Annali di Matematica pura ed applicata
(IV), Vol. CLXI (1992), pp. 1-42

Su un'equazione non lineare della corda vibrante (*).

MAURO SASSETTI - ANTONIO TARSIA

Sunto. – *Per il problema di Cauchy-Dirichlet relativo ad un'equazione non lineare della corda vibrante del tipo*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=f(x,t)$$

in $\Omega \times [0, T]$ con Ω intervallo limitato di $\boldsymbol{R}$, si dimostrano esistenza locale e unicità di soluzione. A tale scopo si utilizza una generalizzazione del lemma di Gronwall appositamente dimostrata: se $u(t)$ è tale che in $[0, T]$ risulta

$$u(t) \leqslant u_0 + \int_0^t \{f(s) + g(s)\, u^\beta(s)\}\, ds \qquad (\beta > 1),$$

allora esiste $\widehat{T} \leqslant T$ tale che in $[0, \widehat{T}]$ è

$$|u(t)| \leqslant c(T, \beta, f, g, u_0).$$

Summary. – *In the Cauchy-Dirichlet problem related to the non-linear equation of a vibrating string*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=f(x,t)$$

in $\Omega \times [0, T]$ (Ω being a bounded interval of the real line) local existence and uniqueness of a solution is established. To this aim we use a generalized version of Gronwall's inequality: if $u(t)$ is a solution in $[0, T]$ of the inequality

$$u(t) \leqslant u_0 + \int_0^t \{f(s) + g(s)\, u^\beta(s)\}\, ds \qquad (\beta > 1),$$

then there exists $\widehat{T} \leqslant T$ such that in $[0, \widehat{T}]$:

$$|u(t)| \leqslant c(T, \beta, f, g, u_0).$$

(*) Entrata in Redazione il 17 dicembre 1987.

Indirizzo degli AA.: Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Via F. Buonarroti 2, Pisa.

0. – Introduzione.

Un prototipo fisico del problema studiato nel presente lavoro è quello delle vibrazioni puramente longitudinali di una corda omogenea a sezione trasversale uniforme.

Se indichiamo con ρ_0 la densità costante della corda nella configurazione di equilibrio, con x la posizione di una sua sezione in tale configurazione, con $u(x, t)$ il suo spostamento da essa al tempo t, con $\tau(x, t)$ la tensione sulla sezione e con $f(x, t)$ una forza esterna, allora l'equazione del moto diventa

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} - \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, t),$$

con $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$, Ω indicando un intervallo limitato della retta reale.

Se si suppone che gli estremi della corda siano fissi ad ogni istante, si hanno le condizioni agli estremi di tipo Dirichlet

$$u(x, t) = 0 \qquad \forall x \in \partial\Omega, \qquad \forall t \in [0, T].$$

Si suppongono poi assegnate le condizioni iniziali

$$u(x, 0) = u_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \qquad \text{in } \Omega.$$

Per ottenere un'equazione differenziale nel solo spostamento u si possono formulare ipotesi specifiche sulla dipendenza della tensione τ dallo spostamento stesso. La più semplice di queste ipotesi è data dalla legge di Hooke, per cui

$$\tau = E_0 \frac{\partial u}{\partial x},$$

E_0 essendo una costante positiva. In questo caso l'equazione differenziale dedotta è quella lineare delle onde.

Se si assume una dipendenza non lineare di τ da $\partial u/\partial x$, cioè se

$$\tau = \sigma\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

si ottiene un'equazione non lineare delle onde

$$\sigma'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, t).$$

La dipendenza non lineare che si assume nel presente lavoro porta a formulare il problema:

$$
\text{(I)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1+\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\dfrac{\partial u}{\partial x}\right\} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t) & \text{in } \Omega\times[0,T], \\ u(x,0)=u_0(x), \qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=u_1(x) & \text{in } \Omega, \\ u(x,t)=0 \quad \text{in } \partial\Omega, \qquad \text{per quasi ogni } t\in[0,T]. \end{cases}
$$

Di questo problema vengono studiate esistenza locale e unicità di soluzione.

Il punto essenziale per ottenere l'esistenza è quello di stabilire una maggiorazione dell'energia. Procedendo in modo formalmente analogo al caso lineare, questa si ottiene non appena si sappia:

i) dare un senso alle ripetute applicazioni della formula di Gauss-Green, il che implica poter lavorare con funzioni opportunamente regolari,

ii) utilizzare un lemma di Gronwall in cui il secondo membro della maggiorazione dipende dalla funzione incognita non in modo lineare, ma «super-lineare».

Nel presente lavoro il punto i) (che nel caso lineare è risolto mediante uso di convoluzioni) è superato penalizzando il problema con un termine contenente derivate nello spazio, di ordine sufficientemente alto.

Per quanto riguarda il punto ii), esistono in letteratura vari risultati del genere indicato; la versione che qui si dimostra, in modo indipendente da tali precedenti, permette di indebolire le ipotesi di regolarità sulla $f(x,t)$ a secondo membro di (I).

Una volta ottenuta la maggiorazione dell'energia, gli strumenti utilizzati per ricavare l'esistenza sono quelli classici:

1) regolarità del problema linearizzato,

2) teoremi di punto fisso.

Sembra opportuno sottolineare il fatto che la maggiorazione dell'energia e i risultati dei punti 1) e 2) sono ottenuti per il problema penalizzato la cui equazione differenziale è della forma

$$
\text{(II)} \qquad \varepsilon\frac{\partial^{2m}u}{\partial x^{2m}} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial u}{\partial x}\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t);
$$

soltanto come ultimo passo si passa al limite in ε. Questo modo di procedere ha il vantaggio che nel punto 1) la regolarità richiesta per il coefficiente di $\partial u/\partial x$ nell'equazione ottenuta dalla (II) per linearizzazione è meno forte di quella che si avrebbe nel caso $\varepsilon=0$ e questo ovviamente facilita la scelta degli spazi in cui operare nel punto 2).

In ogni caso, è relativamente più facile dimostrare l'esistenza di soluzioni per problemi in cui il termine non lineare contiene le derivate di ordine inferiore (problema penalizzato) che non quelle di ordine massimo (problema (I)).

Per quanto riguarda l'esposizione degli argomenti è stato seguito il seguente ordine:

§§ 1 e 2: sono forniti risultati di esistenza e regolarità per un problema astratto associato all'equazione data, del tipo $(\varepsilon A + B)u + u'' = f$, risultati in gran parte originali e ottenuti utilizzando il metodo della decomposizione spettrale dell'operatore A,

§ 3: si traducono in concreto nel caso unidimensionale i risultati precedenti,

§ 4: si stabilisce la maggiorazione dell'energia,

§ 5: si ottiene l'esistenza di una soluzione locale per il problema non lineare penalizzato,

§ 6: passando al limite per $\varepsilon \to 0$, si stabilisce l'esistenza e l'unicità di una soluzione locale per il problema (I),

§ 7: si dimostra una generalizzazione del lemma di Gronwall,

§ 8: si dimostra un risultato sull'incollamento di soluzioni di un problema differenziale, usato nel § 5.

Per quanto riguarda il risultato di esistenza locale, può essere ottenuto anche con i metodi studiati da KATO (cf. [K]), che sono diversi da quelli utilizzati nel presente lavoro, in quanto inquadrati nell'ambito della teoria dei semigruppi.

Altri risultati di questo tipo, ottenuti non con tecniche di semigruppo, ma con i metodi classici della maggiorazione dell'energia e dei teoremi di punto fisso, iniziati da KRZYŻAŃSKI e SCHAUDER [KS] si possono ritrovare in vari lavori. Ad esempio, in [CW] è dimostrata l'esistenza locale del problema di Cauchy-Dirichlet in un aperto di $\boldsymbol{R}^3$, in [DH] gli stessi risultati sono ottenuti per un aperto di $\boldsymbol{R}^n$. Il presente lavoro rientra in questo ambito di problematiche, differendone però nella tecnica e, di conseguenza, anche nelle ipotesi assunte sui dati.

Altri lavori sull'argomento usano il metodo di Faedo-Galerkin per ottenere l'esistenza di una soluzione periodica su tutta la retta reale (cf. ad es. [D]), oppure affrontano un problema non coercivo penalizzandolo con un termine contenente derivate miste di ordine superiore (cf. ad es. [T] e, con altre tecniche, [GCM]).

Per quanto riguarda l'unicità di soluzione si hanno dei risultati anche per problemi più generali di quello qui studiato (cf. ad es. [H]).

1. – Un risultato di esistenza per un problema astratto.

Siano V, H due spazi di Hilbert, tali che V è denso in H con immersione compatta; sia V' il duale di V, in modo che risulti $V \subset H \subset V'$.

Sia $A\colon V \to V'$ un operatore lineare e simmetrico tale che

$$|\langle Au, v\rangle| \leq M\|u\|_V \|v\|_V \qquad \forall u,\ v \in V, \tag{1.1}$$

$$\langle Au, u\rangle \geq \nu\|u\|_V^2 \qquad \forall u \in V, \tag{1.2}$$

$\langle\, ,\rangle$ indicando la dualità tra V' e V, ν e M essendo costanti strettamente positive. Posto

$$D(A)=\{u\in V\colon Au\in H\}\,,$$

consideriamo gli spazi di Hilbert di interpolazione (per la loro definizione e le relative proprietà rimandiamo a [LM]):

$$H_\theta=\begin{cases}[D(A),H]_{1-\theta} & \text{se } \theta\in[0,1]\,,\\ [H,(D(A))']_{-\theta} & \text{se } \theta\in[-1,0]\,.\end{cases}$$

Per questi spazi si hanno le seguenti inclusioni [1]:

$$\begin{aligned}&D(A)\subset H_\theta\subset H && \text{se } \theta\in[0,1]\,,\\ &H\subset H_\theta\subset(D(A))' && \text{se } \theta\in[-1,0]\,,\end{aligned}$$

le immersioni essendo continue rispetto alla topologia indotta dalla norma $\|\ \|_\theta$.

Per la definizione di $\|\ \|_\theta$, osserviamo che, essendo A simmetrico e coercivo ed essendo compatta l'immersione di V in H, la decomposizione spettrale di A è data da

$$A\omega_n=\lambda_n\omega_n\,,\qquad n\in N$$

$$\lambda_n>0\,,\qquad \lambda_n\to+\infty\,;$$

scegliendo i ω_n in modo che $(\omega_n,\omega_m)_H=\delta_n^m$, i ω_n formano un sistema ortonormale completo in H. Allora, essendo

$$D(A)=\left\{u|u=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\omega_n\,,\ \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2|u_n|^2<+\infty\right\}$$

e

$$H_\theta=\left\{u|u=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\omega_n\,,\ \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{2\theta}|u_n|^2<+\infty\right\},$$

poniamo

$$\|u\|_\theta^2=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{2\theta}|u_n|^2,\qquad (u,v)_\theta=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{2\theta}u_nv_n\,. \tag{1.3}$$

Sia inoltre

$$B(t)\colon H_\sigma\to H_{-\sigma}\,,$$

con $t\in[0,T]$ e con $\sigma\in(0,1/4)$ opportuno una famiglia di operatori lineari e simmetrici tali che

$$B(t)\colon H_{2\sigma}\to H\quad \text{con continuità} \tag{1.4}$$

---

[1] In particolare, $H_{1/2}=V$, $H_{-1/2}=V'$.

$$(1.5)\qquad |\langle B(t)u, v\rangle_\sigma| \leq M_\sigma \|u\|_\sigma \|v\|_\sigma, \qquad \forall u,\ v \in H_\sigma,\ \ \forall t \in [0, T],$$

$$(1.6)\qquad \langle B(t)u, u\rangle_\sigma \geq \nu_\sigma \|u\|_\sigma^2, \qquad \forall u \in H_\sigma,\ \ \forall t \in [0, T],$$

$$(1.7)\qquad B(t) \in H^{1,1}(0, T; \mathcal{L}(H_\sigma, H_{-\sigma})),$$

$$(1.8)\qquad |\langle B'(t)u, v\rangle_\sigma| \leq M_\sigma \|u\|_\sigma \|v\|_\sigma, \qquad \forall u,\ v \in H_\sigma,\ \ \forall t \in [0, T],$$

essendo $\langle\ ,\ \rangle_\sigma$ la dualità tra $H_{-\sigma}$ e H_σ.

Per il problema di Cauchy

$$(1.9)\qquad \begin{cases} (\varepsilon A + B(t))\, u + u'' = f, \\ u(0) = u_0, \qquad u'(0) = u_1, \end{cases}$$

dove ε è un parametro reale positivo, vale il seguente risultato:

TEOREMA 1.1. – *Sotto le ipotesi* (1.1) ... (1.8), *se* $f \in L^1(0, T; H)$, $u_0 \in V$, $u_1 \in H$, *il problema* (1.9) *ha una ed una sola soluzione* $u(t)$ *con*

$$u \in C^0([0, T]; V) \cap C^1([0, T]; H)$$

e vale per essa la maggiorazione

$$(1.10)\qquad \varepsilon \|u(t)\|_V^2 + \nu_\sigma \|u(t)\|_\sigma^2 + \|u'(t)\|_H^2 \leq$$

$$\leq c \exp\left[\int_0^t \|B'(s)\|\, ds\right] \left\{ \left(\int_0^t \|f\|_H\, ds\right)^2 + \varepsilon \|u_0\|_V^2 + M_\sigma \|u_0\|_\sigma^2 + \|u_1\|_H^2 \right\}.$$

DIMOSTRAZIONE. – L'esistenza e l'unicità sono risultati noti (cfr. [BA]). La maggiorazione segue con argomenti standard di densità dal seguente lemma:

LEMMA 1.1. – *Sostituendo l'ipotesi* (1.7) *con la*

$$(1.7')\qquad B(t) \in C^\infty([0, T]; \mathcal{L}(H_\sigma, H_{-\sigma}))$$

e se

$$f \in C^\infty([0, T]; H), \qquad u_0 \in D(A), \qquad u_1 \in V,$$

la soluzione u *del problema* (1.9) *è tale che*

$$u \in C^1([0, T]; V)$$

e per essa vale la maggiorazione (1.10).

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA. – Per quanto riguarda la regolarità di u, si veda [GI]. Dall'equazione (1.9) si deduce

$$\varepsilon\langle Au, \omega_n\rangle + \langle B(t)u, \omega_n\rangle + \langle u'', \omega_n\rangle = \langle f, \omega_n\rangle,$$

essendo i ω_n gli elementi del sistema ortonormale completo sopra introdotto, e quindi (2)

$$\varepsilon(u, A\omega_n)_H + (B(t)\,u, \omega_n)_H + \frac{d^2}{dt^2}(u, \omega_n)_H = (f, \omega_n)_H\,,$$

e anche

$$\varepsilon\lambda_n(u, \omega_n)_H + (B(t)\,u, \omega_n)_H + \frac{d^2}{dt^2}(u, \omega_n)_H = (f, \omega_n)_H\,.$$

Quindi, ponendo

$$u_n = (u, \omega_n)_H\,, \qquad f_n = (f, \omega_n)_H\,,$$

si ha

$$\varepsilon\lambda_n u_n + (B(t)\,u, \omega_n)_H + u_n'' = f_n\,.$$

Moltiplicando per u_n' e integrando rispetto a t:

$$\text{(1.11)} \qquad \varepsilon\lambda_n u_n^2(t) + u_n'^2(t) + 2\int_0^t (B(s)\,u(s), \omega_n)_H\, u_n'(s)\, ds =$$

$$= 2\int_0^t f_n(s)\, u_n'(s)\, ds + \varepsilon\lambda_n u_n^2(0) + u_n'^2(0)\,.$$

Sommando rispetto ad n, si trova

$$\text{(1.12)} \qquad \varepsilon\|u\|_V^2 + \|u'\|_H^2 + 2\int_0^t (B(s)\,u, u')_H\, ds = 2\int_0^t (f, u')_H\, ds + \varepsilon\|u_0\|_V^2 + \|u_1\|_H^2\,.$$

Si osservi che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (B(s)\,u, \omega_n)_H\, u_n'\, ds = \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} (B(s)\,u, \omega_n)_H\, u_n'\, ds\,,$$

perchè $\sum_{n=1}^{\infty} (B(s)\,u, \omega_n)_H u_n' = (B(s)\,u, u')_H$ e $|(B(s)\,u, u')_H| \leq \|B(s)\,u\|_H \|u'\|_H \leq c_1 \|u\|_{2\sigma} \|u'\|_H \leq$ $\leq c_2 \|u\|_V \|u'\|_H$.

Riprendendo la (1.12) e osservando che

$$2(B(t)\,u, u')_H = \frac{d}{dt}(B(t)\,u, u)_H - (B'(t)\,u, u)_H$$

---

(2) $\langle B(t)\,u, \omega_n\rangle = (B(t)\,u, \omega_n)_H$ perchè $u \in V \subset H_{2\sigma}$ e $B\colon H^{2\sigma} \to H$.

si ottiene

$$\varepsilon\|u\|_V^2 + \|u'\|_H^2 + (B(t)\,u, u)_H = \tag{1.13}$$
$$= 2\int_0^t (f, u')_H\,ds + \int_0^t (B'(s)\,u, u)_H\,ds + \varepsilon\|u_0\|_V^2 + \|u_1\|_H^2 + (B(0)\,u_0, u_0)_H\,.$$

Tenuto conto del fatto che è

$$(B(t)\,u, u)_H = \langle B(t)\,u, u\rangle_\sigma \geq \nu_\sigma\|u\|_\sigma^2\,,$$
$$(B(0)\,u_0, u_0)_H \leq M_\sigma\|u_0\|_\sigma^2\,,$$

da (1.13) si ottiene

$$\varepsilon\|u\|_V^2 + \nu_\sigma\|u\|_\sigma^2 + \|u'\|_H^2 \leq 2\int_0^t \|f\|_H\|u'\|_H\,ds + \int_0^t \|B'(s)\|\,\|u\|_\sigma^2\,ds + \varepsilon\|u_0\|_V^2 + M_\sigma\|u_0\|_\sigma^2 + \|u_1\|_H^2\,.$$

Da questa, utilizzando il lemma di Gronwall, si deduce la maggiorazione (1.10). ■

Nelle ipotesi del Lemma 1.1, riprendiamo la (1.12) ricordando che $\|B(t)\,u\|_H \leq$ $\leq c_1\|u\|_{2\sigma} \leq c_2\|u\|_V$:

$$\varepsilon\|u\|_V^2 + \|u'\|_H^2 \leq 2\int_0^t \|B(s)\,u\|_H\|u'\|_H\,ds + 2\int_0^t \|f\|_H\|u'\|_H\,ds +$$
$$+ \varepsilon\|u_0\|_V^2 + \|u_1\|_H^2 \leq \frac{2c}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t \sqrt{\varepsilon}\|u\|_V\|u'\|_H\,ds + 2\int_0^t \|f\|_H\|u'\|_H\,ds +$$
$$+ \varepsilon\|u_0\|_V^2 + \|u_1\|_H^2 \leq \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t \varepsilon\|u\|_V^2\,ds + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t \|u'\|_H^2\,ds +$$
$$+ 2\int_0^t \|f\|_H\|u'\|_H\,ds + \varepsilon\|u_0\|_V^2 + \|u_1\|_H^2\,.$$

Utilizzando il lemma di Gronwall, da questa segue:

$$\varepsilon\|u\|_V^2 + \|u'\|_H^2 \leq c\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\left\{\left(\int_0^t \|f\|_H\,ds\right)^2 + \|u_0\|_V^2 + \|u_1\|_H^2\right\}. \tag{1.14}$$

Poichè la costante c in (1.14) non dipende da B' (ma solo da B e da ε), con il consueto metodo di densità resta provato il seguente risultato:

TEOREMA 1.2. – *Sotto le ipotesi del Teorema* 1.1 *escluse la* (1.7) *e la* (1.8), *il problema di Cauchy* (1.9) *ha una ed una sola soluzione* $u(t)$ *con*

$$u \in C^0([0,T];V) \cap C^1([0,T];H)$$

e vale per essa la maggiorazione

$$\varepsilon\|u\|_V^2 + \|u'\|_H^2 \leq c\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\left\{\left(\int_0^t \|f\|_H\, ds\right)^2 + \varepsilon\|u_0\|_V^2 + \|u_1\|_H^2\right\}.$$

Si osservi che il passaggio da una soluzione $L^\infty(0,T;V) \cap H^{1,\infty}(0,T;H)$ ad una $C^0([0,T];V) \cap C^1([0,T];H)$ segue con tecniche standard (si confronti, ad esempio, [AR]). Anche l'unicità si ottiene facilmente.

2. – Un risultato di regolarità per il problema astratto.

Riprendiamo il problema di Cauchy (1.9), aggiungendo alle condizioni del Lemma 1.1 l'ipotesi

$$\text{(2.1)}\quad \begin{cases} \|B(t)\,u\|_\alpha \leq c_\alpha(t)\|u\|_{\alpha+2\sigma}, & \forall u \in V,\ \forall t \in [0,T], \\ \text{con} \\ \alpha, \sigma \in [0,1] \text{ e } \alpha + 2\sigma \leq \dfrac{1}{2}, \text{ e } c_\alpha(t) \text{ funzione positiva, non decrescente, limitata.} \end{cases}$$

Moltiplicando la (1.11) per $\lambda_n^{2\alpha}$, si ottiene

$$\text{(2.2)}\quad \varepsilon\lambda_n^{1+2\alpha}|u_n|^2 + \lambda_n^{2\alpha}|u_n'|^2 + 2\lambda_n^{2\alpha}\int_0^t (B(s)\,u, \omega_n)_H\, u_n'\, ds =$$
$$= 2\int_0^t f_n \lambda_n^{2\alpha} u_n'\, ds + \varepsilon\lambda_n^{1+2\alpha}|u_n(0)|^2 + \lambda_n^{2\alpha}|u_n'(0)|^2.$$

La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{2\alpha}(B(t)\,u, \omega_n)_H\, u_n',$$

converge assolutamente, in quanto

$$\sum_{n=0}^{K} \lambda_n^{2\alpha}|(B(t)\,u, \omega_n)_H\, u_n'| \leq \left(\sum_{n=0}^{K} |(B(t)\,u, \omega_n)_H|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=0}^{K} u_n'^2\lambda_n^{4\alpha}\right)^{1/2} \leq \|B(t)\,u\|_H\|u'\|_{2\alpha};$$

inoltre

$$\int_0^t \|B(s)\,u\|_H \|u'\|_{2\alpha}\,ds < +\infty\,,$$

poichè

$$\|B(s)\,u\|_H \leqslant \|B(s)\,u\|_\alpha \leqslant c_\alpha(T)\|u\|_{\alpha+2\sigma} \leqslant c'_\alpha\,\|u\|_V\,,$$

$$\|u'\|_{2\alpha} \leqslant c\|u'\|_V$$

e $u \in C^1([0,T];V)$.

Ciò posto, dalla (2.2) si ricava:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{2\alpha} \int_0^t (B(s)\,u, \omega_n)_H\, u_n'\,ds = \int_0^t \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{2\alpha} (B(s)\,u, \omega_n)_H\, u_n' \right) ds = \int_0^t (B(s)\,u, u')_\alpha\,ds\,,$$

e da questa l'energia α-esima:

$$\text{(2.3)} \qquad \varepsilon\|u\|^2_{1/2+\alpha} + \|u'\|^2_\alpha + 2\int_0^t (B(s)\,u, u')_\alpha\,ds = 2\int_0^t (f, u')_\alpha\,ds + \varepsilon\|u_0\|^2_{1/2+\alpha} + \|u_1\|^2_\alpha\,.$$

Si ha così

$$\varepsilon\|u\|^2_{1/2+\alpha} + \|u'\|^2_\alpha \leqslant 2c_\alpha(t) \int_0^t \|u\|_{\alpha+2\sigma}\|u'\|_\alpha\,ds + 2\int_0^t \|f\|_\alpha \|u'\|_\alpha\,ds + \varepsilon\|u_0\|^2_{1/2+\alpha} + \|u_1\|^2_\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_\alpha(t)}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t \varepsilon\|u\|^2_{1/2+\alpha}\,ds + \frac{c_\alpha(t)}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t \|u'\|^2_\alpha\,ds + 2\int_0^t \|f\|_\alpha \|u'\|_\alpha\,ds + \varepsilon\|u_0\|^2_{1/2+\alpha} + \|u_1\|^2_\alpha\,.$$

Per il lemma di Gronwall,

$$\text{(2.4)} \qquad \varepsilon\|u\|^2_{1/2+\alpha} + \|u'\|^2_\alpha \leqslant c\exp\left[\frac{tc_\alpha(t)}{\sqrt{\varepsilon}}\right] \left\{ \left(\int_0^t \|f\|_\alpha\,dt \right)^2 + \varepsilon\|u_0\|^2_{1/2+\alpha} + \|u_1\|^2_\alpha \right\}.$$

Da questo risultato, con metodo standard segue il

TEOREMA 2.1. – *Sotto le ipotesi* (1.1)...(1.6), (2.1), *se*

$$f \in L^1(0,T;H_\alpha)\,, \qquad u_0 \in H_{\alpha+1/2}\,, \quad u_1 \in H_\alpha$$

il problema di Cauchy (1.9) *ha una ed una sola soluzione* $u(t)$ *con*

$$u \in L^\infty(0,T;H_{\alpha+1/2}) \cap H^{1,\infty}(0,T;H_\alpha)$$

e per essa vale la maggiorazione (2.4).

OSSERVAZIONE 2.1. – Procedendo come in [LM] (Lemma 8.2, Capitolo 3), otteniamo anche che

$$u \in C_s(0,T;H_{\alpha+1/2}) \cap C_s^1(0,T;H_\alpha)$$

nel senso della continuità scalare (3). ∎

Alle ipotesi del Lemma 1.1 aggiungiamo le seguenti:

$$\text{(2.5)}\quad \begin{cases} \text{Esiste } \alpha > \sigma \text{ con } \alpha+\sigma < \dfrac{1}{2} \text{ tale che} \\ (B(t)u,u)_{\alpha-K\sigma} \leq M_\alpha \|u\|^2_{\alpha-(K-1)\sigma}, \\ (B(t)u,u)_{\alpha-K\sigma} \geq \nu_\alpha \|u\|^2_{\alpha-(K-1)\sigma} - c_\alpha \|u\|^2_{\alpha-K\sigma}, \\ (B'(t)u,u)_{\alpha-K\sigma} \leq M'_\alpha \|u\|^2_{\alpha-(K-1)\sigma}, \qquad \forall u \in V,\ \forall t \in [0,T],\ \forall K \in N\colon \alpha > K\sigma, \end{cases}$$

$$\text{(2.6)}\quad (B(t)u,v)_\beta = (B(t)v,u)_\beta + a_\beta(t,u,v) - a_\beta(t,v,u), \qquad \forall u,v \in V,\ \ \forall t \in [0,T],\ \ \forall \beta = \alpha - K\sigma,$$

dove $a_\beta(t,u,v)$ è una forma bilineare tale che

$$\text{(2.7)}\quad \begin{cases} |a_\beta(t,u,v)| \leq c_\beta \|u\|_\beta \|v\|_{\beta+\sigma}, \\ |a'_\beta(t,u,v)| \leq c'_\beta \|u\|_\beta \|v\|_{\beta+\sigma}, \end{cases} \qquad \forall u,\ v \in V.$$

Ciò posto, riprendiamo la (2.3). Poichè

$$\int_0^t (B(s)u,u')_\alpha\,ds = \int_0^t \left\{ \frac{d}{ds}(B(s)u,u)_\alpha - (B'(s)u,u)_\alpha - (B(s)u',u)_\alpha \right\} ds =$$

$$= (B(t)u,u)_\alpha - \int_0^t (B'(s)u,u)_\alpha\,ds - \int_0^t (B(s)u,u')_\alpha\,ds +$$

$$+ \int_0^t \{a_\alpha(s,u,u') - a_\alpha(s,u',u)\}\,ds - (B(0)u_0,u_0)_\alpha,$$

(3) Se X è uno spazio di Hilbert, $u \in C_s(0,T;X)$ significa che $u \in L^\infty(0,T;X)$ e che l'applicazione $t \to (u(t),v)_X$ è continua in $[0,T]$, $\forall v \in X$.

sostituendo nella (2.3), si ottiene

$$(2.8)\qquad \varepsilon\|u\|^2_{\alpha+1/2}+\|u'\|^2_\alpha+(B(t)\,u,u)_\alpha=\int_0^t(B'(s)\,u,u)_\alpha\,ds+$$

$$+\int_0^t\{a_\alpha(s,u,u')-a_\alpha(s,u',u)\}\,ds+(B(0)\,u_0,u_0)_\alpha+2\int_0^t(f,u')_\alpha\,dt+\varepsilon\|u_0\|^2_{\alpha+1/2}+\|u_1\|^2_\alpha.$$

Esaminiamo separatamente i termini che compaiono nella (2.8). Si ha:

$$(B(t)\,u,u)_\alpha\geqslant\nu_\alpha\|u\|^2_{\alpha+\sigma}-\lambda_\alpha\|u\|^2_\alpha$$

e

$$\int_0^t(B'(s)\,u,u)_\alpha\,ds\leqslant M'_\alpha\int_0^t\|u\|^2_{\alpha+\sigma}\,ds\,,$$

dalle (2.5) scritte per $K=0$;

$$\left|\int_0^t a_\alpha(s,u',u)\,ds\right|\leqslant c_\alpha\int_0^t\|u'\|_\alpha\|u\|_{\alpha+\sigma}\,ds\leqslant\frac{c_\alpha}{2}\left(\int_0^t\|u'\|^2_\alpha\,ds+\int_0^t\|u\|^2_{\alpha+\sigma}\,ds\right)$$

dalla (2.7) scritta per $K=0$;

$$\left|\int_0^t a_\alpha(s,u,u')\,ds\right|=\left|\int_0^t\left\{\frac{d}{ds}a_\alpha(s,u,u)-a'_\alpha(s,u,u)-a_\alpha(s,u',u)\right\}ds\right|\leqslant$$

$$\leqslant|a_\alpha(t,u,u)|+|a_\alpha(0,u_0,u_0)|+\int_0^t|a'_\alpha(s,u,u)|\,ds+\int_0^t|a_\alpha(s,u',u)|ds\leqslant$$

$$\leqslant c_\alpha\{\|u\|_\alpha\|u\|_{\alpha+\sigma}+\|u_0\|_\alpha\|u_0\|_{\alpha+\sigma}\}+c'_\alpha\int_0^t\|u\|_\alpha\|u\|_{\alpha+\sigma}\,ds+\frac{c_\alpha}{2}\int_0^t\|u'\|^2_\alpha\,ds+$$

$$+\frac{c_\alpha}{2}\int_0^t\|u\|^2_{\alpha+\sigma}\,ds\leqslant c(\alpha)\left\{\delta\|u\|^2_{\alpha+\sigma}+\frac{1}{\delta}\|u\|^2_\alpha+\delta\|u_0\|^2_{\alpha+\sigma}+\frac{1}{\delta}\|u_0\|^2_\alpha+\right.$$

$$\left.+\int_0^t\|u\|_\alpha\|u\|_{\alpha+\sigma}\,ds+\int_0^t\|u'\|^2_\alpha\,ds+\int_0^t\|u\|^2_{\alpha+\sigma}\,ds\right\};$$

$$(B(0)\,u_0\,,\,u_0\,)_\alpha \leq M_\alpha \|u_0\|^2_{\alpha+\sigma}\,;$$

$$\int_0^t (f, u')_\alpha\, ds \leq \int_0^t \|f\|_\alpha \|u'\|_\alpha\, ds\,.$$

Tenendo conto di questi risultati, posto

$$\phi^2(t) = \varepsilon\|u\|^2_{1/2+\alpha} + \nu_\alpha \|u\|^2_{\alpha+\sigma} + \|u'\|^2_\alpha$$

dalla (2.8) si deduce

$$\phi^2(t) \leq c\int_0^t \phi^2(s)\, ds + \int_0^t \|u\|_\alpha \phi(s)\, ds + \int_0^t \|f\|_\alpha \phi(s)\, ds + \delta\phi^2(t) + c_1\phi^2(0) + \left(\frac{1}{\delta} + c_\alpha\right) \sup_{[0,T]} \|u\|^2_\alpha\,.$$

Scegliendo $\delta < 1$ e applicando il lemma di Gronwall nella forma del successivo Teorema 7.1 (ii) con $\beta = 1/2$:

$$\phi^2(t) \leq c\left\{\phi^2(0) + \sup_{[0,T]} \|u\|^2_\alpha + \left(\int_0^t \|f\|_\alpha\, ds\right)^2\right\},$$

cioè

$$\text{(2.9)}\qquad \varepsilon\|u\|^2_{\alpha+1/2} + \nu_\alpha \|u\|^2_{\alpha+\sigma} + \|u'\|^2_\alpha \leq$$

$$\leq c\left\{\left(\int_0^t \|f\|_\alpha\, ds\right)^2 + \varepsilon\|u_0\|^2_{\alpha+1/2} + \|u_1\|^2_\alpha + \|u_0\|^2_{\alpha+\sigma} + \sup_{[0,T]} \|u\|^2_\alpha\right\}.$$

La costante che compare nella (2.9) dipende dalle costanti del problema, ma non da ε.

Ripetiamo questo procedimento scegliendo nelle (2.5)... (2.7) $K = 1$. Questo porta a maggiorare $\sup_{[0,T]} \|u\|_\alpha$ con termini che dipendono dai dati del problema e dal $\sup_{[0,T]} \|u\|_{\alpha-\sigma}$.

Il procedimento si itera sino ad arrivare ad un intero K tale che $\alpha - K\sigma < \sigma$. A questo punto, essendo $\sup_{[0,T]} \|u\|_{\alpha-K\sigma} \leq c \sup_{[0,T]} \|u\|_\sigma$ perchè l'immersione di H_σ in $H_{\alpha-K\sigma}$ è continua, per la maggiorazione del Teorema 1.1 dalla (2.9) si deduce

$$\text{(2.10)}\qquad \varepsilon\|u\|^2_{\alpha+1/2} + \|u\|^2_{\alpha+\sigma} + \|u'\|^2_\alpha \leq c\left\{\left(\int_0^t \|f\|_\alpha\, ds\right)^2 + \varepsilon\|u_0\|^2_{\alpha+1/2} + \|u_1\|^2_\alpha + \|u_0\|^2_{\alpha+\sigma}\right\}.$$

Ancora con metodi standard, dalla (2.10) si deduce il seguente risultato:

TEOREMA 2.2. – *Nelle ipotesi* (1.1)...(1.8), (2.1) (*con* $\alpha = 0$), (2.5)...(2.7), *se*

$$f \in L^1(0, T; H^\alpha), \qquad u_0 \in H_{\alpha+1/2}, \ u_1 \in H_\alpha,$$

dove α *è come in* (2.5), *la soluzione* u *del problema di Cauchy* (1.9) *è tale che*

$$u \in L^\infty(0, T; H_{1/2+\alpha}) \cap H^{1,\infty}(0, T; H_\alpha)$$

e verifica la maggiorazione (2.10).

COROLLARIO 2.1. – *Nelle ipotesi* (1.4)...(1.8), (2.1) *con* $\alpha = 0$, (2.5)...(2.7), *se*

$$f \in L^1(0, T; H^\alpha), \qquad u_0 \in H_{\alpha+\sigma}, \ u_1 \in H_\alpha,$$

la soluzione u *del problema di Cauchy limite*

$$\begin{cases} B(t)\,u + u'' = f, \\ u(0) = u_0, \qquad u'(0) = u_1, \end{cases} \tag{2.11}$$

è tale che

$$u \in L^\infty(0, T; H_{\alpha+\sigma}) \cap H^{1,\infty}(0, T; H_\alpha)$$

e vale la maggiorazione

$$\|u\|^2_{\alpha+\sigma} + \|u'\|^2_\alpha \leq c\left\{\left(\int_0^t \|f\|_\alpha\, ds\right)^2 + \|u_1\|^2_\alpha + \|u_0\|^2_{\alpha+\sigma}\right\}.$$

DIMOSTRAZIONE DEL COROLLARIO. – Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \varepsilon A u_\varepsilon + B(t)\, u_\varepsilon + u''_\varepsilon = f, \\ u_\varepsilon(0) = u_0, \qquad u'_\varepsilon(0) = u_1, \end{cases}$$

dove

$$f \in L^1(0, T; H_\alpha), \qquad u_0 \in H_{1/2+\alpha}, \ u_1 \in H_\alpha.$$

Dalla (2.10) segue l'equilimitatezza delle u_ε in $L^\infty(0, T; H_{\alpha+\sigma}) \cap H^{1,\infty}(0, T; H_\alpha)$ e dunque l'esistenza di una u tale che

$$u_\varepsilon \to u \text{ debole-star}^{(4)} \text{ in } L^\infty(0,T;H_{\alpha+\sigma}) \cap H^{1,\infty}(0,T;H_\alpha).$$

Per provare che u è soluzione del problema limite (2.11), basta far vedere che

$$\int_0^T \varepsilon\langle Au_\varepsilon, \varphi\rangle\, dt \to 0, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(0,T;V),$$

e questo segue da

$$\int_0^T \varepsilon\langle Au_\varepsilon, \varphi\rangle\, dt \leq c\varepsilon \sup_{[0,T]} \|u_\varepsilon\|_V \leq c\varepsilon \sup_{[0,T]} \|u_\varepsilon\|_{\alpha+1/2} \leq \sqrt{\varepsilon}\, c(f, u_0, u_1) \text{ per la (2.10)}.$$

Inoltre per la soluzione u vale la maggiorazione (2.12).

Se poi $u_0 \in H_{\alpha+\sigma}$, il corollario risulta dimostrato con il consueto procedimento di approssimazione per densità. ∎

3. – Il problema lineare con termine di penalizzazione.

Sia Ω un intervallo aperto e limitato di $\boldsymbol{R}$. Poniamo

$$D^K u(x,t) = \frac{\partial^K u(x,t)}{\partial x^K},$$

$$u'(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}.$$

Riferendosi alle notazioni dei paragrafi precedenti, siano

$$A = (-1)^m D^{2m},$$

$$B(t) = -D(b(x,t)D).$$

Scelti

$$H = L^2(\Omega), \qquad V = H_0^m(\Omega), \qquad V' = H^{-m}(\Omega),$$

ed essendo

$$D(A) = H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega),$$

---

(4) $x_n \to x$ debole star in $L^\infty(0,T;X)$ con X di Hilbert se $\forall v \in L^1(0,T;X)$

$$\int_0^T (x_n(t), v(t))_X\, dt \to \int_0^T (x(t), v(t))_X\, dt.$$

consideriamo gli spazi d'interpolazione (cf. [LM], pag. 45)

$$H_s = [D(A), L^2(\Omega)]_{1-s} = H_0^{2ms}(\Omega)\,, \tag{3.1}$$

con $s \in [0, 1/2]$.

L'operatore A: $H_0^m(\Omega) \to H^{-m}(\Omega)$ è lineare, simmetrico, continuo e coercivo (ipotesi (1.1), (1.2)).

Posto $\mathcal{C} = \Omega \times [0, T]$, sia

$$b(x,t) \in L^\infty(\mathcal{C})\,, \qquad b(x,t) \geqslant \alpha > 0 \text{ in } \mathcal{C}\,. \tag{3.2}$$

$B(t)$ è una famiglia di operatori lineari e simmetrici di $H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, quindi di $H_\sigma \to H_{-\sigma}$ se $\sigma = 1/2m$.

$B(t)$ è continuo e coercivo (ipotesi (1.5), (1.6)). L'ipotesi (1.4) che $B(t)$: $H_0^2(\Omega) \to$ $\to L^2(\Omega)$ sia continuo è verificata se

$$b(x,t) \in L^\infty(0, T; H^{1,\infty}(\Omega))\,. \tag{3.3}$$

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \varepsilon(-1)^m D^{2m} u - D(b(x,t)\,Du) + u'' = f(x,t) & \text{in } \mathcal{C}\,, \\ u(x,0) = u_0(x)\,, \qquad u'(x,0) = u_1(x) & \text{in } \Omega\,, \\ u(x,t) \in H_0^m(\Omega) \qquad \text{per q.o. } t \in [0,T]\,. \end{cases} \tag{3.4}$$

Dal Teorema 1.2 si deduce per esso il seguente

TEOREMA 3.1. – *Nelle ipotesi* (3.2), (3.3), *se*

$$f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))\,, \qquad u_0 \in H_0^m(\Omega)\,, \qquad u_1 \in L^2(\Omega)\,,$$

il problema di Cauchy (3.4) *ha una e una sola soluzione* u *con*

$$u \in C^0([0,T]; H_0^m(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega))$$

e vale per essa la maggiorazione (5):

$$\varepsilon \|u\|_m^2 + \|u'\|_0^2 \leqslant c\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\left\{\left(\int_0^t \|f\|_0\, ds\right)^2 + \varepsilon\|u_0\|_m^2 + \|u_1\|_0^2\right\}. \tag{3.5}$$

(5) Nei problemi concreti, $\| \;\|_m$ indica la norma in $H^m(\Omega)$, $\| \;\|_0$ quella in $L^2(\Omega)$.

Se poi $\alpha = K/2m$ con $K \in N$ e $K < m$, e se $\sigma = 1/2m$, la condizione (2.1) diventa

$$\|B(t)\, u\|_K \leq c_K(t) \|u\|_{K+2} \qquad \forall u \in H_0^m(\Omega),$$

e questa è verificata se

$$b(x,t) \in L^\infty(0,T; H^{K+1,\infty}(\Omega)), \tag{3.6}$$

con

$$c_K(t) = \|b\|_{L^\infty}(0,t; H^{K+1,\infty}(\Omega)), \tag{3.7}$$

Ciò posto, si può enunciare il seguente risultato di regolarità:

TEOREMA 3.2. – *Nelle ipotesi* (3.2), (3.6), *se*

$$f \in L^1(0,T; H_0^K(\Omega)), \qquad u_0 \in H^{K+m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega), \qquad u_1 \in H_0^K(\Omega),$$

la soluzione u del problema (3.4) *è tale che*

$$u \in C_s(0,T; H^{K+m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)) \cap C_s^1(0,T; H_0^K(\Omega)),$$

e vale per essa la maggiorazione

$$\varepsilon \|u\|_{K+m}^2 + \|u'\|_K^2 \leq c \exp\left[\frac{t c_K(t)}{\sqrt{\varepsilon}}\right] \left\{ \left(\int_0^t \|f\|_K \, ds \right)^2 + \varepsilon \|u_0\|_{K+m}^2 + \|u_1\|_K^2 \right\}. \tag{3.8}$$

Questo risultato è un'immediata conseguenza del Teorema 2.1 e dell'Osservazione 2.1, notando che $H_{\alpha+1/2} = H^{K+m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$.

Dal Corollario 2.1 analogamente si deduce il seguente risultato di esistenza e regolarità per il problema limite:

TEOREMA 3.3. – *Se*

$$b \in H^{1,\infty}(0,T; H^{K+1,\infty}(\Omega)),$$

$$b(x,t) \geq \alpha > 0 \quad \text{in } \mathcal{C},$$

$$f \in L^1(0,T; H_0^K(\Omega)),$$

$$u_0 \in H_0^{K+1}(\Omega),$$

$$u_1 \in H_0^K(\Omega),$$

con $K \in N$, *il problema*

$$-D(b(x,t)Du) + u'' = f(x,t) \quad \text{in } \mathcal{C},$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u'(x,0) = u_1(x) \quad \text{in } \Omega,$$

$$u(x,t) \in H_0^1(\Omega) \quad \text{per q.o. } t \in [0,T],$$

ha una ed una sola soluzione

$$u \in L^\infty(0, T; H_0^{K+1}(\Omega)) \cap H^{1,\infty}(0, T; H_0^K(\Omega))$$

e vale per essa la maggiorazione $\forall t \in [0, T]$

$$\|u\|_{K+1}^2 + \|u'\|_K^2 \leqslant c\left\{\left(\int_0^t \|f\|_K\, ds\right)^2 + \|u_0\|_{K+1}^2 + \|u_1\|_K^2\right\}.$$

4. - Il problema non lineare con termine di penalizzazione: una maggiorazione a priori.

In questo paragrafo proveremo il seguente risultato:

TEOREMA 4.1. - *Dato il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \varepsilon(-1)^{m+1} D^{2m} u + D([1 + (Du)^2] Du) - u'' = f & \text{in } \mathcal{C}, \\ u(x, 0) = u_0(x), \qquad u'(x, 0) = u_1(x) & \text{in } \Omega, \\ u(x, t) \in H_0^m(\Omega) \quad \text{per q.o. } t \in [0, T], \end{cases} \tag{4.1}$$

con m intero >2 *e con*

$$\begin{cases} f \in L^4(0, T; H_0^2(\Omega)), \\ u_0 \in H^{2+m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega), \\ u_1 \in H_0^2(\Omega), \end{cases}$$

se u è soluzione del problema in $[0, T]$ *tale che*

$$u \in L^\infty(0, T; H^{2+m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)) \cap H^{1,\infty}(0, T; H_0^2(\Omega)),$$

esiste

$$\hat{T} = \hat{T}(u_0, u_1, f) \leqslant T,$$

tale che, preso $t_1 \in (0, \hat{T})$, *vale* $\forall t \in [0, \hat{T} - t_1]$ *la maggiorazione*

$$\sqrt{\varepsilon}\|u\|_{2+m} + \|u\|_3 + \|u'\|_2 \leqslant c(T)\left(\int_0^T \|f\|_2^4\, dt\right)^{1/4} + \frac{cT^{1/4}}{t_1^{3/4}} + \tag{4.2}$$
$$+ \sqrt{\varepsilon}\|u_0\|_{2+m} + \|u_0\|_3 + \|u_1\|_2 + 3\left(\int_\Omega (Du_0)^2 (D^3 u_0)^2\, dx\right)^{1/2}.$$

DIMOSTRAZIONE. – Riprendiamo la (2.3) con $\alpha = 1/m$ e $B(t)u = -D([1 + (Du)^2]Du)$.

Osservando che $H_\alpha = H_0^2(\Omega)$, $H_{\alpha+1/2} = H^{2+m}(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ e $(\,,\,)_\alpha = (D^2_\cdot, D^2_\cdot)_{L^2(\Omega)}$, si trova

$$(4.3) \qquad \varepsilon\|u\|_{2+m}^2 + \|u'\|_2^2 - 2\int_0^t\int_\Omega D^3([1 + (Du)^2]Du)\cdot D^2u'\,dx\,ds =$$

$$= 2\int_0^t\int_\Omega D^2f\,D^2u'\,dx\,ds + \varepsilon\|u_0\|_{2+m}^2 + \|u_1\|_2^2;$$

tenendo conto dell'uguaglianza

$$D^3([1 + (Du)^2]Du) = D^4u + 6(D^2u)^3 + 18\,Du\,D^2u\,D^3u + 3(Du)^2D^4u,$$

consideriamo i termini della (4.3):

$$-2\int_0^t\int_\Omega D^4u\,D^2u'\,dx\,ds = 2\int_0^t\int_\Omega D^3u\,D^3u'\,dx\,ds =$$

$$= \int_0^t\int_\Omega \frac{d}{ds}(D^3u)^2\,dx\,ds = \int_\Omega \{(D^3u)^2 - (D^3u_0)^2\}\,dx,$$

$$\left|-12\int_0^t\int_\Omega (D^2u)^3(D^2u')\,dx\,ds\right| \leq 12\int_0^t \|D^2u\|_\infty^2\,ds\int_\Omega |D^2u|\,|D^2u'|\,dx \leq$$

$$\leq c(\Omega)\int_0^t ds\left(\int_\Omega (D^3u)^2\,dx\int_\Omega |D^2u|\,|D^2u'|\,dx\right)$$

(per la maggiorazione di Sobolev)

$$\leq c(\Omega)\int_0^t ds\left\{\left(\int_\Omega (D^3u)^2\,dx\right)\left(\int_\Omega (D^2u)^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega (D^2u')^2\,dx\right)^{1/2}\right\}$$

(per la disuguaglianza di Hölder)

$$\leqslant c(\Omega)\int_0^t ds\left\{\left(\int_\Omega (D^3u)^2\,dx\right)^2+\int_\Omega (D^2u)^2\,dx\int_\Omega (D^2u')^2\,dx\right\}$$

$$\leqslant c(\Omega)\int_0^t ds\left\{\left(\int_\Omega (D^3u)^2\,dx\right)^2+\int_\Omega (D^3u)^2\,dx\int_\Omega (D^2u')^2\,dx\right\}$$

(per la maggiorazione di Sobolev)

$$\leqslant c(\Omega)\int_0^t ds\left\{\left(\int_\Omega (D^3u)^2\,dx\right)^2+\frac{1}{2}\left(\int_\Omega (D^3u)^2\,dx\right)^2+\frac{1}{2}\left(\int_\Omega (D^2u')^2\,dx\right)^2\right\}$$

$$\leqslant c(\Omega)\int_0^t ds\left\{\int_\Omega [(D^3u)^2+(D^2u')^2]\,dx\right\}^2;$$

$$\left|-36\int_0^t\int_\Omega Du\,D^2u\,D^3u\,D^2u'\,dx\,ds\right|\leqslant 36\int_0^t \|D^2u\|_\infty\,ds\int_\Omega |Ds|\,|D^3u|\,|D^2u'|dx\leqslant$$

$$\leqslant c(\Omega)\int_0^t\left\{\left(\int_\Omega |D^3u|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |Du|^2\,|D^3u|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |D^2u'|^2\,dx\right)^{1/2}\right\}ds$$

(per la disuguaglianza di Hölder e la maggiorazione di Sobolev)

$$\leqslant c(\Omega)\int_0^t ds\int_\Omega 2(D^3u)^2\,dx+c(\Omega)\int_0^t ds\left(\int_\Omega (Du)^2\,(D^3u)^2\,dx+\int_\Omega (D^2u')^2\,dx\right)^2$$

(in quanto $abc\leqslant a^2/2+(b^2+c^2)^2/4$);

$$-6\int_0^t ds\int_\Omega (Du)^2\,D^4u\,D^2u'\,dx=$$

$$=12\int_0^t ds\int_\Omega Du\,D^2u\,D^3u\,D^2u'\,dx+6\int_0^t ds\int_\Omega (Du)^2\,D^3u\,D^3u'\,dx\,.$$

In questa uguaglianza il primo termine a secondo membro si maggiora come sopra;

per quanto riguarda il secondo, si ha:

$$6\int_0^t ds\int_\Omega (Du)^2 D^3u\, D^3u'\,dx = 3\int_0^t ds\int_\Omega (Du)^2\frac{d}{ds}(D^3u)^2\,dx =$$

$$= 3\int_\Omega (Du)^2(D^3u)^2\,dx - 3\int_\Omega (Du_0)^2(D^3u_0)^2\,dx - 6\int_0^t ds\int_\Omega Du\,Du'\,(D^3u)^2\,dx\,,$$

e inoltre

$$\left|6\int_0^t ds\int_\Omega Du\,Du'\,(D^3u)^2\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant 6\int_0^t \|Du'\|_\infty\,ds\left(\int_\Omega (Du)^2(D^3u)^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega (D^3u)^2\,dx\right)^{1/2}$$

$$\leqslant c(\Omega)\int_0^t ds\left(\int_\Omega (D^2u')^2\right)^{1/2}\left(\int_\Omega (Du)^2(D^3u)^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega (D^3u)^2\,dx\right)^{1/2}$$

$$\leqslant c(\Omega)\int_0^t ds\int_\Omega (D^2u')^2\,dx + c(\Omega)\int_0^t ds\left\{\int_\Omega [(Du)^2(D^3u)^2+(D^3u)^2]\,dx\right\}^2;$$

$$2\int_0^t ds\int_\Omega D^2f\,D^2u'\,dx \leqslant 2\int_0^t ds\left(\int_\Omega (D^2f)^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega (D^2u')^2\,dx\right)^{1/2};$$

in definitiva, dalla (4.3) si deduce

$$\varepsilon\|u\|_{2+m}^2 + \|u'\|_2^2 + \int_\Omega (D^3u)^2\,dx + 3\int_\Omega (Du)^2(D^3u)^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant c(\Omega)\left\{\int_0^t ds\left(\int_\Omega (|D^3u|^2+|D^2u'|^2)\,dx\right)^2 + \int_0^t ds\int_\Omega |D^3u|^2\,dx\, +\right.$$

$$+\int_0^t ds\left(\int_\Omega |Du|^2|D^3u|^2\,dx + \int_\Omega |D^2u'|^2\,dx\right)^2 + \int_0^t ds\int_\Omega |D^2u'|\,dx\, +$$

$$+\int_0^t ds\left(\int_\Omega [(Du)^2(D^3u)^2+(D^3u)^2]\,dx\right)^2\Bigg\}+2\int_0^t ds\left[\int_\Omega (D^2f)^2\,dx\right]^{1/2}\left[\int_\Omega (D^2u')^2\,dx\right]^{1/2}+$$

$$+\varepsilon\|u_0\|^2_{2+m}+\|u_1\|^2_2+\int_\Omega (D^3u_0)^2\,dx+3\int_\Omega (Du_0)^2(D^3u_0)^2\,dx\,.$$

Posto

$$G(t)=\varepsilon\|u\|^2_{2+m}+\|u'\|^2_2+\int_\Omega (D^3u)^2\,dx+3\int_\Omega (Du)^2(D^3u)^2\,dx$$

e

$$\varphi(t)=\left(\int_\Omega (D^2f)^2\,dx\right)^{1/2},$$

la maggiorazione precedente assume la forma

$$G(t)\leq c_1\int_0^t G^2(s)\,ds+c_2\int_0^t G(s)\,ds+c_3\int_0^t \varphi(s)\sqrt{G(s)}\,ds+G(0)\,.$$

Per il Teorema 7.1 ii) (con $\beta=1/2$), si ottiene

$$G(t)\leq c_4\int_0^t G^2(s)\,ds+\left(\int_0^t \varphi(s)\,ds\right)^2+G(0)\leq c_4\int_0^t G^2(s)\,ds+c_5\int_0^t \varphi^2(s)\,ds+G(0)\,.$$

Per il Teorema 7 iii) (con $\beta=2$), da questa si deduce che esiste $\widehat{T}\leq T$ funzione di $G(0)$ e di φ, e dunque di u_0, u_1 e f, tale che, preso $t_1\in(0,\widehat{T})$, vale:

$$\|G(t)\|_{\infty,[0,\widehat{T}-t_1]}\leq c(T)\|\varphi^2\|_{L^2(0,T)}+\frac{cT^{1/2}}{t_1^{3/2}}+G(0)\,,\qquad \forall t\in[0,\widehat{T}-t_1]\,,$$

e cioè

$$\varepsilon\|u\|^2_{2+m}+\|u\|^2_3+\|u'\|^2_2\leq c(T)\left(\int_0^T \|f\|^4_2\,dt\right)^{1/2}+\frac{cT^{1/2}}{t_1^{3/2}}+$$

$$+\varepsilon\|u_0\|^2_{2+m}+\|u_1\|^2_2+\|u_0\|^2_3+9\int_\Omega (Du_0)^2(D^3u_0)^2\,dx\,,\qquad \forall t\in[0,\widehat{T}-t_1]$$

e da questa segue la (4.2). ∎

5. – Il problema non lineare con termine di penalizzazione: esistenza e unicità di soluzione.

In questo paragrafo è dimostrato il seguente

TEOREMA 5.1. – *Se*

$$f \in L^4(0,T;H_0^2(\Omega)), \qquad u_0 \in H^{2+m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega) \quad \text{e} \quad u_1 \in H_0^2(\Omega),$$

il problema di Cauchy (4.1) *ha una ed una sola soluzione locale*

$$u_\varepsilon \in L^\infty(0,\widehat{T};H^{2+m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)) \cap H^{1,\infty}(0,\widehat{T};H_0^2(\Omega)) \ (^6)$$

con $\widehat{T} = \widehat{T}(u_0, u, f) \leq T$ *e per essa vale la maggiorazione* (4.2).

DIMOSTRAZIONE. – Per quanto riguarda l'unicità, siano v_1 e v_2 soluzioni di (4.1) in $[0, T]$; allora $v_1 - v_2$ è soluzione in $[0, T]$ del problema

$$(5.1) \quad \begin{cases} \varepsilon(-1)^{m+1}D^{2m}(v_1-v_2) + D([1+(Dv_1)^2]D(v_1-v_2)) - (v_1-v_2)'' = \\ \qquad\qquad = -D([(Dv_1)^2-(Dv_2)^2]Dv_2), \\ (v_1-v_2)(0) = (v_1-v_2)'(0) = 0, \\ v_1 - v_2 \in H_0^m(\Omega), \qquad \forall t \in [0,T]. \end{cases}$$

Essendo verificate le ipotesi del Teorema 3.2, per la maggiorazione (3.8) e ponendo

$$(5.2) \qquad c\left(\frac{1}{\varepsilon}, v_1\right) = c\exp\left[\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\|Dv_1\|_{L^\infty(0,T;H^{4,\infty}(\Omega))}\right],$$

si ha $\forall t \in [0, T]$:

$$\varepsilon\|v_1-v_2\|_{m+2} + \|v_1'-v_2'\|_2 \leq c\left(\frac{1}{\varepsilon}, v_1\right)\int_0^t \|D([(Dv_1)^2-(Dv_2)^2]Dv_2)\|_2\, ds \leq$$

$$\leq c\left(\frac{1}{\varepsilon}, v_1\right)\|v_2\|_{\infty,4}\|v_1+v_2\|_{\infty,5}\int_0^t\|v_1-v_2\|_4\, ds \leq c\left(\frac{1}{\varepsilon}, v_1, v_2\right)\int_0^t\|v_1-v_2\|_{m+2}\, ds\,.$$

Dal lemma di Gronwall, si deduce $v_1 = v_2$ in $[0, T]$.

Per quanto riguarda l'esistenza di soluzioni, fissata $\omega \in L^\infty(0,s;C^4(\overline{\Omega}))$ con

(^{6}) In realtà, $u \in C_s^0(0,\widehat{T};H^{2+m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)) \cap C_s^1(0,\widehat{T};H^2(\Omega))$.

$s \in (0, T]$, consideriamo il problema lineare

$$\left\{\begin{array}{ll} \varepsilon(-1)^{m+1} D^{2m} u + D([1+(D\omega)^2] Du) - u'' = f, & \\ u(x,0) = u_0(x), & u'(x,0) = u_1, \\ u(x,t) \in H_0^m(\Omega) & \text{per q.o. } t \in [0,s], \end{array}\right. \tag{5.3}$$

e sia $u \in L^\infty(0, s; H^{2+m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)) \cap H^{1,\infty}(0, s; H_0^2(\Omega))$ la soluzione (7), per essa vale la maggiorazione (3.8), con

$$c_2 = c \exp\left[\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}} \|\omega\|_{L^\infty(0,t;C^4(\overline{\Omega}))}\right] = c_2\left(\frac{1}{\varepsilon}, \omega, t\right). \tag{5.4}$$

Resta in tal modo stabilita un'applicazione $S\colon \omega \to u$. Tale S è continua di

$$L^\infty(0, s; C^4(\overline{\Omega})) \to L^\infty(0, s; H^{m+2}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)) \cap H^{1,\infty}(0, s; H_0^2(\Omega)).$$

Infatti, se $u_i = S(\omega_i)$, $u_1 - u_2$ risolve il problema

$$\varepsilon D^{2m}(u_1 - u_2) + D([1+(D\omega_1)^2] D(u_1 - u_2)) - (u_1 - u_2)'' = -D([(D\omega_1)^2 - (D\omega_2)^2] Du_2),$$

$$(u_1 - u_2)(0) = (u_1 - u_2)'(0) = 0,$$

$$(u_1 - u_2) \in H_0^m(\Omega) \qquad \text{per q.o. } t \in [0, s];$$

per la maggiorazione (3.8) con il termine (5.4), si ha $\forall t \in [0, s]$

$$\varepsilon\|u_1 - u_2\|_{2+m}^2 + \|u_1' - u_2'\|_2^2 \leqslant \tag{5.5}$$

$$\leqslant c \exp\left[\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}} \|\omega_1\|_{L^\infty(0,t;C^4(\overline{\Omega}))}\right] \left\{\int_0^t \|D([(D\omega_1)^2 - (D\omega_2)^2] Du_2)\|_2 \, ds\right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant c \exp\left[\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}} \|\omega_1\|_{L^\infty(0,t;C^4(\overline{\Omega}))}\right] \left(\int_0^t \|u_2\|_4 \, ds\right)^2 \|\omega_1 + \omega_2\|_{\infty,4}^2 \|\omega_1 - \omega_2\|_{\infty,4}^2 \leqslant$$

$$\leqslant c \exp\left[\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}} (\|\omega_1\|_{L^\infty(0,t;C^4(\overline{\Omega}))} + \|\omega_2\|_{L^\infty(0,t;C^4(\overline{\Omega}))})\right] \cdot$$

$$\cdot t^2 \left\{\left(\int_0^t \|f\|_2 \, ds\right)^2 + \varepsilon\|u_0\|_{m+2}^2 + \|u_1\|_2^2\right\} \|\omega_1 + \omega_2\|_{\infty,4}^2 \|\omega_1 - \omega_2\|_{\infty,4}^2 .$$

Da questo segue la continuità di S.

---

(7) In realtà si ha anche la continuità scalare.

Si hanno inoltre le seguenti inclusioni

$L^\infty(0,s;H^{2+m}(\Omega)\cap H_0^m(\Omega))\cap H^{1,\infty}(0,s;H_0^2(\Omega))\subset$

$$\subset H^{\sigma,2}(0,s;H^{2+(1-\sigma)m}(\Omega)) \qquad \forall\sigma\in[0,1], \tag{5.6}$$

$$\subset C^{0,\sigma-1/2}([0,s];C^{1+(1-\sigma)m,1/2}(\overline{\Omega})) \qquad \forall\sigma\in\left(\frac{1}{2},1\right]; \tag{5.7}$$

$$\subset L^\infty(0,s;C^4(\overline{\Omega})) \qquad \text{se } \sigma=1-\frac{3}{m}; \tag{5.8}$$

(per la (5.6), cf. [LM]; la (5.7) segue dal teorema di Sobolev, cf. ad es. [AD]; la (5.8) è compatta).

Quindi

$$S\colon L^\infty(0,s;C^4(\overline{\Omega}))\to L^\infty(0,s;C^4(\overline{\Omega}))$$

è compatta.

Per applicare il metodo del punto fisso, mostriamo che S manda un'opportuna palla di $L^\infty(0,s;C^4(\overline{\Omega}))$ in sè.

A tale scopo, sia $z_1=S(0)$; dalla maggiorazione (3.8) si ricava $\forall t\in[0,s]$:

$$\|z_1(t)\|_{C^4(\overline{\Omega})}\leq\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\left\{\int_0^T\|f\|_2\,ds+\sqrt{\varepsilon}\,\|u_0\|_{m+2}+\|u_1\|_2\right\}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}M.$$

Scelto $R=4cM/\sqrt{\varepsilon}$, sia $B_s=B(0,R)$ in $L^\infty(0,s;C^4(\overline{\Omega}))$; ovviamente $z_1\in B_s$ $\forall s\in(0,T]$.

Se $w\in B_s$ e $u=S(\omega)$, dalla (5.5) si deduce

$$\|u-z_1\|_{L^\infty(0,s;C^4(\overline{\Omega}))}\leq\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\exp\left(\frac{s}{2\sqrt{\varepsilon}}\|\omega\|^2_{L^\infty(0,s;C^4(\overline{\Omega}))}\right)sM\|\omega\|^2_{L^\infty(0,s;C^4(\overline{\Omega}))}\leq$$

$$\leq\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\exp\left(\frac{sR^2}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)sMR^2,$$

e quest'ultima quantità è minore di $R/4$ per $s\in[0,s_\varepsilon]$, opportuno in $[0,T]$.

Perciò, se $\omega\in B(0,R)$ in $L^\infty(0,s_\varepsilon;C^4(\overline{\Omega}))$, $u=S(\omega)\in B(z_1,R/4)\subset B(0,R)$ nello stesso spazio.

Questi risultati e i precedenti permettono di utilizzare il teorema di punto fisso di Schauder-Tychonov (cf. [DS]) per dedurre una soluzione per il problema (4.5) nell'intervallo $[0,s_\varepsilon]$.

Come nel paragrafo 4 (Teorema 4.1) e successivamente nel paragrafo 7, sia

$$\hat{T}=\hat{T}(u_0,u_1,f)$$

con $\widehat{T} \leqslant T$ tale che in $[0, \widehat{T}]$ esiste la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} v' = v^2 + \varphi(t)\,, \\ v(0) = v_0\,, \end{cases}$$

con

$$\varphi(t) = \left(\int_\Omega (D^2 f)^2\, dx \right)^{1/2},$$

$$v_0 = \|u_0\|^2_{2+m} + \|u_1\|^2_2 + \int_\Omega (D^3 u_0)^2\, dx + 9 \int_\Omega (Du_0)^2 (D^3 u_0)^2\, dx\,.$$

Se $s_\varepsilon \geqslant \widehat{T}$, $[0, \widehat{T}]$ è un intervallo non dipendente da ε in cui il Problema 4.1 ha soluzione.

Se invece $s_\varepsilon < \widehat{T}$, indicata con $u_1(t)$ la soluzione del problema (4.1) in $[0, s_\varepsilon]$, consideriamo ancora il problema (4.1) in cui però le condizioni iniziali sono adesso date da

$$\begin{cases} u(s_\varepsilon) = u_1(s_\varepsilon)\,, \\ u'(s_\varepsilon) = u_1'(s_\varepsilon)\,, \end{cases} \tag{5.12}$$

e studiamolo nell'intervallo $[s_\varepsilon, s]$.

Sia $z_2 = S(0)$ con i dati iniziali (5.12); dalla maggiorazione (3.8) si ha $\forall t \in [s_\varepsilon, s]$

$$\|z_2(t)\|_{C^4(\bar{\Omega})} \leqslant \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \left\{ \int_0^T \|f(s)\|_2\, ds + \sqrt{\varepsilon}\, \|u_1(s_\varepsilon)\|_{m+2} + \|u_1'(s_\varepsilon)\|_2 \right\}.$$

Essendo $s_\varepsilon < \widehat{T}$, la maggiorazione (4.2) vale sull'intero intervallo $[0, s_\varepsilon]$ e quindi, posto

$$N = c(T) \left(\int_0^T \|f(t)\|_2^4\, dt \right)^{1/4} + c(\widehat{T}) + \|u_0\|_{2+m} + \\ + \|u_0\|_3 + \|u_1\|_2 + 3 \left(\int_\Omega (Du_0)^2 (D^3 u_0)^2\, dx \right)^{1/2}, \tag{5.13}$$

(cf. (4.2)), si ha

$$\|z_2(t)\|_{C^4(\bar\Omega)} \leq \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\left\{T^{3/4}\left(\int_0^T \|f\|_2^4\,dt\right)^{1/4} + N\right\} \leq \frac{2Nc}{\sqrt{\varepsilon}}. \tag{5.14}$$

Come prima, scelto $R = 8Nc/\sqrt{\varepsilon}$, sia $B_s = B(0,R)$ in $L^\infty(s_\varepsilon, s; C^4(\bar\Omega))$; ancora $z_2 \in B_s$ $\forall s \in (S_\varepsilon, T]$. Se $\omega \in B_s$ e $u = S(\omega)$, dalla (5.5) si deduce

$$\|u - z_2\|_{L^\infty(s_\varepsilon, s; C^4(\bar\Omega))} \leq \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \exp\left(\frac{s - s_\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon}} \|\omega\|^2_{L^\infty(s_\varepsilon, s; C^4(\bar\Omega))}\right)\left(\int_{s_\varepsilon}^{s} \|z_2\|_{C^4(\bar\Omega)}\,dt\right)\|\omega\|^2_{L^\infty(s_\varepsilon, s; C^4(\bar\Omega))} \leq$$

$$\leq \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \exp\left(\frac{s - s_\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon}} R^2\right)(s - s_\varepsilon)\frac{2Nc}{\sqrt{\varepsilon}} R^2 = \frac{2NR^2c^2}{\varepsilon} \exp\left(\frac{s - s_\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon}} R^2\right)(s - s_\varepsilon),$$

e quest'ultimo termine è minore di $R/4$ purchè sia $s - s_\varepsilon < \sigma_\varepsilon$ opportuno.

Perciò, come sopra, si arriva ad una soluzione $u_2(s)$ del problema di Cauchy (4.1) con le condizioni iniziali (5.12), definita in $[s_\varepsilon, s_\varepsilon + \sigma_\varepsilon]$.

La funzione

$$v_2(s) = \begin{cases} u_1(s) & \text{in } [0, s_\varepsilon], \\ u_2(s) & \text{in } [s_\varepsilon, s_\varepsilon + \sigma_\varepsilon], \end{cases}$$

è soluzione del problema (4.1) (vedere Appendice 2, tenendo conto del fatto che in realtà u_1, u_2 sono scalarmente continue).

Se $s_\varepsilon + \sigma_\varepsilon < \hat{T}$, ripetiamo il procedimento, considerando il problema (4.1) con le condizioni iniziali

$$\begin{cases} u(s_\varepsilon + \sigma_\varepsilon) = v_2(s_\varepsilon + \sigma_\varepsilon), \\ u'(s_\varepsilon + \sigma_\varepsilon) = v_2'(s_\varepsilon + \sigma_\varepsilon), \end{cases} \tag{5.15}$$

e studiamolo nell'intervallo $[s_\varepsilon + \sigma_\varepsilon, s]$.

Sia $z_3 = S(0)$ con i dati iniziali (5.15); dalla maggiorazione (3.8), si ha $\forall t \in [s_\varepsilon + \sigma_\varepsilon, s]$

$$\|z_3(t)\|_{C^4(\bar\Omega)} \leq \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\left\{\int_0^T \|f(s)\|_2\,ds + \sqrt{\varepsilon}\|v_2(s_\varepsilon + \sigma_\varepsilon)\|_{m+2} + \|v_2'(s_\varepsilon + \sigma_\varepsilon)\|_2\right\} \leq$$

$$\leq \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\left\{T^{3/4}\left(\int_0^T \|f(s)\|_2^4\,ds\right)^{1/4} + N\right\} \leq \frac{2Nc}{\sqrt{\varepsilon}},$$

essendo N come in (5.13).

Sia ancora $R = 8Nc/\sqrt{\varepsilon}$ e sia $B_S = B(0,R)$ in $L^\infty(s_\varepsilon + \sigma_\varepsilon, s; C^4(\bar{\Omega}))$; allora $z_3 \in B_S$ $\forall s \in (s_\varepsilon + \sigma_\varepsilon, T]$.

Se $\omega \in B_S$ e $u = S(\omega)$, dalla (5.5) si deduce

$$\|u - z_3\|_{L^\infty(s_\varepsilon + \sigma_\varepsilon, s; C^4(\bar{\Omega}))} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \exp\left(\frac{s - s_\varepsilon - \sigma_\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon}} \|\omega\|^2_{L^\infty(s_\varepsilon + \sigma_\varepsilon, s; C^4(\bar{\Omega}))}\right)\left(\int\limits_{s_\varepsilon + \sigma_\varepsilon}^{s} \|z_3(t)\|_{C^4(\bar{\Omega})}\, dt\right)\|\omega\|^2_{L^\infty(s_\varepsilon + \sigma_\varepsilon, s; C^4(\bar{\Omega}))} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \exp\left(\frac{s - s_\varepsilon - \sigma_\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon}} R^2\right)(s - s_\varepsilon - \sigma_\varepsilon)\frac{2Nc}{\sqrt{\varepsilon}} R^2 =$$

$$= \frac{2NR^2c^2}{\varepsilon} \exp\left(\frac{s - s_\varepsilon - \sigma_\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)(s - s_\varepsilon - \sigma_\varepsilon),$$

e quest'ultimo termine è minore di $R/4$ se $s - s_\varepsilon - \sigma_\varepsilon < \sigma_\varepsilon$ (si confronti con il passo precedente).

Perciò si arriva ad una soluzione $u_3(s)$ del problema (4.1) con i dati iniziali (5.15), definita in $[s_\varepsilon + \sigma_\varepsilon, s_\varepsilon + 2\sigma_\varepsilon]$. La funzione

$$v_3(s) = \begin{cases} v_2(s) & \text{in } [0, s_\varepsilon + \sigma_\varepsilon], \\ u_3(s) & \text{in } [s_\varepsilon + \sigma_\varepsilon, s_\varepsilon + 2\sigma_\varepsilon], \end{cases} \tag{5.16}$$

è soluzione del problema (4.1) in $[0, s_\varepsilon + 2\sigma_\varepsilon]$.

Iterando opportunamente il procedimento, in un numero finito di passi si arriva ad una soluzione in $[0, \hat{T}]$. ■

6. – Il problema non lineare della corda vibrante.

In questo paragrafo è studiato il problema non lineare della corda vibrante; i risultati ottenuti sono compendiati nel seguente teorema:

TEOREMA 6.1. – *Se*

$$f \in L^4(0, T; H_0^2(\Omega)), \qquad u_0 \in H_0^3(\Omega), \qquad u_1 \in H_0^2(\Omega),$$

il problema di Cauchy

$$\begin{cases} D([1 + (Du)^2]Du) - u'' = f & \text{in } \mathcal{C}, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x) & \text{in } \Omega, \\ u(x,t) \in H_0^1(\Omega) \quad \text{per q.o. } t \in [0,T], \end{cases} \tag{6.1}$$

ha una ed una sola soluzione locale u tale che

$$(6.2)\qquad u \in L^\infty(0,\hat{T};H_0^3(\Omega)),\qquad u' \in L^\infty(0,\hat{T};H_0^2(\Omega)),\qquad u'' \in L^4(0,\hat{T};H_0^1(\Omega)),$$

con $\hat{T}(u_0, u_1, f) \leq T$; *la soluzione verifica la maggiorazione*

$$(6.3)\qquad \|u'(t)\|_2 + \|u(t)\|_3 \leq c(T)\left(\int_0^T \|f\|_2^4\,dt\right)^{1/4} + \\ + K(T) + \|u_1\|_2 + \|u_0\|_3 + 3\left(\int_\Omega (Du_0)^2(D^3u_0)^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Dimostreremo il teorema supponendo dapprima $u_0 \in H^{2+m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$ con m intero maggiore di 2; premettiamo il seguente lemma dunque:

LEMMA 6.1. – *Se m è un intero* >2 *e se* $f \in L^4(0,T;H_0^2(\Omega))$, $u_0 \in H^{2+m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$ *e* $u_1 \in H_0^2(\Omega)$, *il problema di Cauchy* (6.1) *ha una ed una sola soluzione locale u verificante le* (6.2) *e la maggiorazione* (6.3).

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 6.1. – Per quanto visto nel paragrafo precedente, nelle ipotesi del lemma il problema

$$(6.4)\qquad \begin{cases} \varepsilon(-1)^{m+1}D^{2m}u + D([1+(Du)^2]Du) - u'' = f, \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad u'(x,0) = u_1(x), \\ u(x,t) \in H_0^m(\Omega), \end{cases}$$

ha una ed una sola soluzione locale

$$u_\varepsilon \in L^\infty(0,\hat{T};H^{2+m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)) \cap H^{1,\infty}(0,\hat{T};H_0^2(\Omega)),$$

con $\hat{T}$ che non dipende dal parametro ε, e per essa vale la maggiorazione $\forall t \in [0,\hat{T}]$:

$$(6.5)\qquad \sqrt{\varepsilon}\|u_\varepsilon\|_{2+m} + \|u'\varepsilon\|_2 + \|u_\varepsilon\|_3 \leq c(T)\left(\int_0^T \|f\|_2^4\,dt\right)^{1/4} + k(\hat{T}) + \sqrt{\varepsilon}\|u_0\|_{2+m} + \\ + \|u_1\|_2 + \|u_0\|_3 + 3\left(\int_\Omega (Du_0)^2(D^3u_0)^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Dalla (6.5) segue che $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon$ è limitata in $L^\infty(0,\hat{T};H_0^3(\Omega)) \cap H^{1,\infty}(0,\hat{T};H_0^2(\Omega))$, e perciò esiste u tale che

$$u_\varepsilon \to u \text{ debolmente in } L^2(0,\hat{T};H_0^3(\Omega)) \cap H^1(0,\hat{T};H_0^2(\Omega))$$

ed anche

$$u_\varepsilon \to u \text{ debole star in } L^\infty(0,\hat{T};H_0^3(\Omega)) \cap H^{1,\infty}(0,\hat{T};H_0^2(\Omega)).$$

Vogliamo far vedere che u è soluzione di (6.1) in $[0,\hat{T}]$. Scriviamo il problema (6.1) in forma debole

$$\text{(6.6)} \quad \begin{cases} -\varepsilon \int_0^{\hat{T}}\int_\Omega D^m u_\varepsilon D^m \varphi \, dx\, dt - \int_0^{\hat{T}}\int_\Omega [1+(Du_\varepsilon)^2] Du_\varepsilon D\varphi \, dx\, dt + \int_0^{\hat{T}}\int_\Omega u_\varepsilon' \varphi' \, dx\, dt = \\ = \int_0^{\hat{T}}\int_\Omega f\varphi \, dx\, dt - \int_\Omega u_1(x)\varphi(x,0)\, dx, \quad \forall \varphi \in C^\infty([0,\hat{T}];C_0^\infty(\Omega)) \colon \varphi(x,\hat{T}) = 0, \ \forall x \in \Omega; \\ u_\varepsilon(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

L'equazione in (6.6) può essere riscritta nella forma

$$\text{(6.7)} \quad -\varepsilon \int_0^{\hat{T}}\int_\Omega D^{m+2} u_\varepsilon D^{m-2} \varphi \, dx\, dt - \int_0^{\hat{T}}\int_\Omega [1+(Du_\varepsilon)^2] Du_\varepsilon D\varphi \, dx\, dt + \int_0^{\hat{T}}\int_\Omega u_\varepsilon' \varphi' \, dx\, dt = \\ = \int_0^{\hat{T}}\int_\Omega f\varphi \, dx\, dt - \int_\Omega u_1(x)\varphi(x,0)\, dx.$$

Poichè

$$\left| \varepsilon \int_0^{\hat{T}}\int_\Omega D^{m+2} u_\varepsilon D^{m-2}\varphi \, dx\, dt \right| \leqslant \sqrt{\varepsilon} \int_0^{\hat{T}}\int_\Omega \sqrt{\varepsilon}\, |D^{m+2}u_\varepsilon|\, |D^{m-2}\varphi| \, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\varepsilon} \left(\int_0^{\hat{T}}\int_\Omega \varepsilon |D^{m+2}u_\varepsilon|^2 \, dx\, dt \right)^{1/2} \left(\int_0^{\hat{T}}\int_\Omega |D^{m-2}\varphi|^2 \, dx\, dt \right)^{1/2} \leqslant \sqrt{\varepsilon}\, c(\varphi, \hat{T}, f, u_0, u_1),$$

per la maggiorazione (6.5), il termine penalizzante nella (6.7) tende a zero per $\varepsilon \to 0$.

Si ha poi

$$\int_0^{\hat{T}}\int_\Omega [1+(Du_\varepsilon)^2] Du_\varepsilon D\varphi \, dx\, dt - \int_0^{\hat{T}}\int_\Omega [1+(Du)^2] Du\, D\varphi \, dx\, dt =$$

$$= - \int_0^{\hat{T}}\int_\Omega (Du_\varepsilon - Du) D\varphi \, dx\, dt - \int_0^{\hat{T}}\int_\Omega (Du_\varepsilon)^2 (Du_\varepsilon - Du) D\varphi \, dx\, dt -$$

$$- \int_0^{\hat{T}}\int_\Omega [(Du_\varepsilon)^2 - (Du)^2] Du\, D\varphi \, dx\, dt,$$

e i termini a secondo membro tendono a zero con ε; infatti si hanno le seguenti inclusioni (continue):

$$L^2(0,\hat{T};H^3(\Omega))\cap H^1(0,\hat{T};H^2(\Omega))\subset H^s(0,\hat{T};H^{3-s}(\Omega))\qquad \forall s\in[0,1],$$

$$\subset C^{0,\alpha}([0,\hat{T}];H^{3-s}(\Omega))\qquad \forall s\in\left(\frac{1}{2},1\right),\quad \alpha=s-\frac{1}{2},$$

$$\subset C^0([0,\hat{T}];H^2(\Omega))\ \text{con immersione compatta}$$

$$\subset C^0([0,\hat{T}];C^1(\bar{\Omega})).$$

Dunque, le $\{u_\varepsilon\}$, che sono equilimitate in $L^2(0,\hat{T};H^3(\Omega)))\cap H^1(0,\hat{T};H^2(\Omega))$, convergono (forte) in $C^0([0,\hat{T}];C^1(\bar{\Omega}))$ alla u (a meno di passare ad una sottosuccessione).

Così

$$\int_0^{\hat{T}}\int_\Omega u_\varepsilon'\,\varphi'\,dx\,dt\to\int_0^{\hat{T}}\int_\Omega u'\,\varphi'\,dx\,dt,$$

per la convergenza debole delle u_ε, e

$$u_\varepsilon(x,0)\to u(x,0),$$

per la convergenza forte in $C^0([0,\hat{T}];C^1(\bar{\Omega}))$.

In definitiva, dunque, u è soluzione in $L^\infty(0,\hat{T};H_0^3(\Omega))\cap H^{1,\infty}(0,\hat{T};H_0^2(\Omega))$ del problema

$$-\int_0^{\hat{T}}\int_\Omega[1+(Du)^2]\,Du\,D\varphi\,dx\,dt+\int_0^{\hat{T}}\int_\Omega u'\,\varphi'\,dx\,dt=$$

$$=\int_0^{\hat{T}}\int_\Omega f\varphi\,dx\,dt-\int_\Omega u_1(x)\,\varphi(x,0)\,dx\qquad\forall\varphi\in C^\infty([0,\hat{T}];C_0^\infty(\Omega)):\ \varphi(\hat{T},x)=0$$

e

$$u(x,0)=u_0(x).$$

Dall'equazione (6.7) e dai risultati precedenti si deduce anche

$$u''\in L^4(0,\hat{T};H_0^1(\Omega)).$$

La maggiorazione (6.3) si deduce dalla (6.5) passando al minimo limite per $\varepsilon\to 0$ e tenendo conto della convergenza debole star delle u_ε.

Per quanto riguarda l'unicità, questa si deduce dalle seguenti considerazioni.

Se u_1, u_2 sono soluzioni del problema in $[0, \widehat{T}]$, posto $\omega = u_1 - u_2$, ω è soluzione del problema

$$\begin{cases} [1 + 3(Du_1)^2] D^2 \omega - \omega'' = -3D^2 u_2 (Du_1 + Du_2) D\omega, \\ \omega(0) = \omega'(0) = 0, \\ \omega \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{6.8}$$

Posto

$$\varphi = -3D^2 u_2 (Du_1 + Du_2),$$

dalla maggiorazione dell'energia per il problema (6.8) (cf. [AR]) si deduce $\forall t \in$ $\in [0, \widehat{T}]$

$$\int_\Omega |D\omega|^2 dx + \int_\Omega |\omega'|^2 dx \leq c \left\{ \int_0^t ds \left(\int_\Omega |\varphi|^2 |D\omega|^2 dx \right)^{1/2} \right\}^2 \exp \left(\left\| \frac{d}{dt} (Du_1)^2 \right\|_{L^\infty(0, \widehat{T}; L^\infty(\Omega))} \right)$$

(poichè $u_1 \in H^{1,\infty}(0, \widehat{T}; H_0^2(\Omega))$ e $d/dt(Du_1)^2 \in L^\infty(0, \widehat{T}; H^1(\Omega))$ questo ha senso),

$$\leq c \left\{ \int_0^t \|\varphi\|_{\infty, \Omega} ds \left(\int_\Omega |D\omega|^2 dx \right)^{1/2} \right\}^2$$

$$\leq c \int_0^t \|\varphi\|_{\infty, \Omega}^2 ds \int_0^t \int_\Omega |D\omega|^2 dx\, dt$$

(per la regolarità di u_1, u_2 ha senso $\|\varphi\|_{\infty, \Omega}$)

$$\leq c \int_0^t \int_\Omega |D\omega|^2 dx\, dt.$$

Dal lemma di Gronwall segue $\forall t \in [0, \widehat{T}]$

$$\int_\Omega |D\omega|^2 dx = \int_\Omega |\omega'|^2 dx = 0.$$

Da questo e dalle condizioni su ω segue l'asserto. ∎

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 6.1. – L'unicità si ottiene come nel Lemma 6.1. Per l'esistenza, siano $u_{0n} \in H^{2+m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$ tali che $u_{0n} \to u_0$ in $H_0^3(\Omega)$, e indichiamo con u_n la soluzione del problema di Cauchy (6.1) con i dati iniziali u_{0n}, u_1. Dalla (6.3) si ottiene che $\{u_n\}$ è limitata in $L^\infty(0, T; H_0^3(\Omega)) \cap H^{1,\infty}(0, T; H_0^2(\Omega))$ e quindi esiste u tale che $u_n \to u$ debolmente in questo spazio.

Per provare che u è la soluzione indicata nell'enunciato del teorema, si procede come nella dimostrazione del Lemma 6.1.

Poichè per le u_n vale la maggiorazione (6.3), passando al minimo limite si deduce che la stessa vale per la u. ■

7. – Appendice I: una generalizzazione del lemma di Gronwall.

È ben noto come il lemma di Gronwall (cf. [GR]) costituisca un risultato fondamentale nella teoria delle equazioni differenziali. Il lemma è stato generalizzato in più modi da vari autori; la forma in cui la presentiamo è legata alla sua utilizzazione nel presente lavoro e differisce da quella classica ottenuta da BELLMAN-BIHARI (cf. [BB], capitolo IV, paragrafo 5), anche per quanto riguarda il tipo di dimostrazione.

TEOREMA 7.1. – *Sia* $u \in C^0[0,T]$ *con* $u(t) \geq 0$ *e* $u(0) = u_0 > 0$, *tale che* $\forall t \in [0,T]$

$$u(t) \leq u_0 + \int_0^t \{f(s) + g(s)\, u^\beta(s)\}\, ds\,, \tag{7.1}$$

dove $\beta > 0$ *ed* $f, g \in L^2(0,T)$ *con* $f, g \geq 0$ ($g \geq \lambda > 0$ *se* $\beta > 1$)(8).

Allora

i) *se* $\beta = 1$

$$u(t) \leq \exp\left[\int_0^t g(s)\, ds\right]\left(\int_0^t f(s)\, ds + u_0\right) \qquad \forall t \in [0,T]\,,$$

ii) *se* $0 < \beta < 1$

$$u(t) \leq \frac{1}{1-\beta}\left(\int_0^t f(s)\, ds + u_0\right) + \left(\int_0^t g(s)\, ds\right)^{1/(1-\beta)} \qquad \forall t \in [0,T]\,,$$

iii) *se* $\beta > 1$, *esiste* $\widehat{T}(u_0, f, g) \leq T$ *tale che, scelto* $t_1 \in (0, \widehat{T})$, *si ha* $\forall t \in [0, T - t_1]$:

$$u(t) \leq c(T)\left(1 + \frac{\beta}{(\beta-1)\lambda}\|g\|_{L^2(0,T)}\right)\|f\|_{L^2(0,T)} + c(t_1, \beta, \lambda)\|g\|_{L^2(0,T)} + u_0$$

con $c(t_1, \beta, \lambda) \to +\infty$ *per* $t_1 \to 0^+$.

---

(8) Come si vede nella dimostrazione, per i) e ii) possiamo indebolire l'ipotesi $f, g \in L^2(0,T)$ sostituendola con $f, g \in L^1(0,T)$.

In particolare, se $\beta \geq 2$ $c(t_1, \beta, \lambda) = c(\beta, \lambda)/t_1^{(\beta+1)/(2(\beta-1))}$.

DIMOSTRAZIONE. – i) È il lemma di Gronwall classico.

ii) Dalla (7.1), $\forall t \in [0, T]$ si ha

$$\|u\|_{\infty,[0,t]} \leq u_0 + \int_0^t f(s)\,ds + \int_0^t g(s)\,u^\beta(s)\,ds \leq u_0 + \int_0^t f(s)\,ds + \|u\|^\beta_{\infty,[0,t]} \int_0^t g(s)\,ds\,. \tag{7.2}$$

Fissato $t \in (0, T]$ e posto

$$x = \|u\|_{\infty,[0,t]}, \qquad A = u_0 + \int_0^t f(s)\,ds\,, \qquad B = \int_0^t g(s)\,ds\,,$$

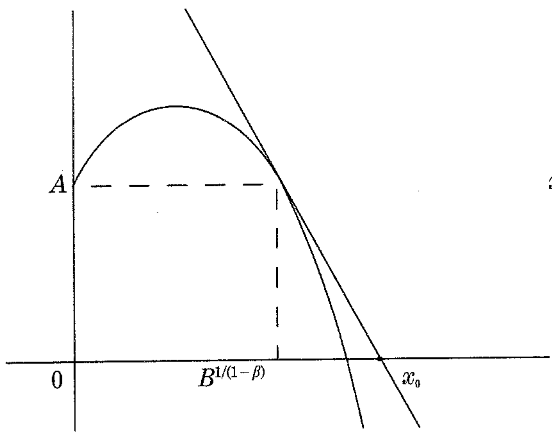
la (7.2) diventa

$$x \leq A + Bx^\beta\,, \tag{7.3}$$

e da questa si deduce

$$x \leq \frac{A}{1-\beta} + B^{1/1-\beta}\,. \tag{7.4}$$

Basta infatti considerare la funzione $\varphi(x) = A + Bx^\beta - x$ e il relativo grafico:



$$x_0 = \frac{A}{1-\beta} + B^{1/(1-\beta)}$$

Dalla (7.4) segue immediatamente la tesi.

Osserviamo che nel caso $\beta = 1/2$ ritroviamo il risultato di [BA].

iii) Consideriamo nell'intervallo $[0, T]$ il problema

$$\begin{cases} v' = g(t)\,v^\beta + f(t)\,, \\ v(0) = u_0\,, \end{cases} \tag{7.5}$$

dove f, g, u_0 sono i dati del teorema; $v(t)$ ne sia soluzione in $[0, \widehat{T})$ per un opportuno

$\widehat{T}(f, g, u_0) \leqslant T$. Moltiplicando per v^β la (7.5), nell'intervallo $[0, \widehat{T})$ si ha

$$v' v^\beta = f(t) v^\beta + g(t) v^{2\beta}$$

o anche

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v^{\beta+1}}{\beta+1}\right) = f(t) v^\beta + g(t) v^{2\beta}. \tag{7.6}$$

Sia $t_1 \in (0, \widehat{T})$ e sia $\theta \in C^1[0, \widehat{T}]$ tale che

$$\begin{aligned}
&0 \leqslant \theta \leqslant 1 && \text{in } [0, \widehat{T}],\\
&\theta(t) = 1 && \text{in } [0, \widehat{T} - t_1],\\
&\theta(t) = 0 && \text{in } [\widehat{T} - t_1/2, \widehat{T}],\\
&|\theta'| \leqslant c_1/t_1 && \text{in } [\widehat{T} - t_1, \widehat{T} - t_1/2].
\end{aligned}$$

Moltiplicando la (7.6) per $\theta^{2\beta}$,

$$\theta^{2\beta} \frac{d}{dt}\left(\frac{v^{\beta+1}}{\beta+1}\right) = \theta^{2\beta} f(t) v^\beta + g(t)(\theta v)^{2\beta}$$

ossia

$$g(t)(\theta v)^{2\beta} = \frac{d}{dt}\left(\theta^{2\beta} \frac{v^{\beta+1}}{\beta+1}\right) - \frac{2\beta}{\beta+1} \theta' \theta^{2\beta-1} v^{\beta+1} - \theta^{2\beta} f(t) v^\beta.$$

Integrando rispetto a t in $[0, T]$:

$$\int_0^T g(t)(\theta v)^{2\beta} dt \leqslant -\frac{2\beta}{\beta+1} \int_0^T \theta' \theta^{2\beta-1} v^{\beta+1} dt - \int_0^T \theta^{2\beta} v^\beta f(t)\, dt;$$

poichè $g \geqslant \lambda > 0$, si ha:

$$\lambda \int_0^T (\theta v)^{2\beta} dt \leqslant \frac{2\beta}{\beta+1} \int_0^T |\theta'| \theta^{2\beta-1} v^{\beta+1} dt + \int_0^T \theta^{2\beta} v^\beta f(t)\, dt =$$

$$= \frac{2\beta}{\beta+1} \int_0^T |\theta'|\, \theta^{\beta-2} (\theta v)^{\beta+1} dt + \int_0^T (\theta v)^\beta \theta^\beta f(t)\, dt = \frac{2\beta}{\beta+1} \int_0^{\widehat{T}} \{(|\theta'| \theta^{\beta-2})^{2\beta/(\beta-1)}\}^{(\beta-1)/2\beta} \cdot$$

$$\cdot \{(\theta v)^{2\beta}\}^{(\beta+1)/2\beta} dt + \int_0^{\widehat{T}} (\theta v)^\beta \theta^\beta f(t)\, dt \underset{(\text{Holder})}{\leqslant} \frac{1}{\lambda^{(\beta+1)/2\beta}} \frac{2\beta}{\beta+1} \left\{ \int_0^{\widehat{T}} \lambda (\theta v)^{2\beta} dt \right\}^{(\beta+1)/2\beta} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \int_0^{\widehat{T}} (|\theta'| \theta^{\beta-2})^{2\beta/(\beta-1)} dt \right\}^{(\beta-1)/2\beta} + \left\{ \lambda \int_0^{\widehat{T}} (\theta v)^{2\beta} dt \right\}^{1/2} \left\{ \frac{1}{\lambda} \int_0^{\widehat{T}} \theta^{2\beta} f^2 dt \right\}^{1/2}.$$

In definitiva, dividendo per $\left\{\lambda \int_0^{\hat{T}} (\theta v)^{2\beta} dt\right\}^{1/2}$:

$$\left\{\lambda \int_0^{\hat{T}} (\theta v)^{2\beta} dt\right\}^{1/2} \leqslant \left\{\frac{1}{\lambda} \int_0^{\hat{T}} \theta^{2\beta} f^2 dt\right\}^{1/2} + $$

$$+ \frac{1}{\lambda^{(\beta+1)/2\beta}} \frac{2\beta}{\beta+1} \left\{\int_0^{\hat{T}} \lambda (\theta v)^{2\beta} dt\right\}^{1/2\beta} \left\{\int_0^{\hat{T}} (|\theta'| \, \theta^{\beta-2})^{2\beta/(\beta-1)} dt\right\}^{(\beta-1)/2\beta}.$$

Se $\beta \geqslant 2$,

$$\left\{\int_0^{\hat{T}} (|\theta'| \theta^{\beta-2})^{2\beta/(\beta-1)} dt\right\}^{(\beta-1)/2\beta} \leqslant \frac{k(\beta)}{t_1^{(\beta+1)/2\beta}}.$$

Se $1 < \beta < 2$, vale un risultato analogo, imponendo su θ l'ulteriore condizione che per $t \to \hat{T}^-$ sia $\theta \sim (\hat{T} - t)^\alpha$; allora

$$|\theta'| \sim \alpha (\hat{T} - t)^{\alpha - 1}$$

e

$$\{|\theta'| \theta^{\beta-2}\}^{2\beta/(\beta-1)} \sim c_1 (\hat{T} - t)^{([\alpha - 1 + \alpha(\beta-2)]2\beta)/(\beta-1)}.$$

Scegliamo α in modo che risulti $[\alpha - 1 + \alpha(\beta-2)]2\beta/(\beta-1) > -1$, cioè $\alpha > (\beta + 1)/(2\beta(\beta-1))$.

Si ottiene così in entrambi i casi

$$\left\{\lambda \int_0^{\hat{T}} (\theta v)^{2\beta} dt\right\}^{1/2} \leqslant \frac{1}{\lambda} \left\{\int_0^{\hat{T}} f^2 dt\right\}^{1/2} + c(t_1, \beta, \lambda) \left\{\int_0^{\hat{T}} \lambda (\theta v)^{2\beta} dt\right\}^{1/2\beta} \tag{7.7}$$

con $c(t_1, \beta, \lambda) \to +\infty$ per $t_1 \to 0^+$.

Posto

$$x = \left\{\lambda \int_0^{\hat{T}} (\theta v)^{2\beta} dt\right\}^{1/2},$$

$$A = \frac{1}{\lambda} \left\{\int_0^{T} f^2 dt\right\}^{1/2},$$

$$B = c(t_1, \beta, \lambda),$$

la (7.7) assume la forma

$$x \leqslant A + B x^{1/\beta},$$

analoga alla (7.3), da cui, come sopra, si deduce

$$x \leqslant \frac{\beta}{\beta - 1} A + B^{\beta/(\beta - 1)},$$

ovvero

$$\left\{ \lambda \int_0^{\widehat{T}} (\theta v)^{2\beta}\, dt \right\}^{1/2} \leqslant \frac{\beta}{\beta - 1} \left\{ \frac{1}{\lambda} \int_0^{T} f^2\, dt \right\}^{1/2} + c_1(t_1, \beta, \lambda),$$

(in particolare, se $\beta \geqslant 2$

$$c_1(t_1, \beta, \lambda) = \frac{c(\beta, \lambda)}{t_1^{(\beta+1)/(2(\beta-1))}} \Bigg);$$

da questa

$$\left\{ \int_0^{\widehat{T}} (\theta v)^{2\beta}\, dt \right\}^{1/2} \leqslant \frac{\beta}{(\beta - 1)\lambda} \left\{ \int_0^{T} f^2\, dt \right\}^{1/2} + c(t_1, \beta, \lambda),$$

o anche, per come è stata definita ϑ,

$$\left\{ \int_0^{\widehat{T} - t_1/2} v^{2\beta}\, dt \right\}^{1/2} \leqslant \frac{\beta}{(\beta - 1)\lambda} \left\{ \int_0^{T} f^2\, dt \right\}^{1/2} + c(t_1, \beta, \lambda). \tag{7.8}$$

D'altra parte, dalla (7.5) $\forall t \in [0, \widehat{T} - t_1/2]$

$$\int_0^t v'\, dt = \int_0^t f\, dt + \int_0^t g v^\beta\, dt,$$

e quindi

$$\|v\|_{\infty, [0, \widehat{T} - t_1/2]} \leqslant \int_0^{\widehat{T} - t_1/2} f\, dt + \int_0^{\widehat{T} - t_1/2} g v^\beta\, dt + u_0;$$

tenendo conto della (7.8), si deduce

$$\|v\|_{\infty,[0,\tilde{T}-t_1/2]} \leqslant \int_0^T f\,dt + \left(\int_0^T g^2\,dt\right)^{1/2} \left(\int_0^{\tilde{T}-t_1/2} v^{2\beta}\,dt\right)^{1/2} + u_0 \leqslant \tag{7.9}$$

$$\leqslant \int_0^T f\,dt + \left(\int_0^T g^2\,dt\right)^{1/2} \left\{ \frac{\beta}{(\beta-1)\lambda} \left(\int_0^T f^2\,dt\right)^{1/2} + c \right\} + u_0$$

$$\leqslant c(T)\left(1 + \frac{\beta}{(\beta-1)\lambda}\left(\int_0^T g^2\,dt\right)^{1/2}\right)\left(\int_0^T f^2\,dt\right)^{1/2} + c(t_1,\beta,\lambda)\left(\int_0^T g^2\,dt\right)^{1/2} + u_0 .$$

Per passare dalla maggiorazione per la v soluzione di (7.5) all'analoga maggiorazione per la u soluzione di (7.1), osserviamo che $\forall t \in [0, T]$ è

$$u(t) - v(t) \leqslant \int_0^t g(s)(u^\beta(s) - v^\beta(s))\,ds .$$

Essendo

$$u^\beta(s) - v^\beta(s) = \beta \int_{v(s)}^{u(s)} t^{\beta-1}\,dt = \beta(u(s) - v(s))\,\xi^{\beta-1}(s),$$

con $\xi(s)$ compreso tra $u(s)$ e $v(s)$ (in particolare, dunque, $\xi(s) \geqslant 0$),

$$u(t) - v(t) \leqslant \beta \int_0^t g(s)(u(s) - v(s))\,\xi^{\beta-1}(s)\,ds .$$

Definiamo $\forall t \in [0, T - t_1]$

$$\mathfrak{J}^+(t) = \{s \in [0, t] \colon u(s) - v(s) \geqslant 0\} ,$$

$$\mathfrak{J}^-(t) = [0, t] - \mathfrak{J}^+(t) ;$$

allora

$$u(t) - v(t) \leqslant \beta \int_{\mathfrak{J}^+(t)} g(s)(u(s) - v(s))\,\xi^{\beta-1}(s)\,ds \leqslant \beta M \int_{\mathfrak{J}^+(t)} g(s)(u(s) - v(s))\,ds ,$$

con

$$M = \max\left\{\|u\|^{\beta-1}_{\infty,[0,T-t_1]}, \|v\|^{\beta-1}_{\infty,[0,T-t_1]}\right\} .$$

Poniamo

$$\varphi(s) = u(s) - v(s), \qquad \varphi^*(s) = \varphi(s) \vee 0 .$$

Ovviamente

$$\int_{\mathfrak{I}^+(t)} g(s)\,\varphi(s)\,ds = \int_0^t g(s)\,\varphi^*(s)\,ds ,$$

e dunque si ha $\forall t \in [0, T - t_1]$

$$\varphi(t) \leq \beta M \int_0^t g(s)\,\varphi^*(s)\,ds$$

e anzi [9]

$$\varphi^*(t) \leq \beta M \int_0^t g(s)\,\varphi^*(s)\,ds . \tag{7.10}$$

Per il lemma di Gronwall

$$\varphi^*(t) = 0 \qquad \forall t \in [0, T - t_1]$$

cioè

$$\varphi(t) \leq 0 \qquad \forall t \in [0, T - t_1] ;$$

dunque

$$u(t) \leq v(t) \qquad \forall t \in [0, T - t_1]$$ [10]

e quindi anche per la u vale la maggiorazione (7.9):

$$\|u\|_{\infty, [0, T - t_1]} \leq c(t_1) \left\{ 1 + \frac{\beta}{(\beta - 1)\lambda} \|g\|_{L^2(0,T)} \right\} \|f\|_{L^2(0,T)} + c(T, \beta, \lambda) \|g\|_{L^2(0,T)} + u_0 .$$

8. – Appendice II.

Con le notazioni già introdotte nel testo, sia $\mathcal{A}: H \to \mathcal{L}(V, V')$ continuo; fissata $\omega(t) \in C^0([0, T]; H)$, poniamo $A(t) = \mathcal{A}(\omega(t))$; dunque $A(t) \in L^\infty(0, T; \mathcal{L}(V, V'))$. Siano poi

$$f \in L^1(0, T; H) \qquad u_0 \in V \qquad u_1 \in H$$

---

(9) Se $\varphi(t) > 0$ è ovvia; se $\varphi(t) \leq 0$, $\varphi^*(t) = 0$ mentre il secondo membro di (7.10) è positivo.

(10) Cf. anche [PSV].

e sia

$$v_1 \in C_s^0([0, T_1]; V) \cap C_s^1([0, T_1]; H)$$

soluzione in $[0, T_1]$ $(T_1 < T)$ del problema

$$\begin{cases} A(t)\, u + u'' = f\,, \\ u(0) = u_0\,, \qquad u'(0) = u_1 \end{cases} \tag{8.1}$$

e sia

$$v_2 \in C_s^0([T_1, T]; V) \cap C_s^1([T_1, T]; H)\,,$$

soluzione in $[T_1, T]$ del problema

$$\begin{cases} A(t)\, u + u'' = f\,, \\ u(T_1) = v_1(T_1)\,, \qquad u'(T_1) = v_1'(T_1)\,. \end{cases} \tag{8.2}$$

Vogliamo provare che la funzione

$$u(t) = \begin{cases} v_1(t) & \text{se } t \in [0, T_1]\,, \\ v_2(t) & \text{se } t \in [T_1, T]\,, \end{cases}$$

in $C_s^0([0, T]; V) \cap C_s^1([0, T]; H)$ risolve il problema (8.1) in $[0, T]$.

Questo significa che

$$\int_0^T \langle Au, \varphi\rangle\, dt - \int_0^T (u', \varphi')_H\, dt = \int_0^T (f, \varphi)_H\, dt - (u_1, \varphi(0))_H \tag{8.3}$$

$$\forall \varphi \in C^\infty([0, T]; V)\colon \varphi(T) = 0\,,$$

e che

$$u(0) = u_0\,. \tag{8.4}$$

La (8.4) è ovviamente verificata. Per quanto riguarda la (8.3), riscriviamola nella forma

$$\int_0^{T_1} \{\langle Av_1, \varphi\rangle - (v_1', \varphi')_H\}\, dt + \int_{T_1}^T \{\langle Av_2, \varphi\rangle - (v_2', \varphi')_H\}\, dt =$$

$$= \int_0^{T_1} (f, \varphi)_H\, dt + \int_{T_1}^T (f, \varphi)_H\, dt - (u_1, \varphi(0))_H - (v_2'(T_1), \varphi(T_1))_H + (v_2'(T_1), \varphi(T_1))_H$$

$$\forall \varphi \in C^\infty([0, T]; V)\colon \varphi(T) = 0\,.$$

Dal fatto che v_2 è soluzione di (8.2) in $[T_1, T]$ segue che

$$\int_{T_1}^{T} \{\langle Av_2, \varphi\rangle - (v_2', \varphi')_H\}\, dt = \int_{T_1}^{T} (f, \varphi)_H\, dt - (v_2'(T_1), \varphi(T_1))_H .$$

Rimane da far vedere che $\forall \varphi \in C^\infty([0, T_1]; V)$

$$\int_0^{T_1} \{\langle Av_1, \varphi\rangle - (v_1', \varphi')_H\}\, dt = \int_0^{T_1} (f, \varphi)_H\, dt - (u_1, \varphi(0))_H + (v_2'(T_1), \varphi(T_1))_H . \tag{8.5}$$

D'altra parte, poichè v_1 è soluzione di (8.1) in $[0, T_1]$, è

$$\int_0^{T_1} \{\langle Av_1, \psi\rangle - (v_1', \psi')_H\}\, dt = \int_0^{T_1} (f, \psi)_H\, dt - (u_1, \psi(0))_H \tag{8.6}$$

$$\forall \psi \in C^\infty([0, T_1]; V) : \psi(T_1) = 0$$

e anche

$$\int_0^{T_1} \{\langle Av_1, \zeta\rangle - (v_1', \zeta')_H\}\, dt = \int_0^{T_1} (f, \zeta)_H\, dt - (v_2'(T_1), \zeta(T_1))_H \tag{8.7}$$

$$\forall \zeta \in C^\infty([0, T_1]; V) : \zeta(0) = 0 .$$

(ricordiamo che $v_1'(T_1) = v_2'(T_1)$) Poichè ogni $\varphi \in C^\infty([0, T_1]; V)$ si può scrivere come somma di una ψ nulla in T_1 con una ζ nulla in 0 (basta prendere $\psi(t) = (1 - t/T_1)\varphi(t)$ e $\zeta(t) = (t/T_1)\varphi(t)$), sommando membro a membro la (8.6) e la (8.7), si ottiene la (8.5). ■

BIBLIOGRAFIA

[AD] R. ADAMS, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York (1975).

[AR] A. AROSIO, *Équations différentielles operationnelles linéaires du deuxième ordre: problème di Cauchy et comportement asymptotique lorsque* $t \to +\infty$, C. R. Acad. Sci. Paris, **295** (1982).

[BA] C. BAIOCCHI, *Soluzioni ordinarie e generalizzate del problema di Cauchy per equazioni differenziali astratte lineari del secondo ordine in spazi di Hilbert*, Ricerche Mat., **16** (1967), pp. 27-95.

[BB] E. F. BECKENBACH - R. BELLMAN, *Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin (1961).

[CW] C. CHENG - H. VON WAHL, *Das Rand-Anfangswertproblem für quasilineare Wellengleichungen in Sobolevräumen niedrigen ordnung*, J. Reine Angew. Math., **337** (1982), pp. 77-112.

[D] R. W. DICKEY, *A quasi-linear evolution equation and the method of Galerkin*, Proc. Ann. Math. Soc., **37** (1973), pp. 149-156.

[DH] C. M. DAFERMOS - W. J. HRUSA, *Energy methods for quasi-linear hyperbolic initial-boundary value problems. Applications to elastodynamics*, Arch. Rat. Mech. An., **87** (1985), pp. 267-292.

[DS] N. DUNFORD - J. T. SCHWARTZ, *Linear Operators*, Interscience, New York (1958).

[GCM] J. M. GREENBERG - R. C. MAC CAMY - V. J. MIZEL, *On the existence, uniqueness, and stability of solutions of the equation* $\sigma'(u_x)\,u_{xx} + \lambda u_{xtx} = \rho_0\,u_{tt}$, J. Math. Mech., **17** (1968), pp. 707-728.

[GI] G. GIRARDI, *Teoremi di regolarità per la soluzione di un'equazione differenziale astratta lineare del secondo ordine*, Rend. ist. Lombardo, Classe Sc. A, **106** (1972), pp. 641-675.

[GR] T. H. GRONWALL, *Note on the derivatives with respects to a parameter of the solutions of a system of differential equations*, Ann. Math. (2), **20** (1918-19), pp. 292-296.

[H] A. E. HURD, *A uniqueness theorem for second order quasilinear hyperbolic equations*, Pacific J. Math., **32** (1970), pp. 415-559.

[K] T. KATO, *Abstract differential equations and non-linear mixed problems*, Lezioni Fermiane, Scuola Normale Superiore, Pisa (1985).

[KS] M. KRZYŻAŃSI - J. SCHAUDER, *Quasilineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung von hyperbolischen Typus. Gemischte Randwertaufgaben*, Studia Math., **5** (1934), pp. 162-189.

[LM] J. L. LIONS - E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications, I*, Dunod, Paris (1968).

[PSV] L. PICCININI - G. STAMPACCHIA - G. VIDOSSICH, *Equazioni differenziali ordinarie in* $\boldsymbol{R}^n$, Liguori, Napoli (1978).

[T] M. TSUTSUMI, *Some non linear evolution equations of second order*, Proc. Japan Acad., **47** (1971), pp. 950-955.