la **37**. Dall'Oss. 7.3,1) e Prop. 7.2 segue pertanto che per i rispettivi anelli $k[\mathcal{F}]$, $\lambda = \mu = 1, \dots, 6$.

Caso g). – Si ponga $\mathcal{A}_\infty = 2\mathsf{a}$; a meno di i.l. si può supporre che i piani $\{X = 0\}$ e $\{X + 1 = 0\}$ coincidano con i piani $\mathcal{A}_1 = \{A_1 = 0\}$ e $\mathcal{A}_2 = \{A_2 = 0\}$ rispettivamente. Dal Lemma 4.1 e dalla Prop. 4.1 si deduce, in questo caso, che una superficie $\mathcal{F}$ è a curve s.i.c. se e solo se si presenta una delle seguenti situazioni:

g_1) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$;

g_2) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathsf{r}$, dove r è non singolare per $\mathcal{F}$ ed è s.i.c. di $\mathcal{F}$ con uno dei piani $\mathcal{A}_1$ o $\mathcal{A}_2$;

g_3) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathsf{r} \cup \mathsf{s}$, dove r e s sono non singolari per $\mathcal{F}$ e r è s.i.c. con uno dei piani $\mathcal{A}_i$, mentre s lo è con $\mathcal{A}_j$ (infatti se una delle rette, e sia r, non fosse s.i.c. di $\mathcal{F}$ con uno dei due piani, allora uno dei due piani stessi intersecherebbe $\mathcal{F}$ secondo r e s, e l'altro piano dovrebbe passare per s: il che è assurdo perchè i due piani $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ sono paralleli).

Sia $\mathcal{F} = \{AZ + B = 0\}$ a curve s.i.c. e si indichi ancora con B' il polinomio di grado tre ottenuto da B come nel caso *e*). Allora avremo:

g_1) In tale ipotesi dal teorema di Bézout si deduce che $\operatorname{div}_{\tilde{\mathcal{A}}_i}(B') = 3\mathsf{a}$ per $i = 1, 2$. Con un ragionamento analogo a quello esposto nel caso *e*), si deduce che esistono $t', t'' \in k$ non nulli tali che $B = t' + CX = t'' + D(X + 1)$, con $C, D \in k[X, Y]$ di grado al più due. Ne risulta: $t' + C(X + 1) - C = t'' + D(X + 1)$ e quindi $C = t' - t'' + (X + 1)G$ con $G = C - D \in k[X, Y]$ di grado al più uno; pertanto B è del tipo $B = t' + X(t' - t'') + X(X + 1)G$. Le equazioni delle superficie in esame sono quindi fra quelle del tipo $X(X + 1)Z + t'(tX + 1) + X(X + 1)G = 0$ con $t, t' \in k$, $t \neq 1$ e $t' \neq 0$, $G \in k[X, Y]$ arbitrario di grado al più uno. Ognuna di tali superficie è isomorfa, tramite $(X, Y, Z) \to (X, Y, (Z + G)/t')$, ad una delle superficie di equazione $X(X + 1)Z + tX + 1 = 0$ con $t \in k$, $t \neq 1$. Se $t = 0$ si ottiene la superficie

38: $$X(X + 1)Z + 1 = 0$$

e, se $t \neq 0$, si ottengono le superficie della famiglia

39: $$X(X + 1)Z + tX + 1 = 0\,, \quad t \in k,\ t \neq 0, 1$$

le cui chiusure proiettive sono coni cubici che hanno Y_∞ come vertice e $\mathsf{Y}_\infty\mathsf{Z}_\infty$ come retta doppia. La superficie $\mathcal{F}(t)$, corrispondente al valore $t \in k$, $t \neq 0, 1$, è linearmente isomorfa solo alla $\mathcal{F}(t/(t-1))$ tramite $(X, Y, Z) \to (-X-1, Y, Z/(1-t))$.

Le superficie **38** e **39** sono, per il Lemma 4.1, fattoriali.

g_2) A meno di i.l. di $\mathbb{A}_k^3$ si può supporre che r sia s.i.c. di $\mathcal{F}$ con il piano $\mathcal{A}_1 = \{X = 0\}$ e che OZ_∞ coincida con r. Sia $\mathcal{F} \cap \mathcal{A}_1 = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}_1 = \mathsf{r}$. Essendo d'altra parte $\mathcal{F} \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$, si deduce che $\operatorname{div}_{\bar{\mathcal{A}}_1}(B') = \mu\bar{\mathsf{r}} + (3-\mu)\mathsf{a}$ e $\operatorname{div}_{\bar{\mathcal{A}}_2}(B') = 3\mathsf{a}$, con $\mu = 1, 2$ perchè a appartiene ad $\mathcal{A}_1$ e al luogo degli zeri di B'. Con considerazioni analoghe a quelle esposte nel caso e), essendo $\operatorname{div}_{\bar{\mathcal{A}}_1}(Y) = \mathsf{r}$ si deduce che esistono $t', t'' \in k$, non nulli, tali che $B = t'Y^\mu + XC = t'' + (X+1)D$ con $C, D \in k[X, Y]$ di grado al più due; da cui $C = t'Y^\mu - t'' + (X+1)G$, con $G = C - D \in k[X, Y]$ di grado al più uno. Pertanto $B = t'Y^\mu + X(t'Y^\mu - t'') + X(X+1)G$. Le equazioni delle superficie in esame sono perciò tra quelle del tipo $X(X+1)Z - t''(t(X+1)Y^\mu + X) + X(X+1)G = 0$, con $t, t'' \in k$, t, t'' non nulli, $G \in k[X, Y]$ arbitrario di grado al più uno, e $\mu = 1, 2$. Ognuna di tali superficie è isomorfa, tramite $(X, Y, Z) \to (X, (t)^{1/\mu}Y, -(Z+G)/t'')$ ad una di equazione $X(X+1)Z + (X+1)Y^\mu + X = 0$. Si ottengono pertanto le:

40: $$X(X+1)Z + (X+1)Y + X = 0$$

41: $$X(X+1)Z + (X+1)Y^2 + X = 0 .$$

Dall'Oss. 7.3, 1) segue che l'ordine dell'anello $k[\mathcal{F}]$ corrispondente alle superficie **40** e **41** è $\lambda = 1, 2$ rispettivamente.

g_3) A meno di isomorfismi lineari di $\mathbb{A}_k^3$ si può supporre che r sia s.i.c. di $\mathcal{F}$ con il piano $\{X = 0\}$, che OZ_∞ coincida con r e che la retta $\{X + 1 = Y = 0\}$ coincida con s. Sia $\mathcal{F} \cap \{X = 0\} = \mathcal{B} \cap \{X = 0\} = \mathsf{r}$ e $\mathcal{F} \cap \{X+1 = 0\} = \mathcal{B} \cap \{X+1=0\} = \mathsf{s}$. Posto B' come nel caso e), ne deriva che $\operatorname{div}_{\bar{\mathcal{A}}_1}(B') = \mu\mathsf{r} + (3-\mu)\mathsf{a}$ con $1 \leqslant \mu \leqslant 3$, $\operatorname{div}_{\bar{\mathcal{A}}_2}(B') = \nu\mathsf{s} + (3-\nu)\mathsf{a}$ con $1 \leqslant \nu \leqslant 3$. Pertanto esistono $t', t'' \in k$ non nulli tali che $B = t'Y^\mu + XC = t''Y^\nu + (X+1)D$, con $C, D \in k[X, Y]$ di grado al più due. Si ottiene $C = t'Y^\mu - t''Y^\nu + (X+1)G$ con $G = D - C \in k[X, Y]$ di grado al più uno. Pertanto $B = t'Y^\mu + X(t'Y^\mu - t''Y^\nu) + X(X+1)G$ con μ, ν tali che $\deg(t'Y^\mu - t''Y^\nu) \leqslant 2$. Le equazioni delle superficie in esame sono quindi tra quelle del tipo $X(X+1)Z + t'[Y^\mu + X(Y^\mu + tY^\nu)] + X(X+1)G = 0$, con $t, t' \in k$, t, t' non nulli, $G \in k[X, Y]$ arbitrario di grado al più uno, μ, ν interi positivi come detto sopra. Ognuna di tali superficie è isomorfa, tramite $(X, Y, Z) \to (X, Y, (Z+G)/t')$ ad una delle superficie di equazione $X(X+1)Z + Y^\mu + X(Y^\mu + tY^\nu) = 0$. Tenendo presente che $\deg(Y^\mu + tY^\nu) \leqslant 2$, si ha che se $\mu = 3$ allora anche $\nu = 3$ (e viceversa), in questo caso dovendo essere $t = -1$. Le coppie (μ, ν) possibili sono fornite dalla tabella

μ	1	1	2	2	3
ν	1	2	1	2	3

In corrispondenza alla coppia $(\mu, \nu) = (1, 1)$ si ottengono le superficie $X(X+1)Z + Y + XY(t+1) = 0$ con $t \in k$, $t \neq 0$. Indicata con $\mathcal{F}(t)$ la superficie che si ottiene in corrispondenza al valore $t \in k$, $t \neq 0$, non è difficile verificare che $\mathcal{F}(-1)$ non è i.l. ad alcuna $\mathcal{F}(t)$, $t \neq -1$, e che $\mathcal{F}(t)$ è l.i. a $\mathcal{F}(-2)$ tramite l'isomorfismo

$$(X, Y, Z) \to \left(\frac{a^2 - 2a - 1}{a - 1} X + a,\ -\frac{(a^2 - 2a - 1)^2}{(a-1)^3} Y + \frac{a^2 + a}{a - 1} Z, Z\right)$$

con a tale che $t(a-1)^2 + 2 = 0$. Si ottengono dunque le superficie:

42: $$X(X+1)Z + Y = 0$$

43: $$X(X+1)Z + Y - XY = 0\ .$$

Dal Lemma 4.1 segue che le superficie **42** e **43** sono fattoriali.

In corrispondenza a $(\mu, \nu) = (2, 1)$ si ottengono le superficie di equazione $X(X + 1)Z + Y^2 + XY(Y + t) = 0$ che, tramite $(X, Y, Z) \to (X, Y/t, Z/t^2)$ sono l.i. alla

44: $$X(X+1)Z + Y^2 + XY^2 + XY = 0\ .$$

In corrispondenza alla coppia $(\mu, \nu) = (1, 2)$ si ottengono superficie di equazione $X(X+1)Z + Y + XY + tY^2X = 0$ con $t \in k$, $t \neq 0$; mediante $(X, Y, Z) \to (-X-1, Yt, -Zt)$ tali superficie vengono trasformate nella **44**.

Dalla Oss. 7.3, 2) e Prop. 7.2 si ottiene che l'ordine dell'anello $k[\mathcal{F}]$ relativo alla **44** è $\lambda = 2$.

In corrispondenza alla coppia $(\mu, \nu) = (2, 2)$ si ottengono le superficie

45: $$X(X+1)Z + Y^2 + XY^2(1+t) = 0\ , \qquad t \in k,\ t \neq 0\ .$$

Indicata con $\mathcal{F}(t)$ la superficie corrispondente al valore $t \in k$, $t \neq 0$, si ha che $\mathcal{F}(t)$ è isomorfa solo alla $\mathcal{F}(1/t)$, un isomorfismo essendo $(X, Y, Z) \to (-X-1, Y, -Z/t)$.

Ragionando come sopra segue che per tali superficie $\lambda = 2$.

In corrispondenza alla coppia $(\mu, \nu) = (3, 3)$ si ottiene la superficie

46: $$X(X+1)Z + Y^3 = 0\ .$$

Per tale superficie $\lambda = 3$.

Caso h). - A meno di i.l. di $\mathbb{A}^3_k$ si può supporre che i piani $\{X = 0\}$ e $\{Y = 0\}$ coincidano con $\mathcal{A}_1 = \{A_1 = 0\}$ e $\mathcal{A}_2 = \{A_2 = 0\}$ rispettivamente. Dal Lemma 4.1, Prop. 4.1 e Oss. 4.3 si deduce che affinchè una superficie $\mathcal{F}$ del caso h) sia a curve s.i.c. è necessario e sufficiente che si presenti uno dei seguenti sottocasi:

h_1) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$;

h_2) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathrm{r}$, dove r non è singolare per $\mathcal{F}$ ed è s.i.c. di $\mathcal{F}$ sia col piano $\mathcal{A}_1$ che col piano $\mathcal{A}_2$;

h_3) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathsf{r}$, dove r è non singolare per $\mathcal{F}$ ed è s.i.c. di $\mathcal{F}$ con uno dei due piani $\mathcal{A}_i$ $(i = 1, 2)$ e non appartiene all'altro;

h_4) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathsf{r} \cup \mathsf{s}$, dove r, s sono non singolari per $\mathcal{F}$ e una sola tra le rette r e s è s.i.c. di $\mathcal{F}$ con uno dei due piani $\mathcal{A}_i$ $(i = 1, 2)$, mentre l'altro interseca $\mathcal{F}$ esattamente secondo le due rette r e s (la retta che non è s.i.c. di $\mathcal{F}$ con alcuno dei piani risulterà s.i.c. di $\mathcal{F}$ con una opportuna superficie $\mathcal{G}$, cfr. Prop. 3.1 e Oss. 3.2).

Supponiamo che $\mathcal{F} = \{AZ + B = 0\}$ sia a curve s.i.c.. Esaminiamo i vari sottocasi.

h_1) Con considerazioni analoghe a quelle esposte nel caso *e*), si deduce che esistono $t', t'' \in k$, non nulli, tali che $B = t' + CX = t'' + DY$ con $C, D \in k[X, Y]$ di grado al più due. Quindi $t' = t''$ e $C = YG$, con $G \in k[X, Y]$ di grado al più uno. B è dunque del tipo $B = t + XYG$ con $t \in k$, $t \neq 0$, $G \in k[X, Y]$ di grado al più uno. Le equazioni delle superficie in esame sono tra quelle del tipo $XYZ + t + XYG = 0$ con $t \in k$, $t \neq 0$, $G \in k[X, Y]$ arbitrario di grado al più uno. Ognuna di tali superficie viene trasformata da $(X, Y, Z) \to (X, Y, (Z + G)/t)$ nella superficie

47: $$XYZ + 1 = 0 .$$

Tale superficie è fattoriale.

h_2) Sia $\mathcal{F} \cdot \{X = 0\} = \mathcal{B} \cdot \{X = 0\} = \mu\mathsf{r}$ e $\mathcal{F} \cdot \{Y = 0\} = \mathcal{B} \cdot \{Y = 0\} = \nu\mathsf{r}$, con $1 \leqslant \mu \leqslant 3$, $1 \leqslant \nu \leqslant 3$. Poichè $\mathcal{F}$ non può essere singolare lungo i punti di r, cfr. Prop. 6.1, deve essere $\min\{\mu, \nu\} = 1$. Sia $\mu = 1$ e $\nu = 1, 2, 3$. Con considerazioni analoghe a quelle esposte nel caso *e*), si deduce che esistono $t', t'' \in k$ non nulli tali che $B = t'Y + XC = t''X^\nu + YD$, con $C, D \in k[X, Y]$ di grado al più due. Ne segue che $Y(t' - D) = X(t''X^{\nu-1} - C)$ e quindi $D = t' + XG$ con $G \in k[X, Y]$ di grado al più uno. B è dunque del tipo $B = t''X^\nu + t'Y + XYG$ con $\nu = 1, 2, 3$ e $t', t'' \in k$, non nulli, $G \in k[X, Y]$ di grado al più uno. Le equazioni delle superficie in esame sono tra quelle del tipo $XYZ + t''X^\nu + t'Y + XYG = 0$ con $t', t'' \in k$, t', t'' non nulli, $G \in k[X, Y]$ arbitrario di grado al più uno. Attribuendo a ν i valori 1, 2, 3 si ottengono superficie che sono l.i. tramite $(X, Y, Z) \to (X, -(Z + G)/t', -Yt'/t'')$, rispettivamente alle **24**, **23**, **22**. D'altra parte per $\mu = 1, 2, 3$ e $\nu = 1$ otteniamo come sopra superficie che sono l.i. ordinatamente alle **24**, **23**, **22**.

h_3) Supponiamo che sia $\mathcal{F} \cap \mathcal{A}_1 = \mathsf{r}$. A meno di i.l. possiamo supporre che la retta $\{Y + 1 = X = 0\}$ coincida con r. Posto $\mathcal{F} \cdot \{X = 0\} = \mathcal{B} \cdot \{X = 0\} = \mu\mathsf{r}$, $\mu = 1, 2, 3$, essendo $\mathcal{B} \cap \{Y = 0\} = \emptyset$ ne segue che esistono $t', t'' \in k$ non nulli tali che $B = t' + CY = t''(Y + 1)^\mu + DX$, con $C, D \in k[X, Y]$ di grado al più due. Dal confronto segue che $t' = t''$ e che $D = YG$ con $G \in k[X, Y]$ di grado al più uno. B è dunque del tipo $B = t(Y + 1)^\mu + XYG$ con $\mu = 1, 2, 3$ e $t \in k$, $t \neq 0$, e $G \in k[X, Y]$ di grado al più uno. Le equazioni delle superficie in esame sono pertanto tra quelle del tipo $XYZ + t(Y+1)^\mu + XYG = 0$, con $\mu = 1, 2, 3$ e $t \in k$, $t \neq 0$, $G \in k[X, Y]$ arbitrario di grado al più uno. Ciascuna di queste è isomorfa, tramite $(X, Y, Z) \to (X, Y, (Z+G)/t)$ ad una delle superficie di equazione $XYZ + (Y+1)^\mu = 0$, con $\mu = 1, 2, 3$. La superficie che si ottiene per $\mu = 1$ risulta isomorfa alla **25** tramite $(X, Y, Z) \to (X, -Z, -Y)$. Per $\mu = 2, 3$ si ottengono rispettivamente le:

48: $$XYZ + (Y+1)^2 = 0$$

49: $$XYZ + (Y+1)^3 = 0 .$$

Nel caso in cui $\mathcal{F} \cap \mathcal{A}_2 = \mathsf{r}$, si trovano rispettivamente superficie l.i. alle **25**, **48**, **49**.

Dall'Oss. 7.3, 2) e Prop. 7.2 segue che per le superficie **48** e **49** si ha $\lambda = 2$, $\lambda = 3$ rispettivamente.

h_4) A meno di i.l. di $\mathbb{A}_k^3$ possiamo supporre che le rette $\{X = Y + 1 = 0\}$ e $\{Y = X + 1 = 0\}$, a meno dell'ordine, siano r e s rispettivamente. Si ponga allora $\mathcal{F}\cdot\{X=0\} = \mathcal{B}\cdot\{X=0\} = \mu\mathsf{r}_1$ e $\mathcal{F}\cdot\{Y=0\} = \mathcal{B}\cdot\{Y=0\} = \nu\mathsf{r}_2$ con $\{\mathsf{r}_1, \mathsf{r}_2\} = \{\mathsf{r}, \mathsf{s}\}$ e $1 \leqslant \mu \leqslant 3$, $1 \leqslant \nu \leqslant 3$. Consideriamo le coppie (μ, ν) secondo la tabella

μ	1	2	1	2	3	1	3	2	3
ν	1	1	2	2	1	3	2	3	3

In questa situazione esistono $t', t'' \in k$, non nulli, tali che $B = t'(Y+1)^\mu + XC = t''(X+1)^\nu + YD$, con $C, D \in k[X, Y]$ di grado al più due; ne segue che $t' = t''$ e che, posto $(X+1)^\nu = XE + 1$, $C = t''E + YG$, con $G \in k[X, Y]$ di grado al più uno. B risulta dunque del tipo $B = t(Y+1)^\mu + t(X+1)^\nu - t + XYG$, con μ, ν secondo la tabella soprascritta, $t \in k$ non nullo e $G \in k[X, Y]$ di grado al più uno. Le equazioni delle superficie in esame sono fra quelle del tipo $XY(Z+G) + t\big((Y+1)^\mu + (X+1)^\nu - 1\big) = 0$ con μ, ν dati dalla tabella sopra scritta, $t \in k$, $t \neq 0$, $G \in k[X, Y]$ arbitrario di grado al più uno. Ognuna di tali superficie è isomorfa, tramite $(X, Y, Z) \to (X, Y, (Z+G)/t)$ ad una superficie di equazione $XYZ + (Y+1)^\mu + (X+1)^\nu - 1 = 0$ con μ, ν forniti dalla tabella.

In corrispondenza alla 1°, 2°, 5° coppia (μ, ν) si ottengono superficie l.i. alle **28**, **30**, **32** rispettivamente tramite: $(X, Y, Z) \to (Y, -Z, -X)$, $(X, Y, Z) \to (Y, -Z, -X-1)$, $(X, Y, Z) \to (Y, -Z, -X-Y-1)$.

In corrispondenza alla 3°, 6° coppia si ottengono superficie isomorfe rispettivamente alle **30**, **32**.

In corrispondenza alla 4°, 7°, 9° coppia si ottengono rispettivamente le:

50: $$XYZ + (Y+1)^2 + X(X+2) = 0$$

51: $$XYZ + (Y+1)^3 + X(X+2) = 0$$

52: $$XYZ + (Y+1)^3 + X(X^2+3X+3) = 0 .$$

In corrispondenza alla 8° coppia si ottiene la superficie l.i. alla **51**.

Dall'Oss. 7.3, 2) e Prop. 7.2 segue che per le superficie **50**, **51** e **52** si ha $\lambda = 2, 6, 3$ nell'ordine.

h_5) A meno di i.l. di $\mathbb{A}^3_k$ si può supporre che quella delle rette r, s che risulta s.i.c. di $\mathcal{F}$ con uno dei piani $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ sia $\mathsf{r}_2 = \{X = Y = 0\}$ e che il piano la cui intersezione con $\mathcal{F}$ è r_2 sia $\{X = 0\}$; sempre a meno di i.l. possiamo supporre che la rimanente retta fra r, s sia $\mathsf{r}_1 = \{X + 1 = Y = 0\}$ e che il piano contenente r, s sia $\{Y = 0\}$. Poniamo $\mathcal{F}\cdot\{X = 0\} = \mathcal{B}\cdot\{X = 0\} = \varrho\mathsf{r}_2$, $\mathcal{F}\cdot\{Y = 0\} = \mathcal{B}\cdot\{Y = 0\} = \mu\mathsf{r}_1 + \sigma\mathsf{r}_2$ con $1 \leqslant \varrho \leqslant 3$, $1 \leqslant \mu$, $1 \leqslant \sigma$, $1 \leqslant \mu + \sigma \leqslant 3$. Ricordando che $\min\{\varrho, \sigma\} = 1$ perchè $\mathcal{F}$ non è singolare in codimensione 1, si ha che le terne (ϱ, σ, μ) di interi positivi corrispondenti alle superficie in esame sono forniti dalla tabella

ϱ	1	1	1	2	2	3	3
σ	1	1	2	1	1	1	1
μ	1	2	1	1	2	1	2

In tali situazioni esistono $t', t'' \in k$, non nulli, per cui $B = t' Y^{\varrho} + XC = t''(X+1)^{\mu}X^{\sigma} + YD$, con $C, D \in k[X, Y]$ di grado al più due. Quindi $D = t' Y^{\varrho-1} + XG$, con $G \in k[X, Y]$ di grado al più uno. B è dunque del tipo $B = t''(X+1)^{\mu}X^{\sigma} + t' Y^{\varrho} + XYG$ con (ϱ, σ, μ) date dalla tabella sopra scritta, $t', t'' \in k$, non nulli, e $G \in k[X, Y]$ polinomio arbitrario di grado al più uno. Le equazioni delle superficie in esame sono pertanto fra quelle della famiglia $XY(Z + G) + t''(X+1)^{\mu}X^{\sigma} + t' Y^{\varrho} = 0$ con $t', t'' \in k$, non nulli, $G \in k[X, Y]$ arbitrario di grado al più uno e (ϱ, σ, μ) della tabella soprascritta. Ognuna di tali superficie è l.i., tramite

$$(X, Y, Z) \to \big(X, (t'/t'')^{1/\varrho} Y, (1/t'')(t''/t')^{1/\varrho}(Z + G)\big)$$

ad una delle superficie di equazione $XYZ + (X+1)^{\mu}X^{\sigma} + Y^{\varrho} = 0$. In corrispondenza alla 1° e alla 3° terna si ottengono superficie che sono isomorfe, tramite $(X, Y, Z) \to (X, -Z, -Y)$ rispettivamente alle **27** e **26**. In corrispondenza alla 2°, 4°, 5°, 6°, 7° terna si ottengono, nell'ordine, le superficie:

53: $$XYZ + (X+1)^2X + Y = 0$$

54: $$XYZ + (X+1)X + Y^2 = 0$$

55: $$XYZ + (X+1)^2X + Y^2 = 0$$

56: $$XYZ + (X+1)X + Y^3 = 0$$

57: $$XYZ + (X+1)^2X + Y^3 = 0\,.$$

Si verifica che per le superficie **54** e **56** si ha $\mathcal{F}\cdot\{YZ + X + 1 = 0\} = \gamma\mathsf{r}_1$ con $\gamma = 2, 3$ rispettivamente; mentre per le rimanenti si ha $\mathcal{F}\cdot\{YZ + X^2 + 2X + 1 = 0\} = \gamma\mathsf{r}_1$ con $\gamma = 2, 4, 6$ nell'ordine. Osserviamo inoltre che per ognuna delle **53**, ..., **57**

$\sigma = 1$ (cfr. tabella) e che $\gamma = \mu\varrho$. Dall'Oss. 7.3, 3) si deduce che la minima molteplicità con cui la retta $\mathfrak{r}_1$ è completa intersezione di $\mathcal{F}$ con una superficie $\mathcal{G} \subset \mathbb{A}_k^3$ è esattamente $\mu\varrho$: in tutti e cinque i casi essendo, per l'Oss. 7.3, 2), ϱ la minima molteplicità relativa alla retta $\mathfrak{r}_2$; per la Prop. 7.2 si ottiene che $\lambda = \mu\varrho$. Per le superficie **53**, ..., **57** si ha dunque $\lambda = \mu\varrho = 2, 2, 4, 3, 6$ rispettivamente.

Caso i). – Dal Lemma 4.1 e dalla Prop. 4.1 si deduce che in questo caso $\mathcal{F}$ è a curve s.i.c. se e solo se o $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ oppure $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathfrak{r}$, dove la retta $\mathfrak{r}$ è non singolare di $\mathcal{F}$ ed è s.i.c. di $\mathcal{F}$ col piano $\{A_0 = 0\}$.

Sia $\mathcal{F} = \{A_0 Z + B = 0\}$ a curve s.i.c. A meno di i.l. di $\mathbb{A}_k^3$ possiamo supporre che $\{X = 0\}$ coincida col piano $\mathcal{A} = \{A_0 = 0\}$ e che $\mathfrak{r} = \mathsf{O}\mathsf{Z}_\infty$. Poichè $\mathcal{F} \cdot \{X = 0\} = \mathcal{B} \cdot \{X = 0\} = \mu\mathfrak{r}$, con $\mu = 0, 1, 2, 3$, esiste $t \in k$, $t \neq 0$, tale che $B = tY^\mu + XC$, con $C \in k[X, Y]$ di grado al più due. Scritto C nella forma $C = XG + a'Y^2 + b'Y + c'$, con $G \in k[X, Y]$ di grado al più uno, $a', b', c' \in k$, le equazioni delle superficie in esame sono tra quelle della famiglia $X^2(Z + G) + tY^\mu + X(a'Y^2 + b'Y + c') = 0$ con $t, a', b', c' \in k$, $t \neq 0$, e $G \in k[X, Y]$ polinomio arbitrario di grado al più uno, e $\mu = 0, 1, 2, 3$. Ognuna di queste ultime superficie è isomorfa, tramite $(X, Y, Z) \to (X, Y, (Z + G)/t)$, ad una delle superficie di equazione $X^2 Z + X(aY^2 + bY + c) + Y^\mu = 0$, avendo posto $a = a'/t$, $b = b'/t$, $c = c'/t$.

Si osservi inoltre che nè la retta $\mathfrak{r}$ può essere luogo di punti multipli per il cilindro $\mathcal{B}$, nè B può avere fattori multipli (altrimenti la retta $\mathfrak{r}$ sarebbe singolare per $\mathcal{F}$). Nel caso in cui $a = b = c = 0$ si ottiene la superficie

58: $$X^2 Z + 1 = 0$$

e la superficie $X^2 Z + Y = 0$ che è l.i. alla **42**. La **58** è fattoriale.

Esaminiamo ora le varie situazioni che si presentano per $\mu = 0, 1, 2, 3$ in corrispondenza a terne (a, b, c) non nulle.

Per $\mu = 0$ si ottengono superficie fattoriali in quanto $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$; esse hanno equazione $X^2 Z + aXY^2 + bXY + cX + 1 = 0$. Se $a \neq 0$, a meno dell'isomorfismo $(X, Y, Z) \to (X, Y + b/2a, Z)$ si può supporre $b = 0$. Pertanto o $c = 0$, e allora si ottengono superficie l.i. alla

59: $$X^2 Z + XY^2 + 1 = 0\,,$$

o $c \neq 0$, e allora si ottengono superficie l.i. alla

60: $$X^2 Z + XY^2 + X + 1 = 0\,.$$

Se $a = 0$ le superficie hanno equazione $X^2 Z + bXY + cX + 1 = 0$; o $b = 0$, e allora si ottengono superficie l.i. alla

61: $$X^2 Z + X + 1 = 0\,,$$

oppure $b \neq 0$, e allora si ottengono superficie l.i. alla **40** tramite $(X, Y, Z) \to (X-1, -bY-Z-c-1, -Z)$.

Per $\mu = 1$ si ottengono superficie fattoriali in quanto $\mathcal{F} \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathfrak{r}$ e le loro equazioni sono $X^2Z + aXY^2 + bXY + cX + Y = 0$. A meno dell'isomorfismo $(X, Y, Z) \to (X, Y + cX, Z - ac^2X - 2acY - bc)$ si può supporre $c = 0$. Pertanto se $a = 0$, $b \neq 0$, si ottengono superficie l.i. alla **43** tramite $(X, Y, Z) \to \big(buX + 1 + u, -b^2uY + (3 + 2u)Z, Z\big)$ dove $u^2 = 2$; se $b = 0$, $a \neq 0$, si ottengono superficie l.i. alla

62: $$X^2Z + XY^2 + Y = 0\,.$$

Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ si ottengono superficie isomorfe, tramite $(X, Y, Z) \to (bX, Ya/b, Za/b^3)$, alla

63: $$X^2Z + XY^2 + XY + Y = 0\,.$$

Per $\mu = 2$ si ottengono superficie di equazione $X^2Z + aXY^2 + bXY + cX + Y^2 = 0$. A meno dell'isomorfismo $(X, Y, Z) \to (X, Y + Xb/2, Z - Xab^2/4 - abY - b^2/4)$, si può supporre $b = 0$. Si osservi innanzi tutto che $c \neq 0$ perchè altrimenti la retta $\mathfrak{r}$ sarebbe luogo di punti singolari di $\mathcal{F}$. Pertanto o $a = 0$, e allora si ottengono superficie l.i. alla

64: $$X^2Z + X + Y^2 = 0$$

oppure $a \neq 0$, e allora si ottengono superficie l.i. alla

65: $$X^2Z + XY^2 + X + Y^2 = 0$$

tramite $(X, Y, Z) \to \big(aX, (a/c)^{\frac{1}{2}}Y, Z/(ca)\big)$.

L'ordine dell'anello $k[\mathcal{F}]$ per le superficie **64, 65** è $\lambda = 2$, come si deduce dall'Oss. 7.3, 1).

Per $\mu = 3$ si ottengono superficie di equazione $X^2Z + aXY^2 + bXY + cX + Y^3 = 0$. A meno dell'isomorfismo $(X, Y, Z) \to (X, Y + Xa/3, Z - Xa^3/27 - Ya^2/3 - ab/3)$, si può supporre $a = 0$. Si osservi, come sopra, che $c \neq 0$. Pertanto o $b = 0$, e allora si ottengono superficie l.i. alla

66: $$X^2Z + X + Y^3 = 0\,,$$

oppure $b \neq 0$, e allora si ottengono superficie l.i. alla

67: $$X^2Z + XY + X + Y^3 = 0$$

tramite l'isomorfismo $(X, Y, Z) \to (Xb^3/c^2, Yb/c, Zc/b^3)$.

Dall'Oss. 7.3, 1) segue che l'ordine degli anelli $k[\mathcal{F}]$ per le **66** e **67** è $\lambda = 3$.

Caso l). – Dal Lemma 4.1 e dalla Prop. 4.1 si deduce che condizione necessaria e sufficiente affinchè $\mathcal{F} = \{AZ + B = 0\}$ sia a curve s.i.c. di questo caso l), è che o $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ oppure $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathsf{r}$, dove r è non singolare per $\mathcal{F}$ ed è s.i.c. di $\mathcal{F}$ col piano $\mathcal{A}$. A meno di isomorfismi lineari si può supporre che il piano $\{X = 0\}$ coincida con $\mathcal{A}$ e che la retta $\{X = Y = 0\}$ coincida con r. Poichè $\mathcal{F} \cdot \{X = 0\} = \mathcal{B} \cdot \{X = 0\} = \mu \mathsf{r}$, con $\mu = 0, 1, 2, 3$, esiste $t \in k$, $t \neq 0$, tale che $B = tY^\mu + XC$, con $C \in k[X, Y]$ di grado al più due. Inoltre posto $C = a'X^2 + b'XY + c'Y^2 + G$, con $G \in k[X, Y]$ di grado al più uno, le superficie a curve s.i.c. in esame hanno equazioni che rientrano fra quelle del tipo $XZ + tY^\mu + X(a'X^2 + b'XY + c'Y^2) + XG = 0$ con $a', b', c', t \in k$, $t \neq 0$, $G \in k[X, Y]$ arbitrario di grado al più uno e $\mu = 0, 1, 2, 3$. Ognuna di tali superficie è isomorfa, tramite $(X, Y, Z) \to (X, Y, (Z + G)/t)$ ad una delle superficie di equazione $XZ + X(aX^2 + bXY + cY^2) + Y^\mu = 0$, avendo posto $a = a'/t$, $b = b'/t$, $c = c'/t$.

Si osservi innanzi tutto che se $\mu = 0, 1, 2$ le terne (a, b, c) non possono essere nulle poichè $\deg B = 3$. A meno di un isomorfismo $(X, Y, Z) \to (X, Y - a_1 X, Z + b_1 X + c_1 Y + d_1)$, dove a_1 è una radice dell'equazione $a + bU + cU^2 = 0$ se $\mu = 0, 1, 2$ e se $(b, c) \neq (0, 0)$, oppure una radice dell'equazione $a + bU + cU^2 + U^3 = 0$ se $\mu = 3$ e $b_1, c_1, d_1 \in k$ opportuni, si può supporre $a = 0$ (*).

A $\mu = 0$ corrispondono superficie fattoriali di equazioni $XZ + aX^3 + bX^2Y + cXY^2 + 1 = 0$. Se $b = c = 0$ si ottengono superficie isomorfe alla

68: $$XZ + X^3 + 1 = 0\,.$$

Se $b \neq 0$ e $c = 0$ si ottengono superficie che, come si vede facilmente, sono isomorfe alla **40**; se $b = 0$ e $c \neq 0$ si ottengono superficie isomorfe alla **15**; se $b \neq 0$ e $c \neq 0$ si ottengono superficie isomorfe alla

69: $$XZ + X^2Y + XY^2 + 1 = 0$$

tramite $(X, Y, Z) \to \big(X(b^2/c)^{\frac{1}{3}}, Y(c^2/b)^{\frac{1}{3}}, Z(c/b^2)^{\frac{1}{3}}\big)$.

A $\mu = 1$ corrispondono superficie fattoriali di equazione $XZ + aX^3 + bX^2Y + cXY^2 + Y = 0$. Se $b = c = 0$ si ottengono superficie isomorfe alla

70: $$XZ + X^3 + Y = 0\,.$$

Se $b \neq 0$ e $c = 0$ si ottengono superficie isomorfe alla **43** tramite l'isomorfismo $(X, Y, Z) \to \big(1 - (2b)^{\frac{1}{2}}X, (2/b)^{\frac{1}{2}}Z + 3Y, Y\big)$.

Se $b = 0$ e $c \neq 0$ si ottengono superficie isomorfe alla **16**; se $b \neq 0$ e $c \neq 0$ si ottengono superficie isomorfe alla

71: $$XZ + X^2Y + XY^2 + Y = 0$$

nell'isomorfismo $(X, Y, Z) \to \big(X(b)^{\frac{1}{2}}, Yc/(b)^{\frac{1}{2}}, Zc/b\big)$.

(*) D'ora in poi, per semplicità, continueremo ad indicare sempre con gli stessi simboli i coefficienti da cui dipendono le superficie delle famiglie in esame.

A $\mu = 2$ corrispondono superficie di equazione $XZ + aX^3 + bX^2Y + cXY^2 + Y^2 = 0$. Se $b = c = 0$ si ottengono superficie isomorfe alla

72: $$XZ + X^3 + Y^2 = 0 .$$

Se $b \neq 0$ e $c = 0$ si ottengono superficie isomorfe alla

73: $$XZ + X^2Y + Y^2 = 0 .$$

Se $b = 0$ e $c \neq 0$ si ottengono superficie isomorfe alla

74: $$XZ + XY^2 + Y^2 = 0 .$$

Se $b \neq 0$ e $c \neq 0$ si ottengono superficie isomorfe alla

75: $$XZ + X^2Y + XY^2 + Y^2 = 0$$

tramite l'isomorfismo $(X, Y, Z) \to (Xc, Yc^2/b, Zc^3/b^2)$.

Dall'Oss. 7.3, 1) segue che l'ordine dell'anello $k[\mathcal{F}]$ corrispondente alle **72**, ..., **74** è $\lambda = 2$.

A $\mu = 3$ corrispondono superficie di equazione $XZ + bX^2Y + cXY^2 + Y^3 = 0$. Se $b = c = 0$ si ottiene la superficie

76: $$XZ + Y^3 = 0 .$$

Se $b = 0$ e $c \neq 0$ si ottengono superficie l.i. alla **18** tramite $(X, Y, Z) \to (-Y, Z/c, cX + Y)$. Se $b \neq 0$, mediante l'isomorfismo $(X, Y, Z) \to (X, -X + Y/d, Z/d^3)$ dove d è una radice dell'equazione $U^2 + cU + b = 0$, e se si pone $t = (c + 2d)/d$, si ottengono le superficie della famiglia $XZ + Y(X + Y)(tX + Y) = 0$. Le superficie che se ne deducono per $t = 0$ e per $t = 1$ sono linearmente isomorfe alla **18** rispettivamente tramite $(X, Y, Z) \to (-Y, Z, X + Y)$, $(X, Y, Z) \to (iX + iY, Z, -iY)$ dove $i^2 = -1$. Rimangono le superficie

77: $$XZ + Y(X + Y)(tX + Y) = 0 , \quad t \in k,\ t \neq 0,\ t \neq 1 .$$

Le superficie $\mathcal{F}(t)$ e $\mathcal{F}(t')$ dedotte dalla (77) in corrispondenza ai valori $t, t' \in k$, e diversi da 0 e da 1, sono linearmente isomorfe se e solo se

$$t' \in \{1/t, 1 - t, 1/(1 - t), t/(t - 1), (t - 1)/t\} .$$

Infatti si ha che $\mathcal{F}(1/t)$, $\mathcal{F}(1 - t)$, $\mathcal{F}(1/(1 - t))$, $\mathcal{F}(t/(t - 1))$, $\mathcal{F}((t - 1)/t)$ sono l.i. a $\mathcal{F}(t)$ tramite

$$(X, Y, Z) \to (X, tY, t^3Z)$$
$$(X, Y, Z) \to (X, -X - Y, -Z)$$
$$(X, Y, Z) \to (X, -X + (t - 1)Y, (t - 1)^3Z)$$

$$(X, Y, Z) \to \big(X, -tX + (1-t)Y, (1-t)^3 Z\big)$$

$$(X, Y, Z) \to (X, -tX - tY, -t^3 Z)$$

nell'ordine. Dall'Oss. 7.3, 1) segue che l'ordine dell'anello $k[\mathcal{F}]$ corrispondente alle **76** e **77** è $\lambda = 3$.

Caso m). – In questo caso le superficie $\mathcal{F}$ hanno equazione $Z + B = 0$ con $B \in k[X, Y]$ di grado 3; l'anello $k[\mathcal{F}]$ ad esse corrispondente è isomorfo a $k[X, Y]$ e perciò le superficie $\mathcal{F}$ sono fattoriali. Posto $B = aX^3 + bX^2Y + cXY^2 + dY^3 + eX^2 + fXY + gY^2 + C$, con $C \in k[X, Y]$ di grado al più uno, le superficie in esame risultano isomorfe, tramite $(X, Y, Z) \to (X, Y, Z + C)$, alle superficie di equazione $Z + aX^3 + bX^2Y + cXY^2 + dY^3 + eX^2 + fXY + gY^2 = 0$. Si osservi innanzi tutto che (a, b, c, d) non può essere la quaterna nulla perchè $\deg B = 3$. Se $b = c = d = 0$, possiamo supporre, a meno dell'isomorfismo $(X, Y, Z) \to \big(X + e/3a, Y, Z/a - X(e^2/3a^2) - Y(ef/3a^2) - e^3/27a^3\big)$, che $a = 1$ ed $e = 0$. Così, se $g \neq 0$, si ottengono superficie isomorfe alla

$$\textbf{78:} \qquad Z + X^3 + Y^2 = 0$$

tramite $(X, Y, Z) \to \big(X - f^2/12g, (g)^{\frac{1}{2}}Y + (f/2(g)^{\frac{1}{2}})X, Z - 3f^4X/(144g^2) + f^6/(12g)^3\big)$. Se $g = 0$ e $f \neq 0$ si ottengono superficie linearmente isomorfe alla **70**. Se $g = 0$ e $f = 0$ si ottengono superficie l.i. alla

$$\textbf{79:} \qquad Z + X^3 = 0 .$$

Se invece (b, c, d) non è la terna nulla, a meno dell'isomorfismo $(X, Y, Z) \to (X, Y - a_1X, Z)$, dove a_1 è una radice dell'equazione $a + bU + cU^2 + dU^3 = 0$, si può supporre $a = 0$. Pertanto o (c, d) è la coppia nulla, e quindi $b \neq 0$, oppure $(c, d) \neq (0, 0)$. Nella prima situazione si ottengono superficie di equazione $Z + bX^2Y + eX^2 + fXY + gY^2 = 0$. Tali superficie, se $g = 0$, sono l.i. alla **42** tramite $(X, Y, Z) \to \big(X + (f-b)/2b, Y(b^2 - f^2)/4b^2 - Xef/b^2 + Z/b + e(b^2 - f^2)/4b^3, Y + e/b\big)$, mentre sono l.i. alla

$$\textbf{80:} \qquad Z + XY^2 + X^2 = 0$$

se $g \neq 0$, tramite $(X, Y, Z) \to \big((Y + e_1)(g_1)^{\frac{1}{2}}, (X + f_1/2)(g_1)^{-\frac{1}{2}}, -(f_1^2/4 + 2e_1g_1)Y - e_1f_1X - (e_1f_1^2)/4 - e_1^2g_1 + Z/b\big)$, dove $e_1 = e/b$, $f_1 = f/b$, $g_1 = g/b$. Nella seconda situazione, quando cioè $(c, d) \neq (0, 0)$, a meno dell'i.l. $(X, Y, Z) \to (X - b_1Y, Y, Z)$, dove b_1 è una radice dell'equazione $bU^2 + cU + d = 0$, si può supporre $d = 0$. Si ottengono pertanto superficie di equazione $Z + XY(bX + cY) + eX^2 + fXY + gY^2 = 0$. Se $(b, c) = (0, 0)$ si ottengono superficie l.i. alle **78** o **79**; se $(b, c) \neq (0, 0)$, a meno dell'i.l. $(X, Y, Z) \to (Y, X, Z)$, si può supporre $b \neq 0$, potendo essere $c = 0$ oppure $c \neq 0$. Se $c = 0$ si ottiene la famiglia di superficie sopra esaminate che sono l.i. alla **42** o **80**; se $c \neq 0$ si può supporre $b = c = 1$, a meno dell'i.l. $(X, Y, Z) \to$ $\to (X/c, Y/b, Z/b^2c^2)$. Posto $h = f - 2(e + g)$, se $h \neq 0$ si ottengono superficie l.i. alla

81: $$Z + XY(X + Y) + XY = 0$$

tramite $(X, Y, Z) \to ((X + g)/h, (Y + e)/h, [(e^2 - ef)X + (g^2 - gf)Y + Z + (e + g -$ $- f)eg]/h^3)$. Se invece $h = 0$ si ottengono superficie l.i. alla

82: $$Z + XY(X + Y) = 0$$

tramite $(X, Y, Z) \to (X + g, Y + e, -(e^2 + 2eg)X - (g^2 + 2eg)Y + Z - eg(e + g))$.

8.3. *Equazioni delle superficie cubiche di* $\mathbb{A}_k^3$ *a curve s.i.c. non linearmente isomorfe.*

A questo proposito osserviamo quanto segue. Siano $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subset \mathbb{A}_k^3$ due superficie cubiche linearmente isomorfe mediante σ; allora è necessario che:

a) detti $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ i luoghi dei punti singolari di $\mathcal{F}_1$ e di $\mathcal{F}_2$ rispettivamente, l'isomorfismo σ induca una biiezione di $\mathcal{S}_1$ in $\mathcal{S}_2$ nella quale punti singolari corrispondenti sono dello stesso ordine e tipo;

b) detti $\mathcal{S}_1'$ e $\mathcal{S}_2'$ i luoghi dei punti singolari all'infinito di $\mathcal{F}_1$ e di $\mathcal{F}_2$ rispettivamente, l'i.l. $\tilde{\sigma}$ induca una biiezione di $\mathcal{S}_1'$ in $\mathcal{S}_2'$ nella quale punti singolari corrispondenti sono dello stesso ordine e tipo:

c) $k[\mathcal{F}_1]$ e $k[\mathcal{F}_2]$ abbiamo lo stesso ordine λ;

d) $\mathcal{F}_{1\infty}$ e $\mathcal{F}_{2\infty}$ risultino linearmente isomorfe;

e) se $\mathcal{F}_1$ è una rigata, lo sia anche $\mathcal{F}_2$, inoltre $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ siano dello stesso tipo.

Questi fatti permettono di concludere che le equazioni riportate nella tabella seguente non danno coppie di superficie l.i., ad eccezione dei casi esplicitamente precisati nell'ambito delle famiglie **1**, **3**, **7**, **39**, **45**, **77**. Infatti tenendo conto di *a*), ..., *e*) non è difficile riconoscere che potrebbero essere linearmente isomorfe in $\mathbb{A}_k^3$ solo le superficie qui sotto comprese tra parentesi

(**8**, **11**), (**46**, **52**), (**66**, **67**), (**59**, **60**), (**62**, **63**),
(**81**, **82**), (**42**, **43**), (**68**, **79**), (**38**, **39**, **58**, **61**).

Dal calcolo diretto si deduce che le superficie delle prime otto coppie non sono l.i. Per le rimanenti quattro superficie si verifica dapprima col calcolo diretto che non esistono i.l. che mutino la **38** nella **39** o la **58** nella **61**. Constatato poi che i piani osculatori lungo la retta doppia $Y_\infty Z_\infty$ delle superficie in esame sono distinti nel caso delle **38** e **39** mentre sono coincidenti nel caso delle **58** e **61**, si conclude che non vi sono coppie di superficie l.i. tra le **38**, **39**, **58**, **61**.

Le superficie cubiche di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ a curve sottoinsieme intersezione completa.

N°	Equazione di $\mathcal{F}$		Singolarità di $\tilde{\mathcal{F}}$	$\mathcal{F}_\infty$	λ
1	$X^3+Y^2Z+(t+1)X^2Z+tXZ^2+Y^2+(t+1)X^2+tXZ=0,$	$t\neq 0, 1$	$B_6(0,0,-1)+C_2(0,0,0)$	$\sim$	6
2	$X^3+Y^2Z+2X^2Z+XZ^2+Y^2+2X^2+XZ=0$		$B_6(0,0,-1)+C_2(0,0,0)$	α	6
3	$X^3+(t+1)X^2Z+tXZ^2+Y^2Z+Z^2=0$	$t\neq 0, 1$	$U_8(0,0,0)$	$\sim$	3
4	$X^3+2X^2Z+XZ^2+Y^2Z+Z^2=0$		$U_8(0,0,0)$	α	3
5	$X^3+Y^2Z+Z^2=0$		$U_8(0,0,0)$	$\prec$	6
6	$X^2Y-XY^2-3XYZ+Z^3+XY=0$		$B_3(0,0,0)+B_3(-1,0,0)+B_3(0,1,0)$	α	3
7	$X^2Y-XY^2-3tXYZ+Z^3+XY=0$	$t^3\neq -1$	$B_3(0,0,0)+B_3(-1,0,0)+B_3(0,1,0)$	$\sim$	3
8	$(XZ+Y^2)(Y+4)+(X+2Y-Z)^2=0$		$B_4(4,-4,-4)+C_2(0,0,0)+C_2(8,0,-8)$	ϕ	4
9	$(XZ+Y^2)Z+X^2=0$		$U_7(0,0,0)$	$\underline{\bigcirc}$	4
10	$(XZ+Y^2)Y+(X+2Y-Z)^2=0$		$U_7(0,0,0)$	ϕ	4
11	$(XY+Z^2)(X+Y)+XY=0$		$B_4(0,0,0)+C_2(0,-1,0)+C_2(-1,0,0)$	ϕ	4
12	$XYZ+X^2+Y^2+Z^2-2XY-2XZ-2YZ=0$		$C_2(0,0,0)+C_2(4,0,4)+C_2(0,4,4)+C_2(4,4,0)$	$\triangle$	2
13	$XYZ+(X+Y+Z)^2=0$		$U_6(0,0,0)$	$\triangle$	2
14	$XY(X+Y)+Z^2=0$		$U_6(0,0,0)$	$*$	2
15	$(X^2+Y)Z+1=0$		$B_6(Y_\infty)+C_2(Z_\infty)$	$\ddagger$	1
16	$(X^2+Y)Z+X=0$		$B_5(Y_\infty)+C_2(Z_\infty)$	$\ddagger$	1
17	$(X^2+Y)Z+Y=0$		$B_4(Y_\infty)+C_2(Z_\infty)+C_2(0,0,-1)$	$\ddagger$	2
18	$(X^2+Y)Z+XY=0$		$B_3(Y_\infty)+B_3(0,0,0)+C_2(Z_\infty)$	$\ddagger$	3
19	$(X^2+Y)Z+Y^2=0$		$B_4(0,0,0)+C_2(Z_\infty)+C_2(0,0,-1,1)$	$\ddagger$	4
20	$(X^2+Y)Z+XY^2=0$		$B_5(0,0,0)+C_2(Z_\infty)$	$\bigcirc$	5
21	$(X^2+Y)Z+Y^3=0$		$B_6(0,0,0)+C_2(Z_\infty)$	$\prec$	6
22	$(XY-1)Z+X^3=0$		$B_6(Y_\infty)+C_2(Z_\infty)$	ϕ	1
23	$(XY-1)Z+X^2=0$		$B_5(Y_\infty)+C_2(Z_\infty)$	$\triangle$	1
24	$(XY-1)Z+X=0$		$B_4(Y_\infty)+C_2(X_\infty)+C_2(Z_\infty)$	$\triangle$	1
25	$(XY-1)Z+1=0$		$B_3(X_\infty)+B_3(Y_\infty)+C_2(Z_\infty)$	$\triangle$	1
26	$(XY-1)Z+X^2(X+1)=0$		$B_5(Y_\infty)+C_2(Z_\infty)$	ϕ	1
27	$(XY-1)Z+X(X+1)=0$		$B_4(Y_\infty)+C_2(Z_\infty)$	$\triangle$	1
28	$(XY-1)Z+X+1=0$		$B_3(Y_\infty)+C_2(X_\infty)+C_2(Z_\infty)$	$\triangle$	1
29	$(XY-1)Z+X^2(X+Y+2)=0$		$B_4(Y_\infty)+C_2(Z_\infty)+C_2(-1,-1,1)$	ϕ	2
30	$(XY-1)Z+X(X+Y+2)=0$		$B_3(Y_\infty)+C_2(Z_\infty)+C_2(-1,-1,-1)$	$\triangle$	2
31	$(XY-1)Z+X+Y+2=0$		$C_2(X_\infty)+C_2(Y_\infty)+C_2(Z_\infty)+C_2(-1,-1,1)$	$\triangle$	2
32	$(XY-1)Z+X(X+1)(X+Y+2)=0$		$B_3(Y_\infty)+B_3(-1,-1,0)+C_2(Z_\infty)$	ϕ	3
33	$(XY-1)Z+(X+1)(X+Y+2)=0$		$B_3(-1,-1,0)+C_2(Y_\infty)+C_2(Z_\infty)$	$\triangle$	3
34	$(XY-1)Z+X(X+Y+2)^2=0$		$B_4(-1,-1,0)+C_2(Z_\infty)+C_2(0,0,-1,1)$	ϕ	4
35	$(XY-1)Z+(X+Y+2)^2=0$		$B_4(-1,-1,0)+C_2(Z_\infty)$	$\triangle$	4
36	$(XY-1)Z+(X+1)(X+Y+2)^2=0$		$B_5(-1,-1,0)+C_2(Z_\infty)$	ϕ	5
37	$(XY-1)Z+(X+Y+2)^3=0$		$B_6(-1,-1,0)+C_2(Z_\infty)$	α	6
38	$X(X+1)Z+1=0$		Punto triplo in Y_∞ e retta doppia $Y_\infty Z_\infty$	$\ddagger$	1
39	$X(X+1)Z+tX+1=0$	$t\neq 0, 1$	Punto triplo in Y_∞ e retta doppia $Y_\infty Z_\infty$	$\ddagger$	1

40	$X(X+1)Z+(X+1)Y+X=0$		Rigata di Cayley con retta doppia $Y_\infty Z_\infty$	╪	1
41	$X(X+1)Z+(X+1)Y^2+X=0$		$B_6(Z_\infty)+C_2(0,0,-1)$	$\underline{\bigcirc}$	2
42	$X(X+1)Z+Y=0$		Rigata cubica generale con retta doppia $Y_\infty Z_\infty$	╪	1
43	$X(X+1)Z-XY+Y=0$		Rigata cubica generale con retta doppia $Y_\infty Z_\infty$	╪	1
44	$X(X+1)Z+XY^2+Y^3+XY=0$		$B_5(Z_\infty)+C_2(0,0,0)$	$\underline{\bigcirc}$	2
45	$X(X+1)Z+(1+t)XY^2+Y^2=0$	$t\neq 0$	$B_4(Z_\infty)+C_2(0,0,0)+C_2(-1,0,0)$	$\underline{\bigcirc}$	2
46	$X(X+1)Z+Y^3=0$		$B_3(Z_\infty)+B_3(0,0,0)+B_3(-1,0,0)$	α	3
47	$XYZ+1=0$		$B_3(X_\infty)+B_3(Y_\infty)+B_3(Z_\infty)$	$\triangle$	1
48	$XYZ+(Y+1)^2=0$		$B_3(X_\infty)+B_3(Z_\infty)+C_2(0,-1,0)$	$\triangle$	2
49	$XYZ+(Y+1)^3=0$		$B_3(X_\infty)+B_3(Z_\infty)+B_3(0,-1,0)$	$\underline{\bigcirc}$	3
50	$XYZ+(Y+1)^2+X(X+2)=0$		$B_3(Z_\infty)+C_2(0,-1,2)+C_2(-1,0,2)$	$\triangle$	2
51	$XYZ+(Y+1)^3+X(X+2)=0$		$B_3(Z_\infty)+B_3(0,-1,2)+C_2(-1,0,3)$	Φ	6
52	$XYZ+(Y+1)^3+X(X^2+3X+3)=0$		$B_3(Z_\infty)+B_3(-1,0,3)+B_3(0,-1,3)$	α	3
53	$XYZ+(X+1)^2X+Y=0$		$B_4(Z_\infty)+C_2(Y_\infty)+C_2(-1,0,1)$	Φ	2
54	$XYZ+(X+1)X+Y^2=0$		$B_5(Z_\infty)$	$\triangle$	2
55	$XYZ+(X+1)^2X+Y^2=0$		$B_5(Z_\infty)+C_2(-1,0,0)$	Φ	4
56	$XYZ+(X+1)X+Y^3=0$		$B_6(Z_\infty)$	Φ	3
57	$XYZ+(X+1)^2X+Y^3=0$		$B_6(Z_\infty)+C_2(-1,0,0)$	α	6
58	$X^2Z+1=0$		Punto triplo in Y_∞ e retta doppia $Y_\infty Z_\infty$	╪	1
59	$X^2Z+XY^2+1=0$		$U_8(Z_\infty)$	$\underline{\bigcirc}$	1
60	$X^2Z+XY^2+X+1=0$		$U_8(Z_\infty)$	$\underline{\bigcirc}$	1
61	$X^2Z+X+1=0$		Punto triplo in Y_∞ e retta doppia $Y_\infty Z_\infty$	╪	1
62	$X^2Z+XY^2+Y=0$		$U_7(Z_\infty)$	$\underline{\bigcirc}$	1
63	$X^2Z+XY^2+XY+Y=0$		$U_7(Z_\infty)$	$\underline{\bigcirc}$	1
64	$X^2Z+Y^2+X=0$		$U_7(Z_\infty)$	╪	2
65	$X^2Z+XY^2+Y^2+X=0$		$U_7(Z_\infty)$	$\underline{\bigcirc}$	2
66	$X^2Z+Y^3+X=0$		$U_8(Z_\infty)$	$\prec$	3
67	$X^2Z+XY+Y^3+X=0$		$U_8(Z_\infty)$	$\prec$	3
68	$XZ+X^3+1=0$		Punto triplo in Y_∞ e retta doppia $Y_\infty Z_\infty$	$\equiv$	1
69	$XZ+X^2Y+XY^2+1=0$		$B_6(Z_\infty)$	$\triangle$	1
70	$XZ+X^3+Y=0$		Rigata di Cayley con retta doppia $Y_\infty Z_\infty$	$\equiv$	1
71	$XZ+X^2Y+XY^2+Y=0$		$B_5(Z_\infty)$	$*$	1
72	$XZ+X^3+Y^2=0$		$B_6(Z_\infty)+C_2(0,0,0)$	$\equiv$	2
73	$XZ+X^2Y+Y^2=0$		$B_5(Z_\infty)+C_2(0,0,0)$	╪	2
74	$XZ+XY^2+Y^2=0$		$B_4(Z_\infty)+C_2(0,0,0)+C_2(X_\infty)$	╪	2
75	$XZ+X^2Y+XY^2+Y^2=0$		$B_4(Z_\infty)+C_2(0,0,0)$	$*$	2
76	$XZ+Y^3=0$		$B_3(Z_\infty)+B_3(X_\infty)+B_3(0,0,0)$	$\equiv$	3
77	$XZ+Y(X+Y)(tX+Y)=0$	$t\neq 0, 1$	$B_3(Z_\infty)+B_3(0,0,0)$	$*$	3
78	$Z+X^3+Y^2=0$		$U_8(Z_\infty)$	$\equiv$	1
79	$Z+X^3=0$		Punto triplo in Y_∞ e retta doppia $Y_\infty Z_\infty$	$\equiv$	1
80	$Z+XY^2+X^2=0$		$U_7(Z_\infty)$	╪	1
81	$Z+X^2Y+XY^2+XY=0$		$U_6(Z_\infty)$	$*$	1
82	$Z+X^2Y+XY^2=0$		$U_6(Z_\infty)$	$*$	1

BIBLIOGRAFIA

[1] S. S. ABHYANKAR, *Non prefactorial local rings*, Amer. Journ. of Math., **89** (1967), p. 1137.

[2] A. ANDREOTTI - P. SALMON, *Anelli con unica decomponibilità in fattori primi ed un problema di intersezioni complete*, Monatsh. f..r Math., **61** (2) (1957), pp. 97-142.

[3] E. BERTINI, *Complementi di Geometria Proiettiva*, Zanichelli, Bologna (1929).

[4] D. GALLARATI, *Problemi di completa interferenza in geometria algebrica*, Rend. Sem. Fac. Sc. Univ. Cagliari, **46** (3-4) (1976), pp. 242-270.

[5] R. HARTSHORNE, *Algebraic Geometry*, Springer, New York (1977).

[6] D. MUMFORD, *Introduction to Algebraic Geometry*, Lectures Notes, Harvard (1967).

[7] G. SALMON, *Treatise on Algebraic Geometry of three dimension*, Dublin (1882).

[8] E. STAGNARO, *Le superficie cubiche di* $\mathbb{P}^3$ *a curve sottoinsieme intersezione completa*, Atti Acc. Ligure Sc. Lett., **31** (1974), pp. 138-148.

[9] E. STAGNARO, *Su alcune generalizzazioni della nozione di dominio fattoriale*, Ann. Univ. Ferrara, **19** (1974), pp. 157-179.

[10] E. STAGNARO, *Le ipersuperficie cubiche di* $\mathbb{P}^4$ *a superficie intersezione completa e sottoinsieme intersezione completa*, Boll. U.M.I., **12**, (4) (1975), pp. 106-114.

[11] U. STORCH, *Fastfactorielle Ringe*, Schriftenreihe des Math. Inst. Münster, **36** (1967), pp. 1-42.