Annali di Matematica pura ed applicata
(IV), Vol. CLXIV (1993), pp. 51-75

# Méthode de compacité et de décomposition applications: minimisation, convergence des martingales, lemma de Fatou multivoque (*).

CHARLES CASTAING

**Summary.** - *New results of decomposition for bounded sequences in $L_E^1$ and in the space of integrably bounded multifunctions with non empty convex weakly compact values in a Banach space E and its applications to problems of Minimization, convergence of martingales, Multivalued Fatou lemma are presented.*

## 0. - Introduction.

On se propose de présenter dans ce papier quelques nouveaux resultats de décomposition pour une suite bornée dans $L_E^1$ et dans l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathrm{cfk}(E)}$ des multifonctions intégrablement bornées à valeurs convexes faiblement compactes non vides d'un espace de Banach séparable $E$. Ces résultats permettent d'obtenir de nouveaux résultats de minimization, de convergence des martingales, du lemme de Fatou multivoque.

## 1. - Notations.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé complet, $E$ un espace de Banach séparable. On désigne par $\mathrm{cfk}(E)$ l'ensemble des parties convexes faiblement compactes non vides de $E$ et par $\mathcal{L}^1_{\mathrm{cfk}(E)}(\mathcal{F})$ l'espace des multifonctions $\mathcal{F}$-mesurables $X$ de $\Omega$ dans $\mathrm{cfk}(E)$ telles que $|X|: \omega \mapsto \sup\{\|u\|: u \in X(\omega)\}$ soit intégrable sur $\Omega$. Un ensemble $H$ dans $\mathcal{L}^1_{\mathrm{cfk}(E)}(\mathcal{F})$ est *bornée* (resp. *uniformément intégrable*) si l'ensemble $\{|X|: X \in H\}$ est *borné* (resp. *uniformément intégrable*) dans $L^1_{\mathbb{R}}(\mathcal{F})$. Enfin, on

(*) Entrata in Redazione il 28 dicembre 1989, in forma finale ricevuta il 26 febbraio 1991.

Indirizzo dell'A.: Département des Sciences Mathématiques, Université Montpellier II, France.

désigne par $E_b'$ (resp. $E_s'$) le dual fort (resp. faible) de $E$ et pour tout $K \in \mathrm{cfk}(E)$, $x' \mapsto \delta^*(x', K)$ la fonction d'appui de $K$ ($x' \in E'$).

Dans toute la suite, $E$ est supposé *séparable* bien que cette hypothèse n'intervienne pas dans tous les énoncés, on désigne par $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des convexes fermés localement faiblement compacts et ne contenant pas de droites (LCSD) et par $\mathcal{R}(E)$ l'ensemble des convexes fermés dont l'intersection avec toute boule fermée de $E$ est faiblement compacte. On a $\mathrm{cfk}(E) \subset \mathcal{L}(E) \subset \mathcal{R}(E)$.

## 2. – Troncature - Compacité - Décomposition.

Le résultat suivant et son corollaire sont inspirés des techniques de troncature de la démonstration du Théorème 4.1 dans CASTAING ([24], p. 2.14).

THÉORÈME 2.1. – *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu$ $\sigma$-finie et $\mathcal{F}$ $\mu$-complete $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée dans $L_E^1(\mathcal{F})$ qui vérifie la condition d'approximation suivante. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une multifonction $\mathcal{F}$-mesurable et intégrablement bornée $L_\varepsilon$ de $\Omega$ dans $\mathrm{cfk}(E)$ avec $0 \in L_\varepsilon(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega$ et une suite $(\Omega_\varepsilon^n)_{n\geq 1}$ dans $\mathcal{F}$ telle que*

$$\begin{cases} \forall n \geq 1, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad 1_{\Omega_\varepsilon^n}(\omega)\, u_n(\omega) \in L_\varepsilon(\omega)\,, \\ \forall n \geq 1, \quad \int |u_{n} - 1_{\Omega_\varepsilon^n} u_n|\, d\mu \leq \varepsilon\,. \end{cases}$$

*Alors la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est relativement faiblement compacte dans $L_E^1(\mathcal{F})$, et il existe une sous suite $(u_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(u_n)_{n\geq 1}$ et $u_\infty$ dans $L_E^1(\mathcal{F})$, tele que*

$$\begin{cases} u_{n_k} \to u_\infty \qquad \text{pour } \sigma(L_E^1(\mathcal{F}), L_{E_s'}^\infty(\mathcal{F}))\,, \\ u_\infty(\omega) \in \overline{\mathrm{co}}\, Ls\{u_n(\omega)\} \ \text{p.s.}\,, \end{cases}$$

*où $Ls\{u_n(\omega)\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\{u_m(\omega) \colon m \geq k\}}^\sigma$ et $\overline{\cdot}^\sigma$ désigne l'adhérence pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.*

DÉMONSTRATION. – Soit $\varepsilon > 0$. Soit $L_\varepsilon$ et $\Omega_\varepsilon^n$ qui satisfont aux conditions de l'énoncé. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$u_n = 1_{\Omega_\varepsilon^n} u_n + 1_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon^n} u_n\,.$$

De sorte que la suite $(1_{\Omega_\varepsilon^n} u_n)_{n\geq}$ demeure dans l'ensemble $S_{L_\varepsilon}^1$ des sections intégrables de $L_\varepsilon$, qui est $\sigma(L_E^1(\mathcal{F}), L_{E_s'}^\infty(\mathcal{F}))$ compact. Comme on a

$$|u_n - 1_{\Omega_\varepsilon^n} u_n|_{L^1} \leq \varepsilon$$

pour tout $n \geq 1$, on conclut que $(u_n)_{n\geq 1}$ est aussi relativement $\sigma(L_E^1(\mathcal{F}), L_{E_s'}^\infty(\mathcal{F}))$ compact.

Le deuxième point de l'énoncé qui est plus difficile résulte des arguments de la démonstration du Théorème 4.1 dans CASTAING ([24], p. 2.16-2.18).

Voici un corollaire qui intervient directement dans la suite.

COROLLAIRE 2.2. – *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu$ $\sigma$-finie et $\mathcal{F}$ $\mu$-complète, $E$ un espace de Banach séparable, $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite uniformément intégrable dans $L^1_E(\mathcal{F})$, $h$ une fonction strictement positive $\mu$-intégrable sur $\Omega$. On suppose que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ admette la propriété d'approximation suivante. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une multifonction $\mathcal{F}$-mesurable $L_\varepsilon$ de $\Omega$ à valeurs dans $\mathcal{R}(E)$ avec $0 \in L_\varepsilon(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega$ et une suite $(\Omega^n_\varepsilon)_{n\geq 1}$ dans $\mathcal{F}$ telles que*

$$\begin{cases} \forall n \geq 1, \quad \displaystyle\int_{\Omega\setminus\Omega^n_\varepsilon} h\,d\mu \leq \varepsilon\,, \\ \forall n \geq 1, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad 1_{\Omega^n_\varepsilon}(\omega)\,u_n(\omega) \in L_\varepsilon(\omega)\,. \end{cases}$$

*Alors la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est relativement $\sigma(L^1_E(\mathcal{F}), L^\infty_{E'_s}(\mathcal{F}))$ compacte.*

DÉMONSTRATION. – Soit $h$ une fonction strictement positive et $\mu$-intégrable sur $\Omega$. Comme $(u_n)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable dans $L^1_E(\mathcal{F}, \mu)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ et $\eta > 0$ tels que

$$\begin{cases} \displaystyle\int_A h\,d\mu < \delta \Rightarrow \sup_{n\geq 1} \int_A |u_n|\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2}, \\ \displaystyle\sup_{n\geq 1} \int_{[|u_n| > \eta h]} |u_n|\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

En vertu de l'hypothèse, il existe une multifonction $\mathcal{F}$-mesurable $L_\delta$ à valeurs dans $\mathcal{R}(E)$ avec $0 \in L_\delta(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega$, et $(\Omega^n_\delta)_{n\geq 1}$ *dans* $\mathcal{F}$ *tel que* $\int_{\Omega\setminus\Omega^n_\delta} h\,d\mu \leq \delta$, $\forall n \geq 1$ et tel que $u_n(\omega) \in L_\delta(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega^n_\delta$. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$u_n = 1_{\Omega^n_\delta \cap [|u_n| \leq \eta h]} u_n + 1_{(\Omega^n_\delta)^c \cap [|u_n| \leq \eta h]} u_n + 1_{[|u_n| > \eta h]} u_n$$

de sorte que la suite

$$(1_{\Omega^n_\delta \cap [|u_n| \leq \eta h]} u_n)_{n\geq 1}$$

demeure dans l'ensemble $S^1_{\Phi_\delta}$ des sections intégrables de la multifonction $\mathcal{F}$-mesurable intégrablement bornée $\Phi_\delta$ de $\Omega$ à valeurs dans $\mathrm{cfk}(E)$ définie par

$$\Phi_\delta(\omega) = L_\delta(\omega) \cap \eta h(\omega) B\,, \qquad \forall \omega \in \Omega$$

où $B$ est la boule unité de $E$. Vu le choix de $\delta$ et $\eta$, on a, pour tout $n \geq 1$

$$|u_n - 1_{\Omega^n_\delta \cap [|u_n| \leq \eta h]} u_n|_{L^1} < \varepsilon$$

de sorte que $(u_n)_{n\geq 1}$ est relativement $\sigma(L^1_E(\mathcal{F}), L^\infty_{E'_s}(\mathcal{F}))$ compact, en vertu du Théorème 2.1.

Dans le cas multivoque, on a le résultat de compacité suivant que est dû à CASTAING-CLAUZURE ([22]).

THÉORÈME 2.3. – *On suppose $E'_b$ séparable et $E$ ayant la propriété de Radon-Nikodym. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite uniformément intégrable dans $\mathcal{L}^1_{\mathrm{cfk}(E)}(\mathcal{F})$ telle que, pour tout $A \in \mathcal{F}$, $\bigcup_{n\geq 1} \int_A X_n\, dP$ soit relativement faiblement compacte dans $E$. Alors il existe une suite $(X_{\alpha(n)})_{n\geq 1}$ extraite de $(X_n)_{n\geq 1}$ et $X_\infty \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{cfk}(E)}(\mathcal{F})$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \delta^*(x', X_{\alpha(n)}(\omega))\, P(d\omega) \quad \textit{existe dans } \mathbb{R}$$

*pour tout $A \in \mathcal{F}$ et tout $x' \in E'$, et un filtre $\mathcal{U}$ plus fin que le filtre de Fréchet tel que*

$$\lim_{\mathcal{U}} \int_\Omega \delta^*(u(\omega), X_{\alpha(n)}(\omega))\, P(d\omega) = \int_\Omega \delta^*(u(\omega), X_\infty(\omega))\, P(d\omega)$$

*pout tout $u \in L^\infty_{E'_b}(\mathcal{F})$.*

DÉMONSTRATION (cf. Appendice). – Passons maintenant à la décomposition dans $L^1_E(\mathcal{F})$ et dans $\mathcal{L}^1_{\mathrm{cfk}(E)}(\mathcal{F})$.

Pour la commodité du lecteur on reproduit ici la version multivoque du lemme de Slaby ([53]) car cette version intervient dans les démonstrations. Vu les définitions et notations introduites dans § 1, le lemma de Slaby s'étend mutadis mutandis au cas $\mathcal{L}^1_{\mathrm{cfk}(E)}(\mathcal{F})$.

LEMME 2.4. – *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée dans $\mathcal{L}^1_{\mathrm{cfk}(E)}(\mathcal{F})$. Alors il existe une suite extraite $(X_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(X_n)_{n\geq 1}$, une suite $(B_k)_{k\geq 1}$ dans $\mathcal{F}$ telles que: $\lim_{k\to\infty} P(B_k) = 1$ et $(1_{B_k} X_{n_k})_{k\geq 1}$ est uniformément intégrable. Par suite, $(1_{B_k^c} X_{n_k})_{k\geq 1}$ converge vers 0 en mesure, c'est-à-dire, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{k\to\infty} P\{1_{B_k^c} |X_{n_k}| > \varepsilon\} = 0$.*

REMARQUE. – E. BALDER m'a signalé que la décomposition du type précédent pour le cas des espaces $L^1_E(\mathcal{F})$ a été obtenue antérieurement par GAPOSHKIN ([36], Lemme C, p. 384).

Voici un corollaire de ce lemme qui est une version du «*biting lemma*» ([1], [9], [11], [14], [15], [25]).

COROLLAIRE 2.5. – *Sous les hypothèse et notations du Lemme 2.4, il existe une suite croissante $(A_m)_{m\geq 1}$ dans $\mathcal{F}$ telle que $\lim_{m\to\infty} P(A_m) = 1$ et une sous suite $(X_{n_{k_m}})_{m\geq 1}$ de*

$(X_{n_k})_{k \geq 1}$ *telle que la suite* $(1_{A_m} X_{nk_m})_{m \geq 1}$ *soit uniformément intégrable. Par suite, pour tout entier* $p \geq 1$, *la restriction de* $(X_{nk_m})_{m \geq 1}$ *à* $A_p$ *est uniformément intégrable.*

DÉMONSTRATION. – Le premier point de l'énoncé a été démontré par LUU ([32]) de la façon suivante. Puisqu'on a $\lim_{k \to \infty} P(B_k) = 1$, il existe une sous suite $(B_{k_q})_{q \geq 1}$ de $(B_k)_{k \geq 1}$ telle que

$$P(B_{k_q}) \geq 1 - 2^{-q}, \qquad \forall q \in \mathbb{N}^*$$

Pour tout entier $m \geq 1$, posons

$$A_m = \bigcap_{q=m}^{\infty} B_{k_q}$$

Alors $(A_m)_{m \geq 1}$ est croissante avec $A_m \subset B_{k_m}$ pour tout $m \geq 1$. On a

$$P(A_m^c) = P\left(\bigcup_{q=m}^{\infty} B_{k_q}^c\right) \leq \sum_{q=m}^{\infty} P(B_{k_q}^c) \leq \sum_{q=m}^{\infty} \frac{1}{2^q}.$$

D'où, $\lim_{m \to \infty} P(A_m) = 1$. En vertu du Lemme 2.4, la suite $(X_{nk_m})_{m \geq 1}$ répond à l'énoncé car la suite $(1_{B_{k_m}} X_{nk_m})_{m \geq 1}$ est uniformément intégrable, donc $(1_{A_m} X_{nk_m})_{m \geq 1}$ l'est aussi. Vérifions le deuxième point de l'énoncé. Soit $p$ un entier $\geq 1$ fixé. Soit $t > 0$. On a

$$\sup_{m \geq 1} \int_{A_p \cap [|X_{nk_m}| > t]} |X_{nk_m}| \leq \sup_{1 \leq m \leq p-1} \int_{A_p \cap [|X_{nk_m}| > t]} |X_{nk_m}| + \sup_{p \leq m} \int_{A_p \cap [|X_{nk_m}| > t]} |X_{nk_m}|$$

comme le premier terme vers 0 lorsque $t \to +\infty$, le second terme est majoré par $\sup_{1 \leq m} \int_{A_m \cap [|X_{nk_m}| > t]} |X_{n_{k_m}}|$ qui tend vers 0 lorsque $t \to \infty$ car $(1_{A_m} X_{nk_m})_{m \geq 1}$ est uniformément intégrable.

En utilisant le Corollaire 2.5, le Théorème 2.3 et les arguments de la démonstration du Théorème 3.1 dans CASTAING-CLAUZURE ([25]), on a l'énoncé suivant.

THÉORÈME 2.6. – *On suppose* $E_b'$ *séparable et* $E$ *ayant la propriété de Radon-Nykodym. Soit* $(X_n)_{n \geq 1}$ *une suite bornée dans* $\mathcal{L}^1_{\mathrm{cfk}(E)}(\mathcal{F})$ *telle que* $\bigcup_{n=1}^{\infty} \int_A X_n$ *soit relativement* $\sigma(E, E')$ *compacte. Alors il existe une suite croissante* $(A_m)_{m \geq 1}$ *telle que* $\lim_{m \to \infty} P(A_m) = 1$, *une suite* $(X_{\alpha(m)})_{n \geq 1}$ *extraite de* $(X_n)_{n \geq 1}$ *telle que* $(1_{A_m} X_{\alpha(m)})_{m \geq 1}$ *soit uniformément intégrable, une suite* $(X_{\beta\alpha(n)})_{n \geq 1}$ *extraite de* $(X_{\alpha(n)})_{n \geq 1}$, $X_\infty$ *appartenant à* $\mathcal{L}^1_{\mathrm{cfk}(E)}(\mathcal{F})$ *telles que, pour tout* $p \geq 1$ *fixé, tout* $A \in A_p \cap \mathcal{F}$, *tout* $x' \in E'$, *on ait*

$$\lim_{n \to \infty} \int_A \delta^*(x', X_{\beta\alpha(n)}) = \int_A \delta^*(x', X_\infty).$$

Voici d'abord une application du résultat précédent qui intervient dans l'étude de la décomposition et de la convergence des martingales présentées dans le paragraphe 3.

THÉORÈME 2.7. – *On suppose $E'_b$ séparable et $E$ ayant la propriété de Radon-Nikodym. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée dans $\mathcal{L}^1_{\mathrm{cfk}(E)}(\mathcal{F})$ telle que*

(1) *Pour tout $\omega \in \Omega$, $\sup_{n\geq 1} |X_n(\omega)| < +\infty$.*

(2) *Pour tout $A \in \mathcal{F}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \int_A X_n$ est relativement $\sigma(E,E')$ compacte.*

(3) *Pour tout $x' \in D'$, où $D'$ est une suite dans $E'$, dense pour la topologie de la norme de $E'_b$, la suite $(\delta^*(x', X_n))_{n\geq 1}$ converge p.p. vers une fonction intégrable $\varphi_{x'}$.*

*Alors il existe $X_\infty \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{cfk}(E)}(\mathcal{F})$ et un négligeable $N \in \mathcal{F}$ tel que pour tout $(\omega, x') \in \Omega\setminus N \times E'$, on ait*

$$\lim_{n\to\infty} \delta^*(x', X_n(\omega)) = \delta^*(x', X_\infty(\omega)).$$

DÉMONSTRATION. – Appliquons le notations et les résultats du Théorème 2.6.

Il existe une suite croissante $(A_m)_{m\geq 1}$ dans $\mathcal{F}$ avec $\lim_{n\to\infty} P(A_m) = 1$, une suite $(X_{\gamma(n)})_{n\geq 1}$ extraite de $(X_n)_{n\geq 1}$ et $X_\infty \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{cfk}(E)}(\mathcal{F})$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \delta^*(x', X_{\gamma(n)}(\omega))\, P(d\omega) = \int_A \delta^*(x', X_\infty(\omega))\, P(d\omega)$$

pour tout $p \geq 1$, tout $A \in A_p \cap \mathcal{F}$ et tout $x' \in D'$. Comme $\lim_{n\to\infty} \delta^*(x', X_n(\omega)) = \varphi_{x'}(\omega)$ p.p. et comme la restriction de $(X_{\gamma(n)})_{n\geq 1}$ à chacun des $A_p$ $(p \geq 1)$ est uniformément intégrable, on en déduit que

$$\int_A \delta^*(x', X_\infty(\omega))\, P(d\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_A \delta^*(x', X_{\gamma(n)}(\omega))\, P(d\omega) = \int_A \varphi_{x'}(\omega)\, P(d\omega)$$

pour tout $p \geq 1$, tout $A \in A_p \cap \mathcal{F}$, tout $x' \in D'$.

Par suite, pour tout $p \geq 1$, tout $x'$ fixé dans $D'$,

$$\delta^*(x', X_\infty(\omega)) = \varphi_{x'}(\omega) = \lim_{n\to\infty} \delta^*(x', X_n(\omega))$$

excepté sur un négligeable $N_{p,x'}$ dans $A_p \cap \mathcal{F}$. Soit

$$N_p = \bigcup_{x'\in D'} N_{p,x'}.$$

Alors $N_p$ est un négligeable dans $A_p \cap \mathcal{F}$ et on a

$$\lim_{n\to\infty} \delta^*(x', X_n(\omega)) = \delta^*(x', X_\infty(\omega))$$

pour $(\omega, x') \in (A_p \setminus N_p) \times D'$. En vertu de la condition (1), on obtient,

$$\lim_{n\to\infty} \delta^*(x', X_n(\omega)) = \delta^*(x', X_\infty(\omega))$$

pour $(\omega, x') \in (A_p \setminus N_p) \times E'$ car on a, pour tout $x' \in E'$ et tout $e' \in D'$, tout $\omega \in \Omega$, tout $n \geq 1$,

$$|\delta^*(x', X_n(\omega)) - \delta^*(e', X_\infty(\omega))| \leq$$
$$\leq \|x' - e'\| \sup_{n\geq 1} |X_n(\omega)| + |\delta^*(e', X_n(\omega)) - \delta^*(e', X_\infty(\omega))| + \|x' - e'\| |X_\infty(\omega)|.$$

Comme l'égalité $\lim_{n\to\infty} \delta^*(x', X_n(\omega)) = \delta^*(x', X_\infty)$ est vraie p.p. sur chaque $A_p$ $(p \geq 1)$, on obtient finalement

$$\lim_{n\to\infty} \delta^*(x', X_n(\omega)) = \delta^*(x', X_\infty(\omega))$$

pour $(\omega, x') \in \left(\Omega \setminus \bigcup_{p=1}^{\infty} N_p\right) \times E'$.

REMARQUE. – Si l'on se contente de la convergence scalairement p.p., on peut supprimer la condition (1) $\sup_{n\geq 1} |X_n(\omega)| < +\infty$, $\forall \omega \in \Omega$ dans l'énoncé du Théorème 2.7. Dans ce cas, on a $\lim_{n\to\infty} \delta^*(x', X_n) = \delta^*(x', X_\infty)$ p.p. excepté sur un négligeable $N_{x'}$ $(x' \in D')$.

Voici maintenant un résultat qui établit le lien entre la décomposition de Slaby et la caractérisation des formes sous linéaires continues additives sur $L_E^\infty$, $E$ étant un espace de Banach réflexif séparable (cf. CLAUZURE ([29]), p. III.37)). Rappelons que toute forme sous-linéaire continue additive $l$ sur $L_E^\infty$ se décompose en

$$l = l_a + l_s$$

où $l_a$ est une forme sous-linéaire continue sur $L_E^\infty$ telle que

$$l_a(u) = \int_\Omega \delta^*(u(\omega), \Gamma(\omega))\, P(d\omega), \qquad \forall u \in L_E^\infty,$$

où $\Gamma$ est une multifonction mesurable et intégrablement bornée de $\Omega$ à valeurs dans cfk$(E)$, et $l_s$ est une forme sous-linéaire, additive, continue sur $L_E^\infty$, singulière au sens suivant: il existe une suite décroissante $(A_p)_{p\geq 1}$ dans $\mathcal{F}$ d'intersection vide telle que

$$l_s(1_{A_p^c} u) = 0$$

pour tout $u \in L_E^\infty$ et tout entier $p \geq 1$, cf. CLAUZURE ([29], Theor. 3, p. III-41). Par ailleurs, si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite bornée dans $\mathcal{L}^1_{\mathrm{cfk}(E)}(\mathcal{F})$, alors $\{X_n : n \geq 1\}$ est relativement compact dans l'espace $S(L_{E'}^\infty)$ des formes sous-linéaire continues additives sur $L_{E'}^\infty$ muni de la convergence simple.

En vertu des considérations précédentes et du Théorème 2.6, on a l'énoncé suivant qui établit le lien entre la décomposition de Slaby et la caractérisation des formes sous-linéaires continues additives sur $L^\infty_{E'}$.

THÉORÈME 2.8. – *Soit $E$ un espace de Banach réflexif séparable, soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée dans $\mathcal{L}^1_{\mathrm{cfk}(E)}(\mathcal{F})$.*

(*a*) *alors il existe:*

— *une suite décroissante $(B_p)_{p\geq 1}$ dans $\mathcal{F}$ telle que $P\left(\bigcap_{p=1}^{\infty} B_p\right) = 0$,*

— *une suite $(X_{\gamma(n)})_{n\geq 1}$ extraite de $(X_n)_{n\geq 1}$ telle que, pour tout $p \geq 1$, $(X_{\gamma(n)}|_{B_p^c})$ soit uniformément intégrable dans $\mathcal{L}^1_{\mathrm{cfk}(E)}(B_p^c \cap \mathcal{F})$,*

— *$X_\infty$ appartenant à $\mathcal{L}^1_{\mathrm{cfk}(E)}(\mathcal{F})$ telle que pour tout $p \geq 1$, tout $A \in B_p^c \cap \mathcal{F}$, tout $x' \in E'$, on ait*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \delta^*(x', X_{\gamma(n)}(\omega))\, P(d\omega) = \int_A \delta^*(x', X_\infty(\omega))\, P(d\omega).$$

(*b*) *Soit $l$ une valeurs d'adhérence de $(X_{\gamma(n)})_{n\geq 1}$ dans $S(L^\infty_{E'})$ muni de la convergence simple et soit $l = l_a + l_s$ la décomposition de $l$ en partie absolument continue et partie singulière. Soit $\Gamma$ la densité de $l_a$. Alors on a*

$$\Gamma = X_\infty \ \text{p.p.}$$

DÉMONSTRATION. – (*a*) Est la reprise du lemme de Biting multivoque (Théorème 2.6).

(*b*) Il existe un filtre $\mathcal{U}$ plus fin que le filtre de Fréchet tel que, pour tout $u \in L^\infty_{E'}$, on ait,

$$\lim_{\mathcal{U}} \int_\Omega \delta^*(u(\omega), X_{\gamma(n)}(\omega))\, P(d\omega) = l(u).$$

On sait que $l$ se décompose en

$$l = l_a + l_s$$

où $l_a$ est de la forme

$$l_a(u) = \int_\Omega \delta^*(u(\omega), \Gamma(\omega))\, P(d\omega).$$

$\forall u \in L^\infty_{E'}$, où $\Gamma$ appartient à $\mathcal{L}^1_{\mathrm{cfk}(E)}(\mathcal{F})$ et $l_s$ est singulière au sens: il existe une suite décroissante $(A_p)_{p\geq 1}$ dans $\mathcal{F}$ d'intersection vide telle que $l_s(1_{A_p^c} u) = 0$ pour tout $u \in L^\infty_{E'}$ et tout $p \geq 1$. Posons

$$C_p = A_p \cup B_p, \qquad p \geq 1.$$

On a, pour tout $A \in A_p^c \cap \mathcal{F}$, tout $u \in L_{E'}^{\infty}$.

$$\lim_{\mathcal{U}} \int_A \delta^*(u(\omega), X_{\gamma(n)}(\omega)) = \int_A \delta^*(u(\omega), \Gamma(\omega))\, P(d\omega)$$

et pour tout $A \in B_p^c \cap \mathcal{F}$, tout $x' \in E'$,

$$\lim_{n \to \infty} \int_A \delta^*(x', X_{\gamma(n)}(\omega))\, P(d\omega) = \int_A \delta^*(x', X_\infty(\omega))\, P(d\omega).$$

Par suite, pour tout $A \in C_p^c \cap \mathcal{F}$, on a

$$\int_A \delta^*(x', X_\infty(\omega))\, P(d\omega) = \int_A \delta^*(x', \Gamma(\omega))\, P(d\omega).$$

Comme $(C_p^c)_{p \geq 1}$ est croissante avec $\lim_{p \to \infty} P(C_p^c) = 1$, on en déduit que

$$\delta^*(x', X_\infty(\omega)) = \delta^*(x', \Gamma(\omega))$$

p.p. sur $\Omega$, pour tout $x' \in E'$. D'où $X_\infty = \Gamma$ p.p.

Pour terminer ce paragraphe, on a le résultat suivant qui est l'analogue du Théorème 2.6 pour le cas vectoriel et qui illustre les techniques de troncature et de compacité dans le Théorème 2.1 et dans son Corollaire 2.2.

THÉORÈME 2.9. – *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu$ $\sigma$-finie et $\mathcal{F}$ $\mu$-complète, $E$ un espace de Banach séparable, $\varphi$: $\Omega \times E \to [0, +\infty]$ un intégrande, $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(E)$-mesurable tel que $\varphi(\omega, 0) = 0$, $\forall \omega \in \Omega$ et tel que pour tout $\omega \in \Omega$, pour tout $r \in \mathbb{R}^+$, l'ensemble*

$$\{x \in E: \varphi(\omega, x) \leq r\}$$

*appartient à $\mathcal{R}(E)$. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite bornée dans $L_E^1(\mathcal{F}, \mu)$ telle que $\sup_{n \geq 1} \int_\Omega \varphi(\omega, u_n(\omega))\, \mu(d\omega) < +\infty$. Alors il existe une suite $(B_k)_{k \geq 1}$ dans $\mathcal{F}$ et une sous suite $(u_{n_k})_{n \geq 1}$ telle que $(1_{B_k} u_{n_k})_{k \geq 1}$ soit relativement $\sigma(L_E^1(\mathcal{F}), L_{E_s'}^{\infty}(\mathcal{F}))$ compacte et telle que $(1_{B_k^c} u_{n_k})_{k \geq 1}$ converge vers $0$ $\mu$-p.p.*

DÉMONSTRATION. – On va se ramener au cas $\mu$ finie de façon standard. Pour la commodité du lecteur, on va détailler les arguments de la démonstration. Soit $h$ une fonction strictement positive et $\mu$-intégrable. Soit $\nu = h\mu$. Il est clair que la suite $((1/h)|u_n|)_{n \geq 1}$ est bornée dans $L_{\mathbb{R}}^1(\mathcal{F}, \nu)$. En vertu du Lemme 2.4, il existe une suite $(B_k)_{k \geq 1}$ dans $\mathcal{F}$ avec $\lim_{k \to \infty} \nu(B_k) = \nu(\Omega)$ et une sous suite $(u_{n_k})_{k \geq 1}$ *telle que* $(1_{B_k} h^{-1} |u_{n_k}|)_{k \geq 1}$ est uniformément intégrable dans $L_{\mathbb{R}}^1(\mathcal{F}, \nu)$. On peut supposer que $(1_{B_k^c} |u_{n_k}|)_{k \geq 1}$ converges vers $0$ $\mu$-p.p. Mainenant on va montrer que $(1_{B_k} u_{n_k})_{k \geq 1}$ est relativement $\sigma(L^1, L^\infty)$ compacte dans $L_E^1(\mathcal{F}, \mu)$.

Posons $v_k = 1_{B_k} u_{n_k}$, $\forall k \geq 1$. Alors $(h^{-1} |v_k|)_{k \geq 1}$ est uniformément intégrable dans $L_{\mathbb{R}}^1(\mathcal{F}, \nu)$ ce qui équivaut à l'uniforme intégrabilité de $(|v_k|)$ dans $L_{\mathbb{R}}^1(\mathcal{F}, \mu)$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta$ et $\lambda > 0$ tels que

$$\nu([\varphi(v_k) > \eta h]) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall k \geqslant 1,$$

$$\nu([\,|v_k| > \lambda h]) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall k \geqslant 1.$$

Car $(h^{-1}\varphi(v_k))_{k\geqslant 1}$ et $(h^{-1}|v_k|)_{k\geqslant 1}$ sont bornées dans $L^1_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}, \nu)$. Pour tout $k \geqslant 1$, on a

$$v_k = 1_{[v_k > \lambda h] \cap [\varphi(v_k) \leqslant \eta h]} v_k + 1_{[|v_k| \leqslant \lambda h] \cap [\varphi(v_k) \leqslant \eta h]} v_k + 1_{[\varphi(v_k) > \eta h]} v_k .$$

Soit $B$ la boule unité dans $E$. Considérons la multifonction

$$\Phi(\omega) = \{x \in \lambda h(\omega) B \colon \varphi(\omega, x) \leqslant \eta h(\omega)\}$$

pour $\omega \in \Omega$. En vertu de l'hypothèse, $\Phi(\omega)$ est convexe $\sigma(E, E')$ compact et la multifonction $\Phi$ est $\mathcal{F}$-mesurable intégrablement bornée avec $0 \in \Phi(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega$. Par construction, on a pour tout $k \geqslant 1$, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$1_{[|v_k| \leqslant \lambda h] \cap [\varphi(v_k) \leqslant \eta h]}(\omega)\, v_k(\omega) \in \Phi(\omega).$$

Donc la suite $(1_{[|v_k| \leqslant \lambda h] \cap [\varphi(v_k)] \leqslant \eta h]} v_k)_{k\geqslant 1}$ est relativement faiblement compacte dans $L^1_E(\mathcal{F}, \mu)$, donc $(v_k)_{k\geqslant 1}$ l'est aussi d'après le Corollaire 2.2. En effet, $(v_k)_{k\geqslant 1}$ est uniformément intégrable. Posons, pour tout $k \geqslant 1$,

$$\Omega^k_\varepsilon = [\,|v_k| \leqslant \lambda h] \cap [\varphi(v_k) \leqslant \eta h].$$

Alors $1_{\Omega^k_\varepsilon}(\omega)\, v_k(\omega) \in \Phi(\omega)$, $\forall k \geqslant 1$, $\forall \omega \in \Omega$ et

$$\nu(\Omega \setminus \Omega^k_\varepsilon) \leqslant \nu\{[\varphi(v_k) > \eta h]\} + \nu\{|v_k| > \lambda h\} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \qquad \forall k \geqslant 1.$$

## 3. - Applications.

Ce paragraphe est consacré aux applications des résultats du paragraphe 2. Voici d'abord un résultat de minimisation des fonctionnelles convexes semi continues inférieurement pour la convergence en mesure.

THÉORÈME 3.1. - *Soit $E$ un espace de Banach séparable. Soit $\varphi \colon \Omega \times E \to [0, +\infty]$ intégrande $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(E)$-mesurable tel que $\varphi(\omega, 0) = 0$, $\forall \omega \in \Omega$ et tel que pour tout $\omega \in \Omega$, tout $r \in \mathbb{R}^+$, l'ensemble*

$$\{x \in E \colon \varphi(\omega, x) \leqslant r\}$$

*appartienne à $\mathcal{R}(E)$. Soit $K$ un ensemble convexe fermé en mesure dans $L^1_E(\mathcal{F})$ tel que $\sup\limits_{u \in K} \int_\Omega \varphi(\omega, u(\omega))\, P(d\omega) < +\infty$. Soit $I \colon K \to \mathbb{R}$ une fonction convexe semicontinue* *inférieurement pour la convergence en mesure et* inf-*bornée, c'est-à-dire, pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{u \in K: I(u) \leq \alpha\}$ *est bornée pour la norme de* $L_E^1(\mathcal{F})$.

*Alors I atteint son minimum sur K.*

DÉMONSTRATION. – Posons $z = \inf_{u \in K} I(u)$. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite minimisante. On a $\lim_{n \to \infty} I(u_n) = z$ avec $u_n \in K$, $\forall n \geq 1$. Comme $I$ est inf-bornée, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est bornée dans $L_E^1(\mathcal{F})$ et il est clair que $(u_n)_{n\geq 1}$ satisfait aux conditions d'applications du Théorème 2.9. Donc il existe une suite $(B_k)_{k\geq 1}$ dans $\mathcal{F}$ et une suite $(u_{n_k})_{k\geq 1}$ extraite de $(u_n)_{n\geq 1}$ telle que $(1_{B_k} u_{n_k})_{k\geq 1}$ soit relativement faiblement compacte dans $L_E^1(\mathcal{F})$ et telle que $(1_{B_k^c} u_{n_k})_{k\geq 1}$ converge vers 0 p.p. Posons $v_k = 1_{B_k} u_{n_k}$ et $w_k = 1_{B_k^c} u_{n_k}$, $\forall k \geq 1$. Alors on a $u_{n_k} = v_k + w_k$, $\forall k \geq 1$. Quitte à extraire des suites convergentes, on peut supposer que $(v_k)_{k\geq 1}$ converge vers $u_\infty \in L_E^1(\mathcal{F})$ pour $\sigma(L^1, L^\infty)$ et qu'il existe $(\hat{v}_m)_{m\geq 1}$ avec $\hat{v}_m \in \operatorname{co}\{v_k: k \geq m\}$ telle que $(\hat{v}_m) \to u_\infty$ p.p. Pour chaque entier $m \geq 1$, il existe donc $(\lambda_k^m)_{m \leq k \leq \nu_m}$ avec $0 \leq \lambda_k^m \leq 1$, $\sum_{k=m}^{\nu_m} \lambda_k^m = 1$ tel que

$$\hat{v}_m = \sum_{k=m}^{\nu_m} \lambda_k^m v_k .$$

Posons $\hat{w}_m = \sum_{k=m}^{\nu_m} \lambda_k^m w_k$

$$\hat{u}_m = \sum_{k=m}^{\nu_m} \lambda_k^m u_{n_k}$$

$$\hat{z}_m = \sum_{k=m}^{\nu_m} \lambda_k^m I(u_{n_k}) .$$

On a $\hat{u}_m = \hat{v}_m + \hat{w}_m$ et par convexité de $I$,

$$(*) \qquad I(\hat{u}_m) \leq \hat{z}_m = \sum_{k=m}^{\nu_m} \lambda_k^m I(u_{n_k}) .$$

Il est clair que $\hat{w}_m \to 0$ p.p. lorsque $m \to \infty$. Donc $(\hat{u}_m)_{m\geq 1}$ converge vers $u_\infty$ p.p. car $(\hat{v}_m) \to u_\infty$ p.p. Or $(\hat{u}_m)_{m\geq 1}$ demeure dans $K$ car $K$ est convexe. Comme $K$ est fermé en mesure, on a $u_\infty \in K$. Lorsque $m \to \infty$, le second membre de $(*)$ tend vers $z$, par suite, on a $z \leq I(u_\infty) \leq \liminf_m I(\hat{u}_m) \leq z$ grâce à la semi continuité inférieure de $I$.

REMARQUES. – 1) Au cours de la démonstration, on a obtenu une conséquence intéressante du Théorème 2.9. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée dans $L_E^1(\mathcal{F})$ qui vérifie les conditions de l'énoncé du Théorème 2.9. Alors il exite une suite $(u_{n_k})_{k\geq 1}$ extraite de $(u_n)_{n\geq 1}$, une suite $(\hat{u}_m)_{m\geq 1}$ avec $\hat{u}_m \in \operatorname{co}\{u_{n_k}: k \geq m\}$, $u_\infty$ appartenant à $L_E^1(\mathcal{F})$ telles que $(\hat{u}_m)_{m\geq 1}$ converge p.p. vers $u_\infty$.

2) Récemment BALDER ([6]) a obtenu le résultat suivant. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré $\sigma$-fini et $H: \Omega \times E \to ]-\infty, +\infty]$ un intégrande inf-convexe compact pour une topologie $\tau$ intémédiaire entre la topologie de la norme et la topologie $\sigma(E, E')$. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ telle que $\sup_{n\geq 1} \int_\Omega^* H(\omega, u_n(\omega))\mu(d\omega) < +\infty$. Supposons en outre qu'il existe

des fonctions measurables $a: \Omega \to ]0, +\infty[$ et $b: \Omega \to \mathbb{R}$ telle que

$$H(\omega, x) \geqslant a(\omega)\|x\| + b(\omega)$$

puor tout $(\omega, x) \in \Omega \times E$. Alors il existe une suite $(u_{n_k})_{k \geqslant 1}$ extraite de $(u_n)_{n \geqslant 1}$ et une suite $(\hat{u}_m)_{m \geqslant 1}$ avec $\hat{u}_m \in \mathrm{co}\,\{u_{n_k}: k \geqslant m\}$, $u_\infty$ appartenant à $L^1_E(\mathcal{F})$ telle que $(\hat{u}_m)_{m \geqslant 1}$ converge p.p. vers $u_\infty$.

La démonstration de Balder consiste à se ramener au cas où l'intégrande $H$ vérifie $H(\omega, x) \geqslant \alpha\|x\| + \phi(\omega)$, $\forall (a, x) \in \Omega \times E$, où $\alpha$ est un nombre strictement positif et $\phi$ appartient à $L^1_{\mathbb{R}}(\mathcal{F})$, et est basée sur une technique entièrement différente qui repose sur le Théorème de Komlos ([46]) et les extensions en dimension infinie de ce Théorème ([8], [10]). Je renvoie le lecteur au preprint de BALDER ([13]) pour les détails.

3) Le Théorème 3.1 est connu dans le cas où $E$ est réflexif, cf. ([9], [16], [17], [32], [33], [34], [47], [55]). En ce qui concerne les problèmes de minimisation sur les ensembles décomposables cf. ([13], [22], [37], [56]).

Maintenant, on présente des applications directes des Théorèmes 2.6, 2.7 et 2.9 à la décomposition et à la convergence des martingales à la limite ([54]). Dans cette veine, de nombreaux résultats de décomposition et de convergence ont été développés dans CASTAING-EZZAKI ([27]).

Soit $(\mathcal{F}_n)_{n \geqslant 1}$ une suite croissante de sous $\sigma$-algèbres de $\mathcal{F}$ avec $\sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n\right) = \mathcal{F}$. Une suite $(X_n)_{n \geqslant 1}$ dans $L^1_E(\mathcal{F})$ est une martingale à la limite (mil) au sens de TALAGRAND ([54]) si, $X_n \in L^1_E(\mathcal{F}_n)$, $\forall n \geqslant 1$, et si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p$ tel que, pour tout $n \geqslant p$ on ait

$$P\left[\sup_{p \leqslant q \leqslant n} |X_q - E^{\mathcal{F}_q} X_n| > \varepsilon\right] < \varepsilon,$$

où $E^{\mathcal{F}_q}(X_n)$ est l'espérance conditionnelle de $X_n$. Cette définition s'étend au cas $\mathcal{L}^1_{\mathrm{cfk}(E)}(\mathcal{F})$ lorsque $E'_b$ est *séparable* comme suit.

Soit $X \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{cfk}(E)}(\mathcal{F})$. Alors $E^{\mathcal{F}_q}(X)$ est *un élément de* $\mathcal{L}^1_{\mathrm{cfk}(E)}(\mathcal{F}_q)$ et est défini par

$$S^1_{E^{\mathcal{F}_q}(X)} = \{E^{\mathcal{F}_q}(f): f \in S^1_X(\mathcal{F})\}$$

où $S^1_{E^{\mathcal{F}_q}(X)}$ est l'ensemble des sélections $\mathcal{F}_q$-mesurables et intégrables de $E^{\mathcal{F}_q}(X)$ et $S^1_X(\mathcal{F})$ est l'ensemble des sélections $\mathcal{F}$-measurables et intégrables de $X$, cf. VALADIER ([58]). Pour tout $x' \in E'$, on a

$$\delta^*(x', E^{\mathcal{F}_q}(X)) = E^{\mathcal{F}_q}(\delta^*(x', X)).$$

Une suite $(X_n)_{n \geqslant 1}$ dans $\mathcal{L}^1_{\mathrm{cfk}(E)}(\mathcal{F})$ est un *mil* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p$

tel que pour tout $n \geq p$, on ait

$$P\left[\sup_{p \leq q \leq n} h(X_q, E^{\mathcal{F}_q}(X_n)) > \varepsilon\right] < \varepsilon$$

où $h$ désigne la distance de Hausdorff sur l'ensemble $\mathrm{cfk}(E)$.

Le théorème suivant est un résultat de décomposition et de convergence des mils bornés dans $L^1_E(\mathcal{F})$.

THÉORÈME 3.2. – *Soit* $\varphi: \Omega \times E \to [0, +\infty]$ *un intégrande* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(E)$*-mesurable tel que* $\varphi(\omega, 0) = 0$, $\forall \omega \in \Omega$ *et tel que, pour* $\rho \in \mathbb{R}^+$, $r \in \mathbb{R}^+$, $\omega \in \Omega$, *l'ensemble* $\{x \in \rho B: \varphi(\omega, x) \leq r\}$ *soit convexe faiblement compact. Soit* $(X_n)_{n \geq 1}$ *un mil borné dans* $L^1_E(\mathcal{F})$ *tel que*

$$\sup_{n \geq 1} \int_\Omega \varphi(\omega, X_n(\omega))\, P(d\omega) < +\infty\,.$$

*Alors il existe* $X_\infty$ *dans* $L^1_E(\mathcal{F})$ *tel que* $(X_n - E^{\mathcal{F}_n} X_\infty)_{n \geq 1}$ *converge vers* 0 p.p.

DÉMONSTRATION. – Comme pour tout $x' \in E'$, $(\langle x', X_n\rangle)_{n \geq 1}$ est un mil borné dans $L^1_{\mathbb{R}}(\mathcal{F})$, $(\langle x', X_n\rangle)_{n \geq 1}$ converge p.p. vers une fonction intégrable $\varphi_{x'}$ d'après TALAGRAND ([54], Theor. 4, p. 1193). En vertu du Théorème 2.9, il existe une suite $(X_{n_k})$ extraite de $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(B_k)_{k \geq 1}$ dans $\mathcal{F}$ tel que $(1_{B_k} X_{n_k})$ converge pour $\sigma(L^1, L^\infty)$ vers $X_\infty \in L^1_E(\mathcal{F})$ et $(1_{B_k^c} X_{n_k})$ converge vers 0 p.p. Par suite, $(X_n)_{n \geq 1}$ converge vers $X_\infty$ scalairement p.p. Soit $E^{\mathcal{F}_n}(X_\infty)$ l'espérance conditionnelle de $X_\infty$. Alors $(X_n - E^{\mathcal{F}_n}(X_\infty))_{n \geq 1}$ est un mil borné dans $L^1_E(\mathcal{F})$ qui converge scalairement p.p. vers zéro. Donc $(X_n - E^{\mathcal{F}_n}(X_\infty))_{n \geq 1}$ converge vers zéro p.p. pour la norme de $E$ d'après TALAGRAND ([54], Theor. 6, p. 1193).

CONSÉQUENCE. – $(X_n)_{n \geq 1}$ *converge vers* $X_\infty$ p.p. *pour la norme de* $E$.

REMARQUE. – Un énoncé analogue à celui du Théorème 3.2 pour le cas des martingales avec $\varphi(\omega, \cdot)$ inf-compacte a été obtenu par BALDER ([13]).

Voici une version multivoque du théorème précédent.

THÉORÈME 3.3. – *Supposons* $E'_b$ *séparable et* $E$ *ayant la propriété de Radon-Nikodym. Soit* $(X_n)_{n \geq 1}$ *un mil borné dans* $\mathcal{L}^1_{\mathrm{cfk}(E)}(\mathcal{F})$ *tel que* $\left\{\int_A X_n\, dP: n \geq 1\right\}$ *soit relativement* $\sigma(E, E')$ *compact. Alors il existe* $X_\infty$ *dans* $\mathcal{L}^1_{\mathrm{cfk}(E)}(\mathcal{F})$ *tel que* $\lim_n h(X_n, E^{\mathcal{F}_n} X_\infty) = 0$ p.p.

DÉMONSTRATION. – Pour tout $x' \in B'$, $(\delta^*(x', X_n))_{n \geq 1}$ est un mil borné dans $L^1_{\mathbb{R}}(\mathcal{F})$. D'après TALAGRAND ([54], Theor. 4, p. 1193), $(\delta^*(x', X_n))_{n \geq 1}$ converge p.p. vers une fonction intégrable $\varphi_{x'}$.

En vertu du Théorème 2.7 et de sa remarque, il existe $X_\infty \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{cfk}(E)}(\mathcal{F})$ tel que $(X_n) \to X_\infty$ scalairement p.p., c'est-à-dire,

$$\lim_n \delta^*(x', X_n) = \delta^*(x', X_\infty) \text{ p.p.} \tag{1}$$

i.e. excepté un négligeable $N_{x'}(x' \in B')$.

D'après CASTAING-EZZAKI ([27], Appendice p. 21) la relation (1) implique

$$\lim_{n \to \infty} h(X_n, E^{\mathcal{F}_n} X_\infty) = 0 \text{ p.p.} \tag{2}$$

REMARQUES. – 1) La démonstration de (1) $\Rightarrow$ (2) n'est pas triviale. Il s'agit là d'une version multivoque d'un résultat de TALAGRAND ([54], Theor. 6, p. 1193).

2) Le Théorème 3.2 et 3.3 admettent de nombreuses variantes cf. CASTAING-EZZAKI ([27]).

3) La relation $\lim_{n\to\infty} h(X_n, E^{\mathcal{F}_n} X_\infty) = 0$ p.p. implique la convergence de $(X_n)_{n \geq 1}$ vers $X_\infty$ au sens de Mosco cf. CASTAING-EZZAKI ([27]).

4) La convergence faible des Amarts multivoques ([24]) et des Pramarts multivoques ([4]) est conséquence directe du Théorème 2.7.

Passons maintenant au lemme de Fatou multivoque.

THÉORÈME 3.4. – *On suppose $E'_b$ séparable et $E$ ayant la propriété de Radon-Nikodym. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}}$ une suite d'applications scalairement mesurables de $\Omega$ dans la boule unité $B'$ de $E'$ telle que $(|v_n - v_\infty|)_{n \geq 1}$ converge vers 0 p.p.. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite bornée dans $\mathcal{L}^1_{\mathrm{cfk}(E)}(\mathcal{F})$ telle que $\left\{\int_A X_n\, dP \colon n \geq 1\right\}$ soit relativement $\sigma(E, E')$ compact pour tout $A$ fixé dans $\mathcal{F}$. On suppose:*

(i) *$(\delta^*(v_n, X_n)^-)_{n \geq 1}$ est uniformément intégrable.*

(ii) *Il existe une multifonction mesurable $L \colon \Omega \to \mathcal{L}(E)$ telle que*

$$X_n(\omega) \subset L(\omega)$$

*pour tout $n \geq 1$ et tout $\omega \in \Omega$.*

*Alors il existe $X_\infty \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{cfk}(E)}(\mathcal{F})$ telle que*

(*a*) $\liminf_n \int \delta^*(v_n, X_n) \geq \int \delta^*(v_\infty, X_\infty)$

(*b*) $X_\infty(\omega) \in \overline{\mathrm{co}}\, Ls\{X_n(\omega)\}$

*où* $Ls\{X_n(\omega)\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\{X_n(\omega) \colon n \geq k\}}^\sigma$ *et* $\overline{\,\cdot\,}^\sigma$ *désigne l'adhérence pour* $\sigma(E, E')$.

DÉMONSTRATION. – (*a*) La suite $(X_n)_{n \geq 1}$ satisfait aux conditions d'applications du Théorème 2.6. Il existe une suite croissante $(A_m)_{m \geq 1}$ dans $\mathcal{F}$ avec $\lim_{n \to \infty} P(A_m) = 1$, une suite $(X_{\gamma(n)})_{n \geq 1}$ extraite de $(X_n)_{n \geq 1}$, $X_\infty \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{cfk}(E)}(\mathcal{F})$ tels que, pour tout $m \geq 1$, tout

$A \in A_m \cap \mathcal{F}$, tout $x' \in E'$, on ait

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \delta^*(x', X_{\gamma(n)}) = \int_A \delta^*(x', X_\infty).$$

Ceci étant, soit $\varepsilon > 0$, choisissons un entier $N_\varepsilon > 0$ tel que

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{A_{N_\varepsilon}} \delta^*(v_\infty, X_\infty) \geqslant \int_\Omega \delta^*(v_\infty, X_\infty) - \varepsilon, \\ \displaystyle\limsup_{n\to\infty} \int_{A^c_{N_\varepsilon}} \delta^*(v_n, X_n)^- \leqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Pour tout $n \geqslant 1$, tout $\omega \in \Omega$, on a,

$$|\delta^*(v_n(\omega), X_n(\omega)) - \delta^*(v_\infty(\omega), X_n(\omega))| \leqslant \|v_n(\omega) - v_\infty(\omega)\| \, |X_n|(\omega).$$

Comme la restriction de $(X_{\gamma(n)})_{n\geqslant 1}$ à $A_{N_\varepsilon}$ est uniformément intégrable et comme $|v_n - v_\infty| \to 0$ p.p., on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_{N_\varepsilon}} |v_n - v_\infty| \, |X_{\gamma(n)}| = 0$$

car $(|v_n - v_\infty|)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 uniformément sur toute partie uniformément intégrable de $L^1_{\mathbb{R}}(\mathcal{F})$ (cf. CASTAING ([21], Theor. 1) pour un résultat plus général. D'où

$$\lim_{n\to\infty} \left[ \int_{A_{N_\varepsilon}} \delta^*(v_n, X_{\gamma(n)}) - \int_{A_{N_\varepsilon}} \delta^*(v_\infty, X_{\gamma(n)}) \right] = 0.$$

Soit $a \equiv \liminf_n \int_\Omega \delta^*(v_n, X_n)$. On peut supposer que $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \delta^*(v_n, X_n) = a \in \mathbb{R}$. D'où

$$a = \lim_{n\to\infty} \left[ \int_{A_{N_\varepsilon}} \delta^*(v_n, X_{\gamma(n)}) + \int_{A^c_{N_\varepsilon}} \delta^*(v_n, X_{\gamma(n)}) \right] \geqslant$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_{N_\varepsilon}} \delta^*(v_n, X_{\gamma(n)}) - \limsup_{n\to\infty} \int_{A^c_{N_\varepsilon}} \delta^*(v_n, X_{\gamma(n)})^- \geqslant \lim_n \int_{A_{N_\varepsilon}} \delta^*(v_n, X_{\gamma(n)}) - \varepsilon.$$

Or la suite $(1_{A_{N_\varepsilon}} X_{\gamma(n)})_{n\geqslant 1}$ satisfait aux conditions d'applications du théorème de compacité faible de Castaing-Clauzure (Theor. 2.3). Il existe un filtre $\mathcal{U}$ plus fin que le filtre de Fréchet et $\Sigma_\infty \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{cfk}(E)}(\mathcal{F})(A_{N_\varepsilon} \cap \mathcal{F})$ tel que, pour tout $u \in L^\infty_{E'_b}(A_{N_\varepsilon} \cap \mathcal{F})$, on ait,

$$\lim_{\mathcal{U}} \int_{A_{N_\varepsilon}} \delta^*(u, X_{\gamma(n)}) = \int_{A_{N_\varepsilon}} \delta^*(u, \Sigma_\infty).$$

On a $\Sigma_\infty(\omega) = X_\infty(\omega)$ p.p. sur $A_{N_\varepsilon}$ car, pour tout $A \in A_{N_\varepsilon} \cap \mathcal{F}$, tout $x' \in E'$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \delta^*(x', X_{\gamma(n)}) = \int_A \delta^*(x', X_\infty).$$

D'où

$$a \geq \lim_{n\to\infty} \int_{A_{N_\varepsilon}} \delta^*(v_n, X_{\gamma(n)}) - \varepsilon = \lim_{n\to\infty} \int_{A_{N_\varepsilon}} \delta^*(v_\infty, X_{\gamma(n)}) - \varepsilon =$$

$$= \lim_{\mathcal{U}} \int_{A_{N_\varepsilon}} \delta^*(v_\infty, X_{\gamma(n)}) - \varepsilon = \int_{A_{N_\varepsilon}} \delta^*(v_\infty, X_\infty) - \varepsilon \geq \int_\Omega \delta^*(v_\infty, X_\infty) - 2\varepsilon.$$

Ceci prouve le premier point de l'énoncé. Observons que la condition (ii) n'intervient pas dans la démonstration de $(a)$.

$(b)$ Le point $(b)$ résulte de CASTAING-CLAUZURE ([26]). Pour la commodité du lecteur on en donne la démonstration. Posons $\Phi(\omega) = \overline{\text{co}}\, Ls\{X_{\gamma(n)}(\omega)\}$, $\forall \omega \in \Omega$. Comme $X_n(\omega) \subset L(\omega)$, $\forall n \geq 1$, $\forall \omega \in \Omega$, la multifonction $\Phi$ est $\mathcal{F}$-mesurable et à valeurs LCSD en vertu d'un résultat de HESS ([38], Prop. 6.39). Pour vérifier l'inclusion $X_\infty(\omega) \subset \Phi(\omega)$ p.p., il suffit, en vertu, d'un résultat de CASTAING-VALADIER ([28], Lemme III.34) d'utiliser les fonctions d'appui. De façon précise, si l'inclusion n'avait pas lieu, il existerait $x' \in E'$, $A \in \mathcal{F}$ avec $P(A) > 0$ tels que l'on ait pour tout $\omega \in A$,

$$\delta^*(x', X_\infty(\omega)) > \delta^*(x', \Phi(\omega)).$$

Pour chaque $X_{\gamma(n)}$, il existe une section mesurable $\sigma_{\gamma(n)}$ telle que $\langle \sigma_{\gamma(n)}, x' \rangle = \delta^*(x', X_{\gamma(n)}(\omega))$ pour tout $\omega \in \Omega$. Appliquons le Théorème 2.6 à la suite $(\sigma_{\gamma(n)})_{n\geq 1}$. Il existe une suite décroissante $(D_m)_{m\geq 1}$ dans $\mathcal{F}$ telle que $\lim_{m\to\infty} P(D_m) = 0$, une suite $(\sigma_{\delta(n)})_{n\geq 1}$ extraite de $(\sigma_{\gamma(n)})_{n\geq 1}$ et $\sigma_\infty$ dans $L^1_E(\mathcal{F})$ telle que pour tout $m \geq 1$, $1_{D^c_m}\sigma_{\delta(n)}$ converge vers $1_{D^c_m}\sigma_\infty$ pour $\sigma(L^1_E(D^c_m \cap \mathcal{F}), L^\infty_{E'_b}(D^c_m \cap \mathcal{F}))$. Il résulte du Théorème 2.1 et de don Corollaire 2.2, qu'on a $\sigma_\infty(\omega) \in \overline{\text{co}}\, Ls\{X_{\gamma(n)}(\omega)\}$ p.p., car $\sigma_{\gamma(n)}(\omega) \in X_{\gamma(n)}(\omega) \subset L(\omega)$ pour tout $n \geq 1$ et tout $\omega \in \Omega$. Posons $B_m = A^c_m$ et $C_m = B_m \cup D_m$, pour $m \geq 1$. Alors on a $\lim_{m\to\infty} P(C_m) = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega\setminus C_m} \sigma_{\delta(n)} = \int_{\Omega\setminus C_m} \sigma_\infty$, $\forall m \geq 1$. De plus on a $0 < P(A) = \lim_{m\to\infty} P((\Omega\setminus C_m)\cap A)$. Donc il existe $C_p$ avec $P((\Omega\setminus C_p)\cap A) > 0$. Or $A \cap (\Omega\setminus C_p) \subset \Omega\setminus B_p = A_p$. D'où

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A\cap(\Omega\setminus C_p)} \delta^*(x', X_{\gamma(n)}) = \int_{A\cap(\Omega\setminus C_p)} \delta^*(x', X_\infty)$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A\cap(\Omega\setminus C_p)} \langle x', \sigma_{\gamma(n)} \rangle = \int_{A\cap(\Omega\setminus C_p)} \langle x', \sigma_\infty \rangle$$

car $\Omega\setminus C_p \subset \Omega\setminus D_p$. Par suite, on a

$$\int_{A\cap(\Omega\setminus C_p)} \langle x', \sigma_\infty\rangle = \int_{A\cap(\Omega\setminus C_p)} \delta^*(x', X_\infty).$$

Comme $\sigma_\infty(\omega) \in \overline{\text{co}}\, Ls\{X_{\gamma(n)}(\omega)\} \subset \overline{\text{co}}\, Ls\{X_{\gamma(n)}(\omega)\}$ p.p., on obtient

$$\int_{A\cap(\Omega\setminus C_p)} \delta^*(x', X_\infty) \leqslant \int_{A\cap(\Omega\setminus C_p)} \delta^*(x', \overline{\text{co}}\, Ls\{X_{\gamma(n)}(\cdot)\})$$

ceci est en contradiction avec l'hypothèse faite qui implique

$$\int_{A\cap(\Omega\setminus C_p)} \delta^*(x', X_\infty) > \int_{A\cap(\Omega\setminus C_p)} \delta^*(x', \overline{\text{co}}\, Ls\{X_{\gamma(n)}(\cdot)\}).$$

REMARQUE. – En combinant les techniques de troncature et de compacité du Théorème 2.1, et de son corollaire ainsi que celles de la démonstration du Théorème 3.4, on a la variante suivante.

THÉORÈME 3.5. – *Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*\cup\{\infty\}}$ une suite d'applications scalairement mesurables de $\Omega$ dans la boule unité $B'$ de $E'$ telle que $(|v_n - v_\infty|)_{n\geqslant 1}$ converge vers* 0 p.p. *Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite bornée dans $L^1_E(\mathcal{F})$ qui vérifie la condition d'approximation suivante. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une multifonction mesurable $L_\varepsilon$ de $\Omega$ à valeurs dans $\mathcal{R}(E)$ avec $0 \in L_\omega(\omega)$, $\forall\omega\in\Omega$ telle que*

$$\forall n \geqslant 1, \qquad P[\omega\in\Omega\colon u_n(\omega) \notin L_\varepsilon(\omega)] \leqslant \varepsilon.$$

*On suppose que $((\langle v_n, u_n\rangle)^-)_{n\geqslant 1}$ soit uniformément intégrable. Alors il existe $u_\infty \in L^1_E(\mathcal{F})$ telle que*

$$\begin{cases} \liminf\limits_n \int \langle v_n, u_n\rangle \geqslant \int \langle v_\infty, u_\infty\rangle, \\ u_\infty(\omega) \in \overline{\text{co}}\, Ls\{u_n(\omega)\} \text{ p.p.} \end{cases}$$

Considérons maintenant un espace lusinien métrisable $S$. Soit $\mathcal{M}^1_+(S)$ l'ensemble des mesures de probabilité de Radon sur $S$, muni de la topologie étroite. Alors $\mathcal{M}^1_+(S)$ est un espace lusinien métrisable. Désignons par $R(\Omega, \mathcal{M}^1_+(S))$ l'ensemble des applications mesurables de $\Omega$ dans $\mathcal{M}^1_+(S)$ et par $J_{\text{CAR}}(\Omega\times S)$ l'ensemble des intégrandes de Carathéodory intégrables sur $\Omega\times S$. On a le résultat de compacité dans $\mathcal{M}^1_+(S)$ suivant. Cf. BALDER ([7]).

THÉORÈME 3.6. – *Soit $\Gamma$ une multi-fonction mesurable de $\Omega$ à valeurs fermées non vides de $S$. Soit $\mathcal{H}$ un sous ensemble de $R(\Omega, \mathcal{M}^1_+(S))$ qui vérifie les conditions suivantes:*

(i) *Pour tout* $\lambda \in \mathcal{H}$, *on a*

$$\lambda_\omega(\Gamma(\omega)) = 1$$

*pour presque tout* $\omega \in \Omega$.

(ii) *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une multifonction mesurable de* $\Omega$ *à valeurs compactes non vides de* $S$, $K_\varepsilon$, *telle que*

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{H}} \int_\Omega \lambda_\omega(S \setminus K_\varepsilon(\omega))\, P(d\omega) \leq \varepsilon .$$

*Alors* $\mathcal{H}$ *est relativement séquentiellement* $\sigma(\mathcal{H}, J_{\mathrm{CAR}}(\Omega \times S))$ *compacte, c'est-à-dire, pour toute suite* $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ *dans* $\mathcal{H}$, *il existe une sous suite* $(\lambda_{n_k})_{k \geq 1}$ *de* $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ *et un élément* $\lambda \in R(\Omega, \mathcal{M}^1_+(S))$ *telle que*

$$\lambda_\omega(\Gamma(\omega)) = 1$$

*pour presque tout* $\omega \in \Omega$, *et telle que pour tout* $f \in J_{\mathrm{CAR}}(\Omega \times S)$, *on ait*

$$\lim_{k \to \infty} \langle \lambda_{n_k}, f \rangle = \langle \lambda, f \rangle .$$

On dira alors que $(\lambda_{n_k})_{k \geq 1}$ converge faiblement vers $\lambda$ dans $R(\Omega, \mathcal{M}^1_+(S))$. Le résultat suivant permet de comparer les modes de convergence considérés précédemment.

THÉORÈME 3.7. – *Soit* $E$ *un espace de Banach réflexif séparable,* $(u_n)_{n \geq 1}$ *une suite bornée dans* $L^1_E(\mathcal{F})$ *telle que la suite* $(\varepsilon_{u_n})_{n \geq 1}$ *vérifie la condition de Prokhorov* (ii) *du Théorème* 3.6, *et telle que pour tout* $x' \in E'$, $(\langle x', u_n \rangle)_{n \geq 1}$ *converge* p.p. *vers une fonction intégrable* $\varphi_{x'}$. *Alors il existe une suite croissante* $(A_m)_{m \geq 1}$ *dans* $\mathcal{F}$ *avec* $\lim_{m \to \infty} P(A_m) = 1$, *une suite* $(u_{\alpha(m)})_{m \geq 1}$ *extraite de* $(u_n)_{n \geq 1}$, $u$ *appartenant à* $L^1_E(\mathcal{F})$, $\lambda$ *appartenant à* $R(\Omega, \mathcal{M}^1_+(E))$, $l$ *appartenant à* $(L^\infty_{E'})'$ *telle que*:

(1) $1_{A_m} u_{\alpha(m)} \to u$ pour $\sigma(L^1_E, L^\infty_{E'})$,

(2) $\lim_{n \to \infty} \langle x', u_n(\omega) \rangle = \langle x', u(\omega) \rangle = \varphi_{x'}(\omega)$ *pour presque tout* $\omega \in \Omega$ *et tout* $x' \in E'$, $n \to \infty$,

(3) $(\varepsilon_{u_{\alpha(m)}})_{m \geq 1}$ *converge faiblement vers* $\lambda$ *dans* $R(\Omega, \mathcal{M}^1_+(E))$,

(4) $(\varepsilon_{u_{\alpha(m)}})_{m \geq 1}$ *converge dans le bidual faible* $(L^\infty_{E'})'_\sigma$ *de* $L^1_E$ *vers* $l \in (L^\infty_{E'})'_\sigma$ *suivant un filtre* $\mathcal{U}$ *plus fin que le filtre de Fréchet, de sorte que, si* $b_{\lambda_\omega}$ *désigne le barycentre de* $\lambda_\omega$ $(\omega \in \Omega)$, $v$ *la densité de la partie absolument continue* $l_a$ *de* $l$ *dans la décomposition* $l = l_a + l_s$, *on a*

$$u(\omega) = b_{\lambda_\omega} = v(\omega) \text{ p.p.}$$

DÉMONSTRATION. – Les points (1), (2), (3), (4) résultent du Corollaire 2.5, des Théorèmes 2.7, 3.6, 2.8, respectivement. En considérant la restriction de $(u_{\alpha(m)})_{m \geq 1}$ à chacun des $A_p$ $(p \geqslant 1)$, on a

$$b_{\lambda_\omega} = u(\omega) \text{ p.p. sur } A_p.$$

cf. BALDER ([7]), donc

$$b_{\lambda_\omega} = u(\omega) \text{ p.p. sur } \Omega$$

et on a, en vertu du Théorème 2.8

$$u(\omega) = v(\omega) \text{ p.p. sur } \Omega.$$

Pour terminer signalons un exemple qui présente une analogie avec le Biting lemma.

EXAMPLE 3.8. – *Soit $T$ un espace compact métrisable muni d'une probabilité de Radon $\mu$. Soit $H$ un ensemble de fonctions $\mu$-mesurables définies sur $T$ à valeurs dans un espace de Banach séparable $E$. Supposons que $H$ soit compact métrisable pour la convergence simple. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_\varepsilon \subset T$ avec $\mu(T \setminus K_\varepsilon)$ tel que $H|_{K_\varepsilon}$ soit compact dans l'espace de Banach $C_E(K_\varepsilon)$ des applications continues de $K_\varepsilon$ dans $E$ muni de la convergence uniforme.*

DÉMOSTRATIONS. – Ce résultat et conséquence facile du théorème de SCORZA-DRAGONI ([18], Theor. 3.1; [19], Theor. 1; [20], Exposé no. 6). En effet, posons, pour tout $u \in H$, tout $t \in T$, $\varphi(t, u) = u(t)$. Il est clair que $\varphi$ est une application de $T \times H$ dans $E$ telle que $\varphi(\cdot, u)$ soit $\mu$-mesurable sur $T$ pour tout $u \in H$ et $\varphi(t, \cdot)$ soit continue sur $H$; $H$ étant muni de la convergence simple. Comme $H$ est *compact métrisable*, on peut appliquer le théorème de Scorza-Dragoni à $\varphi$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_\varepsilon$ dans $T$ tel que $\mu(T \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ et tel que $\varphi|_{K_\varepsilon \times H}$ soit continue. Il est classique de voir que $H|_{K_\varepsilon}$ est équicontinue, et comme l'ensemble

$$\{u(t) \colon u \in H, t \in K_\varepsilon\} = \varphi(K_\varepsilon \times H)$$

est compact dans $E$, le théorème d'Ascoli permet de conclure.

*Achnowledgements.* Je remercie Mademoiselle CLAUZURE (Montpellier) pour sa participation à la rédaction de ce papier.

Je remercie E. BALDER pour des remarques très pertinentes sur la première version de cet article.

Je remercie le referee pour des critiques constructives de cet article.

**Appendice.**

Pour la commodité du lecteur on reproduit ici un resultat de compacité séquentielle dû à CASTAING-CLAUZURE [22] dans $\mathcal{L}^1_{\mathrm{cfk}(E)}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ où $\mu$ est une mesure positive finie.

THÉORÈME. – *On suppose $E'_b$ séparable et $E$ ayant la propriété de Radon Nikodym. Soit $(\Gamma_n)_{n\geqslant 0}$ une suite uniformément intégrable dans $\mathcal{L}^1_{\mathrm{cfk}(E)}$ telle que pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \int_A \Gamma_n d\mu$ soit relativement faiblement compacte. Alors il existe:*

(1) *une suite extraite $(\Gamma_{\alpha(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $A \in \mathcal{A}$, tout $x' \in E'$, la suite $\int_A \delta^*(x', \Gamma_{\alpha(n)}(\omega))\mu(d\omega)$ converge dans $\mathbb{R}$,*

(2) *un filtre $\mathcal{U}$ plus fin que le filtre de Fréchet et un élément $\Gamma_\infty \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{cfk}(E)}$ tel que*

$$\forall u \in L^\infty_{E'_b}, \lim_{\mathcal{U}} \int_\Omega \delta^*(u(\omega), \Gamma_{\alpha(n)}(\omega))\mu(d\omega) = \int_\Omega \delta^*(u(\omega), \Gamma_\infty(\omega))\mu(d\omega)$$

(3) *En conséquence, on a*

$$\liminf_{\mathcal{U}} \int |\Gamma_{\alpha(n)}|\, d\mu \geqslant \int |\Gamma_\infty|\, d\mu)$$

*et, pour tout $A \in \mathcal{F}$, tout $x' \in E'$,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \delta^*(x', \Gamma_{\alpha(n)}(\omega))\mu(d\omega) = \int_A \delta^*(x', \Gamma_\infty(\omega))\mu(d\omega).$$

DÉMONSTRATION Nous allons détailler le premier point de l'énoncé, tandis que les points (2) et (3) sont démontrés dans CASTAING-CLAUZURE ([22], Theor. 4.1).

On peut supposer que, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \int_A \Gamma_n d\mu$ soit contenu dans un convexe $\sigma(E, E')$ compact (métrisable) $K_A$ de $E$. Soit $D'$ une suite dénombrable dense dans $E'$ pour la topologie de Mackey $\tau(E', E)$.

Observons d'abord la remarque suivante qui est due à HESS ([24], Lemme 3.3). Si $K$ est un convexe $\sigma(E, E')$ compact (métrisable) de $E$, l'ensemble

$$\{C \in \mathrm{cfk}(E) \colon C \subset K\}$$

est compact pour la topologie de Hausdorff associée à la topologie faible $\sigma(E, E')$, laquelle topologie correspond à celle de la convergence simple des fonctions d'appui sur $D'$. Ceci posé, on procède de façon standard comme suit. Rappelons que chacune des $\Gamma_n$ est $\mathcal{A}$-mesurable, ce qui équivaut à dire que chacune des *applications* $\Gamma_n$ de $\Omega$ dans l'espace $\mathcal{F}(E)$ des fermés de $E$ est $\mathcal{A}$-mesurable lorsque $\mathcal{F}(E)$ est umni de la tribu d'Effros. Soit $\mathcal{B} := \sigma(A_n\,;\, n \in \mathbb{N})$ la $\sigma$-algèbre dénombrablement engendrée par la suite des applications $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\Omega$ dans $\mathcal{F}(E)$. Par un procédé diagonal, il existe une suite $(\Gamma_{\alpha(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $\left(\int_{A_n} \Gamma_{\alpha(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ converge dans l'ensemble compact

$$\{C \in \mathrm{cfk}(E) \colon C \subset K_{A_n}\}$$

pour la topologie de Hausdorff associée à la topologie $\sigma(E, E')$; chacune des $\int_{A_n} \Gamma_{\alpha(i)}$,

$i \in \mathbb{N}$, étant convexe $\sigma(E, E')$ compacte cf. CASTAING-CLAUZURE ([22], Theor. 3.1., ou Theor. 4.1) ou CASTAING ([24], Theor. 4.1). Par suite, on a, en vertu de la remarque cidessus mentionnée,

$$\forall x' \in D', \quad \lim_{i \to \infty} \delta^*\left(x', \int \chi_{A_n} \Gamma_{\alpha(i)}\, d\mu\right) = \lim_{i \to \infty} \int \delta^*(x', \chi_{A_n} \Gamma_{\alpha(i)})\, d\mu = \delta^*(x', C_n)$$

où $C_n$ est un convexe $\sigma(E, E')$ compact contenu dans $K_{A_n}$. Comme $D'$ est dense pour $\tau(E', E)$, on en déduit (cf. CASTAING [24], Lemme 3.2) que, pour tout $x' \in E'$, on a

$$\lim_{i \to \infty} \delta^*\left(x', \int \chi_{A_n} \Gamma_{\alpha(i)}\, d\mu\right) = \delta^*(x', C_n).$$

Montrons que, pour tout $A \in \mathcal{B}$ et tout $x' \in E'$, $\lim_{i \to \infty} \delta^*(x', \int \chi_A \Gamma_{\alpha(i)}\, d\mu)$ existe dans $\mathbb{R}$. En effet, soit $x' \in E'$ *avec* $\|x'\| \leqslant 1$. *Soit* $\varepsilon > 0$. Il existe $A_n$ tel que $\sup_{i \in \mathbb{N}} \int_{A \Delta A_n} |\Gamma_{\alpha(i)}|\, d\mu < \varepsilon$ car la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans $\mathcal{B}$ et la suite $(|\Gamma_i|)_{i \in \mathbb{N}}$ est uniformément intégrable dans $L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Par suite, on a, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\left| \delta^*\left(x', \int_A \Gamma_{\alpha(i)}\, d\mu\right) - \delta^*\left(x', \int_{A_n} \Gamma_{\alpha(i)}\, d\mu\right) \right| \leqslant \int_{A \Delta A_n} |\delta^*(x', \Gamma_{\alpha(i)})|\, d\mu \leqslant \int_{A \Delta A_n} |\Gamma_{\alpha(i)}|\, d\mu < \varepsilon$$

Donc $\lim_{i \to \infty} \delta^*(x', \int \chi_A \Gamma_{\alpha(i)}\, d\mu)$ existe pour tout $x' \in E'$ et tout $A \in \mathcal{B}$. Par suite, pour toute fonction $\geqslant 0$, étagée $\mathcal{B}$-mesurable, $h$, et pour tout $x' \in E'$, $\lim_{i \to \infty} \delta^*(x', \int h \Gamma_{\alpha(i)}\, d\mu)$ existe dans $\mathbb{R}$. On en déduit, que pour toute fonction positive, $\mathcal{B}$-mesurable et bornée, $h$, et pour tout $x' \in E'$,

$$\lim_{i \to \infty} \delta^*\left(x', \int h \Gamma_{\alpha(i)}\, d\mu\right)$$

existe dans $\mathbb{R}$, car $h$ est limite uniforme d'une suite de fonctions $\geqslant 0$, étagée $\mathcal{B}$-mesurables. Soit maintenant $h \geqslant 0$, $\mathcal{F}$- mesurable et bornée. Soit $E^{\mathcal{B}}(h\Gamma_{\alpha(i)})$ l'espérance conditionnelle de $h\Gamma_{\alpha(i)}$. On a, pour tout $B \in \mathbb{B}$,

$$\int_B E^{\mathcal{B}}(h)\, \Gamma_{\alpha(i)}\, d\mu = \int_B E^{\mathcal{B}}(h\Gamma_{\alpha(i)})\, d\mu = \int_B h\Gamma_{\alpha(i)}\, d\mu.$$

Donc, pour tout $x' \in E'$,

$$\lim_{i \to \infty} \delta^*\left(x', \int_\Omega E^{\mathcal{B}}(h)\, \Gamma_{\alpha(i)} \Gamma_{\alpha(i)}\, d\mu\right) = \lim_{i \to \infty} \delta^*\left(x', \int_\Omega h\Gamma_{\alpha(i)}\, d\mu\right)$$

existe dans $\mathbb{R}$.

Ceci termine la démonstration du point (1) qui est valable pour tout espace de Banach séparable $E$.

Passons maintenant à la démonstration des points (2) et (3). Pour la commodité du lecteur, nous allons détailler les arguments utilisés dans le Théorème 4.1 de CASTAING-CLAUZURE ([22]). En effet, posons

$$l_{\Gamma_{\alpha(i)}}(u) = \int_{\Omega} \delta^* (u(\omega), \Gamma_{\alpha(i)})\, \mu(d\omega)$$

pour $i \in \mathbb{N}$, $u \in L^{\infty}_{E'_b}$. Alors $(l_{\Gamma_{\alpha(i)}})_{i\in\mathbb{N}}$ est relativement compact dans l'espace des applications sous linèaires continues de $L^{\infty}_{E'_b}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la convergence simple car chacune des $l_{\Gamma_{\alpha(i)}}$ est sous linéaire, continue (pour la norme $\| \|_{\infty}$), et l'on a

$$|l_{\Gamma_{\alpha(i)}}(u)| \leq \|u\|_{\infty} \sup_{i\in\mathbb{N}} \int |\Gamma_{\alpha(i)}|\, d\mu$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $u \in L^{\infty}_{E'_b}$. Donc il existe un filtre $\mathcal{U}$ plus fin que le filtre de Fréchet et une application sous-linéaire continue $l$: $L^{\infty}_{E'_b} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{\mathcal{U}} l_{\Gamma_{\alpha(i)}}(u) = l(u)$$

pour tout $u \in L^{\infty}_{E'_b}$. Il est clair que l'application $\ell$ est additive au sens de CASTAING-CLAUZURE ([22], p. 355) et pour tout $A \in \mathcal{A}$, tout $u \in L^{\infty}_{E'_b}$, on a

$$l(\chi_A u) \leq \|u\|_{\infty} \sup_{i\in\mathbb{N}} \int_A |\Gamma_{\alpha(i)}|\, d\mu .$$

De sorte que la démonstration se termine exactement comme dans celle du Théorème 4.1 de CASTAING-CLAUZURE ([22]).

## REFERENCES


[1] A. ACERBI - N. FUSCO, *Semi continuity problems in the calculus of variations*, Arch. Rat. Rech. Anal., **86** (1984), pp. 124-145.

[2] T. ANDO - T. SHINTANI, *Best approximants in $L^1$ spaces*, Z. Wahrsh. Verw. Gebiete, 4 (1975), pp. 33-39.

[3] A. ARTSTEIN, *A note on Fatou's lemma in several dimensions*, J. Math. Economics, **6** (1979), pp. 277-282.

[4] S. BAGGHI, *On a.s. convergence of class of multivalued asymptotic martingales*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **21** (4) (1985), pp. 313-321.

[5] S. BAHI, *Quelques propriétés topologiques de l'ensemble des solutions d'une classe d'équations différentielles multivoques* (II), S.A.C. Montpellier (1983), Exposé no. 4.

[6] E. J. BALDER, *A general approach to lower semi continuity and lower closure in optimal control theory*, Siam J. Control Optim., **22** (1984), pp. 570-598.

[7] E. J. BALDER, *An extension of Prokhorov's theorem for transition probabilities with applications to infinite-dimensional lower closure problems*, Rend. Circ. Mat. Palermo (II), **34** (1985), pp. 427-447.

[8] E. J. BALDER, *Infinite-dimensional extension of a theorem of Komlos*, Preprint no. 471 (1987), Department of Mathematics, University of Utrecht, Utrecht, paru dans *Probability Theory and Related Fields*, Springer-Verlag (1988).

[9] E. J. BALDER, *Short proof of an existence result of V. L. Levin*, University of Utrecht, preprint (1987).

[10] E. J. BALDER, *New sequential compactness results for spaces of scalarly measurable functions*, Preprint no. 488 (1987), Department of Mathematics, University of Utrecht, Utrecht.

[11] E. J. BALDER, *More on Fatou lemma in several dimensions*, Cand. Math. Bull., **30** (3) (1987).

[12] E. J. BALDER, *Fatou's lemma in infinite dimensions*, J. Math. Anal. Appl., **136** (2) (1988), pp. 450-465.

[13] E. J. BALDER, *Unusual applications of A.E. convergences*, University of Utrecht, preprint (1989).

[14] J. M. BALL - F. MURAT, *Remark on Chacon's biting lemma*, Revised version 20 Novembre 1988, Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie (preprint).

[15] J. K. BROOKS - R. V. CHACON, *Continuity and compactness of measures*, Adv. Math., **37** (1980), pp. 16-26.

[16] A. V. BUHVALOV - G. JA. LOZANOWSKI, *On sets closed with respect to convergence in measure*, Sov. Math. Dokl., **14** (1973), pp. 1563-1565.

[17] A. V. BUHVALOV - G. JA. LOZANOWSKI, *On sets closed in measure in spaces of measurable functions*, Trans. Moscow Math. Soc., **2** (1978), pp. 127-148.

[18] C. CASTAING, *Sur les multi-applications measurables*, Revue Française Infor. Recherche Opérationnelle, **1** (1967), pp. 91-126.

[19] C. CASTAING, *Une nouvelle extension du théorème de Dragoni-Scorza*, C.R. Acad. Sc. Paris, **271** (1970), pp. 396-398.

[20] C. CASTAING, *A propos de l'existence des sections séparément mesurables et séparément intégrables*, S.A.C. Montpellier (1976), Exposé no. 6.

[21] C. CASTAING, *Topologie de la convergence uniforme sur les ensembles uniformément intégrables*, S.A.C. Montpellier (1980), Exposé no. 4.

[22] C. CASTAING - P. CLAUZURE, *Compacité faible dans l'espace $L^1_E$ et dans l'espace de multifonctions intégralement bornées et minimization*, Ann. Mat. Pura Appl. (IV), **140** (1985), pp. 345-364.

[23] C. CASTAING, *Compacité faible dans l'espace des mesures de probabilités de transition*, S.A.C. Montpellier (1986), Exposé no. 5.

[24] C. CASTAING, *Quelques résultats de convergence des suites adaptées*, S.A.C. Montpellier (1987), Exposé no. 2.

[25] C. CASTAING - P. CLAUZURE, *Version multivoque et vectorielle d'un résultat de Brooks-Chacon*, S.A.C. Montpellier (1988), Exposé no. 4.

[26] C. CASTAING - P. CLAUZURE, *Lemme de Fatou multivoque*, à paraître.

[27] C. CASTAING - F. EZZAKI, *Mosco convergence for multivalued martingale in the limit*, à paraître.

[28] C. CASTAING - M. VALADIER, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Lecture Notes, no. 580, Springer-Verlag, Berlin (1977).

[29] P. CLAUZURE, *Contribution à i'étude topologique et géométrique d'espaces de type Köthe-Orlicz*, Thèse, Université de Montpellier II (1985).

[30] DINH QUANG LUU, *Best approximations in the space of closed convex valued multifonction*, S.A.C. Montpellier (1982), Exposé no. 19.

[31] DINH QUANG LUU, *Best approximations in the space of Bochner integrable functions*, Math. Nachr., **121** (1984), pp. 317-323.

[32] DINH QUANG LUU, *A short proof of biting lemma*, S.A.C. Montpellier (1989), Exposé no. 1.

[33] A. FOUGERES, *Optimisation convexe dans les Banach non réflexifs: méthode de relaxation-projection*, Séminaire d'Initiation à l'Analyse (G. Choquet), pp. 801-831.

[34] A. FOUGERES - E. GINER, *Applications à la décomposition du dual d'un espace d'Orlicz engendré par $L_\Phi$: polarité et minimisation «sans compacité», $\varphi$- équicontinuité et orthogonalité»*, C.R. Acad. Sc. Paris A, **284** (1977), pp. 299-302.

[35] E. GINER, *Etude sur les fonctions intégrales*, Thèse, Université de Pau, Pau (1985).

[36] R. V. GAPOSHKIN, *Convergence and limit theorems for sequences of random variables*, Theory Prob. Appl., **17** (3) (1972), pp. 379-400.

[37] N. HERRNDORF, *Best $\varphi$ and $N_\varphi$-approximants in Orlicz spaces of vector valued function*, Z. Wahrsh. Verw. Gebiete, **58** (1981), pp. 309-329.

[38] C. HESS, *Contribution à l'étude de la mesurabilité, de la loi de probabilité et de la convergence des multifonctions*, Thèse, Montpellier (1986).

[39] C. HESS, *Lemme de Fatou et théorème de la convergence dominée pour des ensembles aléatoires non bornés et des intégrandes*, S.A.C. Montpellier (1986), Exposé no. 8.

[40] C. HESS, *Théorème de la convergence dominée pour l'intégrale et l'espérance conditionnelle des ensembles aléatoires non bornés et des intégrandes*, C.R. Acad. Sci. Paris, **306** (1) (1988), pp. 139-142.

[41] W. HILDENBRAND, *Core and Equilibria of a Large Economy*, Princeton University Press, Princeton and London (1974).

[42] W. HILDENBRAND - J. P. MERTENS, *On Fatou's lemma in several dimensions*, Z. Warsh., **17** (1971), pp. 151-155.

[43] A. JAWHAR, *Mesures de transition et applications*, S.A.C. Montpellier (1984), Exposé no. 14.

[44] A. JAWHAR, *Existence de solutions optimales pour les problèmes de contrôle de systèmes gouvernés par des équations différentielles multivoques*, S.A.C. Montpellier (1985), Exposé no. 1.

[45] M. A. KHAN - M. MAJUMDAR, *Weak sequential convergence in $L_1(\mu, X)$ and an approximate version of Fatou's lemma*, J. Math. Anal. Appl., **114** (1984), pp. 569-573.

[46] J. KOMLOS, *A generalisation of a problem of Steinhaus*, Acta Math. Acad. Sci. Hunger, **18** (1967), pp. 217-229.

[47] V. L. LEVIN, *Extremal problem with convex functionals that are lower semi continuous with respect to convergence in measure*, Dokl. Acad. Nauk., **224** (1975), pp. 1256-1259.

[48] C. OLECH, *On n-dimensional extensions of Fatou's lemma*, J. Appl. Math. Phys., **38** (March 1987), pp. 266-272.

[49] P. PUCCI - A. VITILLARO, *A representation theorem for Aumann integral*, J. Math. Anal. Appl., **102** (1984), pp. 86- 101.

[50] M. SAADOUNE, *Lemme de Fatou multivoque*, Thèse de 3ème cycle, Université de Montpellier (1986).

[51] A. SALVADORI, *Some convergence results with applications to a class of variational inequalities*, S.A.C. Montpellier (1987), Exposé no. 7 (à paraître dans Bull. Acad. Pol. Sci.).

[52] D. SCHMEIDLER, *Fatou's lemma in several dimensions*, Proc. Amer. Math. Soc., 24 (1970), pp. 300-306.

[53] M. SLABY, *Strong convergence of vector valued pramarts and subpramarts*, Prob. Math. Stat., **5**, fasc. 2 (1985), pp. 187-196.

[54] M. TALAGRAND, *Some structure results for martingales in the limit and pramarts*, Ann. Prob., **13** (4) (1985), pp. 1192-1203.

[55] M. VALADIER, *Convergence en mesure et optimisation (d'après Levin)*, S.A.C. Montpellier (1976), Exposé no. 14.

[56] M. VALADIER, *La multi-application médiane conditionnelle*, Z. Wahrs. Verw. Gebiete, **67** (1984), pp. 273-282.

[57] M. VALADIER, *Young's Measures, Methods of Nonconvex Analysis*, Lecture Notes in Mathematics, no. 1446, Editor A. Cellina (1989).

[58] M. VALADIER, *On conditional expectation of Random sets*, Ann. Mat. Pura Appl., **126** (1980), pp. 81-91.

[59] C. YANNELIS, *Fatou's lemma in infinite-dimensional spaces*, Discussion Paper no. 231, Department of Economics, University of Minnesota, Minneapolis, July 1986, to appear in Proc. Amer. Mat. Soc., **102** (2) (February 1988), pp. 303-310.

[60] C. YANNELIS, *On the Lebesgue-Aumann dominated convergence theorem in infinite dimensional spaces*, Discussion Paper, Department of Economics, University of Minnesota, Minneapolis (November 1986).