Problème de Cauchy sur un conoïde caractéristique pour des équations quasi-linéaires (*).

FRANCIS CAGNAC (Yaoundé, Cameroun)

Summary. – *Cauchy problem for system of quasilinear differential equations of order two on a characteristic conoid is solved. It is proved that, given a conoid with the values of the unknown functions on it such that it is a characteristic conoid, there is a unique solution, which is smooth at the apex of the conoid. This result is obtained under smoothness conditions on the data and some supplementary conditions on the data at the apex of the conoid, and by use of Leray's theory* [6].

Introduction.

Le problème de Cauchy sur un conoïde caractéristique a été étudié d'abord pour les équations linéaires à coefficients constants. D'ADHÉMAR [1], au début de ce siècle, étudia ce problème pour les équations à 3 variables, et plus récemment, Marcel RIESZ [2] pour les équations à n variables.

Je me suis moi-même interessé à ce problème pour des systèmes d'équations linéaires à coefficients variables [3], [4] en utilisant la méthode de solution proposée par Mme CHOQUET-BRUHAT [5]. Ici ce problème est abordé pour des systèmes d'équations quasi linéaires du second ordre en utilisant les méthodes de solution proposées par LERAY [6].

Nous nous intéressons donc aux systèmes de n équations quasi-linéaires de n fonctions inconnues w_r de 4 variables réelles x^α, du type suivant:

$$(E_r) \qquad A^{\lambda\mu}(x^\alpha, w_s)D_{\lambda\mu} w_r + f_r(x^\alpha, w_s, D_\nu w_s) = 0$$
$$r, s = 1, \dots, n;\ \alpha, \lambda, \mu = 1, \dots, 4; D_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \qquad D_{\lambda\mu} = \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\mu}.$$

Dans leur domaine de définition, les $A^{\lambda\mu}$ définissent une forme quadratique de signature $- - - +$, $A^{44} > 0$, $A^{ii} < 0$ $(i = 1, \dots, 3)$.

Des données de Cauchy caractéristiques pour le système (E_r) consistent en la donnée simultanée:

— de n fonctions $\varphi_r(x^i)$;

— d'une hypersurface caractéristique S, d'équation $x^4 - S(x^i) = 0$, où S est

(*) Entrata in Redazione il 24 ottobre 1980.

telle que:

$$A^{44} - 2A^{4i}\frac{\partial S}{\partial x^i} + A^{ij}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^j} = 0 \tag{1}$$

les $A^{\lambda\mu}$ étant pris pour les arguments $x^4 = S(x^i)$, et $w_s = \Phi_s(x^i)$.

Pour obtenir de telles données:

1). Ou bien on se donne une solution u_r des équations (E_r) et on construit une hypersurface caractéristique S pour cette solution. Les fonctions φ_r sontalors la restriction à S des u_r.

2). Ou bien on se donne des fonctions arbitraires $\overline{w}_r(x^\alpha)$; on détermine une hypersurface S solution de (1) quand on prend les $A^{\lambda\mu}$ pour les arguments $w_s = \overline{w}_s(x^\alpha)$ et on prend pour φ_r les restrictions à S des $\overline{w}_r$. Ici, nous nous placerons essentiellement dans cette deuxième hypothèse (les résultats obtenus vaudront donc aussi a fortiori dans l'hypothèse 1), en remplaçant les $\overline{w}_r$ par les u_r de l'hypothèse 1)).

Ici nous nous interessons au cas où l'hypersurface est un conoïde caractéristique C_0, c'est-à-dire une solution de (1) engendrée par les bicaractéristiques issues du même point 0. Le problème de Cauchy consiste à chercher les fonctions w_r solutions du système (E_r) qui prennent sur C_0 les valeurs φ_r. Nous montrerons que, moyennant certaines hypothèses de différentiabilité concernant les $A^{\lambda\mu}, f_r, \overline{w}_r$, ce problème a une solution et une seule au voisinage du sommet du conoïde.

Pour cela, nous utilisons la méthode employée par LERAY [6] pour résoudre le problème de Cauchy ordinaire à données nulles pour des équations quasi-linéaires.

Dans la partie A de ce travail, nous montrons que cette méthode peut s'appliquer sans changement pour un problème de Cauchy à données nulles sur un conoïde caractéristique.

Tout reviendra alors à montrer à quelles conditions on peut ramener un problème de Cauchy quelconque sur le conoïde caractéristique C_0 à un problème de Cauchy à données nulles sur C_0.

Cela nous amène à montrer, dans la partie B, que moyennant des hypothèses de différentiabilité convenable sur les données $A^{\lambda\mu}, f_r, \overline{w}_r$, et moyennant des conditions concernant les valeurs au sommet 0 du conoïde de ces fonctions et de leurs dérivées, les solutions $q+1$ fois dérivables de ce problème de Cauchy ont toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre q déterminées de façon unique sur le conoïde C_0.

Enfin dans la partie C, utilisant les résultats précédents, nous pourrons ramener le problème de Cauchy sur un conoïde caractéristique défini par $A^{\lambda\mu}, f_r, \overline{w}_r$, à un problème de Cauchy à données nulles sur C_0, vérifiant les hypothèses voulues pour que la méthode de Leray exposée à la partie A soit applicable.

Le théorème obtenu est énoncé à la fin de ce travail.

A) PROBLÈME DE CAUCHY A DONNÉES NULLES SUR UN CONOÏDE CARACTERISTIQUE

Les raisonnements de LERAY [6] s'appliquent sans changement en remplaçant l'hypersurface $x^4 = 0$ par l'hypersurface C_0 d'équation: $x^4 = S(x^i)$, pourvu que C_0 ait la régularité suffisante pour que les traces des fonctions qui interviennent soient définies sur C_0.

1. – Hypothèses.

a) Domaines de Définition.

— Les fonctions $A^{\lambda\mu}(x^\alpha, w_s)$ sont définies dans un domaine $U \times W$ où U est un ouvert de R^4 contenant l'origine 0, et W est un ouvert de R^n contenant l'origine.

— Les fonctions $f_r(x^\alpha, w_s, w_{s\nu})$ sont définies dans un domaine $U \times W \times W'$, où W' est un domaine de R^{4n} contenant l'origine.

— $\forall (x^\alpha, w_s) \in U \times W$, les $A^{\lambda\mu}(x^\alpha, w_s)$ définissent une forme quadratique de signature $- - - +$, $A^{44} > 0$, et $A^{ii} < 0$.

b) Propriétés de dérivation.

Les $A^{\lambda\mu}$ et les f_r ont des dérivées — au sens des distributions — jusqu'à l'ordre t qui sont des fonctions.

$t \geqslant 6$ (ce nombre 6 correspondant à la dimension, 4, de l'espace où nous nous plaçons).

Les $A^{\lambda\mu}$, f_r et leurs dérivées jusqu'à l'ordre t, sont telles que: $\sup\limits_{w_s \in W} |D^\alpha A^{\lambda\mu}(x, w_s)|$ est une fonction localement de carré-intégrable, pour tout indice de dérivation α par rapport aux variables x^α et w_s, tel que $|\alpha| \leqslant t$.

$\sup\limits_{\substack{w_s \in W \\ w_{s\nu} \in W'}} |D^\alpha f(x, w_s, w_{s\nu})|$ est localement de carré intégrable pour tout indice de dérivation α par rapport aux variables x^α, w_s, $w_{s\nu}$ tel que $|\alpha| \leqslant t$.

c) Conoïde caractéristique C_0.

— C_0 est le demi-conoïde de sommet 0, orienté vers les x^4 positifs. On suppose qu'il a pour équation: $x^4 = S(x^i)$, $i = 1, \ldots, 3$. O étant le sommet du conoïde $S(0) = 0$ et $S(x^i) \geqslant 0$:

– S est définie dans un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de 0 dans R^3;

- S est continue dans $\mathcal{V}$;
- S est de classe C^t dans $\mathcal{V} - \{0\}$.

— C_0 étant une hypersurface caractéristique pour le problème de Cauchy à données nulles, S vérifie l'équation:

$$A^{44} + 2A^{4i}q_i + A^{ij}q_iq_j = 0\,, \quad \text{en posant } q_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i}\,,$$

où les $A^{\lambda\mu}$ sont pris pour les arguments $x^4 = S(x^i)$, et $w_s = 0$.

— Il existe $\sigma_0 > 0$, tel que le domaine: $Y_0 = \{x^\alpha | S(x^i) \leqslant x^4 \leqslant \sigma_0\}$ soit contenu dans U.

d) *Données nulles jusqu'à l'ordre t.*

On suppose que:

$$D_4^k f_r(x^i, S(x^i);\ 0;\ 0) = 0 \qquad \text{pour } 0 \leqslant k \leqslant t-1 \text{ et } (x^i) \in \mathcal{V}\,.$$

2. – Le Théorème d'existence et unicité pour le problème de Cauchy à données nulles.

THÉORÈME. – *Les hypothèses étant celles du* § 1, *il existe* $\sigma_1 > 0$, *tel que* $\forall \sigma < \sigma_1$, *le système d'équations*:

$$(E_r) \qquad A^{\lambda\mu}(x^\alpha, u_s) D_{\lambda\mu} u_r + f_r(x^\alpha, u_s, D_\nu u_s) = 0$$

a une solution unique (u_r) *telle que*:

— (u_r) *est définie dans le domaine* $Y = \{x^\alpha | S(x^i) \leqslant x^4 < \sigma\}$ *et* $u_r \in H^{t+1}(Y)$;

— *sur* C_0, $D_4^k u_r = 0$ *pour* $0 \leqslant k \leqslant t$.

($H^m(Y)$ désigne l'espace des fonctions définies sur Y, ayant des dérivées jusqu'à l'ordre m qui sont des fonctions de carré intégrable, muni de la norme:

$$\|u\|_{H^m(Y)} = \Big(\int_Y \sum_{|\alpha| \leqslant m} |D^\alpha u_r(x)|^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2}}\,.$$

DÉMONSTRATION. – Elle résulte des deux lemmes suivants, que démontre Leray dans le cas où Y est une bande $0 \leqslant x^4 < \sigma$, et qui restent vrais dans le cas où Y est le domaine $S(x^i) \leqslant x^4 < \sigma$. Ce domaine Y étant borné, les hypothèses de locale sommabilité énoncées au § 1 *b*) sont suffisantes.

LEMME 1. – *Soit l'équation:*

$$A^{\lambda\mu}(x)\,D_{\lambda\mu}u = w \tag{2}$$

où les $A^{\lambda\mu}$ sont définies dans un voisinage ouvert U de l'origine dans R^4 et deéfinissent une forme quadratique de signature $---+$, $A^{44}>0$ et

$$A^{ii}<0; \quad et \quad A^{\lambda\mu}\in H^t_{\text{loc}}(U)\,, \quad t\geqslant 6\,.$$

— *Soit C_0, le conoïde caractéristique de sommet 0, d'équation $x^4 = S(x^i)$, où S est défini sur un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans R^3, continu dans $\mathcal{V}$ et de classe C^t dans $\mathcal{V}-\{0\}$.*

— *Soit $\sigma_0>0$, un nombre tel que le domaine $Y_0=\{x^\alpha|S(x^i)<x^4<\sigma_0\}$ soit contenu dans U.*

1) *Soit w une fonction définie sur $Y=\{x^\alpha|S(x^i)\leqslant x^4<\sigma|\}$, $\sigma\leqslant\sigma_0$, $w\subset H^1(Y)$; sur C_0, $w=0$. Alors l'équation (2) a une solution unique u telle que: $u\in H^2(Y)$ et sur C_0, $u=0$ et $D_4u=0$.*

2) *Si en outre, $w\in H^t(Y)$ et si sur C_0, $D_4^kw=0$, $0\leqslant k\leqslant t-1$, alors la solution u est telle que:*

— *$u\in H^{t+1}(Y)$;*

— *sur C_0, $D_4u=0$, $0\leqslant k\leqslant t$;*

— *il existe des constantes α et σ_0', ne dépendant que des bornes des $A^{\lambda\mu}$ et de leurs dérivées, telles que pour $\sigma\leqslant\sigma_0'$,*

$$\|u\|_{H^{t+1}(Y)}\leqslant\alpha\cdot\sigma\cdot\|w\|_{H^t(Y)}\,.$$

La démonstration est la même que celle de Leray, en remarquant que puisque C_0 est caractéristique, dans la variété $\Omega=\{x^4<\sigma\}$, l'émission de Y est égale à Y; et que les propriétés de régularité de S suffisent à entraîner que si $w\in H^t(Y)$ et si sur C_0, $D_4^kw=0$, $0\leqslant k\leqslant t-1$, alors le prolongement $\tilde{w}$ de w par 0 dans $\Omega-Y$ appartient à $H^t(\Omega)$.

LEMME 2. – *Les hypothèses étant celles du § 1, soit le système d'équations:*

$$A^{\lambda\mu}(x^\alpha, v_s)\,D_{\lambda\mu}u_r + f_r(x^\alpha, v_s, D_\nu v_s) = 0 \tag{3}$$

où

$$v_s\in H^{t+1}(Y)\,, \quad s=1,\dots,n, \;\; Y=\{x^\alpha|S(x^i)\leqslant x^4<\sigma\}\,, \quad \sigma<\sigma_0'$$

et sur C_0, $D_4^kv_s=0$ pour $0\leqslant k\leqslant t$.

Il existe des constantes $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 > 0$, *telles que pour:*

$$\|v_s\|_{H^{t+1}(Y)} \leqslant \gamma_0\,, \qquad s = 1, \dots, n\,,$$

l'équation (3) *a une solution et une seule* (u_r), *telle que:*

$$\begin{cases} - \; u_r \in H^{t+1}(Y), \; r = 1, \dots, n \\ - \; \textit{sur } C_0,\; D_4^k u_r = 0,\; 0 \leqslant k \leqslant t \\ - \; \|u_r\|_{H^{t+1}(Y)} \leqslant \gamma_1 \sigma \end{cases}$$

et si u *et* u^* *sont les solutions correspondant à* v *et* v^*, *on a:*

$$\operatorname*{Sup}_r \|u_r - u_r^*\|_{H^t(Y)} \leqslant \gamma_2 \sigma \sup_r \|v_r - v_r^*\|_{H^t(Y)}\,.$$

Ce lemme 2 est une conséquence du lemme 1, les hypothèses entraînant que les fonctions $A^{\lambda\mu}[x^\alpha, v_s(x^\alpha)]$ et $f_r[x^\alpha, v_s(x^\alpha), D_\nu v_s(x^\alpha)]$, vérifient les hypothèses du lemme 1 pourvu que $\|v_s\|_{H^{t+1}(T)} \leqslant \gamma_0$, et, sous cette condition, les constantes α et σ_0' du lemme 1 peuvent être choisies indépendantes des v_s.

Du lemme 2, Leray déduit le théorème sous la forme suivante, un peu plus restrictive quant à l'unicité que l'énoncé donné ci-dessus:

il existe $\sigma_1 > 0$, tel que $\forall \sigma \leqslant \sigma_1$, le système (E_r) a une solution unique (u_r) telle que:

— u_r est définie sur Y;

— $u_r \in H^{t+1}(Y)$ et $\|u_r\|_{H^{t+1}(Y)} < \gamma_0$;

— sur C_0, $D_4^k u_r = 0$ pour $0 \leqslant k \leqslant t$.

Mais on peut enlever la condition $\|u_r\|_{H^{t+1}(Y)} < \gamma_0$ par le raisonnement suivant:

La partie « existence » du théorème ci-dessus, entraîne que sur Y, le système (E_r) a une solution (u_r) telle que $\|u_r\|_{H^{t+1}(Y)} < \gamma_0$, et sur C_0, $D_4^k u_r = 0$, $0 \leqslant k \leqslant t$. Soit u_r^* une autre solution de (E_r), définie sur Y, telle que sur C_0, $D_4^k u_r^* = 0$, et telle seulement que $u_r^* \in H^{t+1}(Y)$. On peut trouver $\sigma' < \sigma$, tel que sur $Y' = \{x^\alpha | S(x^i) \leqslant x^4 < \sigma'\}$

$$\|u_r^*\|_{H^{t+1}(Y')} < \gamma_0\,. \tag{4}$$

Désignons par σ^* la borne supérieure des σ' tels que (4).

La partie « unicité » du théorème ci-dessus entraîne que sur $Y^* = \{x^\alpha | S(x^i) \leqslant x^4 < \sigma^*\}$, $u_r = u_r^*$, donc $\|u_r^*\|_{H^{t+1}(Y^*)} < \gamma_0$. Si on avait $\sigma^* < \sigma$, on pourrait trouver $\sigma'' > \sigma^*$, tel que $\|u_r^*\|_{H^{t+1}(Y'')} < \gamma_0$, d'où $\sigma^* = \sigma$.

B) CONDITIONS POUR UN PROBLÈME DE CAUCHY BIEN POSÉ SUR UN CONOÏDE CARACTÉRISTIQUE

Dans cette partie, nous montrons que, moyennant des hypothèses de différentiabilité convenables sur les $A^{\lambda\mu}, f_r, \overline{w}_r$, et moyennant des conditions concernant les valeurs au point 0 de ces fonctions et de leurs dérivées, les solutions $q+1$ fois dérivables du problème de Cauchy sur le conoïde caractéristique $\mathcal{C}_0$ défini par $(A^{\lambda\mu}, f_r, \overline{w}_r)$, ont toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre q déterminées de façon unique sur le conoïde $\mathcal{C}_0$.

Plan de cette partie.

I. Conoïdes caractéristiques.

II. Détermination des dérivées premières.

III. Détermination des dérivées d'ordre plus élevé.

I. Conoïdes caractéristiques.

Dans ce chapitre nous précisons les propriétés des fonctions qui serviront à représenter le conoïde $\mathcal{C}_0$ en fonction des données $A^{\lambda\mu}, \overline{w}_r$. Dans un premier paragraphe nous rappelons les résultats obtenus dans le cas des équations linéaires [3], [4].

1. – Conoïde caractéristique d'équation linéaires.

Nous considérons ici des équations linéaires du type

$$\overline{A}^{\lambda\mu}(x^\alpha)\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + f_r = 0$$

et nous rappelons, en les généralisant, les résultats obtenus dans [3], [4], [5].

Hypothèse A_p $(p \geqslant 2)$. – *Les fonctions* $\overline{A}^{\lambda\mu}(x^\alpha)$, $\alpha, \lambda, \mu = 1, \ldots, 4$, *sont définies dans un ouvert* U *de* R^4 *contenant le point* 0 $(x^\alpha = 0)$.

Dans U, *la forme quadratique* $\overline{A}^{\lambda\mu}x_\lambda x_\mu$ *est définie, a une signature* $+---$; $\overline{A}^{44} > 0$, $\overline{A}^{ii} < 0$, $i = 1, \ldots, 3$.

Dans U, *les fonctions* $A^{\lambda\mu}$ *sont de classe* C^p, $p \geqslant 2$.

Conséquences de A_p.

a) Les bandes caractéristiques de l'équation

$$\overline{F}(x^\alpha, q_j) \equiv \overline{A}^{44} + 2\overline{A}^{4i}q_i + \overline{A}^{ij}q_iq_j = 0\,; \qquad q_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i},\ x^4 = S(x^i) \tag{1}$$

issues du point 0, sont solutions du système intégral

$$\left\{\begin{aligned} x^\alpha &= \int_0^{\lambda_1} \overline{T}^\alpha(x^\mu, q_j)\, d\lambda_1 \\ q_i &= q_i^0 + \int_0^{\lambda_1} \overline{R}_i(x^\mu, q_j)\, d\lambda_1 \end{aligned}\right. \tag{2}$$

où $\overline{T}^\alpha(x^\mu, q_j) = \overline{A}^{\alpha 4} + \overline{A}^{\alpha j} q_j$

$$\overline{R}_i(x^\mu, q_j) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{F}}{\partial x^i} - q_i \frac{\partial \overline{F}}{\partial x^4}\right)$$

où les q_i^0 sont choisis de façon que

$$\overline{F}(0, q_i^0) = 0\,. \tag{3}$$

Le système (2) a une solution $x^\alpha(\lambda_1, q_i^0)$, $q_i(\lambda_1, q_i^0)$, formée de fonctions qui sont $p-1$ fois dérivables par rapport aux q_i^0 et a fortiori par rapport à l'ensemble des variables λ_1, q_i^0.

Cette solution est définie dans le produit d'un voisinage de $\lambda_1 = 0$ et d'un voisinage dans R^3 de l'ensemble des q_i^0 vérifiant (3).

Nous nous limitons au domaine $\lambda_1 \geqslant 0$, ou $x^4 \geqslant 0$.

b) Pour simplifier l'étude du conoïde au voisinage de 0, nous faisons en plus de l'hypothèse A_p l'hypothèse B suivante, qui peut toujours être vérifiée moyennant un changement de variables linéaires.

HYPOTHÈSE B.

$$\overline{A}^{44}(0) = 1\,, \quad \overline{A}^{4i}(0) = 0\,, \quad \overline{A}^{ij}(0) = -\,\delta^{ij}\,.$$

Conséquences de A_p *et* B:

α) la condition $F(0, q_i^0) = 0$ s'écrit

$$\sum_{i=1}^{3} (q_i^0)^2 = 1\,.$$

On peut repérer les bicaractéristiques issues de 0 au moyen de coordonnées sphériques λ_2, λ_3, telles que:

$$(5) \qquad \begin{cases} q_1^0 = \sin\lambda_2 \cos\lambda_3 \,, \\ q_2^0 = \sin\lambda_2 \sin\lambda_3 \,, \\ q_3^0 = \cos\lambda_2 \,. \end{cases}$$

Compte tenu de (5) la solution $x^\alpha(\lambda_1, q_i^0)$ de (2) définit des fonctions $x^\alpha(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ qui sont une représentation paramétrique de $\mathcal{C}_0$.

β) Il existe un domaine $(\mathcal{C}_0)$ de $\mathcal{C}_0$, défini par une condition

$$0 \leqslant \lambda_1 < \psi(\lambda_2, \lambda_3)$$

(où ψ est strictement positive et continue)

qui ne contient pas d'autre point singulier de $\mathcal{C}_0$ que 0.

Sur $(\mathcal{C}_0)$ les fonctions $x^i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ peuvent être résolues en λ_1, λ_2, λ_3 et $(\mathcal{C}_0)$ admet une représentation par une équation

$$x^4 = S(x^i)$$

où S a les propriétés suivantes:

— S est définie dans un voisinage $\mathcal{D}$ de 0 dans R^3 et y est continue;

— S est p fois dérivable sauf au point 0.

$$\frac{\partial S}{\partial x^i} = - q_i \,.$$

γ) Au voisinage de 0, les fonctions $x^\alpha(\lambda_1, q_j^0)$ et $q_i(\lambda_1, q_j^0)$ admettent des développements limités de la forme:

$$(6) \qquad \begin{cases} x^\alpha = \sum\limits_{k=1}^{p+1} C_k^\alpha(q_j^0)\,\lambda_1^k + o(\lambda_1^{p+1}) \,, \\ q_i = \sum\limits_{k=0}^{p} D_{i,k}(q_j^0)\,\lambda_1^k + o(\lambda_1^p) \,. \end{cases}$$

Les $C_k^\alpha(q_j^0)$, $D_{i,k}(q_j^0)$ sont des polynomes par rapport aux q_j^0. (On a: $C_1^i = - q_i^0$, $C_1^4 = 1$, $D_{i0} = q_i^0$).

Désignons par $\overline{A}^{(l)}$ l'ensemble des nombres

$$D^{\alpha}\overline{A}^{\lambda\mu}(0)\,, \quad \text{pour } \lambda,\, \mu = 1, \ldots, 4,\ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_4),\ |\alpha| \leqslant l\,.$$

— Les C^i_k sont aussi des polynomes par rapport aux $\overline{A}^{(k-1)}$.

— Les $D_{i,k}$ sont aussi des polynomes par rapport aux $\overline{A}^{(k)}$.

Les dérivées des fonctions $x^{\lambda}(\lambda_1, q^0_j)$, $q_i(\lambda_1, q^0_j)$ par rapport aux variables λ_1, q^0_j admettent aussi des développements limités en λ_1 dont la partie régulière s'obtient à partir de (6) par dérivation terme à terme.

δ) Sur $(\mathcal{C}_0)$, les fonctions $\lambda_1(x^j)$, $q^0_i(x^j)$ qui expriment les valeurs des paramètres λ_1, q^0_i en fonction des coordonnées x^j des points de $(\mathcal{C}_0)$ sont $p-1$ fois dérivables, sauf en 0.

Au voisinage de 0, ces fonctions admettent des développements limités en fractions rationnelles homogènes (*frh*) de x^i, s, dont le dénominateur est une puissance de s, s^e; $s = \sqrt{\sum (x^i)^2}$, $i = 1, \ldots, 3$

$$(7)\qquad \begin{cases} \lambda_1(x^j) = s + \sum\limits_{k=2}^{p+1} \Lambda_k \quad + o(s^{p+1})\,, \\ q^0_i(x^j) = -\dfrac{x^i}{s} + \sum\limits_{k=1}^{p} Q_{i,k} + o(s^p)\,. \end{cases}$$

— Les Λ_k, $Q_{i,k}$ sont des *frh* de $d^0 k$ en x^i, s; de dénominateur s^e.

— Les Λ_k sont aussi des polynomes par rapport aux $\overline{A}^{(k-1)}$.

— Les $Q_{i,k}$ sont aussi des polynomes par rapport aux $\overline{A}^{(k)}$.

Les dérivées des fonctions $\lambda_1(x^j)$, $q^0_i(x^j)$ admettent aussi des développements limités en *frh* de x^i, s dont la partie régulière s'obtient à partir de (7) par dérivation terme à terme.

Bien entendu, les dérivées des fonctions $\lambda_1(x^j)$, $q^0_i(x^j)$ ne sont pas continues ni même bornées au voisinage de 0: soit v l'indice de dérivation, $D^v\lambda_1$ a un développement limité dont le premier terme est de degré $-|v|+1$.

$D^v q^0_i$ a un développement limité dont le premier terme est de degré $-|v|$.

ε) La fonction

$$S(x^i) = x^4[\lambda_1(x^j),\, q^0_i(x^j)]$$

admet aussi un développement limité en *frh* de x^i, s:

$$(8)\qquad S(x^i) = s + \sum_{k=1}^{p+1} S_k + o(s^{p+1})$$

où S_k est une *frh* de degré k en x^i, s et est un polynome en $\overline{A}^{(k-1)}$.

Les dérivées de S admettent aussi des développements en *frh* de x^i, s dont la partie régulière s'obtient à partir de (8) par dérivation terme à terme.

On aura en particulier:

$$(9)\quad \begin{cases} -q_i = \dfrac{\partial S}{\partial x^i} = \dfrac{x^i}{s} + Ks \qquad K \text{ bornés}. \\ -\dfrac{\partial q_i}{\partial x^j} = \dfrac{\partial^2 S}{\partial x^i \partial x^j} = \dfrac{\delta^{ij}}{s} - \dfrac{x^i x^j}{s^3} + K. \end{cases}$$

REMARQUES:

Remarque 1. Nous aurons à considérer des fonctions g définies sur $(\mathcal{C}_0)$. Nous utiliserons tantôt la représentation paramétrique de $(\mathcal{C}_0)$ au moyen des x^i tantôt la représentation paramétrique au moyen des $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

En posant:

$$g(\lambda_1, q_j^0) = g[x^i(\lambda_1, q_j^0)]$$

on peut toujours supposer que $g(\lambda_1, q_j^0)$ est définie non seulement pour $\sum\limits_{j=1}^{3} (q_j^0)^2 = 1$, mais dans un voisinage de la sphère unité comme les fonctions $x^i(\lambda_1, q_j^0)$ (cf. § a)). Cela facilite l'étude des dérivées de g.

Remarque 2. Nous aurons aussi à considérer des développements limités de ces fonctions au voisinage de 0. Nous utiliserons soit des développements limités en λ_1^k dont les coefficients sont des polynomes en q_i^0, soit des développements limités en *frh* de x^i, s.

Les développements limités (6) et (7) permettent de passer de l'un à l'autre. Par exemple, les développements en λ_1 des fonctions

$$S, \frac{\partial S}{\partial x^i}, \frac{\partial^2 S}{\partial x^i \partial x^j}$$

commenceront par:

$$(10)\quad \begin{cases} S = \lambda_1 + \dots, \\ -q_i = \dfrac{\partial S}{\partial x^i} = -q_i^0 + \dots, \\ -\dfrac{\partial q_i}{\partial x^j} = \dfrac{\partial^2 S}{\partial x^i \partial x^j} = \dfrac{\delta^{ij} - q_i^0 q_j^0}{\lambda_1} + \dots. \end{cases}$$

Remarque 3. Si une fonction g définie sur $(\mathcal{C}_0)$ admet un développement limité du type:

$$g(\lambda_1, q_i^0) = \sum_{k=k_0}^{k_1} g_k(q_i^0)\, \lambda_1^k + o(\lambda_1^{k_1})$$

(où k_0 entier, peut être négatif),

et si ses dérivées par rapport aux q admettent aussi des développements limités, on obtient ceux-ci par dérivation terme à terme.

Il en résulte que les dérivées de g par rapport aux q_i^0 ont une partie principale en λ_1 qui est d'ordre supérieur ou égal à k_0.

2. – Données de Cauchy sur un conoïde caractéristique pour les équations (E_r).

Les données sont constituées par les fonctions

$$A^{\lambda\mu}(x^\alpha, w_s)\,, \qquad f_r(x^\alpha, w_s, w_{sr})\,, \qquad \overline{w}_r(x^\alpha)\,.$$

Pour appliquer les résultats du § 1 nous posons

$$\overline{A}^{\lambda\mu}(x^\alpha) = A^{\lambda\mu}[x^\alpha, \overline{w}_s(x^\alpha)]\,.$$

Nous ferons les hypothèses suivantes:

HYPOTHÈSES α_p $(p\geqslant 2)$. – *Les* $A^{\lambda\mu}(x^\alpha, w_s)$ *sont définis dans un domaine* $U\times W$, *où* U *est un ouvert de* R^4 *contenant* 0, *où* W *est un ouvert de* R^n.

Dans $U\times W$, *les* $A^{\lambda\mu}$ *définissent une forme quadratique définie de signature* $---+$ $A^{44}>0$, $A^{ii}<0$ $(i=1, ..., 3)$, *dans* $U\times W$ *les* $A^{\lambda\mu}$ *sont de classe* C^p.

Il existe un point $(a_r)\in W$ *tel que*

$$A^{44}(0; a_r) = 1\,, \qquad A^{4i}(0; a_r) = 0\,, \qquad A^{ij}(0; a_r) = -\,\delta^{ij}\,.$$

(Bien entendu, par un changement de variables linéaire, on peut toujours s'arranger pour que cette dernière hypothèse soit vérifiée en un point quelconque de W.)

HYPOTHÈSE β_p $(p\geqslant 0)$. – *Les fonctions* $f_r(x^\alpha, w_s, w_{sr})$ *sont définies dans le domaine* $U\times W\times W'$ *où* W' *est un ouvert de* R^{4n}.

Dans ce domaine les f_r *sont de classe* C^p; *si* $p=0$, *les* f_r *sont lipschitziennes par rapport aux* $w_{s\nu}$.

HYPOTHÈSE γ_p $(p\geqslant 2)$. – *Les* $\overline{w}_r(x^\alpha)$ *sont définies dans* U *et à valeurs dans* W.

Les $\overline{w}_r(x^\alpha)$ *sont de classe* C^p

$$\overline{w}_r(0) = a_r$$

le point $a_{r\lambda} = (\partial\overline{w}_r/\partial x^\lambda)(0)$ *appartient à* W'.

Les hypothèses α_p et γ_p $(p\geqslant 2)$, entrainent que les

$$\overline{A}^{\lambda\mu}(x^\alpha) = A^{\lambda\mu}[x^\alpha; \overline{w}_r(x^\alpha)]$$

vérifient les hypothèses A_p et B du § 1.

La partie de conoïde caractéristique (C_0) qui porte les données de Cauchy est définie comme au § 1 à partir de ces fonctions $\overline{A}^{\lambda\mu}(x^\alpha)$.

NOTATIONS:

— Nous désignerons par $A^{(l)}$, l'ensemble des nombres

$$D^\beta D^\nu A^{\lambda\mu}(0, a_r) = \frac{\partial A^{\lambda\mu}}{(\partial x^1)^{\beta_1} \dots (\partial x^4)^{\beta_4} (\partial w_1)^{\nu_1} \dots (\partial w_n)^{\nu_n}} (0, a_r) ,$$

$$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_4), \qquad \nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$$

pour $0 \leqslant |\beta| + |\nu| \leqslant l$.

— Nous désignerons par $a^{(l)}$ l'ensemble des nombres

$$a_{r\alpha} = D^\alpha \overline{w}_r(0) , \qquad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_4) , \qquad \text{pour } 0 \leqslant |\alpha| \leqslant l$$

les $\overline{A}^{(l)}$ sont donc des polynomes des $A^{(l)}$ et des $a^{(l)}$.

Nous désignerons par $f^{(l)}$ l'ensemble des dérivées jusqu'à l'ordre l par rapport à toutes leurs variables des fonctions f_r au point $(0; a_r; a_{r\lambda})$.

Si $g(x^\alpha)$ est une fonction définie dans un voisinage de 0 dans R^4, nous désignerons par $[g]$ la restriction de g à (C_0) et par $g^{(l)}$ l'ensemble des dérivées de g au point 0 jusqu'à l'ordre l:

$$g^{(l)} = \{D^\alpha g(0)\} \qquad \text{pour } 0 \leqslant |\alpha| \leqslant l .$$

Si les hypothèses α_p et γ_p sont vérifiées, et si g est m fois différentiable, $m \leqslant p-1$, $[g]$ est m fois différentiable dans $(C_0) - 0$.

Au voisinage de 0, g admet des développements limités

$$[g] = \sum_{k=0}^{m} g_k(q_i^0)\,\lambda_1^k + o(\lambda_1^m) = \sum_{k=0}^{m} G_k + o(s^m) \tag{11}$$

où g_k est un polynome en q_i^0 et un polynome en $A^{(k-1)}$, $a^{(k-1)}$, $g^{(k)}$, où G_k est une *frh* de $d^0 k$ en x^i, s et un polynome en $A^{(k-1)}$, $a^{(k-1)}$, $g^{(k)}$; les $D^u[g]$ admettent aussi des développements limités en λ_1^k et en *frh* de x^i, s à l'ordre $m - |u|$.

On aura en particulier pour $\varphi_r = [\overline{w}_r]$ et ses dérivées, des développements limités commençant ainsi:

$$\left\{\begin{aligned}
&\varphi_r = a_{r0} + \left(\sum_{i=1}^{3} a_{ri} x^i + a_{r4} s\right) + \dots \\
&\frac{\partial \varphi_r}{\partial x^i} = a_{ri} + a_{r4} \frac{x^i}{s} + \dots = a_{ri} - a_{r4} q_i^0 + \dots \\
&\frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial x^i \, \partial x^j} = a_{r4} \left(\frac{\delta^{ij}}{s} - \frac{x^i x^j}{s^3}\right) + \dots = a_{r4} \frac{\delta^{ij} - q_i^0 q_j^0}{\lambda_1} + \dots
\end{aligned}\right. \tag{12}$$

et de même:

$$[A^{ij}] = -\,\delta^{ij} + \dots .$$

II. Détermination des dérivées premières.

On pose

$$\chi_r = [D_4 w_r] .$$

§ 1. Détermination des χ_r.

§ 2. Dérivées des χ_r.

§ 3. Développements limités des χ_r.

§ 4. Régularité des χ_r en 0 et détermination des dérivées successives.

§ 5. Condition pour assurer la régularité des χ_r.

1. – Détermination des χ_r.

THÉORÈME. – *Si les $A^{\lambda\mu}$, $f_r\, w_r$ vérifient les hypothèses $\alpha_2, \beta_0, \gamma_2$, il existe un domaine $(\mathcal{C}_0') \subset (\mathcal{C}_0)$, voisinage de 0 sur $\mathcal{C}_0$, sur lequel sont déterminées de façon unique les dérivées $D_4 w_r$ des fonctions w_r*

— *qui sur $(\mathcal{C}_0')$ prennent les valeurs $[\overline{w}_r]$;*

— *qui sur $(\mathcal{C}_0') - 0$ ont des dérivées 1^{es} continues et bornées, des dérivées secondes continues, et vérifient les équations (E_r).*

Les $[D_4 w_r]$ sont continues au point 0 et y prennent les valeurs $D_4 \overline{w}_r(0)$.

DÉMONSTRATION. – On pose

$$\varphi_r = [w_r] = [\overline{w}_r] .$$

Sur $(\mathcal{C}_0)$, les équations (E_r) peuvent s'écrire:

$$2\frac{d\chi_r}{d\lambda_1} + [A^{ij}]\frac{\partial q_i}{\partial x^j}\chi_r + [A^{ij}]\frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial x^i\, \partial x^j} + [f_r] = 0 \tag{1}$$

(1) est un système différentiel par rapport aux χ_r sur chaque bicaractéristique de $\mathcal{C}_0$.

f_r est à prendre pour les arguments:

$$\begin{cases} x^\alpha = x^\alpha(\lambda_1, q_j^0) \\ w_s = \varphi_s(\lambda_1, q_j^0) \\ w_{si} = \dfrac{\partial \varphi_s}{\partial x^i}(\lambda_1, q_j^0) + q_i(\lambda_1, q_j^0)\chi_s \\ w_{s4} = \chi_s \end{cases}$$

$[f_r]$ est donc une fonction continue de λ_1 et des χ_s, lipschitzienne par rapport aux χ_s.

Les fonctions $[A^{ij}](\partial q_i/\partial x^j)$ et $[A^{ij}](\partial^2\varphi_r/(\partial x^i\,\partial x^j))$ ne sont pas bornées au voisinage de 0.

Compte tenu des développements limités (I, 10; I, 12) on peut écrire

$$[A^{ij}]\frac{\partial q_i}{\partial x^j}=\frac{2}{\lambda_1}+q(\lambda_1,\,q_j^0)$$

$$[A^{ij}]\frac{\partial^2\varphi_r}{\partial x^i\,\partial x^j}=-\frac{2a_{r4}}{\lambda_1}+\bar{\omega}_r(\lambda\;,\,q_i^0)$$

où $q(\lambda_1,\,q_j^0)$ et $\bar{\omega}_r(\lambda_1,\,q_j^0)$ sont des fonctions continues bornées quand $\lambda_1\to 0$.

En posant

$$\chi_r'=\chi_r-a_{r4}$$

les équations (1) peuvent s'écrire:

$$\frac{d\chi_r'}{d\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_1}\chi_r'+g_r(\lambda_1,\,q_j^0,\,\chi_s')=0\;. \tag{2}$$

$$g_r=\frac{1}{2}\{q(\lambda_1,\,q_j^0)(\chi_r'+a_{r4})+\bar{\omega}_r(\lambda_1,\,q_j^0)+[f_r]\} \tag{3}$$

Les solutions bornées de (2) vérifient le système intégral:

$$\chi_r'=\frac{1}{\lambda_1}\int_0^{\lambda_1}-\lambda g_r(\lambda,\,q_j^0,\,\chi_s')\,d\lambda \tag{4}$$

Les g_r étant continues en λ_1 et lipschitziennes par rapport aux χ_s' le système intégral (4) a une solution et une seule qui soit bornée au voisinage de $\lambda_1=0$. Pour $\lambda_1=0$, $\chi_r'=0$ donc $\chi_r=a_{r4}$.

Cette solution peut être prolongée sur chaque bicaractéristique tant que le point $(\partial\varphi_r/\partial x^i+q_i\chi_r,\,\chi_r)$ ne sort pas de W', ce qui définit le domaine $(\mathcal{C}_0')\subset(\mathcal{C}_0)$, de projection $\mathcal{D}'\subset\mathcal{D}$ sur l'espace des x^i.

2. – Dérivées des χ_r.

Si les g_r sont de classe C^p, on peut montrer, par un raisonnement analogue à celui que l'on fait pour les équations différentielles ordinaires dépendant de paramètres [7], que les fonctions $\chi_r'(\lambda_1,\,q_i^0)$, solutions de (4) sont de classe C^p, et que leurs dérivées par rapport aux q_i^0 vérifient les équations intégrales dérivées.

On obtient ainsi le résultat suivant:

THÉORÈME. – *Si les $A^{\lambda\mu}$, f_r, $\overline{w}_r$ vérifient les hypothèses α_p, β_{p-2}, γ_p, les fonctions χ_r ont des dérivées $(p-2)^{es}$ continues par rapport à l'ensemble de leurs variables sur* $(\mathcal{C}_0')-0$.

3. – Développements limités des χ_r et de leurs dérivées.

Des équations intégrales (4) vérifiées par les χ_r, on déduit l'existence de développements limités en λ_1 pour les fonctions χ_r.

En procédant de même pour les dérivées des χ_r, on démontre l'existence de déve loppements limités en λ_1 pour les dérivées des fonctions χ_r.

De façon précise, on a le résultat suivant:

THÉORÈME. – *Si les $A^{\lambda\mu}, f_r, \overline{w}_r$ vérifient les hypothèses $\alpha_p, \beta_{p-2}, \gamma_p$, les fonctions χ_r admettent des développements limités de la forme*

$$\chi_r = a_{r4} + \sum_{k=1}^{p-1} X_k \lambda_1^k + o(\lambda_1^{p-1}) \tag{5}$$

X_k est polynome en q_i^0 et est aussi un polynome par rapport aux $A^{(k-1)}, f^{(k-1)}, a^{(k+1)}$.

Les dérivées des χ_r admettent aussi des développements limités dont la partie régulière est la dérivée de la partie régulière de (5).

Bien entendu, conformément à la remarque 2 du chapitre I, § 1, χ_r admettra aussi des développements limités en *frh* de x^i, s. Et on obtiendra les développements limités des $D^u\chi_r$ par dérivation terme à terme de ces développements limités.

4. – Régularité des χ_r en 0 et détermination des dérivées successives.

$\psi_r^{(2)} = [D_4^2 w_r]$ est déterminé par un système différentiel sur chaque bicaractéristique:

$$2\frac{d\psi_r^{(2)}}{d\lambda_1} + [A^{ij}]\frac{\partial q_i}{\partial x^j}\psi_r^{(2)} + [A^{ji}]\frac{\partial^2 \chi_r}{\partial x^i\,\partial x^j} + h_r = 0\,. \tag{6}$$

On peut refaire pour le système (6) le raisonnement fait pour le système (1) et montrer qu'il a sur chaque bicaractéristique une seule solution bornée.

La seule différence est que, ici nous savons seulement que χ_r admet un développement limité qui commence ainsi:

$$\chi_r = a_{r4} + H_1 + \dots\,, \qquad H_1 \textit{frh} \text{ de } x^i, s \text{ de } d^0 1$$

donc

$$\frac{\partial^2 \chi_r}{\partial x^i\,\partial x^j} = L_{-1} + \dots\,, \qquad L_{-1} \text{ frh de } d^0 - 1 \text{ en } x^i,\ s\,.$$

donc

$$[A^{ij}]\frac{\partial^2\chi_r}{\partial x^i\,\partial x^j}=\frac{c(q_i^0)}{\lambda_1}+\ldots$$

où $c(q_i^0)$ n'est pas nécessairement une constante.

On trouvera donc une fonction $\psi_r^{(2)}$ bornée, qui sur la bicaractéristique de paramètres q_i^0 tendra vers $-\frac{1}{2}c(q_i^0)$ quand $\lambda_1\to 0$.

$\psi_r^{(2)}$ *ne sera donc pas nécessairement continue en* 0 et $\psi_r^{(2)}$ aura un développement limité commençant ainsi

$$\psi_r^{(2)}=F_0+\ldots \tag{7}$$

F_0: *frh* de $d^0 0$ en x^i, s, de dénominateur s^e, F_0 n'étant pas nécessairement une constante.

On ne pourra pas en général continuer et déterminer des $\psi_r^{(3)}$ bornés, car dans le système différentiel vérifié par les $\psi_r^{(3)}$ figure le terme

$$[A^{ij}]\frac{\partial^2\psi_r^{(2)}}{\partial x^i\,\partial x^j}$$

et compte tenu de (7), on aura:

$$\frac{\partial^2\psi_r^{(2)}}{\partial x^i\,\partial x^j}=G_{-2}+\ldots$$

G_{-2} *frh* de d^0-2 en x^i, s et $[A^{ij}](\partial^2\psi_r^{(2)}/(\partial x^i\,\partial x^j))$ se comportera en $1/\lambda_1^2$ au voisinage de 0.

Cette difficulté ne se présentera pas si H_1 est de la forme

$$H_1=\sum_{i=1}^{3}b_ix^i+b_4s$$

c'est-à-dire si χ_r est la restriction à (C_0') d'une fonction différentiable en 0.

Pour pouvoir déterminer des $\psi_r^{(2)}$ continues en 0 ou des $\psi_r^{(3)}$ bornées, il convient donc d'imposer aux données des conditions qui assurent la régularité des χ_r.

De même, on ne pourra déterminer des $\psi_r^{(3)}$ continus en 0 ou des $\psi_r^{(4)}$ bornés que si les $\psi_r^{(2)}$ sont la restriction à (C_0') de fonctions différentiables en 0, ce qui impose des conditions supplémentaires pour les données.

Et ainsi de suite.

L'object du théorème suivant est de donner des conditions qui assurent la régularité des χ_r.

Ces conditions portent uniquement sur la valeur à l'origine des fonctions $A^{\lambda\mu}$, f_r, $\overline{w}_r$ et de leurs dérivées, ou plus précisément:

— valeurs au point 0 pour les $\overline{w}_r$ et leurs dérivées;

— valeurs au point $(0; a_r)$ pour les $A^{\lambda\mu}$ et leurs dérivées;

— valeurs au point $(0; a_r; a_{r\lambda})$ pour les f_r et leurs dérivées.

5. – Condition pour assurer la régularité des χ_r.

THÉORÈME. – *Si les $A^{\lambda\mu}, f_r, \overline{w}_r$ vérifient les hypothèses $\alpha_p, \beta_{p-2}, \gamma_p$, si les $A^{(q-2)}$, $f^{(q-2)}$, $a^{(q)}$, $q \leqslant p$, sont tels que les équations (E_r) sont vérifiées au point 0 ainsi que les équations dérivées jusqu'à l'ordre $q-2$, alors la partie régulière du développement limité de χ_r jusqu'à l'ordre $q-1$ est égale à celle de $[D_4 \overline{w}_r]$.*

REMARQUE. – Il y a égalité aussi bien pour le développement en λ_1^k que pour le développement en frh de x^i, s.

DÉMONSTRATION. – On considère le problème de Cauchy analytique suivant où les données de Cauchy sont portées par $x^4 = 0$:

$$\left\{\begin{aligned} & \tilde{A}^{\lambda\mu}(x^\alpha, w_r)\,\frac{\partial^2 w_r}{\partial x^\lambda\, \partial x^\mu} + \tilde{f}_r(x^\alpha, w_s, w_{s\nu}) = 0 \\ & w_r(x^i, 0) = \tilde{u}_r(x^i) \\ & \frac{\partial w_r}{\partial x^4}(x^i, 0) = \tilde{v}_r(x^i) \end{aligned}\right.$$

où:

Les $\tilde{u}_r$ sont analytiques au voisinage de 0 et leurs dérivées en 0 jusqu'à l'ordre q coïncident avec celles des $\overline{w}_r(x^i, 0)$.

Les $\tilde{v}_r$ sont analytiques au voisinage de 0 et leurs dérivées en 0 jusqu'à l'ordre $q-1$ coïncident avec celles des $D_4\overline{w}_r(x^i, 0)$.

Les $\tilde{A}^{\lambda\mu}$ sont analytiques au voisinage du point $(0, a_r)$ et leurs dérivées en ce point jusqu'à l'ordre $q-2$ coïncident avec celles des $A^{\lambda\mu}$.

Les $\tilde{f}_r$ sont analytiques au voisinage du point $(0, a_r, a_{r\lambda})$ et leurs dérivées en ce point jusqu'à l'ordre $q-2$ coïncident avec celles des f_r.

Le Théorème de Cauchy-Kovalewska entraine que ce problème a une solution analytique $\tilde{w}_r$ définie dans un voisinage de 0.

L'hypothèse que les $A^{(q-2)}, f^{(q-2)}, a^{(q)}$ vérifient les équations (E_r) et toutes les équations dérivées jusq'à l'ordre $q-2$, entraine que les dérivées des $\tilde{w}_r$ au point 0 jusqu'à l'ordre q, coïncident avec celles des $\overline{w}_r$.

On considère maintenant le problème de Cauchy sur un conoïde caractéristique défini par les données $\tilde{A}^{\lambda\mu}, \tilde{f}_r, \tilde{w}_r$. Il admet évidement une solution: $\tilde{w}_r$.

Les théorèmes des § 1, 2, 3, de ce chapitre s'appliquent à ce problème de Cauchy.

Nous désignerons par $\tilde{A}^{(l)}, \tilde{f}^{(l)}, \tilde{a}^{(l)}$ les ensembles de nombres définis en I, § 2, correspondant à ces nouvelles données de Cauchy, $\tilde{A}^{\lambda\mu}, \tilde{f}_r, \tilde{w}_r$. On a donc:

$$\tilde{A}^{(q-2)} = A^{(q-2)}, \quad \tilde{f}^{(q-2)} = f^{(q-2)}, \quad \tilde{a}^{(q)} = a^{(q)} \tag{8}$$

le théorème du § 3 montre que:

$$\tilde{\chi}_r = a_{r4} + \sum_{k=1}^{q-1} X_k(q_i^0, \tilde{A}^{(q-2)}, \tilde{f}^{(q-2)}, \tilde{a}^{(q)})\lambda_1^k + o(\lambda_1^{q-1})\,.$$

Et, à cause de (8), la partie régulière de ce développement limité coïncide avec celle de χ_r.

D'autre part, compte tenu de $I - 11$, $\tilde{\chi}_r = [D_4\tilde{w}_r]$ admet un développement limité qui peut s'écrire

$$\tilde{\chi}_r = \sum_{k=0}^{q-1} g_k(q_i^0, \tilde{A}'^{(q-2)}, \tilde{a}^{(q-2)}, (D_4\tilde{w}_r)^{(q-1)})\lambda_1^k + o(\lambda_1^{q-1})$$

compte tenu de $\tilde{a}^{(q)} = a^{(q)}$, on a aussi $(D_4\tilde{w}_r)^{(q-1)} = (D_4\overline{w}_r)^{(q-1)}$.

Donc la partie régulière du développement de $\tilde{\chi}_r$ à l'ordre $q-1$ coïncide avec celle de $[D_4\overline{w}_r]$.

Il en résulte l'égalité des parties régulières jusqu'à l'ordre $q-1$ des développements limités de χ_r et de $[D_4\overline{w}_r]$.

III. Détermination des dérivées d'ordre plus élevé.

THÉORÈME:

I. *Si les* $A^{\lambda\mu}, f_r, \overline{w}_r$ *vérifient les hypothèses* $\alpha_p, \beta_{p-2}, \gamma_p$ $(p \geqslant 2)$, *si les* $A^{(q-3)}, f^{(q-3)}, a^{(q-1)}$, $(2q \leqslant p)$, *vérifient au point* 0 *les équations* (E_r) *et toutes les équations dérivées jusqu'à l'ordre* $q-3$, *alors sont déterminées de façon unique sur* $(\mathcal{C}_0')$ *les dérivées jusqu'à l'ordre* q *des fonctions* w_r *telles que*:

- *Les* w_r *sont définies dans un voisinage de* $(\mathcal{C}_0')$ *ou dans un domaine ayant* $\mathcal{C}_0'$ *pour frontière.*
- *Dans ce domaine les* w_r *ont des dérivées jusqu'à l'ordre* $q+1$ *qui sont des fonctions localement sommables et y vérifient les équations* (E_r).
- *Sur* $(\mathcal{C}_0') - \{0\}$ *elles ont des dérivées jusqu'à l'ordre* q *qui sont* bornées.
- *Sur* $(\mathcal{C}_0')$, *elles prennent les valeurs* $\varphi_r = [\overline{w}_r]$.

Si l'on pose $\psi_r^{(l)} = [D_4^l w_r]$, *restriction de* $D_4^l w_r$ *à* $(\mathcal{C}_0')$, $1 \leqslant l \leqslant q$ *les fonctions* $\psi_r^{(l)}$ *sont de classe* C^{p-2l} *sur* $(\mathcal{C}_0') - \{0\}$:

- *les* $\psi_r^{(l)}$ *admettent des développements limités au voisinage de* 0 *en* λ_1 *ou en f.r.h. de* x^i, s *jusqu'à l'ordre* $p-l$, *et leurs dérivées admettent les développements limités dérivés*;

— *la partie régulière du développement limité de* $\psi_r^{(l)}$ *coïncide avec celle de* $[D_4^l\overline{w}_r]$ *jusqu'à l'ordre* $q-1-l$.

II. *Si en outre, les* $A^{(q-2)}$, $f^{(q-2)}$, $a^{(q)}$, *vérifient au point* 0 *les équations dérivées des* (E_r) *à l'ordre* $q-2$, *alors il y a coïncidence des développements limités de* $\psi_r^{(l)}$ *et de* $[D_4^l\overline{w}_r]$ *jusqu'à l'ordre* $q-1$.

La démonstration se fait par une pseudo-récurrence sur l, $2\leqslant l\leqslant q$.
Pour la partie II du théorème elle repose sur le lemme suivant:

LEMME A. – *Sous les hypothèses de la partie II du théorème.* (*Hypothèse de récurrence*):

α) *si sont déterminées de façon unique sur* (C_0') *les dérivées jusqu'à l'ordre* $l-1$, $2\leqslant l\leqslant q$, *des solutions du problème de Cauchy défini par* $A^{\lambda\mu}$, f_r, $\overline{w}_r$, *qui ont des dérivées* $(l-1)$*-es-continues et bornées sur* $(\mathrm{C}_0')-0$;

β) *si les* $\psi_r^{(m)}=[D_4^m w_r]$, $m\leqslant l-1$, *ont des dérivées continues sur* $(\mathrm{C}_0')-0$ *jusqu'à l'ordre* $p-2m$;

γ) *si les* $\psi_r^{(m)}$, $m\leqslant l-1$, *admettent des développements limités de la forme*:

$$\psi_r^{(m)}=\sum_{k=0}^{p-m}X_{r,k}^{(m)}\lambda_1^k+o(\lambda^{p-m})$$

où $X_{r,k}^{(m)}$ *est un polynome en* q_i^0 *et en* $A^{(k+m-2)}$, $f^{(k+m-2)}$, $a^{(k+m)}$; *et si les dérivées* $D^u\psi_r^{(m)}$, $|u|\leqslant p-2m$, *admettent des développements limités à l'ordre* $p-m-|u|$;

δ) *si la partie régulière du développement limité des* $\psi_r^{(m)}$, $m\leqslant l-1$, *jusqu'à l'ordre* $q-m$ *est égale à celle de* $[D_4^m\overline{w}_r]$.

(*Conclusion*):

alors toutes les propriétés ci-dessus sont encore vérifiés en remplaçant $l-1$ *par* l.

Sous les hypothèses de la partie II du théorème, l'hypothèse de récurrence du lemme A est vérifiée pour $l=2$ (cf. chapitre II). Le lemme A entraîne donc la partie II du théorème.

Pour démontrer la partie I du théorème il faut utiliser le lemme suivant:

LEMME B. – *Sous les hypothèses de la partie I du théorème.*
(*Hypothèse de récurrence*):

$$\left.\begin{array}{l}\alpha)\\ \beta)\\ \gamma)\end{array}\right\}\ \textit{comme dans le lemme A};$$

δ) *comme dans le lemma* A *en remplaçant* $q-m$ *par* $q-1-m$.

(*Conclusion*):

alors si $l \leqslant q-1$, *toutes les propriétés ci-dessus sont encore vérifiées en remplaçant* $l-1$ *par* l;

si $l = q$, *les propriétés* α), β), γ), *sont encore vérifiées en remplaçant* $l-1$ *par* q.

Sous les hypothèses de la partie I du théorème, l'hypothèse de récurrence est vérifiée pour $l=2$; le lemme B entraîne donc la partie I du théorème.

Nous esquissons maintenant la démonstration de ces lemmes.

a) Détermination unique des $\psi_r^{(l)}$.

Les équations dérivées des (E_r) $l-1$ fois par rapport aux x^4, peuvent s'écrire:

$$A^{\lambda\mu}\frac{\partial^{l+1}w_r}{\partial x^\lambda\,\partial x^\mu(\partial x^4)^{l-1}}+h_{rl}=0 \tag{1}$$

où h_{rl} est un polynome des fonctions suivantes:

— dérivées des $A^{\lambda\mu}$ jusqu'à l'ordre $l-1$;

— dérivées des w_r jusqu'à l'ordre l;

— dérivées des f_r jusqu'à l'ordre $l-1$.

Sur $(\mathcal{C}_0')$ ces équations peuvent s'écrire:

$$2\frac{\partial\psi_r^{(l)}}{\partial\lambda_1}+[A^{ij}]\frac{\partial q_i}{\partial x^j}\psi_r^{(l)}+[A^{ij}]\frac{\partial^2\psi_r^{(l-1)}}{\partial x^i\,\partial x^j}+[h_{rl}]=0\,. \tag{2}$$

Compte tenu des hypothèses γ) et δ), on peut écrire:

$$[A^{ij}]\frac{\partial^2\psi_r^{(l-1)}}{\partial x^i\,\partial x^j}=\frac{c(q_i^0)}{\lambda_1}+\bar\omega_r(\lambda_1,q_i^0)$$

où $\bar\omega_r(\lambda_1,q_i^0)$ est une fonction continue bornée.

($c(q_i^0)$ est en fait une constante égale à $-2D_4^l\,\bar\omega_r(0)$, sauf dans le cas du lemme B, si $l=q$.)

$[h_{rl}]$ est une fonction linéaire des $\psi_s^{(l)}$:

$$[h_{rl}]=\sum_{s=1}^{n}h_{rl}^s\psi_s^{(l)}+h_{rl}^0\,.$$

Si l'on montre que les h^s_{rl}, h^0_{rl}, sont des fonctions bornées, continues sur chaque bicaractéristique, le système (2) est un système différentiel sur chaque bicaractéristique pour lequel on démontre l'existence et l'unicité d'une solution bornée comme au chapître II, § 1.

Les restrictions à (C'_0) des dérivées des $A^{\lambda\mu}$ et des f_r qui figurent dans $[h_r]$ sont évidemment des fonctions continues.

Les $[D^\alpha w_r]$ s'expriment au moyen des $\psi_r^{(m)}$, de leurs dérivées et des dérivées de S.

Si $\alpha = (u_1, u_2, u_3, m)$,

$$(3) \qquad [D^\alpha w_r] = [D^u D_4^m w_r] = \sum D^v \psi_r^{(m+p)} D^{t_1} S \ldots D^{t_p} S\,,$$

$$v + t_1 + \ldots + t_p = u,\ 0 \leqslant p \leqslant |u|,\ m + p \leqslant |\alpha|\,.$$

Pour $|\alpha| \leqslant l-1$, l'hypothèse δ) entraine que la partie régulière du développement limité de $[D^\alpha w_r]$ à l'ordre $q - |\alpha|$ (lemme A) ou $q - 1 - |\alpha|$ (lemme B), coïncide avec celle de $[D^\alpha \overline{w}_r]$, ce qui entraîne que le dernier membre de (3) est borné et continu sur chaque bicaractéristique.

Pour $|\alpha| = l$, on a:

$$[D^\alpha w_r] = [D^u D_4^m w_r] = \psi_r^{(l)} (D_1 S)^{u_1} \ldots (D_3 S)^{u_3} +$$

$$+ \sum D^v \psi_r^{(m+p)} D^{t_1} S \ldots D^{t_p} S\,, \qquad m + p \leqslant l - 1$$

le coefficient de $\psi_r^{(l)}$ est borné et continu sur chaque bicaractéristique comme les $D_i S = -q_i$.

L'hypothèse δ) entraine que le terme $\sum D^v \psi_r^{(m+p)} D^{t_1} S \ldots D^{t_p} S$ a un développement limité dont la partie régulière à l'ordre $q - l + 1$ (lemme A) ou $q - l$ (lemme B) coïncide avec celle de

$$[D^\alpha \overline{w}_r] - [D_4^l \overline{w}_r](D_1 S)^{u_1} \ldots (D_3 S)^{u_3}\,.$$

C'est donc une fonction bornée, continue sur chaque bicaractéristique.

b) Dérivées des $\psi_r^{(l)}$.

Compte tenu de l'hypothèse β) les équations (2) sont dérivables par rapport aux q_i^0, $p - 2 - l$ fois.

Compte tenu de la Remarque 3 du chapitre II, § 1, le système différentiel obtenu ainsi aura ses coefficients qui se comporteront au voisinage de $\lambda_1 = 0$ comme les coefficients du système (2), et il a encore une solution et une seule.

Ceci démontre l'existence des dérivées des $\psi_r^{(l)}$ jusqu'à l'ordre $p - 2l$.

c) Développements limités des $\psi_r^{(l)}$ *et de leurs dérivées.*

L'hypothèse γ) entraîne que les fonctions h^s_{rl}, h^0_{rl} admettent des développements limités en λ_1 jusqu'à l'ordre $p - l$.

On a démontré en *a*) que ces développements commencent par un terme de $d^0 0$. On a donc:

$$h_{rl}^s,\ h_{rl}^0 = \sum_{k=0}^{p-l} H_k \lambda_1^k + o(\lambda_1^{p-l})$$

où compte tenu de γ), les H_k sont des polynomes en q_i^0 et en

$$A^{(k+l-2)}, \quad f^{(k+l-2)}, \quad a^{(k+l)}.$$

D'autre part, γ) entraîne que

$$[A^{ij}] \frac{\partial^2 \psi_r^{(l-1)}}{\partial x^i \partial x^j} = \sum_{k=-1}^{p-l-1} I_k \lambda_1^k + o(\lambda_1^{p-l-1})$$

où I_k est un polynome en q_i^0 et en $A^{(k+l-1)}, f^{(k+l-1)}, a^{(k+l+1)}$.

On en déduit que les $\psi_r^{(l)}$ admettent des développements limités de la forme:

$$\psi_r^{(l)} = \sum_{k=0}^{p-l} X_{r,k}^{(l)} \lambda_1^k + o(\lambda_1^{p-l})$$

où $X_{r,k}^{(l)}$ est un polynome en q_i^0 et en $A^{(k+l-2)}, f^{(k+l-2)}, a^{(k+l)}$.

On démontre de même l'existence de développements limités à l'ordre $p-1-|u|$ pour les dérivées $D^u \psi_r^{(l)}$.

d) Partie régulière de $\psi_r^{(l)}$ *à l'ordre* $q-1$ *(lemme* A) *ou* $q-1-l$ *(lemme* B).

— Limitons-nous au cas du lemme A.

— On raisonne comme au chapître II, § 5.

— On introduit les mêmes données analytiques $\tilde{A}^{\lambda\mu}, \tilde{f}_r, \tilde{w}_r$.

En appliquant ce qu'on vient de démontrer en *c*) à la fonction $\tilde{w}_r$, on trouve que $\tilde{\psi}_r^{(l)} = [D_4^l w_r]$ admet pour développement limité:

$$\tilde{\psi}_r^{(l)} = \sum_{k=0}^{p-l} X_{r,k}^{(l)}(q_i^0, \tilde{A}^{(k+l-2)}, \tilde{f}^{(k+l-2)}, \tilde{a}^{(k+l)}) \lambda_1^k + o(\lambda_1^{(p-l)})$$

comme $\tilde{A}^{(q-2)} = A^{(q-2)}, \tilde{f}^{(q-2)} = f^{(q-2)}, \tilde{a}^{(q)} = a^{(q)}$, il en résulte que la partie régulière de $\tilde{\psi}_r^{(l)}$ à l'ordre $q-l$ est égale à celle de $\psi_r^{(l)}$.

D'autre part, la formule I (11) montre que l'on a aussi

$$\tilde{\psi}_r^{(l)} = \sum_{k=0}^{q-l} g_k(q_i^0, \tilde{A}^{(k-1)}, \tilde{a}^{(k-1)}, (D_4^k \tilde{w}_r)^{(k)}) \lambda_1^k + o(\lambda_1^{q-l})$$

et le fait que $\tilde{a}^{(q)} = a^{(q)}$ entraîne $(D_4^l \tilde{w}_r)^{(q-l)} = (D_4^l \overline{w}_r)^{(q-l)}$, donc la partie régulière de $\tilde{\psi}_r^{(l)}$ à l'ordre $q-l$ est égale à celle de $[D_4^l \overline{w}_r]$. Ceci achève la démonstration du lemme A. Démonstration identique pour le lemme B.

La construction même des fonctions $\psi_r^{(l)}$ dans la démonstration ci-dessus montre qu'on peut aussi énoncer le théorème suivant qui nous servira dans la partie *C*:

THÉORÈME. – *Sous les hypothèses de la partie I du théorème précédent, si des fonctions w_r sont telles que:*

— *Elles sont définies dans un voisinage de $(\mathcal{C}_0')$ ou dans un domaine ayant $(\mathcal{C}_0')$ pour frontière.*

— *Sur $(\mathcal{C}_0')$ elles prennent les valeurs $[\overline{w}_r]$.*

— *Sur $(\mathcal{C}_0') - \{0\}$ elles ont des dérivées jusqu'à l'ordre $q+1$ localement sommables, et telles que:*

$$[D_4^l w_r] = \psi_r^{(l)}, \quad 1 \leqslant l \leqslant q.$$

Alors sur $(\mathcal{C}_0') - \{0\}$, les fonctions w_r vérifient les équations (E_r) et les équations dérivées par rapport à x^4 jusqu'à l'ordre $q-1$.

C) COMMENT SE RAMENER AU PROBLÈME DE CAUCHY À DONNÉES NULLES

Soit un problème de Cauchy sur un conoïde caractéristique $\mathcal{C}_0$, défini par $A^{\lambda\mu}$, f_r, $\overline{w}_r$.

Comment choisir n fonctions $\omega_r(x^\alpha)$ de sorte que en faisant le changement de fonctions inconnues

$$w_r = \omega_r + v_r \tag{1}$$

les nouvelles fonctions inconnues, v_r, vérifient un problème de Cauchy à données nulles vérifiant les hypothèses de la partie *A*)?

1. – Conditions à imposer aux ω_r.

Le théorème énoncé au § *A*), 2, fournit des solutions dans un espace $H^{t+1}(Y)$.

Pour de telles solutions, si on suppose de plus qu'elles ont des *dérivées t^{es} bornées sur* $(\mathcal{C}_0)$, le théorème B, III, montre que les dérivées jusqu'à l'ordre t sont déterminées sur $(\mathcal{C}_0)$.

Donc moyennant les hypothèses voulues sur les données $A^{\lambda\mu}, f_r, \overline{w}_r$, le problème

$$\text{I} \qquad \begin{cases} A^{\lambda\mu}(x^\alpha, w_s)D_{\lambda\mu}w_r + f_r(x^\alpha, w_s, D_\nu w_s) = 0 \\ w_r \in H^{t+1}(Y) \\ \text{les } D^\lambda w_r, \text{ pour } |\lambda| \leqslant t, \text{ sont bornées sur } (\mathcal{C}_0') \\ \text{sur } (\mathcal{C}_0'),\ w_r = [\overline{w}_r] \end{cases}$$

est équivalent au problème:

$$\text{I}' \qquad \begin{cases} A^{\lambda\mu}(x^\alpha, w_s)D_{\lambda\mu}w_r + f_r(x^\alpha, w_s, w_{s\nu}) = 0 \\ w_r \in H^{t+1}(Y) \\ \text{sur } (\mathcal{C}_0') - \{0\}\colon [D_4^l w_r] = \psi_r^{(l)},\ 0 \leqslant l \leqslant t\,. \end{cases}$$

Pour ramener par un changement de type (1), le problème I′ a un problème de Cauchy à données nulles, il est donc nécessaire de choisir les ω_r telles que:

$$\omega_r \in H_{\text{loc}}^{t+1}\,, \tag{2}$$

$$\text{sur } (\mathcal{C}_0') - \{0\}\colon [D_4^l \omega_r] = \psi_r^{(l)}, \qquad 0 \leqslant l \leqslant t\,. \tag{3}$$

Si ces conditions sont vérifiées par ω_r, le problème I′ est équivalent au Problème:

$$\text{II} \qquad \begin{cases} \tilde{A}^{\lambda\mu}(x^\alpha, v_s)D_{\lambda\mu}v_r + \tilde{f}_r(x^\alpha v_s, D_\nu v_s) = 0 \\ v_r \in H^{t+1}(Y) \\ \text{sur } (\mathcal{C}_0'),\ D_4^l v_r = 0 \text{ pour } 0 \leqslant l \leqslant t \end{cases}$$

en posant

$$\begin{cases} \tilde{A}^{\lambda\mu}(x^\alpha, v_s) = A^{\lambda\mu}[x^\alpha, \omega_s(x^\alpha) + v_s] \\ \tilde{f}_r(x^\alpha, v_s, D_\nu v_s) = A^{\lambda\mu}(x^\alpha, \omega_s(x^\alpha) + v_s)D_{\lambda\mu}\omega_r(x^\alpha) + \\ + f_r[x^\alpha, \omega_s(x^\alpha) + v_s, D_\nu\omega_s(x^\alpha) + D_\nu v_s]\,. \end{cases} \tag{4}$$

Pour que les hypothèses de différentiabilité *b*) du § *A*), 1, soient vérifiées par le problème II, nous sommes amenés à imposer aux ω_r la condition:

$$\omega_r \in H_{\text{loc}}^{t+2}\,.$$

Cette condition suffit pour que $\tilde{A}^{\lambda\mu}$ et $\tilde{f}_r$ vérifient ces hypothèses de différentiabilité, compte tenu des hypothèses déjà imposées aux $A^{\lambda\mu}$ et f_r.

Quant à l'hypothèse *d*) du § *A*), 1, $D_4^k \tilde{f}_r(x^\alpha, 0, 0) = 0$ sur $(\mathcal{C}_0')$ pour $k \leqslant t$, elle exprime que les ω_r doivent vérifier sur $(\mathcal{C}_0')$ les équations (E_r) et les équations dérivées par rapport à x^4 jusqu'à l'ordre t.

Nous avons vu dans la partie *B*) que les conditions (3) suffisent à entrainer ce résultat.

EN RÉSUMÉ. - Si les $A^{\lambda\mu}, f_r, \overline{w}_r$, vérifient les hypothèses du théorème B III, I, avec $q = t$, et si les ω_r vérifient les conditions (3) et (5), le problème II, équivalent au problème I, vérifie les hypothèses de la partie *A*).

2. - Hypothèses sur les données.

La condition (3) implique que, au voisinage de tout point $x \in (\mathcal{C}_0') - 0$ les fonctions ω_r doivent être de la forme

$$\omega_r(x^\alpha) = \sum_{k=0}^{t} \frac{1}{k!}(x^4 - S(x^i))^k \psi_r^{(k)}(x^i) + (x^4 - S)^t \varepsilon_r(x^\alpha) \tag{6}$$

$$\varepsilon_r \to 0 \text{ quand } x^4 \to S(x^i).$$

Pour que des expressions du type (6) aient des dérivées à l'ordre $t + 2$ qui soient des fonctions, nous sommes amenés à faire des hypothèses telles que les fonctions $\psi_r^{(k)}(x^i)$, $0 \leqslant k \leqslant t$, aient des dérivées jusqu'à l'ordre $t + 2$ qui soient des fonctions.

Compte tenu du théorème du § *B*), III, cela nous amène à faire sur les données, l'hypothèse suivante:

HYPOTHÈSE H. - *a*) *les* $A^{\lambda\mu}, f_r, \overline{w}_r$ *vérifient les hypothèses* $\alpha_{3t+2}, \beta_{3t}, \gamma_{3t+2}$;

b) *les* $A^{(t-2)}, f^{(t-2)}, a^{(t)}$ *vérifient au point* 0, *les équations* (E_r) *et toutes les équations dérivées jusqu'à l'ordre* $t - 2$.

(La nécessité de $A^{(t-2)}, \ldots$, et non $A^{(t-3)}, \ldots$ apparaîtra plus loin dans l'étude du comportement des dérivées de ω_r au voisinage de 0.)

3. - Construction des ω_r.

L'hypothèse H etant supposée vérifiée, les fonctions $\psi_r^{(k)}(x^i)$, $0 \leqslant k \leqslant t$, sont déterminées et sont au moins de classe C^{t+2} sur $(\mathcal{C}_0') - \{0\}$.

Mais dans l'expression (6) de ω_r, la fonction:

$$\sum_{k=0}^{t} \frac{1}{k!}(x^4 - S)^k \psi_r^{(k)}(x^i)$$

n'a pas de dérivées localement intégrables au voisinage des points $x^i = 0$, x^4 quelconque, car les dérivées d'ordre supérieur à 2 des fonctions S et $\psi_r^{(k)}$ sont au moins en $1/s^2$ au voisinage de $x^i = 0$, et ne sont donc pas localement de carré intégrable.

Pour surmonter cette difficulté, on procède ainsi:

a) On pose:

$$\omega_r^0(x^\alpha) = \sum_{0 \leqslant |\lambda| \leqslant t} a_{r,\lambda} x^\lambda , \qquad \text{où } a_{r,\lambda} = D^\lambda \overline{w}_r(0) \tag{7}$$

(ω_r^0 est donc un polynome et est la partie régulière jusqu'à l'ordre t, du développement limité de $\overline{w}_r$ au point 0).

On pose *ensuite*:

$$\omega_r(x^\alpha) = \omega_r^0(x^\alpha) + \omega_r^1(x^\alpha) .$$

Compte tenu des conditions à imposer aux ω_r vues au § 1, les ω_r^1 doivent vérifier les conditions suivantes:

(8) 1) sur $(C_0') - \{0\}$: $[D_4^k \omega_r^1] = \sigma_r^{(k)}$ pour $0 \leqslant k \leqslant t$
en posant: $\sigma_r^{(k)} = \psi_r^{(k)} - [D_4^k \omega_r^0]$;

2) ω_r^1 doit avoir des dérivées jusqu'à l'ordre $t+2$ qui sont des fonctions localement de carré intégrable.

b) Définition des ω_r^1.

— $\omega_r^1 = 0$ *dans les domaines* $x^4 \geqslant 2S(x^i)$ *et* $x^4 \leqslant 0$.

— *Dans le domaine* $S(x^i) \leqslant x^4 \leqslant 2S(x^i)$:

$$\omega_r^1(x^\alpha) = \sum_{k=0}^{t} \frac{1}{k!} (x^4 - S)^k \sigma_r^{(k)}(x^i) + (x^4 - S)^{t+2} \sum_{k=0}^{t+1} (x^4 - 2S)^k \alpha_{r,k}(x^i) \tag{9}$$

où les $\alpha_{r,k}$ *sont choisis de façon que sur* $x^4 = 2S(x^i)$, *on ait*

$$D_4^k \omega_r^1 = 0 \qquad \text{pour } 0 \leqslant k \leqslant t+1 .$$

— *Dans le domaine* $0 \leqslant x^4 \leqslant S(x^i)$:

$$\omega_r^1(x^\alpha) = \sum_{k=0}^{t} \frac{1}{k!} (x^4 - S)^k \sigma_r^{(k)}(x^i) + (x^4 - S)^{t+2} \sum_{k=0}^{t+1} (x^4)^k \beta_{r,k}(x^i)$$

où les $\beta_{r,k}$ *sont choisis de fa:on que sur* $x^4 = 0$, *on ait*

$$D_4^k \omega_r^1 = 0 , \qquad \text{pour } 0 \leqslant k \leqslant t+1 .$$

On a évidemment:

$$\alpha_{r,0}(x^i) = -\frac{1}{S^{t+2}}\sum_{k=0}^{t}\frac{1}{k!}S^k\sigma_r^k(x^i)$$

et on vérifie, par récurrence, que les $\alpha_{r,l}$, $0 \leqslant l \leqslant t+1$, sont déterminés de façon unique et sont de la forme suivante:

$$\alpha_{r,l}(x^i) = \sum_{k=0}^{t} c_{lk}\sigma_r^{(k)}(x^i)\, S^{k-l-t-2} \tag{10}$$

où les c_{lk} sont des constantes ne dépendant que de l, k, t. On a un résultat semblable pour les $\beta_{r,l}$.

Il résulte de (10) que les fonctions $\alpha_{r,l}$, $\beta_{r,l}$ sont comme les $\sigma_r^{(k)}$ de classe C^{t+2} sur $(\mathcal{C}'_0) - \{0\}$.

ω_r^1 est définie dans un voisinage V de 0 ($V = \mathcal{D}' \times R$, où $\mathcal{D}'$ est la projection de $(\mathcal{C}'_0)$ sur l'espace R^3 des x^i).

Dans $V - \{0\}$, ω_r^1 est donc de classe C^{t+1} et a des dérivées d'ordre $t+2$ qui ont seulement des discontinuités de $1^{\text{è}}$ espèce sur $x^4 = 0$, $x^4 = S$, $x^4 = 2S$.

Sur $(\mathcal{C}'_0) - \{0\}$, $[D_4^k\omega_r^1] = \sigma_r^{(k)}$ pour $0 \leqslant k \leqslant t$.

Il reste donc à étudier le comportement des dérivées des ω_r^1 au voisinage de 0 afin de vérifier que ces dérivées sont de carré intégrable au voisinage de 0.

c) Comportement des dérivées de ω_r^1 au point 0.

L'hypothèse H et le théorème (B, III) entraînent que les $\psi_r^{(l)}$, donc aussi les $\sigma_r^{(l)}$, ont des développements limités en f.r.h. de x^i, s au voisinage de 0 jusqu'à l'ordre $3t + 2 - l$, et que leurs dérivées admettent les développements limités dérivés.

Comme la partie régulière du développement limité de $\psi_r^{(l)}$ coïncide avec celle de $[D_4^l\overline{w}_r]$ jusqu'à ordre $t-l$, et que la partie régulière du développement limité de $[D_4^l\overline{w}_r]$ coïncide évidemment avec celle de $[D_4^l\omega_r^0]$ jusqu'à l'ordre $t-l$, on trouve que le développement limité de $\sigma_r^{(l)}$ commence seulement par un terme de degré $t-l+1$.

Et de même, les dérivées $D^u\sigma_r^{(l)}$ ont un développement limité commençant par un terme de degré: $t - l + 1 - |u|$.

On en déduit que les $\sigma_r^{(l)}$ et leurs dérivées satisfont à des inégalités:

$$\left\{\begin{aligned} &|\sigma_r^{(l)}(x^i)| < K\, s^{t-l+1},\ 0 \leqslant l \leqslant t, \qquad K \text{ constantes}. \\ &|D^u\sigma_r^{(l)}(x^i)| < K\, s^{t-l+1-|u|},\ 0 \leqslant |u| \leqslant t+2\,. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Compte tenu de (10), on en déduit que les $\alpha_{r,l}$ et leurs dérivées satisfont à des inégalités:

$$\left\{\begin{aligned} &|\alpha_{r,l}(x^i)| < K\, s^{-l-1},\ 0 \leqslant l \leqslant t+1\,, \\ &|D^u\alpha_{r,l}(x^i)| < K\, s^{-l-1-|u|},\ 0 \leqslant |u| \leqslant t+2\,. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Et de (11) et (12) *on* déduit que dans le domaine $S(x^i) \leqslant x^4 \leqslant 2S(x^i)$:

$$|D^\lambda \omega_r^1(x^\alpha)| \leqslant K\, s_r^{t+1-|\lambda|} \quad 0 \leqslant |\lambda| \leqslant t+2\,, \qquad K \text{ constante}\,. \tag{13}$$

Ceci étant, (13) entraîne:

— les dérivées des ω_r^1 jusqu'à l'ordre t sont continues au point 0 et y prennent la valeur 0;

— les dérivées d'ordre $t+1$ sont bornées;

— les dérivées d'ordre $t+2$ sont en $1/s$: elles sont donc de carré intégrable au voisinage de 0.

4. – Conclusion.

THÉORÈME. – *Si les $A^{\lambda\mu}, f_r, \overline{w}_r$, vérifient les hypothèses $\alpha_{3t+2}, \beta_{3t}, \gamma_{3t+2}, t \geqslant 6$.*

Si les $A^{(t-2)}, f^{(t-2)}, a^{(t)}$ verifient au point 0, les équations (E_r) et toutes les équations dérivées jusqu'à l'ordre $t-2$, il existe une constante σ_0, telle que le système d'équations:

$$A^{\lambda\mu}(x^\alpha, w_s) D_{\lambda\mu} w_r + f_r(x^\alpha, w_s, D_\nu w_s) = 0 \tag{E_r}$$

a une solution unique (w_r) telle que:

— *les w_r sont définis dans un domaine*

$$Y = \{x^\alpha | S(x^i) \leqslant x^4 < \sigma\}\,, \qquad \sigma \leqslant \sigma_0\,;$$

— $w_r \in H^{t+1}(Y)$;

— *sur le conoïde caractéristique $(\mathcal{C}_0')$, les $D^\lambda w_r$, $|\lambda| \leqslant t$, sont bornés;*

— *sur $(\mathcal{C}_0')$, $w_r = \overline{w}_r$.*

REMARQUE. – Il suffit que les $A^{\lambda\mu}, f_r, \overline{w}_r$, vérifient les conditions $\alpha_{3t+2}, \beta_{3t}, \gamma_{3t+2}$ *sur* $\mathcal{C}_0$.

En dehors de $\mathcal{C}_0$, il suffit que les $A^{\lambda\mu}$ et les f_r aient des dérivées jusqu'à l'ordre t qui soient des fonctions vérifiant les hypothèses de § A), 1, b).

BIBLIOGRAPHIE

[1] D'ADHÉMAR, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **20** (1905), pp. 142-159.
[2] M. RIESZ, Acta Mathematica, **81** (1949), pp. 107-125.
[3] F. CAGNAC, Thèse de Doctorat d'Etat, Université, Paris VI (1973).
[4] F. CAGNAC, Annali di Matematica Pura ed Applicata, **104** (1975), pp. 355-393.
[5] Y. CHOQUET-BRUHAT, Acta Mathematica, **88** (1952), pp. 145-177.
[6] J. LERAY, *Hyperbolic Differential Equations*, Princeton (1952).
[7] H. CARTAN, *Calcul différentiel*, Hermann (1977).