Annali di Matematica pura ed applicata
(IV), Vol. CLXVIII (1995), pp. 75-117

Equation à symétrie sphérique d'un gaz visqueux et calorifère avec la surface libre (*).

HISAO FUJITA-YASHIMA - RACHID BENABIDALLAH

1. – Introduction.

Cet article a pour but de démontrer un théorème d'existence pour le système d'équations d'un gaz visqueux et calorifère en mouvement symétrique par rapport à l'origine. Le domaine occupé par le gaz que nous considérons est borné par une surface rigide $\{ |x| = r_T \}(r_T > 0)$ et par une surface libre $\{ |x| = r_1(t) \}(r_T < r_1 < \infty)$. Nous formulons le problème dans l'espace de dimension n. Si $n = 1$, il représentera le mouvement monodimensionnel; si $n = 2$, il s'agira du mouvement à symétrique axiale; si $n = 3$, il sera le cas de la symétrie sphérique proprement dite. Pour répondre à l'intérêt mathématique, notre formulation du système d'équations comprendra également les cas où $n \geqslant 4$ avec la symétrie sphérique généralisée, cas qui n'ont évidemment pas de sens physique immédiat. Nous soulignons en outre que nous démontrons l'existence d'une solution faible sous des hypothèses assez faibles, en particulier, sans supposer la positivité stricte de la borne inférieure de la densité ρ_0 donnée au moment initial.

Notre travail s'appuie sur des techniques développées dans les travaux [3], [7], [8], [1]. Dans [3] (voir aussi [4]), KAZHIKHOV a démontré l'existence et l'unicité de la solution de l'équation monodimensionnelle d'un gaz visqueux et calorifère avec la surface libre sous l'hypothèse de la positivité stricte de $\inf \rho_0$. Dans [7], NIKOLAEV a obtenu un résultat analogue à celui de KAZHIKHOV avec la frontière rigide dans le cas de la symétrique axiale ou sphérique (voir aussi [2]). D'autre part, SHELUKHIN a, dans [8], démontré l'existence et l'unicité de la solution de l'équation monodimensionnelle d'un gaz barotropique sous l'hypothèse que $\inf \rho_0$ soit non négatif (et non nécessairement strictement positif). Enfin, PADULA, NOVOTNÝ et un des auteurs du présent article ont, dans [1], démontré l'existence d'une solution faible de l'équation monodimension-

(*) Entrata in Redazione il 24 febbraio 1993.

Indirizzo degli AA.: H. FUJITA-YASHIMA: Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Pise, Italie; R. BENABIDALLAH: Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Pise, Italie et Université de Tizi-Ouzou, Tizi-Ouzou, Algérie.

nelle d'un gaz visqueux et calorifère avec la surface libre sous l'hypothèse que

$$\inf \rho_0 \geq 0$$

comme chez SHELUKHIN [8].

La difficulté spécifique que notre problème pose demeure dans le maniement de la condition aux limites sur la surface libre (voir plus bas (1.15) et (1.30)) dans l'obtention des estimations *a priori*. Nous la surmontons en supposant que le coefficient ζ' figurant dans (1.4), (1.6) est strictement positif; si $n = 3$, cette condition coïncide avec la positivité stricte du coefficient de viscosité volumique ζ (voir (1.1), (1.3)).

On considère un gaz visqueux et calorifère et on désigne par $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, ρ, T le vecteur vitesse, la densité et la température respectivement. Si on suppose que la chaleur spécifique c_V et les coefficients de viscosité η, ζ et de conductibilité calorifique χ sont constants et que la pression p est déterminée par la relation

$$p = p(\rho, T) = R\rho T$$

avec une constante positive R, alors le système d'équations régissant le mouvement du gaz est, avec la notation $\partial_j = \partial_{x_j}$, le suivant:

$$\rho\left(\partial_t u_j + \sum_{p=1}^{3} u_p \partial_p u_j\right) - \eta \sum_{p=1}^{3} \partial_p \left(\partial_p u_j + \partial_j u_p - \frac{2}{3}\delta_{jp}(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\right) - \tag{1.1}$$
$$-\zeta\partial_j(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) + R\partial_j(\rho T) = \rho f_j\,, \qquad j = 1, 2, 3\,,$$

$$\partial_t \rho + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}) = 0\,, \tag{1.2}$$

$$\rho c_V\left(\partial_t T + \sum_{p=1}^{3} u_p \partial_p T\right) - \chi\Delta T + R\rho T(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) = \tag{1.3}$$
$$= \eta \sum_{j,p=1}^{3}\left(\partial_j u_p + \partial_p u_j - \frac{2}{3}\delta_{jp}(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\right)\partial_j u_p + \zeta(\nabla\cdot\boldsymbol{u})^2\,,$$

comme on peut déduire facilement, par exemple, des formules (15.5), (1.3), (49.4) de [6].

Nous écrivons le système d'équations généralisé en dimension n ($n \geq 1$) du système (1.1)-(1.3) sous la forme suivante:

$$\rho\left(\partial_t u_j + \sum_{p=1}^{n} u_p \partial_p u_j\right) - \eta \sum_{p=1}^{n} \partial_p \left(\partial_p u_j + \partial_j u_p - \frac{2}{n}\delta_{jp}(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\right) - \tag{1.4}$$
$$-\zeta'\partial_j(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) + R\partial_j(\rho T) = \rho f_j\,, \qquad j = 1, \ldots, n\,,$$

$$\partial_t \rho + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}) = 0\,, \tag{1.5}$$

$$\rho c_V \left(\partial_t T + \sum_{p=1}^{n} u_p \partial_p T \right) - \chi \Delta T + R\rho T (\nabla \cdot \boldsymbol{u}) = \tag{1.6}$$

$$= \eta \sum_{j,p=1}^{n} \left(\partial_j u_p + \partial_p u_j - \frac{2}{n} \delta_{jp} (\nabla \cdot \boldsymbol{u}) \right) \partial_j u_p + \zeta' (\nabla \cdot \boldsymbol{u})^2 .$$

Nous verrons plus tard les relations entre le coefficient ζ figurant dans (1.1), (1.3) et le coefficient ζ' figurant dans (1.4), (1.6).

Pour réduire le système d'équations (1.4)-(1.6) à une forme plus simple sous l'hypothèse de la symétrie sphérique généralisée en dimension n, on considère les coordonnées sphériques $(r, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1})$ liées aux coordonnées (x_j) par les relations

$$x_j = r \sin \vartheta_{j-1} \prod_{k=j}^{n-1} \cos \vartheta_k \qquad j = 1, \ldots, n , \tag{1.7}$$

où, par convention, on a posé

$$\vartheta_0 = \frac{\pi}{2} .$$

Le mouvement étant supposé symétrique par rapport à l'origine, le vecteur vitesse $\boldsymbol{u}$ est parallèle au vecteur position x de sorte que

$$u_j(x, t) = (x_j / r) u(r, t) \qquad \text{pour } x \neq 0 . \tag{1.8}$$

Alors, comme on a, pour $x \neq 0$,

$$\partial_{x_j} = \frac{\partial r}{\partial x_j} \partial_r + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_j} \partial_{\vartheta_k} ,$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_j} = x_j / r = \sin \vartheta_{j-1} \prod_{k=j}^{n-1} \cos \vartheta_k ,$$

$$\frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_j} = -\frac{1}{r} \sin \vartheta_k \sin \vartheta_{j-1} \left(\prod_{q=j}^{k-1} \cos \vartheta_q \right) \prod_{q=k+1}^{n-1} \frac{1}{\cos \vartheta_q} \qquad \text{pour } j \leq k ,$$

$$\frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_{k+1}} = \frac{1}{r} \cos \vartheta_k \prod_{q=k+1}^{n-1} \frac{1}{\cos \vartheta_q} ,$$

$$\frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_j} = 0 \qquad \text{pour } j \geq k+2 ,$$

le système d'équations (1.4)-(1.6), après des calculus élémentaires (et d'ailleurs un peu longs), se transforme en

$$\rho(\partial_t u + u \partial_r u) - \mu \left(\partial_r^2 u + (n-1) \frac{1}{r} \partial_r u - (n-1) \frac{1}{r^2} u \right) + R \partial_r (\rho T) = \rho f , \tag{1.9}$$

$$\partial_t \rho + \partial_r (\rho u) + (n-1) \frac{1}{r} \rho u = 0 , \tag{1.10}$$

$$\rho c_V(\partial_t T + u\partial_r T) - \chi\partial_r^2 T - (n-1)\frac{1}{r}\partial_r T + R\rho T\Big(\partial_r u + (n-1)\frac{1}{r}u\Big) = \tag{1.11}$$

$$= \mu\Big(\partial_r u + (n-1)\frac{1}{r}u\Big)^2 - 4(n-1)\eta\frac{1}{r}u\partial_r u - 2(n-1)(n-2)\eta\frac{1}{r^2}u^2,$$

où

$$\mu = \frac{2(n-1)}{n}\eta + \zeta'. \tag{1.12}$$

Comme nous avons mentionné plus haut, nous considérons le domaine

$$\{r_\Gamma < r = |x| < r_1(t)\}$$

avec $r_\Gamma > 0$. Sur la frontière $\{r = r_\Gamma\}$, nous considérons la condition de l'adhérence et de l'absence de flux d'énergie, qui se traduit évidemment en

$$u|_{r=r_\Gamma} = 0, \tag{1.13}$$

$$\partial_r T|_{r=r_\Gamma} = 0. \tag{1.14}$$

D'autre part, nous considérons sur la frontière $\{r = r_1(t)\}$ les conditions

$$\Big\{\mu\Big(\partial_r u + (n-1)\frac{1}{r}u\Big) - 2(n-1)\eta\frac{1}{r}u - R\rho T\Big\}|_{r=r_1(t)} = 0, \tag{1.15}$$

$$\partial_r T|_{r=r_1(t)} = 0, \tag{1.16}$$

qui correspondraient à l'annulation de la composante normale du tenseur de contrainte et à l'absence de flux d'énergie.

Comme dans les articles cités plus haut, il nous convient d'introduire les coordonnées lagrangiennes massiques (ξ, t) qui se lient aux coordonnées (r, t) par la relation

$$r(\xi, t) = r_0(\xi) + \int_0^t \tilde{u}(\xi, t')\,dt', \tag{1.17}$$

où

$$\tilde{u}(\xi, t) = u(r(\xi, t), t), \tag{1.18}$$

et $r_0(\xi)$ est la fonction définie de la manière suivante: étant donnée la densité ρ_0 au moment $t = 0$, nous définissons la fonction $\xi_0(r)$ par la relation

$$\xi_0(r) = \int_{r_\Gamma}^r r^{m-1}\rho_0(r')\,dr'; \tag{1.19}$$

en supposant que $\xi_0(\cdot)$ est strictement croissante dans le support de $\rho_0(\cdot)$, nous définissons

(1.19)bis $$r_0(\xi) = \xi_0^{-1}(\xi) \quad \text{pour } 0 \leq \xi \leq \sup_r \xi_0(r).$$

Nous supposons que

(1.20) $$\sup_r \xi_0(r) = \int_{r_\Gamma}^{\infty} r^{n-1}\rho_0(r)\,dr = 1\,,$$

de sorte que le domaine de la variable ξ est

(1.20)bis $$0 \leq \xi \leq 1\,,$$

ce qui n'est, comme on voit aisément, pas restrictif. La relation (1.10) entraîne que

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{r_\Gamma}^{r(\xi,\,t)} r'^{\,n-1}\rho(r',\,t)\,dr' = 0$$

et que donc

(1.21) $$\int_{r_\Gamma}^{r(\xi,\,t)} r'^{\,n-1}\rho(r',\,t)\,dr' = \int_{r_\Gamma}^{r_0(\xi)} r'^{\,n-1}\rho_0(r')\,dr' = \xi$$

pour tout $(\xi,\,t) \in [0,\,1] \times \mathbb{R}_+$. Il en résulte aussi que

(1.22) $$\partial_\xi r(\xi,\,t) = \frac{1}{r(\xi,\,t)^{n-1}\,\rho(r(\xi,\,t),\,t)}\,.$$

Comme on voit aisément, les dérivées partielles par rapport à (r, t) et celles par rapport à (ξ, t) sont reliées par les relations

(1.23) $$\partial_t\widetilde{\varphi}(\xi,\,t) = \partial_t\varphi(r,\,t) + u(r,\,t)\,\partial_r\varphi(r,\,t)\,,$$

(1.24) $$\partial_\xi\widetilde{\varphi}(\xi,\,t) = (\partial_\xi r(\xi,\,t))\,\partial_r\varphi(r,\,t) = \frac{1}{r^{n-1}\rho}\,\partial_r\varphi(r,\,t)\,,$$

où

$$\widetilde{\varphi}(\xi,\,t) = \varphi(r(\xi,\,t),\,t) = \varphi(r,\,t)\,.$$

Ces relations nous permettent de transformer les équations (1.9)-(1.11) et les conditions (1.13)-(1.16) en des expressions relatives aux coordonnées lagrangiennes massiques. Pour simplifier la notation, nous noterons (x, t) au lieu de (ξ, t) et u au lieu de $\widetilde{u}$; p et T désigneront également les fonctions des variables ξ et t. Le système d'équations dont nous allons nous occuper s'écrit alors

$$\partial_t u - r^{n-1}\partial_x(\rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT)) = f\circ r, \tag{1.25}$$

$$\partial_t\rho + \rho^2\partial_x(r^{n-1}u) = 0, \tag{1.26}$$

$$c_V\partial_t T = \chi\partial_x(r^{2n-2}\rho\partial_x T) + \rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT)\partial_x(r^{n-1}u) - \\ -2(n-1)\eta\partial_x(r^{n-2}u^2), \tag{1.27}$$

avec les conditions

$$u|_{x=0} = 0, \tag{1.28}$$

$$r_T^{n-1}\rho\partial_x T|_{x=0} = 0, \tag{1.29}$$

$$\left\{\rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT) - 2(n-1)\eta\frac{1}{r}u\right\}|_{x=1} = 0, \tag{1.30}$$

$$r^{n-1}\rho\partial_x T|_{x=1} = 0. \tag{1.31}$$

Nous avons aussi à considérer les conditions initiales

$$u|_{t=0} = u_0, \qquad \rho|_{t=0} = \rho_0, \qquad T|_{t=0} = T_0. \tag{1.32}$$

Dans le paragraphe 2, nous formulerons avec précision un théorème d'existence pour le système d'équations (1.25)-(1.32). Les paragraphes 3, 4, 5 seront dédiés aux estimations *a priori*, qui constitueront la partie principale du présent travail. Dans le paragraphe 6 se conclura la démonstration du théorème.

Nous tenons à remercier Prof. INGO MÜLLER (Berlin) pour les discussions avec lesquelles il nous a encouragés à achever ce travail.

2. - Résultat.

Nous allons maintenant énoncer un théorème d'existence pour le problème (1.25)-(1.32). Nous précisons que r est, conformément à ce que nous avons mentionné plus haut (voir (1.17), (1.19), (1.19)bis), la fonction définie par

$$r(x,t) = r_0(x) + \int_0^t u(x,t')\,dt' \qquad (x,t)\in[0,1]\times[0,\infty[, \tag{2.1}$$

avec

$$r_0(x) = \left[r_T^n + n\int_0^x \frac{1}{\rho_0(x')}\,dx'\right]^{1/n} \qquad 0 \le x \le 1 \tag{2.2}$$

avec

(2.3) $$r_\Gamma > 0\,,$$

et que, par hypothèse,

(2.4) μ, R, c_V, χ sont des constantes positives, η est une constante non-négative.

On suppose que

(2.5) $$\rho_0(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1], \quad \operatorname*{ess\,sup}_{0 \leq x \leq 1} \rho_0(x) < \infty\,, \quad \rho_0^{-1} \in L^1(0,1)\,,$$

(2.6) $\exists \delta > 0$, $K_A > 0$ tels que pour presque tout $x \in [0,1]$ il existe un intervalle fermé $I(x)$ tel que $x \in I(x)$, $|I(x)| = \delta$, et $\rho_0(x) \leq K_A \rho_0(\xi)$ pour presque tout $\xi \in I(x)$,

(2.7) $$u_0 \in L^4(0,1)\,,$$

(2.8) $$\rho_0^{1/2} \partial_x u_0 \in L^2(0,1)\,,$$

(2.9) $$T_0 \in L^2(0,1), \quad \inf_{0 \leq x \leq 1} T_0(x) \geq 0\,,$$

(2.10) $$f \in C([r_\Gamma, \infty[) \cap L^\infty([r_\Gamma, \infty[)\,, \quad F(s) = \int_{r_\Gamma}^{s} f(s')\,ds' \in L^\infty([r_\Gamma, \infty[)\,,$$

(2.11) $$n\mu > 2(n-1)\eta.$$

On a alors le

THÉORÈME A. – *Sous les hypothèses* (2.3)-(2.11), *le problème* (1.25)-(1.32), (2.1) *avec* r_0 *définie par* (2.2) *admet, dans* $]0, \bar{t}[$ *avec* $\bar{t} > 0$ *quelconque, au moins une solution faible, plus précisément, il existe* (u, ρ, T, r) *qui vérifie les relations suivantes* (2.12)-(2.21):

(2.12) $$u \in L^\infty(0, \bar{t}; L^4(0,1))\,,$$

(2.13) $$\rho \in L^\infty([0,1] \times [0, \bar{t}])\,,$$

(2.14) $$T \in L^\infty(0, \bar{t}; L^2(0,1))\,,$$

(2.15) $r \in C^0([0,1] \times [0, \bar{t}])$, *pour tout* $t \in [0, \bar{t}]$ *fixé* $r(x,t)$ *est strictement crois sante en* x,

(2.16) $$\partial_t u,\ \partial_x(\rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT)) \in L^2(0, \bar{t}; L^2(0,1))\,,$$

(2.17) $$\partial_t \rho,\ \rho_0^{1/2} \partial_x(r^{n-1}u) \in L^\infty(0, \bar{t}; L^2(0,1))\,,$$

(2.18) $$\rho_0^{1/2} \partial_x T \in L^2(0, \bar{t}; L^2(0,1))\,,$$

(2.19) *il existe deux constantes* J_1, J_2 *telles que* $0 < J_1 \leq J_2 < \infty$ *et que*
$$J_1 \leq \frac{\rho(x,t)}{\rho_0(x)} \leq J_2 \text{ presque partout dans } [0,1]\times[0,\bar{t}],$$

(2.20) *les équations* (1.25), (1.26), (2.1), *et les conditions* (1.28), (1.30), $(1.32)_1$, $(1.32)_2$ *sont satisfaites respectivement dans* $L^2(0,\bar{t}; L^2(0,1))$, $L^2(0,\bar{t})$ *et* $L^2(0,1)$,

(2.21)
$$\int_0^{\bar{t}}\int_0^1 [c_V T\partial_t\varphi - \chi\rho r^{2(n-1)}(\partial_x T)\partial_x\varphi - r^{n-1}u(\partial_x\varphi)(\rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT)) -$$
$$-r^{n-1}u\varphi\partial_x(\rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT)) + 2(n-1)\eta r^{n-2}u^2\partial_x\varphi]\,dx\,dt = \int_0^1 T_0(x)\varphi(x,0)\,dx$$
$$\forall\varphi\in L^2(0,\bar{t}; H^1(0,1)) \text{ avec } \partial_t\varphi\in L^1(0,\bar{t}; L^2(0,1)),\ \varphi(\cdot,\bar{t}) = 0. \quad ■$$

Nous voulons rappeler que la condition (2.11) équivaut, en vertu de (1.12), à la condition

$$\zeta' > 0. \tag{2.22}$$

Or, si le système d'équations (1.4)-(1.6) pour $n = 1, 2, 3$ représente le mouvement monodimensionnel ou bidimensionnel ou tridimensionnel du même gaz qui obéit aux équations (1.1)-(1.3), alors on a évidemment

$$\zeta' = \zeta + ((2/n) - (2/3))\eta \quad (n = 1, 2, 3).$$

Du point de vue physique, le principe de thermodynamique entraîne que

$$\eta \geq 0, \quad \zeta \geq 0$$

(voir par exemple § 16, § 49 de [6]). Donc, la présence de la viscosité garantira automatiquement la condition (2.22) (et donc (2.11)) pour le mouvement monodimensionnel et pour le mouvement bidimensionnel. Pour $n = 3$, la condition (2.22) coïncide avec la positivité stricte du coefficient de viscosité volumique ζ.

Pour répondre à la curiosité sur le coefficient ζ' pour n qualconque, on regarde l'équation (1.11), dont le second membre s'écrit encore

$$\frac{2(n-1)}{n}\eta\left(\partial_r u - \frac{1}{r}u\right)^2 + \zeta'\left(\partial_r u + (n-1)\frac{1}{r}u\right)^2.$$

Si on considère le cas particulier où $u(r,t) = rc$ (au moment t) avec une costante c, alors on a

$$\partial_r u - \frac{1}{r} = 0,$$

et donc dans ce cas le second membre de (1.11) se réduit à

$$\zeta'\left(\partial_r u + (n-1)\frac{1}{r}u\right)^2 = \zeta'(\nabla\cdot\boldsymbol{u})^2 .$$

Cette relation pour ζ' dans $\mathbb{R}^n$ généraliserait la relation par laquelle on définit le coefficient de viscosité volumique ζ dans $\mathbb{R}^3$ en déduisant sa non-négativité du principe de thermodynamique.

3. – Expression de $J = \rho/\rho_0$ et estimations *a priori* (I).

Dans ce paragraphe et les paragraphes 4, 5, on va établir des estimations *a priori* de la solution du système d'équations (1.25)-(1.32). Elles vont être obtenues sous l'hypothèse que la solution est classique. Plus précisément, on suppose que

$$u,\ T\in C^1([0,\bar t\,];\ C^0([0,1]))\cap C^0([0,\bar t\,];\ C^2([0,1])),$$

$$\rho\in C^1([0,1]\times[0,\bar t\,]),\qquad T>0,\qquad \rho>0,\qquad r(1,t)<\infty .$$

On considère d'abord l'équation obtenue en multipliant (1.25) par u et en l'additionnant à (1.27):

$$\partial_t\left(c_V T + \frac{1}{2}u^2\right) = \partial_x\left(r^{n-1}u\left[\rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT) - 2(n-1)\eta\frac{1}{r}u\right]\right) + \\ + \chi\partial_x(r^{2n-2}\rho\partial_x T) + (f\circ r)u . \tag{3.1}$$

En intégrant (3.1) de $x=0$ à $x=1$ et en tenant compte des conditions aux limites (1.28)-(1.31), on obtient

$$\frac{d}{dt}\int_0^1\left(c_V T + \frac{1}{2}u^2\right) = \int_0^1 (f\circ r)u .$$

Comme on a $u = \partial_t r$ (voir (2.1)), il vient

$$\int_0^1\left(c_V T + \frac{1}{2}u^2\right) = \int_0^1\left(c_V T_0 + \frac{1}{2}(u_0)^2\right) + \int_0^1 (F(r(x,t)) - F(r_0(x)))\,dx , \tag{3.2}$$

d'où

$$\int_0^1\left(c_V T + \frac{1}{2}u^2\right) \leq K_1 \tag{3.3}$$

avec

$$K_1 = c_V \|T_0\|_{L^1(0,1)} + \frac{1}{2} \|u_0\|^2_{L^2(0,1)} + \sup \{F(s_1) - F(s_2) | s_1, s_2 \geq r_T\}.$$

On pose maintenant

$$J(x,t) = \frac{\rho(x,t)}{\rho_0(x)}. \tag{3.4}$$

Pour obtenir une expression de J en termes de u, T, r, on remarque d'abord que (1.26) s'écrit encore

$$\partial_t \log \rho = -\rho \partial_x (r^{n-1} u). \tag{3.5}$$

D'autre part, on déduit de l'équation (1.25) divisée par r^{n-1} et de la condition (1.30) que

$$\rho \partial_x (r^{n-1} u) = \frac{R}{\mu} \rho T - \frac{1}{\mu} \int_x^1 \frac{1}{r^{n-1}} (\partial_t u - f \circ r) + 2(n-1) \frac{\eta u(1,t)}{\mu r(1,t)}. \tag{3.6}$$

En substituant le second membre de (3.6) dans (3.5) et en l'intégrant de 0 à t à l'aide aussi de la relation $u/r = \partial_t \log r$, on obtient

$$\log \rho - \log \rho_0 = -\frac{R}{\mu} \int_0^t \rho T + \frac{1}{\mu} \int_0^t \int_x^1 \frac{1}{r^{n-1}} (\partial_t u - f \circ r) - 2(n-1) \frac{\eta}{\mu} \log \frac{r(1,t)}{r(1,0)},$$

ou encore

$$J(x,t) = \left(\exp \left(-\frac{R}{\mu} \int_0^t \rho T \right) \right) \left(\frac{r(1,0)}{r(1,t)} \right)^\alpha \exp \left(\frac{1}{\mu} \int_0^t \int_x^1 \frac{1}{r^{n-1}} (\partial_t u - f \circ r) \right), \tag{3.7}$$

où

$$\alpha = 2(n-1) \frac{\eta}{\mu}. \tag{3.8}$$

On déduit de (3.7) que

$$\partial_t \exp \left(\frac{R}{\mu} \int_0^t \rho T \right) = \frac{R}{\mu} \rho T \exp \left(\frac{R}{\mu} \int_0^t \rho T \right) =$$

$$= \frac{R}{\mu} \rho_0 T \left(\frac{r(1,0)}{r(1,t)} \right)^\alpha \exp \left(\frac{1}{\mu} \int_0^t \int_x^1 \frac{1}{r^{n-1}} (\partial_t u - f \circ r) \right),$$

d'où

$$\exp\left(\frac{R}{\mu}\int_0^t \rho T\right) = 1 + \int_0^t \frac{R}{\mu}\rho_0 T\left(\frac{r(1,0)}{r(1,s)}\right)^{\alpha}\left(\exp\left(\frac{1}{\mu}\int_0^s\int_x^1 \frac{1}{r^{n-1}}(\partial_t u - f\circ r)\right)\right)ds. \tag{3.9}$$

En substituant (3.9) dans (3.7), on obtient

$$J(x,t) = \frac{1}{B}\left(\frac{r(1,0)}{r(1,t)}\right)^{\alpha}\exp\left(\frac{1}{\mu}\int_0^t\int_x^1 \frac{1}{r^{n-1}}(\partial_t u - f\circ r)\right), \tag{3.10}$$

où B est le second membre de (3.9).

Pour estimer la borne supérieure de J, on remarque d'abord que

$$\int_0^t \frac{1}{r^{n-1}}\partial_t u = \frac{1}{r^{n-1}}u - \frac{1}{r_0^{n-1}}u_0 + (n-1)\int_0^t \frac{1}{r^n}u^2 .$$

Donc, comme on le voit aisément, (3.3) entraîne qu'il existe une constante finie K_2 telle que

$$\exp\left(\frac{1}{\mu}\left|\int_0^t\int_x^1 \frac{1}{r^{n-1}}(\partial_t u - f\circ r)\right|\right) \leqslant K_2 \tag{3.11}$$

pourvu que $0 \leqslant t \leqslant \bar{t}$. Comme d'autre part on a évidemment

$$B \geqslant 1, \qquad r(1,t) \geqslant r_\Gamma ,$$

on déduit de (3.10) et (3.11) que

$$J(x,t) \leqslant (r(1,0)/r_\Gamma)^{\alpha} K_2 \equiv K_3 . \tag{3.12}$$

On considère maintenant (3.10) sous la forme

$$\left(\frac{r(1,0)}{r(1,t)}\right)^{\alpha}\frac{1}{\rho} = A_1 + A_2 , \tag{3.13}$$

où

$$A_1 = \frac{1}{\rho_0}\exp\left(-\frac{1}{\mu}\int_0^t\int_x^1 \frac{1}{r^{n-1}}(\partial_t u - f\circ r)\right),$$

$$A_2 = \frac{R}{\mu}\left(\exp\left(-\frac{1}{\mu}\int_0^t\int_x^1 \frac{\partial_t u - f\circ r}{r^{n-1}}\right)\right)\int_0^t T\left(\frac{r(1,0)}{r(1,s)}\right)^{\alpha}\left(\exp\left(\frac{1}{\mu}\int_0^s\int_x^1 \frac{\partial_t u - f\circ r}{r^{n-1}}\right)\right)ds .$$

Comme $1/\rho = r^{n-1}\partial_x r$ (voir (1.22)), on a

$$\int_0^1 \frac{1}{\rho} = \frac{1}{n}\,(r(1,t)^n - r_\Gamma^n)\,. \tag{3.14}$$

D'autre part, en vertu de (2.2), (3.11), on a

$$\int_0^1 A_1 \leqslant \frac{1}{n}\,K_2(r(1,0)^n - r_\Gamma^n)\,. \tag{3.15}$$

En outre, les relations (3.3), (3.11) impliquent que

$$\int_0^1 A_2 \leqslant \frac{R}{\mu c_V}\,K_1 K_2^2 \left(\frac{r(1,0)}{r_\Gamma}\right)^{\alpha} \bar{t}\,. \tag{3.16}$$

En vertu de (3.14)-(3.16), on déduit de l'intégration de (3.13) que

$$\left(\frac{r(1,0)}{r(1,t)}\right)^{\alpha} (r(1,t)^n - r_\Gamma^n) \leqslant nC_1\,, \qquad (0 \leqslant t \leqslant \bar{t}), \tag{3.17}$$

où C_1 est la somme des seconds membres de (3.15) et de (3.16). Comme d'après l'hypothèse (2.11) (voir aussi (3.8)) on a $n > \alpha$, par des calculs élémentaires on déduit de (3.17) qu'il existe une constante finie K_4 telle que

$$r(1,t) \leqslant K_4\,, \qquad \forall t \in [0, \bar{t}\,]. \tag{3.18}$$

On tâche maintenant d'estimer la borne inférieure de T. Pour cela, on multiplie l'équation (1.27) par $-T^{-2}$, de sorte qu'on a

$$c_V \partial_t\left(\frac{1}{T}\right) = \chi\partial_x\left(r^{2n-2}\rho\partial_x\left(\frac{1}{T}\right)\right) - 2\,\frac{1}{T^3}\,\rho r^{2n-2}(\partial_x T)^2 - \tag{3.19}$$

$$- \frac{1}{T^2}\,2(n-1)\,\eta\rho\left(\frac{1}{n^{1/2}}\,\partial_x(r^{n-1}u) - n^{1/2}\,\frac{1}{\rho r}\,u\right)^2 -$$

$$-\left(\mu - \frac{2(n-1)}{n}\,\eta\right)\rho\left(\frac{1}{T}\,\partial_x(r^{n-1}u) - \frac{1}{n\mu - 2(n-1)\eta}\,nR\right)^2 + \left(\frac{n}{n\mu - 2(n-1)\eta}\right)^2 R^2\rho\,.$$

Encore grâce à la condition (2.11), le second membre de (3.19) est

$$\leqslant \chi\partial_x\left(r^{2n-2}\rho\partial_x\left(\frac{1}{T}\right)\right) + \left(\frac{n}{n\mu - 2(n-1)\eta}\right)^2 R^2\rho\,.$$

Donc, compte tenu de (1.31), il résulte de l'argumentation bien connue sur la valeur maximale que

$$\max\left\{\frac{1}{T}\,\middle|\,0 \leq x \leq 1\,,\ 0 \leq t \leq \bar{t}\right\} \leq C_2\,,$$

ou encore

$$\min\{T \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq t \leq \bar{t}\} \geq 1/C_2\,, \tag{3.20}$$

où

$$C_2 = \max_{0 \leq x \leq 1} \frac{1}{T_0(x)} + \frac{1}{c_V}\left(\frac{n}{n\mu - 2(n-1)\eta}\right)^2 R^2 K_R K_3 \bar{t}\,, \tag{3.21}$$

$$K_R = \sup_{0 \leq x \leq 1} \rho_0(x)\,. \tag{3.22}$$

4. - Fonction $M_T^*(t)$ et estimations *a priori* (II).

Dans ce paragraphe, on va établir l'estimation de la borne inférieure de $J(x, t)$, qui s'obtiendra avec quelques estimations de u et de T. Dans ces estimations un rôle particulier sera joué par la fonction $M_T^*(t)$ définie par

$$M_T^*(t) = \sup_{0 \leq x \leq 1} \rho_0(x)^{1/(2+\beta)} T(x, t)\,, \tag{4.1}$$

où β est un nombre réel $\in]0, 1]$ choisi de telle sorte que

$$(1 + 2\beta)\mu > 2\,\frac{n-1}{n}\,(1+\beta)^2\,\eta\,. \tag{4.2}$$

Comme on le verra, le fait que, grâce à la condition (2.11), on peut choisir un $\beta \in]0, 1]$ satisfaisant à (4.2) est essentiel pour le présent travail.

Rappelons qu'il s'agit ici des estimations des solutions classiques et que donc nous pouvons opérer ici sans nous préoccuper des points de discontinuité des fonctions que nous considérons.

Nous utilisons dans la suite la notation

$$W = W(x, t) = c_V T(x, t) + \frac{1}{2}\,u(x, t)^2\,. \tag{4.3}$$

On définit d'abord

$$\psi(y) = \psi(x, t; y) = T(y, t) - \frac{1}{\delta}\int_{I(x)} T(\xi, t)\,d\xi \qquad \text{pour } y \in I(x)\,. \tag{4.4}$$

Comme on a évidemment

$$\int_{I(x)} \psi(y)\,dy = 0\,,$$

il existe un point $\bar{x} = \bar{x}(t) \in I(x)$ tel que

$$\psi(\bar{x}) = 0\,. \tag{4.5}$$

Comme on a

$$\partial_y\,|\psi(y)|^{(2+\beta)/2} = \left(\frac{2+\beta}{2}\right)|\psi|^{\beta/2}(\operatorname{sgn}\psi)\,\partial_y\psi\,,$$

il vient

$$\rho_0(x)^{1/2}\,|\psi(x)|^{(2+\beta)/2} \leq \frac{2+\beta}{2}\left|\int_{\bar{x}}^{x}|\psi|^{\beta}\,W^{1-\beta}\right|^{1/2}\left|\rho_0(x)\int_{\bar{x}}^{x}\frac{1}{W^{1-\beta}}\,|\partial_y\psi|^2\right|^{1/2}. \tag{4.6}$$

Grâce à la condition (2.6), on a

$$\left|\rho_0(x)\int_{\bar{x}}^{x}\frac{1}{W^{1-\beta}}\,|\partial_y\psi|^2\right|^{1/2} \leq \tag{4.7}$$

$$\leq K_A^{1/2}\left(\sup_{0\leq x\leq 1}\frac{1}{J(x,\,t)}\right)^{1/2}\left(\int_{I(x)}\rho\,\frac{1}{W^{1-\beta}}\,|\partial_y\psi|^2\right)^{1/2}.$$

Pour majorer $\sup 1/J$, on rappelle la relation (3.10), d'où on déduit, en vertu de (2.5), (3.11), (3.18), (4.1), que

$$\frac{1}{J(x,\,t)} \leq C_3\left(1 + C_4\int_0^t M_T^*(t')\,dt'\right) \qquad \forall (x,\,t) \in [0,\,1]\times[0,\,\bar{t}\,] \tag{4.8}$$

avec deux constantes finies C_3, C_4. D'autre part, comme on voit aisément, (3.3) et (4.4) (rappeler aussi (4.3)) impliquent que

$$\left|\int_{\bar{x}}^{x}|\psi|^{\beta}\,W^{1-\beta}\right|^{1/2} \leq \left(\frac{2}{c_V}\right)^{\beta/2} K_1^{1/2}\,. \tag{4.9}$$

En adjoignant (4.5)-(4.9) aux relations

$$M_T^*(t) \leq K_R^{1/(2+\beta)}\,\frac{1}{\delta}\,K_1 + \sup_{0\leq x\leq 1}\rho_0(x)^{1/(2+\beta)}\,|\psi(x,\,t;\,x)|\,, \qquad \partial_y\psi = \partial_y T\,,$$

qui sont des conséquences immédiates de la définition de ψ et de celle de $M_T^*(t)$, on obtient

$$(4.10) \qquad M_T^*(t) \leq C_5 + C_6 \left(1 + C_4 \int_0^t M_T^*(t')\,dt' \right)^{1/(2+\beta)} \left(\int_0^1 \rho \frac{1}{W^{1-\beta}} |\partial_x T|^2 \right)^{1/(2+\beta)},$$

où C_5 et C_6 sont deux constantes finies.

Puisque la fonction

$$t \mapsto \left(1 + C_4 \int_0^t M_T^*(t')\,dt' \right)^{1/(2+\beta)}$$

est non-décroissante, en intégrant (4.10) de 0 à t on obtient

$$\int_0^t M_T^*(t')\,dt' \leq \bar{t}C_5 + C_6 \left(1 + C_4 \int_0^t M_T^*(t')\,dt' \right)^{1/(2+\beta)} \int_0^t \left(\int_0^1 \rho \frac{1}{W^{1-\beta}} |\partial_x T|^2 \right)^{1/(2+\beta)};$$

compte tenu des relations

$$A^{1/(2+\beta)} B \leq \varepsilon A + \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{1/(1+\beta)} B^{(2+\beta)/(1+\beta)} \qquad \text{pour tout } A, B \geq 0 \text{ et } \varepsilon > 0,$$

$$\left[\int_0^t \left(\int_0^1 \varphi(x,t')\,dx \right)^{1/(2+\beta)} dt' \right]^{(2+\beta)/(1+\beta)} \leq t \left[\int_0^t \int_0^1 \varphi(x,t')\,dx\,dt' \right]^{1/(1+\beta)}$$

pour toute fonction non-négative φ,

on en déduit que

$$(4.11) \qquad \int_0^t M_T^*(t')\,dt' \leq C_7 + C_8 \left[\int_0^t \int_0^1 \rho \frac{1}{W^{1-\beta}} |\partial_x T|^2 \right]^{1/(1+\beta)},$$

où

$$C_7 = 2\bar{t}C_5 + \frac{1}{C_4}, \qquad C_8 = 2\bar{t}(2C_4)^{1/(1+\beta)} C_6^{(2+\beta)/(1+\beta)}.$$

En substituant (4.11) dans (4.10) et en tenant compte de la relation

$$(A+B)^{1+\beta} \leq 2A^{1+\beta} + 2B^{1+\beta} \quad \text{pour tout } A, B > 0,$$

on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$(4.12)\quad M_T^*(t)^{1+\beta} \leq 2C_5^{1+\beta} + $$

$$+2C_6^{1+\beta}\left[1 + C_4\left[C_7 + C_8\left[\int_0^t\int_0^1 \rho \frac{1}{W^{1-\beta}} |\partial_x T|^2\right]^{1/(1+\beta)}\right]\right]^{(1+\beta)/(2+\beta)} \times$$

$$\times\left(\int_0^1 \rho \frac{1}{W^{1-\beta}} |\partial_x T|^2\right)^{(1+\beta)/(2+\beta)} \leq 2C_5^{1+\beta} + \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1+\beta} C_9 +$$

$$+\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1+\beta} C_{10}\int_0^t\int_0^1 \rho \frac{1}{W^{1-\beta}} |\partial_x T|^2 + \varepsilon \int_0^1 \rho \frac{1}{W^{1-\beta}} |\partial_x T|^2$$

avec

$$C_9 = 16(C_6^{2+\beta}(1 + C_4 C_7))^{1+\beta}, \qquad C_{10} = 16(C_6^{2+\beta} C_4 C_8)^{1+\beta}.$$

On considère maintenant l'équation (3.1). En la multipliant par $W^\beta = (c_V T + (1/2)u^2)^\beta$, on a

$$(4.13)\quad \frac{1}{1+\beta}\,\partial_t W^{1+\beta} = W^\beta \partial_x\left(r^{n-1}u\left[\rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT) - 2(n-1)\eta \frac{1}{r} u\right]\right) +$$

$$+\chi W^\beta \partial_x(r^{2n-2}\rho\partial_x T) + (f\circ r)uW^\beta .$$

En intégrant (4.13) de $x = 0$ à $x = 1$ et en tenant compte des conditions aux limites (1.28)-(1.31), on a

$$(4.14)\quad \frac{d}{dt}\int_0^1 W^{1+\beta} + (1+\beta)\beta\chi c_V\int_0^1 \frac{1}{W^{1-\beta}} r^{2n-2}\rho(\partial_x T)^2 +$$

$$+(1+\beta)\beta\mu \int_0^1 \frac{1}{W^{1-\beta}} r^{2n-2}\rho u^2(\partial_x u)^2 = \sum_{k=1}^{9} I_k ,$$

où

$$I_1 = -(1+\beta)\beta c_V\mu \int_0^1 \frac{1}{W^{1-\beta}} r^{n-1}\rho u(\partial_x T)\,\partial_x(r^{n-1}u),$$

$$I_2 = (1+\beta)\beta c_V R \int_0^1 \frac{1}{W^{1-\beta}} r^{n-1}\rho u T\partial_x T ,$$

$$I_3 = -(n-1)(1+\beta)\beta\mu \int_0^1 \frac{1}{W^{1-\beta}} r^{n-2} u^3 \partial_x u\,,$$

$$I_4 = (1+\beta)\beta R \int_0^1 \frac{1}{W^{1-\beta}} r^{n-1} \rho T u^2 \partial_x u\,,$$

$$I_5 = 2(n-1)\eta(1+\beta)\beta c_V \int_0^1 \frac{1}{W^{1-\beta}} r^{n-2} u^2 \partial_x T\,,$$

$$I_6 = 2(n-1)\eta(1+\beta)\beta \int_0^1 \frac{1}{W^{1-\beta}} r^{n-2} u^3 \partial_x u\,,$$

$$I_7 = -(1+\beta)\beta\chi \int_0^1 \frac{1}{W^{1-\beta}} r^{n-1} \rho u (\partial_x T) \partial_x (r^{n-1} u)\,,$$

$$I_8 = (n-1)(1+\beta)\beta\chi \int_0^1 \frac{1}{W^{1-\beta}} r^{n-2} u^2 \partial_x T\,,$$

$$I_9 = (1+\beta) \int_0^1 (f \circ r) u W^{\beta}\,.$$

Or, compte tenu de la relation

$$\frac{1}{W^{1-\beta}} \leqslant 2^{1-\beta} \frac{1}{|u|^{2-2\beta}}\,,$$

on a

$$I_1 \leqslant \frac{1}{4}(1+\beta)\beta\chi c_V \int_0^1 \rho \frac{1}{W^{1-\beta}} r^{2n-2} (\partial_x T)^2 +$$

$$+(1+\beta)\beta c_V \frac{1}{\chi} \mu^2 \frac{2^{1-\beta}}{r_\Gamma^{2\beta(n-1)}} \int_0^1 \rho r^{2\beta(n-1)} |u|^{2\beta} (\partial_x (r^{n-1} u))^2\,,$$

$$I_2 \leqslant \frac{1}{4}(1+\beta)\beta\chi c_V \int_0^1 \rho \frac{1}{W^{1-\beta}} r^{2n-2} (\partial_x T)^2 + (1+\beta)\beta c_V R^2 \frac{2^{1-\beta}}{\chi} \int_0^1 \rho |u|^{2\beta} T^2\,,$$

$$I_3 \leqslant \frac{1}{2}(1+\beta)\beta\mu \int_0^1 \rho \frac{1}{W^{1-\beta}} r^{2n-2} u^2 (\partial_x u)^2 + (n-1)^2 \frac{1}{2^\beta}(1+\beta)\beta\mu \int_0^1 \frac{1}{\rho r^2} |u|^{2(1+\beta)},$$

$$I_4 \leqslant \frac{1}{4}(1+\beta)\beta\mu \int_0^1 \rho \frac{1}{W^{1-\beta}} r^{2n-2} u^2 (\partial_x u)^2 + (1+\beta)\beta \frac{1}{\mu} R^2 2^{1-\beta} \int_0^1 \rho |u|^{2\beta} T^2,$$

$$I_5 \leqslant \frac{1}{8}(1+\beta)\beta\chi c_V \int_0^1 \rho \frac{1}{W^{1-\beta}} r^{2n-2} (\partial_x T)^2 +$$

$$+ 2^{4-\beta}(1+\beta)\beta(n-1)^2 c_V \frac{1}{\chi} \eta^2 \int_0^1 \frac{1}{\rho r^2} |u|^{2(1+\beta)},$$

$$I_6 \leqslant \frac{1}{4}(1+\beta)\beta\mu \int_0^1 \rho \frac{1}{W^{1-\beta}} r^{2n-2} u^2 (\partial_x u)^2 +$$

$$+ 2^{3-\beta}(1+\beta)\beta(n-1)^2 \frac{1}{\mu} \eta^2 \int_0^1 \frac{1}{\rho r^2} |u|^{2(1+\beta)},$$

$$I_7 \leqslant \frac{1}{8}(1+\beta)\beta\chi c_V \int_0^1 \rho \frac{1}{W^{1-\beta}} r^{2n-2} (\partial_x T)^2 +$$

$$+ 2^{2-\beta}(1+\beta)\beta\chi \frac{1}{c_V r_\Gamma^{2\beta(n-1)}} \int_0^1 \rho r^{2\beta(n-1)} |u|^{2\beta} (\partial_x (r^{n-1} u))^2,$$

$$I_8 \leqslant \frac{1}{8}(1+\beta)\beta\chi c_V \int_0^1 \rho \frac{1}{W^{1-\beta}} r^{2n-2} (\partial_x T)^2 +$$

$$+ (n-1)^2 2^{2-\beta}(1+\beta)\beta\chi \frac{1}{c_V} \int_0^1 \frac{1}{\rho r^2} |u|^{2(1+\beta)},$$

$$I_9 \leqslant \frac{1-\beta}{2} + (1+\beta)(\sup|f|)^2 K_1 + \beta \int_0^1 W^{1+\beta}.$$

Donc, on déduit de (4.14) qu'il y a des constantes finies $C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}$ telles que

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 W^{1+\beta} + \frac{1}{8}(1+\beta)\beta\chi c_V \int_0^1 \rho\,\frac{1}{W^{1-\beta}}\,r^{2n-2}(\partial_x T)^2 \leqslant \tag{4.15}$$

$$\leqslant C_{11}\int_0^1 \rho r^{2\beta(n-1)}|u|^{2\beta}(\partial_x(r^{n-1}u))^2 + C_{12}\int_0^1 \rho|u|^{2\beta}T^2 +$$

$$+C_{13}\int_0^1 \frac{1}{\rho r^2}|u|^{2(1+\beta)} + C_{14} + \beta\int_0^1 W^{1+\beta}.$$

Pour tirer de (4.15) à l'aide de (4.12) une estimation utile, nous avons besoin encore d'une inégalité s'obtenant de (1.25). Pour cela, nous allons d'abord étabilir la relation suivante:

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} r^{((1+2\beta)(n-1)-1)/2}|u|^{1+\beta} \leqslant \tag{4.16}$$

$$\leqslant (1+\beta)\frac{1}{n^{1/2}}\left(\int_0^1 \rho r^{2\beta(n-1)}|u|^{2\beta}(\partial_x(r^{n-1}u))^2\right)^{1/2}.$$

On a en effet

$$r^{((1+2\beta)(n-1)-1)/2}|u|^{1+\beta} = \frac{1}{r^{n/2}}\int_0^x \partial_x((r^{n-1}|u|)^{1+\beta}) \leqslant$$

$$\leqslant (1+\beta)\frac{1}{r^{n/2}}\left(\int_0^x \frac{1}{\rho}\right)^{1/2}\left(\int_0^x \rho r^{2\beta(n-1)}|u|^{2\beta}(\partial_x(r^{n-1}u))^2\right)^{1/2}$$

et d'autre part

$$\int_0^x \frac{1}{\rho} = \frac{1}{n}(r^n - r_\Gamma^n) \leqslant \frac{1}{n}r^n$$

(voir (1.22)). On en déduit (4.16).

Comme $\int_0^1 \frac{1}{\rho r^{(1+(1+2\beta)(n-1))}}$ est uniformément bornée (voir (1.22), (2.3); si $n = 1$

alors voir aussi (3.18)), on a en vertu de (4.16) l'inégalité

$$\int_0^1 \frac{1}{\rho r^2}|u|^{2(1+\beta)} \leq C_{15}\int_0^1 \rho r^{2\beta(n-1)}|u|^{2\beta}(\partial_x(r^{n-1}u))^2$$

avec une constante finie C_{15}. Par suite, (4.15) se réduit à

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 W^{1+\beta} + \frac{1}{8}(1+\beta)\beta\chi c_V\int_0^1 \rho\frac{1}{W^{1-\beta}}r^{2n-2}(\partial_x T)^2 \leq C_{14} + \beta\int_0^1 W^{1+\beta} + \tag{4.17}$$

$$+C_{12}\int_0^1 \rho|u|^{2\beta}T^2 + (C_{11}+C_{13}C_{15})\int_0^1 \rho r^{2\beta(n-1)}|u|^{2\beta}(\partial_x(r^{n-1}u))^2 .$$

D'autre part, on remarque que

$$\partial_x(r^{(1+2\beta)(n-1)}u|u|^{2\beta}) = (1+2\beta)r^{2\beta(n-1)}|u|^{2\beta}\partial_x(r^{n-1}u),$$

$$r^{2\beta(n-1)}u|u|^{2\beta}\partial_t u = \frac{1}{2(1+\beta)}\partial_t(r^{2\beta(n-1)}|u|^{2+2\beta}) - \frac{2\beta(n-1)}{2(1+\beta)}r^{2\beta(n-1)-1}u|u|^{2+2\beta}.$$

Donc, si on intègre de $x=0$ à $x=1$ l'équation (1.25) multipliée par $r^{2\beta(n-1)}u|u|^{2\beta}$ en tenant compte des conditions (1.28), (1.30), on a

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 r^{2\beta(n-1)}|u|^{2+2\beta} + 2(1+\beta)(1+2\beta)\mu\int_0^1 r^{2\beta(n-1)}\rho|u|^{2\beta}(\partial_x(r^{n-1}u))^2 = \tag{4.18}$$

$$=2\beta(n-1)\int_0^1 r^{2\beta(n-1)-1}u|u|^{2+2\beta} + 2(1+\beta)(1+2\beta)R\int_0^1 r^{2\beta(n-1)}\rho T|u|^{2\beta}\partial_x(r^{n-1}u) +$$

$$+2(1+\beta)\int_0^1 (f\circ r)r^{2\beta(n-1)}u|u|^{2\beta} + 4(1+\beta)(n-1)\eta[r^{(1+2\beta)(n-1)-1}|u|^{2+2\beta}]|_{x=1} .$$

On remarque d'abord que, en vertu de (4.16), on a

$$2(1+\beta)(1+2\beta)\mu\int_0^1 r^{2\beta(n-1)}\rho|u|^{2\beta}(\partial_x(r^{n-1}u))^2 -$$

$$-4(1+\beta)(n-1)\eta[r^{(1+2\beta)(n-1)-1}|u|^{2+2\beta}]|_{x=1} \geq \gamma_1\int_0^1 r^{2\beta(n-1)}\rho|u|^{2\beta}(\partial_x(r^{n-1}u))^2 ,$$

où

$$\gamma_1 = 2(1+\beta)\Big[(1+2\beta)\mu - 2\,\frac{n-1}{n}\,(1+\beta)^2\,\eta\Big] > 0\,, \tag{4.19}$$

la positivité de γ_1 étant une conséquence de (4.2). On a d'autre part

$$2\beta(n-1)\int_0^1 r^{2\beta(n-1)-1}u|u|^{2+2\beta} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\,\gamma_1\int_0^1 r^{2\beta(n-1)}\rho\,|u|^{2\beta}(\partial_x(r^{n-1}u))^2 + C_{16}\int_0^1 r^{2\beta(n-1)}\,|u|^{2(1+\beta)}\,,$$

$$2(1+\beta)(1+2\beta)R\int_0^1 r^{2\beta(n-1)}\rho T|u|^{2\beta}\partial_x(r^{n-1}u) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\,\gamma_1\int_0^1 r^{2\beta(n-1)}\rho\,|u|^{2\beta}(\partial_x(r^{n-1}u))^2 + C_{17}\int_0^1 r^{2\beta(n-1)}\rho\,|u|^{2\beta}T^2\,,$$

$$2(1+\beta)\int_0^1 (f\circ r)\,r^{2\beta(n-1)}\,|u|^{1+2\beta} \leqslant C_{18} + C_{19}\int_0^1 r^{2\beta(n-1)}\,|u|^{2+2\beta}$$

avec

$$C_{16} = 8\,\frac{1}{\gamma_1}\,\beta^2(n-1)^2(1+\beta)^2\,\frac{1}{n}\,K_1 r_\Gamma^{-n}\,,\qquad C_{17} = 4\,\frac{1}{\gamma_1}\,(1+\beta)^2(1+2\beta)^2 R^2\,,$$

$$C_{18} = (\sup|f|)K_4^{2\beta(n-1)}\,,\qquad C_{19} = (1+2\beta)(\sup|f|)\,.$$

Donc, (4.18) se réduit à

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 r^{2\beta(n-1)}\,|u|^{2+2\beta} + \frac{1}{2}\,\gamma_1\int_0^1 r^{2\beta(n-1)}\rho\,|u|^{2\beta}(\partial_x(r^{n-1}u))^2 \leqslant \tag{4.20}$$

$$\leqslant C_{17}\int_0^1 r^{2\beta(n-1)}\rho\,|u|^{2\beta}T^2 + (C_{16}+C_{19})\int_0^1 r^{2\beta(n-1)}\,|u|^{2+2\beta} + C_{18}\,.$$

En multipliant maintenant (4.20) par $4(1/\gamma_1)(C_{11}+C_{13}C_{15})$ et en l'adjoignant à

(4.17), on a

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^1 W^{1+\beta} + \gamma_2 \int_0^1 r^{2\beta(n-1)}|u|^{2+2\beta}\right] + \gamma_3 \int_0^1 \rho \frac{1}{W^{1-\beta}} r^{2n-2}(\partial_x T)^2 + \tag{4.21}$$

$$+\gamma_4 \int_0^1 r^{2\beta(n-1)}\rho |u|^{2\beta}(\partial_x(r^{n-1}u))^2 \leqslant C_{20}\int_0^1 r^{2\beta(n-1)}|u|^{2+2\beta} +$$

$$+C_{21}\int_0^1 \rho |u|^{2\beta}T^2 + \beta \int_0^1 W^{1+\beta} + C_{22}$$

avec des constantes positives finies $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, C_{20}, C_{21}, C_{22}$. Comme on a

$$\int_0^1 \rho |u|^{2\beta}T^2 \leqslant K_3 K_R^{1/(2+\beta)} M_T^*(t)^{1+\beta}\int_0^1 |u|^{2\beta}\, T^{1-\beta} \leqslant \gamma_5 M_T^*(t)^{1+\beta}$$

avec

$$\gamma_5 = 2^\beta c_V^{-(1-\beta)} K_1 K_3 K_R^{1/(2+\beta)},$$

on déduit de (4.12) que l'on a

$$\int_0^1 \rho |u|^{2\beta}\, T^2 \leqslant \varepsilon\gamma_5 \frac{1}{r_\Gamma^{2n-2}}\int_0^1 \rho \frac{1}{W^{1-\beta}} r^{2n-2}(\partial_x T)^2 + \tag{4.22}$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^{1+\beta}}\gamma_5 C_{10}\frac{1}{r_\Gamma^{2n-2}}\int_0^t\int_0^1 \rho\frac{1}{W^{1-\beta}} r^{2n-2}(\partial_x T)^2 + \gamma_5\left(2C_5^{1+\beta} + \frac{1}{\varepsilon^{1+\beta}}C_9\right)$$

pour tout $\varepsilon > 0$. On peut choisir en particulier

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\gamma_3 \frac{1}{C_{21}\gamma_5} r_\Gamma^{2n-2} \equiv \varepsilon_1 .$$

En substituant $\varepsilon = \varepsilon_1$ dans (4.22) et en l'adjoignant à (4.21), on obtient

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^1 W^{1+\beta} + \gamma_2 \int_0^1 r^{2\beta(n-1)}|u|^{2+2\beta}\right] + \frac{1}{2}\gamma_3 \int_0^1 \rho \frac{1}{W^{1-\beta}} r^{2n-2}(\partial_x T)^2 + \tag{4.23}$$

$$+\gamma_4 \int_0^1 r^{2\beta(n-1)}\rho |u|^{2\beta}(\partial_x(r^{n-1}u))^2 \leqslant C_{20}\int_0^1 r^{2\beta(n-1)}|u|^{2+2\beta} +$$

$$+C_{24}\int_0^t\int_0^1 \rho\frac{1}{W^{1-\beta}} r^{2n-2}(\partial_x T)^2 + \beta\int_0^1 W^{1+\beta} + C_{25},$$

où C_{24} et C_{25} sont deux constantes finies. En appliquant enfin le lemme de Gronwall à (4.23), on voit qu'il existe un nombre fini K_5 tel que

$$\sup_{0\le t\le \bar t}\int_0^1 r^{2\beta(n-1)}|u|^{2+2\beta}+\sup_{0\le t\le \bar t}\int_0^1 W^{1+\beta}+ \\ +\int_0^{\bar t}\int_0^1 \rho\frac{1}{W^{1-\beta}}r^{2n-2}(\partial_x T)^2+\int_0^{\bar t}\int_0^1 \rho r^{2\beta(n-1)}|u|^{2\beta}(\partial_x(r^{n-1}u))^2\le K_5 \tag{4.24}$$

Finalement on déduit de (4.11) et de (4.24) (voir aussi (2.3)) que

$$\int_0^{\bar t} M_T^*(t)\,dt\le K_6 \tag{4.25}$$

avec une constante finie K_6. Or, si on majore l'intégrale de $M_T^*(t)$ dans (4.10) par (4.25), il en résulte que

$$M_T^*(t)^{2+\beta}\le 4C_5^{2+\beta}+4C_6^{2+\beta}(1+C_4K_6)\int_0^1\rho\frac{1}{W^{1-\beta}}(\partial_x T)^2,$$

d'où, grâce à (2.3), (4.24),

$$\int_0^{\bar t} M_T^*(t)^{2+\beta}\,dt\le K_7 \tag{4.26}$$

avec une constante finie K_7.

Les relations (4.8) et (4.25) entraînent enfin que

$$\sup\left\{\frac{1}{J(x,t)}\ \Big|\ 0\le x\le 1,\ 0\le t\le \bar t\right\}\le K_8, \tag{4.27}$$

où

$$K_8=C_3(1+C_4K_6).$$

5. – Estimations *a priori* (III).

On multiplie d'abord l'équation (1.25) par u. En l'intégrant de $x=0$ à $x=1$ et en tenant compte des conditions (1.28), (1.30), on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2+\mu\int_0^1\rho(\partial_x(r^{n-1}u))^2=R\int_0^1\rho T\partial_x(r^{n-1}u)+\int_0^1(f\circ r)u+ \\ +2(n-1)\eta r^{n-2}u^2|_{x=1}. \tag{5.1}$$

D'une manière analogue à la déduction de (4.16), on vérifie aisément que

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} r^{(n-2)/2}|u| \leq \frac{1}{n^{1/2}}\left(\int_0^1 \rho(\partial_x(r^{n-1}u))^2\right)^{1/2}. \tag{5.2}$$

En posant

$$\gamma_6 = \mu - 2\,\frac{n-1}{n}\,\eta > 0 \tag{5.3}$$

(voir (2.11)), on déduit de (5.1) et de (5.2) que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2 + \gamma_6 \int_0^1 \rho(\partial_x(r^{n-1}u))^2 \leq R\int_0^1 \rho T\partial_x(r^{n-1}u) + \int_0^1 (f\circ r)u\,. \tag{5.4}$$

Or, comme, en vertu de (3.3), (3.12), (4.1), on a

$$R\int_0^1 \rho T\partial_x(r^{n-1}u) \leq \frac{1}{2}\gamma_6 \int_0^1 \rho(\partial_x(r^{n-1}u))^2 + C_{26}M_T^*(t)\,,$$

$$\int_0^1 (f\circ r)u \leq \frac{1}{2}(\sup|f|)^2 + K_1$$

avec une constante finie C_{26}, l'inégalité (5.4) se réduit à

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2 + \gamma_6\int_0^1 \rho(\partial_x(r^{n-1}u))^2 \leq 2C_{26}M_T^*(t) + (\sup|f|)^2 + 2K_1\,.$$

En intégrant cette inégalité de $t = 0$ à $t = \bar{t}$ et en rappelant (4.25), on voit qu'il existe une constante finie K_9 telle que

$$\int_0^{\bar{t}}\int_0^1 \rho(\partial_x(r^{n-1}u))^2 \leq K_9\,. \tag{5.5}$$

On va maintenant considérer l'intégrale de $x = 0$ à $x = 1$ de l'équation (1.25) multipliée par

$$r^{n-1}\partial_x(\rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT))\,.$$

Pour l'exprimer sous une forme convenable, on remarque que

$$(\partial_t u)r^{n-1} = (\partial_t(r^{(n-2)/2}u))r^{n/2} - \frac{n-2}{2}r^{n-2}u^2\,,$$

$$\int_0^1 (\partial_t(r^{(n-2)/2}u))\, r^{n/2}\, \partial_x(\rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT)) =$$

$$= -\int_0^1 (\partial_t\partial_x(r^{n-1}u))\,\rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT) + \frac{n}{2}\int_0^1 (\partial_x(r^{n-2}u^2))\,\rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT) +$$

$$+(n-1)\,\eta[\partial_t(r^{n-2}u^2)]|_{x=1}\,,$$

$$-\int_0^1 (\partial_t\partial_x(r^{n-1}u))\,\rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT) = -\frac{1}{2\mu}\frac{d}{dt}\int_0^1 \rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT)^2 +$$

$$+\frac{1}{2\mu}\int_0^1 (\partial_t\rho)(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT)^2 - \frac{R}{\mu}\int_0^1 (\partial_t T)\,\rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT)\,.$$

Grâce à ces relations, l'intégrale de $x = 0$ à $x = 1$ de l'équation (1.25) multipliée par $r^{n-1}\partial_x(\rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT))$ s'écrit, si on remplace $\partial_t\rho$ et $\partial_t T$ par les seconds membres de (1.26) et de (1.27), sous la forme suivante:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^1 \frac{1}{\mu}\,\rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT)^2\,dx - 2(n-1)\,\eta r^{n-2}u^2\,|_{x=1}\right] + \tag{5.6}$$

$$+\int_0^1 [r^{n-1}\partial_x(\rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT))]^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{6} H_k\,,$$

où

$$H_1 = -(n-2)\int_0^1 \frac{1}{r}\,u^2 r^{n-1}\partial_x(\rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT))\,,$$

$$H_2 = n\int_0^1 (\partial_x(r^{n-2}u^2))\,\rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT)\,,$$

$$H_3 = -\frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{2R}{c_V}\right)\int_0^1 (\partial_x(r^{n-1}u))\,\rho^2(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT)^2\,,$$

$$H_4 = 2\,\frac{R\chi}{c_V\mu}\int_0^1 (\partial_x(\rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT)))\,r^{2n-2}\rho\partial_x T\,,$$

$$H_5 = 4(n-1)\frac{R\eta}{c_V\mu}\int_0^1 \rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT)\,\partial_x(r^{n-2}u^2)\,,$$

$$H_6 = -2\int_0^1 (f\circ r)\,r^{n-1}\partial_x(\rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT))\,.$$

On introduit maintenant

$$\Lambda(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^1 \rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT)^2\,dx - 2(n-1)\,\eta r^{n-2}u^2\,|_{x=1} + \tag{5.7}$$

$$+\mu\alpha\,\frac{(n+\alpha)}{(n-\alpha)}\,\gamma_\Lambda\,,$$

où

$$\gamma_\Lambda = \frac{R^2K_1^2}{\mu^2 c_V^2 r_\Gamma^n}\,, \tag{5.8}$$

et $\alpha = 2(n-1)\,\eta/\mu$ comme dans (3.8). D'une manière analogue à la déduction de (4.16) (ou (5.2)), on a, compte tenu de (3.3),

$$|r^{(n-2)/2}u| = \frac{1}{\mu}\left|\frac{1}{r^{n/2}}\int_0^x (\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT) + \frac{R}{r^{n/2}}\int_0^x T\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n^{1/2}\mu}\left(\int_0^1 \rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT)^2\right)^{1/2} + \frac{RK_1}{\mu r_\Gamma^{n/2} c_V}\,,$$

d'où

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} r^{n-2}u^2 \leqslant \tag{5.9}$$

$$\leqslant \frac{1}{n}(1+\varepsilon)\frac{1}{\mu^2}\int_0^1 \rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT)^2 + \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\gamma_\Lambda \qquad \forall\varepsilon > 0\,.$$

Si on pose $\varepsilon = (n-\alpha)/2\alpha$ dans (5.9), (α étant comme dans (3.8)), on a

$$2(n-1)\eta r^{n-2}u^2|_{x=1} \leqslant \frac{n+\alpha}{2n\mu}\int_0^1 \rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u)-RT)^2 + \mu\alpha\left(\frac{n+\alpha}{n-\alpha}\right)\gamma_\Lambda\,.$$

Donc, en rappelant la définition de $\Lambda(t)$ (5.7), on obtient

$$\frac{n-\alpha}{2n\mu}\int_0^1 \rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u)-RT)^2 \leqslant \Lambda(t)\,. \tag{5.10}$$

Si on pose $\varepsilon = 1$ dans (5.9), il résulte de (5.9) et de (5.10) que

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} r^{n-2}u^2 \leqslant \frac{4}{\mu(n-\alpha)}\Lambda(t) + 2\gamma_\Lambda\,. \tag{5.11}$$

Pour majorer H_3, on va utiliser aussi la relation

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|\rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u)-RT)| \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{0\leqslant x\leqslant 1}|\rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u)-RT)| + \int_0^1 |\partial_x(\rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u)-RT))| \leqslant$$

$$\leqslant (K_R K_3)^{1/2}\left(\int_0^1 \rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u)-RT)^2\right)^{1/2} +$$

$$+\frac{1}{r_\Gamma^{n-1}}\left(\int_0^1 [r^{n-1}\partial_x(\rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u)-RT))]^2\right)^{1/2}.$$

Alors, à l'aide de (5.2), (5.10), (5.11), on a

$$H_1 \leqslant \frac{1}{4}\int_0^1 [r^{n-1}\partial_x(\rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u)-RT))]^2 + C_{27}\int_0^1 \rho(\partial_x(r^{n-1}u))^2\,,$$

$$H_2 \leqslant C_{28}\Lambda(t)^{1/2}\int_0^1 \rho(\partial_x(r^{n-1}u))^2\,,$$

$$H_3 \leqslant \frac{1}{4}\int_0^1 [r^{n-1}\partial_x(\rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u)-RT))]^2 + C_{29}\Lambda(t)\left(\int_0^1 \rho(\partial_x(r^{n-1}u))^2\right)^{1/2} +$$

$$+C_{30}\Lambda(t)\int_0^1 \rho(\partial_x(r^{n-1}u))^2\,,$$

$$H_4 \leq \frac{1}{4}\int_0^1 [r^{n-1}\partial_x(\rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT))]^2 + C_{31}\int_0^1 \rho r^{2n-2}(\partial_x T)^2 ,$$

$$H_5 \leq C_{32}\Lambda(t)^{1/2}\int_0^1 \rho(\partial_x(r^{n-1}u))^2 ,$$

$$H_6 \leq \frac{1}{4}\int_0^1 [r^{n-1}\partial_x(\rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT))]^2 + 2(\sup|f|)^2 ,$$

où $C_{27}, \ldots, C_{32}$ sont des constantes finies. Grâce à ces relations et à la définition de $\Lambda(t)$ (5.7), on déduit de (5.6) que

$$(5.12)\qquad \frac{d}{dt}\Lambda(t) + \int_0^1 [r^{n-1}\partial_x(\rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT))]^2 \leq C_{33}\int_0^1 \rho(\partial_x(r^{n-1}u))^2 +$$
$$+ C_{34}\left(1 + \int_0^1 \rho(\partial_x(r^{n-1}u))^2\right)\Lambda(t) + C_{35}\int_0^1 \rho r^{2n-2}(\partial_x T)^2 + 2(\sup|f|)^2 ,$$

où C_{33}, C_{34}, C_{35} sont des constantes finies.

On considère maintenant l'intégrale de $x = 0$ à $x = 1$ de l'équation (3.1) multipliée par $W = c_V T + (1/2)u^2$. Compte tenu des conditions aux limites (1.28)-(1.31), on a

$$(5.13)\qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 W^2 + \chi c_V\int_0^1 \rho r^{2n-2}(\partial_x T)^2 + \mu\int_0^1 \rho r^{2n-2}u^2(\partial_x u)^2 =$$
$$= -(n-1)\mu\int_0^1 r^{n-2}u^3\partial_x u - c_V\int_0^1 \rho r^{n-1}u(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT)\partial_x T +$$
$$+ 2(n-1)\eta c_V\int_0^1 r^{n-2}u^2\partial_x T + 2(n-1)\eta\int_0^1 r^{n-2}u^3\partial_x u +$$
$$+ R\int_0^1 \rho r^{n-1}Tu^2\partial_x u - \chi\int_0^1 \rho r^{2n-2}u(\partial_x T)\partial_x u + \int_0^1 (f\circ r)uW .$$

On rappelle que, grâce à l'hypothèse (2.3) et à l'estimation (3.18), il existe des nombres finis γ_7, γ_8 tels que

$$\int_0^1 \frac{1}{\rho r^{2n-2}} \leqslant \gamma_7 , \qquad \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} \frac{1}{r^{n-2}} \leqslant \gamma_8 . \tag{5.14}$$

A l'aide de (5.2), (5.10), (5.11), (5.14), on a

$$-(n-1)\mu \int_0^1 r^{n-2} u^3 \partial_x u \leqslant \frac{\mu}{4} \int_0^1 \rho r^{2n-2} u^2 (\partial_x u)^2 +$$

$$+ \frac{(n-1)^2}{n} \mu \gamma_7 \left(\int_0^1 \rho (\partial_x (r^{n-1} u))^2 \right) \left(\frac{4}{\mu(n-\alpha)} \Lambda(t) + 2\gamma_\Lambda \right),$$

$$-c_V \int_0^1 \rho r^{n-1} u (\mu \partial_x (r^{n-1} u) - RT) \partial_x T \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4} \chi c_V \int_0^1 \rho r^{2n-2} (\partial_x T)^2 + 2 \frac{\mu c_V}{\chi(n-\alpha)} \gamma_8 \Lambda(t) \int_0^1 \rho (\partial_x (r^{n-1} u))^2 ,$$

$$2(n-1) \eta c_V \int_0^1 r^{n-2} u^2 \partial_x T \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4} \chi c_V \int_0^1 \rho r^{2n-2} (\partial_x T)^2 + C_{36} \left(\int_0^1 \rho (\partial_x (r^{n-1} u))^2 \right) \left(\frac{4}{\mu(n-\alpha)} \Lambda(t) + 2\gamma_\Lambda \right),$$

$$2(n-1) \eta \int_0^1 r^{n-2} u^3 \partial_x u \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\mu}{4} \int_0^1 \rho r^{2n-2} u^2 (\partial_x u)^2 + C_{37} \left(\int_0^1 \rho (\partial_x (r^{n-1} u))^2 \right) \left(\frac{4}{\mu(n-\alpha)} \Lambda(t) + 2\gamma_\Lambda \right),$$

$$R \int_0^1 \rho r^{n-1} T u^2 \partial_x u \leqslant \frac{\mu}{4} \int_0^1 \rho r^{2n-2} u^2 (\partial_x u)^2 + C_{38} \left(\int_0^1 \rho (\partial_x (r^{n-1} u))^2 \right) \int_0^1 W^2 ,$$

$$-\chi\int_0^1 \rho r^{2n-2}u(\partial_x T)\,\partial_x u =$$

$$= -\chi\int_0^1 \rho r^{n-1}(\partial_x T)\left(\frac{1}{\mu}\,u(\mu\partial_x(r^{n-1}u)-RT)+\frac{R}{\mu}\,uT-(n-1)\,\frac{1}{\rho r}\,u^2\right)\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\,\chi c_V\int_0^1 \rho r^{2n-2}(\partial_x T)^2 + C_{39}\Lambda(t)\int_0^1 \rho(\partial_x(r^{n-1}u))^2 +$$

$$+C_{40}\left(\int_0^1 \rho(\partial_x(r^{n-1}u))^2\right)\int_0^1 W^2 + C_{41}\left(\int_0^1 \rho(\partial_x(r^{n-1}u))^2\right)\left(\frac{4}{\mu(n-\alpha)}\,\Lambda(t)+2\gamma_\Lambda\right);$$

$$\int_0^1 (f\circ r)uW \leqslant \frac{1}{2}\,(\sup|f|)^2 K_1 + \int_0^1 W^2\,,$$

où $C_{36},\ \ldots,\ C_{41}$ sont des constantes finies.

Grâce à ces inégalités, on déduit de (5.13) que

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 W^2 + \frac{1}{2}\,\chi c_V\int_0^1 \rho r^{2n-2}(\partial_x T)^2 + \frac{\mu}{2}\int_0^1 \rho r^{2n-2}u^2(\partial_x u)^2 \leqslant \tag{5.15}$$

$$\leqslant C_{42}\Lambda(t)\int_0^1 \rho(\partial_x(r^{n-1}u))^2 + \left(C_{43}\left(\int_0^1 \rho(\partial_x(r^{n-1}u))^2\right)+2\right)\int_0^1 W^2 +$$

$$+C_{44}\int_0^1 \rho(\partial_x(r^{n-1}u))^2 + (\sup|f|)^2 K_1$$

avec des constantes finies $C_{42},\,C_{43},\,C_{44}$.

En multipliant (5.15) par $4C_{35}$ et en l'adjoignant à (5.12) multipliée par χc_V, on obtient

$$\frac{d}{dt}\left[\chi c_V\Lambda(t)+4C_{35}\int_0^1 W^2\right] + \chi c_V\int_0^1 [r^{n-1}\partial_x(\rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u)-RT))]^2 + \tag{5.16}$$

$$+\chi c_V C_{35}\int_0^1 \rho r^{2n-2}(\partial_x T)^2 + 2\mu C_{35}\int_0^1 \rho r^{2n-2}u^2(\partial_x u)^2 \leqslant C_{45}\int_0^1 \rho(\partial_x(r^{n-1}u))^2 +$$

$$+C_{46}\left(1+\int_0^1 \rho(\partial_x(r^{n-1}u))^2\right)\Lambda(t)+4C_{35}\left(C_{43}\left(\int_0^1 \rho(\partial_x(r^{n-1}u))^2\right)+2\right)\int_0^1 W^2+C_{47}$$

où C_{45}, C_{46}, C_{47} sont des constantes finies.

Si on applique le lemme de Gronwall à (5.16) en utilisant (5.5) et si on rappelle (4.3), (5.10), alors on voit qu'il existe un nombre fini K_{10} tel que

$$\sup_{0\le t\le \bar t}\int_0^1 \rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u)-RT)^2+\sup_{0\le t\le \bar t}\int_0^1\left(c_VT+\frac{1}{2}u^2\right)^2+ \tag{5.17}$$

$$+\int_0^{\bar t}\int_0^1[r^{n-1}\partial_x(\rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u)-RT))]^2+\int_0^{\bar t}\int_0^1\rho r^{2n-2}(\partial_xT)^2+$$

$$+\int_0^{\bar t}\int_0^1\rho r^{2n-2}u^2(\partial_xu)^2\le K_{10}\,.$$

Si on exprime $\partial_t u$ par (1.25), de l'estimation (5.17) et de la condition (2.10) il résulte que

$$\int_0^{\bar t}\int_0^1(\partial_tu)^2\le 2\mu^2K_{10}+2\bar t(\sup|f|)^2\,. \tag{5.18}$$

De (5.17) résulte également l'estimation

$$\sup_{0\le t\le \bar t}\int_0^1\rho(\partial_x(r^{n-1}u))^2\le\frac{2}{\mu^2}K_{10}\left(1+\left(\frac{R}{c_V}\right)^2K_RK_3\right) \tag{5.19}$$

(voir (3.12), (3.22)).

6. – Démonstration du théorème A.

Dans ce paragraphe on va démontrer le théorème A. Pour cela, on va établir d'abord l'existence et l'unicité de la solution sous l'hypothèse de la régularité des données. Plus précisement on suppose que

$$u_0,\,T_0\in C^{2+\nu}([0,1])\,,\quad \rho_0\in C^{1+\nu}([0,1])\,,\quad f\in C^2([r_\Gamma,\infty[)\quad \text{avec } 0<\nu<1\,, \tag{6.1}$$

$$\inf_{0\le x\le 1}\rho_0(x)>0\,,\qquad \inf_{0\le x\le 1}T_0(x)>0\,. \tag{6.2}$$

On suppose en outre les conditions de compatibilité:

$$(6.3)\qquad u_0\,|_{x=0}=0\,,\qquad \left[\mu\rho_0\partial_x(r_0^{n-1}u_0)-2(n-1)\eta\frac{1}{r_0}u_0-R\rho_0T_0\right]\Big|_{x=1}=0\,,$$

$$(6.4)\qquad \partial_xT_0\,|_{x=0,1}=0\,,$$

où r_0 est définie comme dans (2.2). On a alors la

PROPOSITION 1. – *Sous les hypothèses* (2.3), (2.4), (2.10), (2.11), (6.1)-(6.4), *pour tout* $\bar t\in]0,\infty[$ *donné arbitrairement, le système d'équations* (1.25)-(1.27) *avec les conditions* (1.28)-(1.32), *où r est définie par les relations* (2.1), (2.2), *admet dans l'intervalle* $[0,\bar t]$ *une solution* (u,ρ,T) *et une seule et on a*

$$(6.5)\qquad u,\,T\in C^{2+\nu,1+\nu/2}([0,1]\times[0,\bar t])\,,\qquad \rho\in C^{1+\nu,1+\nu/2}([0,1]\times[0,\bar t])\,.\qquad\blacksquare$$

DÉMONSTRATION. – Elle suit l'idée de la démonstration du théorème 2 de [3], dans lequel Kazhikhov a démontré un analogue résultat pour $n=1$ et avec la condition de la surface libre (1.30) même à l'extrémité $x=0$.

En effet, si $n\leq 3$, il résulte immédiatement de [9], [10] (voir aussi [2]) qu'il existe un nombre $t_1>0$ tel que le problème admet dans l'intervalle $[0,t_1]$ une solution (u,ρ,T) et une seule dans la même classe que (6.5) (où on doit remplacer $\bar t$ par t_1). Pour généraliser ce résultat de l'existence et l'unicité de la solution locale au cas où $n\geq 4$, il suffit de remplacer dans la démonstration des travaux cités ci-dessus les expressions relatives au système des coordonnées $\{x_1,x_2,x_3\}$ par celles relatives à $\{x_1,\dots,x_n\}$. On vérifie aisément que la démonstration rapportée au système des coordonnées $\{x_1,\dots,x_n\}$ avec des modifications évidentes reste vraie.

Or, comme t_1 reste positif pourvu que les normes de u_0, T_0, ρ_0, f dans les espaces indiqués dans (6.1) ainsi que $\sup\limits_{0\leq x\leq 1}(1/\rho_0(x)+1/T_0(x))$ restent finies et que les bornes inférieures de ρ et de T sont strictement positives (voir (3.20), (4.27), (6.2)), pour démontrer la proposition il suffit d'établir la norme finie de la solution (u,ρ,T) dans les espaces indiqués dans (6.5).

On considère d'abord ∂_xJ. En vertu de (3.10) (voir aussi la déduction de (3.11)), on a

$$(6.6)\qquad \partial_xJ=-\frac{1}{\mu}J\left\{\frac{1}{r^{n-1}}u-\frac{1}{r_0^{n-1}}u_0+\int_0^t\left(\frac{n-1}{r^n}u^2-f\circ r\right)\right\}+$$
$$+\frac{R}{\mu^2}J\frac{1}{B}\rho_0\int_0^tT\left(\frac{r(1,0)}{r(1,s)}\right)^{\alpha}\left\{\frac{1}{r^{n-1}}u-\frac{1}{r_0^{n-1}}u_0+\int_0^s\left(\frac{n-1}{r^n}u^2-f\circ r\right)\right\}\Phi-$$
$$-\frac{R}{\mu}J\frac{1}{B}(\partial_x\rho_0)\int_0^tT\left(\frac{r(1,0)}{r(1,s)}\right)^{\alpha}\Phi-\frac{R}{\mu}J\frac{1}{B}\rho_0\int_0^t(\partial_xT)\left(\frac{r(1,0)}{r(1,s)}\right)^{\alpha}\Phi\,,$$

où

$$\Phi = \Phi(x, s) = \exp\left(\frac{1}{\mu} \int_0^s \int_x^1 \frac{1}{r^{n-1}} (\partial_t u - f \circ r) \right).$$

Grâce à (2.3), (2.10), (3.11), (3.12), (4.25), (5.2), (5.19), (6.1), (6.2), tous les terms sauf le dernier terme du second membre de (6.6) sont bornés uniformément. D'autre part, grâce à (2.3), (4.27), (5.17), on a

$$\int_0^1 \rho_0 \left(\int_0^t \partial_x T \right)^2 \leq C_{48} \qquad \forall t \in [0, \bar{t}\,]$$

avec une constante finie C_{48}. Donc, compte tenu de la relation

$$\partial_x \rho = (\partial_x J) \rho_0 + J \partial_x \rho_0$$

et des relaitions (3.12), (6.1), il résulte de (6.6) que

$$\sup_{0 \leq t \leq \bar{t}} \int_0^1 (\partial_x \rho(x, t))^2 \, dx \leq C_{49} \tag{6.7}$$

avec une constante finie C_{49}.

Les relations (4.27), (5.17), (6.2), (6.7) entraînent qu'on a

$$\int_0^{\bar{t}} \int_0^1 (\partial_x \rho)^2 (\partial_x (r^{n-1} u) - RT)^2 \leq \tag{6.8}$$

$$\leq \frac{1}{\mu^2} C_{49} K_8^2 \left(\sup \frac{1}{\rho_0} \right)^2 \int_0^{\bar{t}} \sup_{0 \leq x \leq 0} \rho^2 (\mu \partial_x (r^{n-1} u) - RT)^2 \leq C_{50}$$

avec une constante finie C_{50}. Grâce à la condition (6.2), on déduit de (5.17), (6.8) que

$$\partial_x^2 (r^{n-1} u) \in L^2(\,]0, 1[\, \times \,]0, \bar{t}[\,)\,. \tag{6.9}$$

D'autre part, grâce aux relations (1.26), (2.1), (2.3), (3.18), (4.27), (5.17), (6.2), il n'est pas difficile de déduire d'une manière usuelle de l'intégrale de $x = 0$ à $x = 1$ de l'équation (1.27) multipliée par $\partial_x (r^{2n-2} \rho \partial_x T)$ que

$$\partial_x T \in L^\infty(0, \bar{t}; L^2(0, 1)), \qquad \partial_x^2 T, \ \partial_t T \in L^2(\,]0, 1[\, \times \,]0, \bar{t}[\,)\,. \tag{6.10}$$

En outre, en dérivant (1.26) par rapport à x et en tenant compte de (6.7), (6.9), on obtient

$$\partial_x \partial_t \rho \in L^2(\,]0, 1[\, \times \,]0, \bar{t}[\,)\,.$$

Il s'ensuit que

$$\rho \in C^{1/2}([0,1]\times[0,\bar t]), \qquad J=\rho/\rho_0 \in C^{1/2}([0,1]\times[0,\bar t]). \tag{6.11}$$

Si on multiplie par $\partial_t u$ la dérivée par rapport à t de (1.25) et si on l'intègre de $x=0$ à $x=1$, alors, compte tenu de (1.28) et de (1.30), on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 (\partial_t u)^2 + \mu\int_0^1 \rho(\partial_x(r^{n-1}\partial_t u))^2\,dx - 2(n-1)\eta[r^{n-2}(\partial_t u)^2]|_{x=1} =$$

$$= -(n-1)\mu\int_0^1 \rho(\partial_x(r^{n-1}\partial_t u))\,\partial_x(r^{n-2}u^2) + R\int_0^1 \rho(\partial_x(r^{n-1}\partial_t u))\,\partial_t T -$$

$$-\int_0^1 (\partial_x(r^{n-1}\partial_t u))(\partial_t\rho)(\mu\partial_x(r^{n-1}u)-RT) +$$

$$+(n-1)\int_0^1 r^{n-2}u(\partial_t u)\,\partial_x(\rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u)-RT)) + \int_0^1 (f'\circ r)\,u\partial_t u -$$

$$-2(n-1)\eta[r^{n-3}u^2\partial_t u]|_{x=1}.$$

Comme dans la déduction de (5.4), on a

$$\mu\int_0^1 \rho(\partial_x(r^{n-1}\partial_t u))^2 - 2(n-1)\eta[r^{n-2}(\partial_t u)^2]|_{x=1} \geq \gamma_6\int_0^1 \rho(\partial_x(r^{n-1}\partial_t u))^2,$$

où γ_6 est un nombre positif défini par (5.3). Donc, en utilisant des estimations déjà établiées, on peut aisément obtenir

$$\partial_t u \in L^\infty(0,\bar t; L^2(0,1)), \qquad \rho^{1/2}\partial_x(r^{n-1}\partial_t u) \in L^2(]0,1[\times]0,\bar t[),$$

et, en vertu de (1.22), (2.3), (6.2),

$$\partial_t\partial_x u \in L^2(]0,1[\times]0,\bar t[),$$

ce qui entraîne

$$u \in C^{1/2}([0,1]\times[0,\bar t]). \tag{6.12}$$

D'autre part, si on multiplie par $\partial_t T$ la dérivée par rapport à t de (1.27) et si on l'intègre de $x=0$ à $x=1$, alors par une procédure usuelle on peut en tirer sans peine les relations

$$\partial_t T \in L^\infty(0,\bar t; L^2(0,1)), \qquad \rho^{1/2} r^{n-1}\partial_t\partial_x T \in L^2(]0,1[\times]0,\bar t[)$$

et donc

$$T \in C^{1/2}([0,1] \times [0, \bar{t}])\,. \tag{6.13}$$

En outre, si on considère la fonction

$$\Theta(x,t) = \int_0^t (\partial_x T) \left(\frac{r(1,0)}{r(1,s)} \right)^{\alpha} \Phi\,, \tag{6.14}$$

où Φ est comme dans (6.6), et si on majore les différences

$$|\Theta(x,\sigma) - \Theta(x,\tau)| = \left| \int_{\sigma}^{\tau} (\partial_x T) \left(\frac{r(1,0)}{r(1,s)} \right)^{\alpha} \Phi \right|,$$

$$|\Theta(\xi,t) - \Theta(\eta,t)| = \left| \int_0^t \left(\frac{r(1,0)}{r(1,s)} \right)^{\alpha} \int_{\xi}^{\eta} \partial_x ((\partial_x T)\Phi) \right|,$$

en utilisant des estimations obtenues plus haut, on peut obtenir facilement

$$\Theta \in C^{1/2}([0,1] \times [0, \bar{t}])\,. \tag{6.15}$$

A l'aide de (6.12)-(6.15), on déduit de (6.6) que

$$\partial_x J \in C^{1/2}([0,1] \times [0, \bar{t}])\,.$$

Par conséquent, en vertu de (6.1), on a

$$\partial_x \rho \in C^{1/2}([0,1] \times [0, \bar{t}])\,. \tag{6.16}$$

En outre, il résulte immédiatement de (2.1), (6.12) que

$$r \in C^{1/2}([0,1] \times [0, \bar{t}])\,. \tag{6.17}$$

Les relations (6.12), (6.16), (6.17) étant établies, on peut conclure la démonstration de la même manière que dans [3] § 5. C'est-à-dire que, en considérant (1.27) comme équation linéaire en T, on en tire

$$\|T\|_{C^{2+2\nu^*,1+\nu^*}} \leq C_{51} + C_{52} (\|\partial_x u\|_{C^0} + 1) \|\partial_x u\|_{C^{2\nu^*,\nu^*}}$$

avec deux constantes finies C_{51}, C_{52} et $\nu^* = (1/2)\min(\nu, 1/2)$, puis, en considérant (1.25) comme équation linéaire en u, on en tire

$$\|u\|_{C^{2+2\nu^*,1+\nu^*}} \leq C_{53} + C_{54} (\|\partial_x u\|_{C^0} + 1) \|\partial_x u\|_{C^{2\nu^*,\nu^*}}\,.$$

En vertu de (6.12) et des propriétés d'interpolation, on en déduit que

$$u,\, T \in C^{2+2\nu^*,1+\nu^*}([0,1] \times [0, \bar{t}])\,.$$

Si $\nu \leq 1/2$, alors $2\nu^* = \nu$ et donc la proposition est démontrée. Si $\nu > 1/2$, alors en répétant la procédure analogue on atteindra la relation (6.5). La proposition est démontrée (pour les détails, voir [3]). ■

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME A. – Elle suit l'idée de la démonstration du théorème 4 de [1].

Comme dans la démonstration du théorème 4 de [1], on construit une suite $\{u_{0k}, \rho_{0k}, T_{0k}\}$ satisfaisant aux conditions suivantes (6.18)-(6.30):

(6.18) $u_{0k}\,,\quad T_{0k} \in C^{2+\nu}([0,1]) \quad \rho_{0k} \in C^{1+\nu}([0,1])\,, \qquad \forall k,\;\; 0<\nu<1\,,$

(6.19) $\inf_{0 \leqslant x \leqslant 1} \rho_{0k}(x) > 0 \quad \forall k\,,$

(6.20) $\sup_{k \geqslant 1} \big(\sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} \rho_{0k}(x) \big) < \infty\,,$

(6.21) ρ_0 et toutes les ρ_{0k} satisfont à la condition (2.6) avec les mêmes constantes δ, K_A,

(6.22) $K_A \rho_{0k}(x) \geqslant \rho_0(x)$ pour presque tout $x \in [0,1] \quad \forall k\,,$

(6.23) $\sup_{k \geqslant 1} \|u_{0k}\|_{L^4(0,1)} < \infty\,,$

(6.24) $\sup_{k \geqslant 1} \|(\rho_{0k})^{1/2}\, \partial_x u_{0k}\|_{L^2(0,1)} < \infty\,,$

(6.25) $\sup_{k \geqslant 1} \|T_{0k}\|_{L^2(0,1)} < \infty\,,$

(6.26) $\inf_{0 \leqslant x \leqslant 1} T_{0k}(x) > 0 \quad \forall k\,,$

(6.27) $u_{0k}|_{x=0} = 0\,, \qquad \forall k\,,$

(6.28) $$\left[\mu \rho_{0k} \partial_x (r_{0k}^{n-1} u_{0k}) - 2(n-1)\eta \frac{1}{r_{0k}} u_{0k} - R \rho_{0k} T_{0k} \right] \Bigg|_{x=1} = 0 \qquad \forall k\,,$$

(où r_{0k} est définie comme dans (2.2)),

(6.29) $\partial_x T_{0k}|_{x=0,1} = 0 \quad \forall k\,,$

(6.30) $$\begin{cases} u_{0k} \to u_0\,, & T_{0k} \to T_0 \text{ dans } L^2(0,1)\,, \\ u_{0k} \to u_0\,, & \rho_{0k} \to \rho_0 \text{ presque partout dans } [0,1]\,, \\ 1/\rho_{0k} \to 1/\rho_0 & \text{dans } L^1(0,1)\,. \end{cases}$$

On pose en outre

(6.31) $f_k = f * \vartheta_k$, où ϑ_k est une fonction régularisante dont le support est contenu dans $\left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right]$ et f est convenablement prolongée sur $]r_\Gamma - 1, r_\Gamma[$.

D'après la proposition 1, pour tout k, il existe une solution classique (u_k, ρ_k, T_k) du problème (1.25)-(1.32), (2.1)-(2.2) avec les données $(u_{0k}, \rho_{0k}, T_{0k}, f_k)$ et une seule. En outre, les conditions (6.18)-(6.31) garantissent que les estimations *a priori* des paragraphes 3, 4, 5 sont valables pour toutes les solutions (u_k, ρ_k, T_k) sans que les constantes figurant dans les estimations sauf C_2 figurant dans (3.20)-(3.21) dépendent de k.

Comme dans [1], grâce à (2.5), (2.6), on construit une suite $\{\Sigma^m\}$ de parties de $[0,1]$ telle que

$$(6.32)\qquad \begin{cases} \Sigma^m = \bigcup\limits_{j=1}^{\lambda} I_j^m, \qquad I_j^m\text{: intervalles fermes} \subset [0,1], \\ \lambda\text{: un nombre fini indépendant de } m, \Sigma^m \subset \Sigma^{m+1}, \\ \operatorname*{ess\,inf}\limits_{x\in\Sigma^m} \rho_0(x) > 0, \qquad \text{mes}\left([0,1]\setminus \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \Sigma^m\right) = 0. \end{cases}$$

On rappelle d'abord que

$$(6.33)\qquad 0 < K_8^{-1} \leqslant J_k \leqslant K_3 < \infty, \qquad J_k = \rho_k/\rho_{0k}$$

(voir (3.12), (4.27)). Grâce à (6.22), (6.32), (6.33), on a

$$\inf_{k\geqslant 1} (\inf\{\rho_k(x,t) \,|\, x\in\Sigma^m, 0\leqslant t\leqslant \bar t\}) > 0;$$

donc, grâce à (1.22), (2.3), (3.3), on déduit de (5.19) que

$$(6.34)\qquad \sup_{k\geqslant 1} (\sup_{0\leqslant t\leqslant \bar t} \|\partial_x u_k\|_{L^2(\Sigma^m)}) < \infty.$$

Comme d'autre part $\|u_k\|_{L^\infty(0,\bar t;L^2(\Sigma^m))}$ et $\|\partial_t u_k\|_{L^2(0,\bar t;L^2(0,1))}$ sont uniformément bornées (voir (3.3), (5.18)) et que l'injection de $W_2^1(\Sigma^m)$ dans $C^0(\Sigma^m)$ est compacte, d'après le lemme de compacité ([5], chap. 1, Th.5.1) et la procédure diagonale on a

(6.35) $\forall\{u_h\}\subset\{u_k\}$, $\exists\{u_{h_j}\}\subset\{u_h\}$ tel que u_{h_j} converge dans $L^p(0,\bar t; C^0(\Sigma^m))$ fo: et dans $L^p(0,\bar t; H^1(\Sigma^m))$ faible pour tout m,

où nous pouvons choisir p convenablement grand.

D'une manière analogue, on déduit de (5.17) que

$$\sup_{k\geqslant 1} \|T_k\|_{L^2(0,\bar t;H^1(\Sigma^m))} < \infty.$$

D'autre part, compte tenu de (5.2), (5.17) et de la relation

$$\rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT)\,\partial_x(r^{n-1}u) =$$

$$= \partial_x[\rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT)\,r^{n-1}u] - (\partial_x(\rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT)))\,r^{n-1}u,$$

il n'est pas difficile de déduire de (1.27) que

$$\sup_{k \geq 1} \|\partial_t T_k\|_{L^2(0,\bar{t};\, W_2^{-1}(0,1))} < \infty .$$

Par suite, encore d'après le lemme de compacité, on a

(6.36) $\forall \{T_h\} \subset \{T_k\}, \exists \{T_{h_j}\} \subset \{T_h\}$ tel que T_{h_j} converge dans $L^2(0, \bar{t}; C^0(\Sigma^m))$ fo et dans $L^2(0, \bar{t}; H^1(\Sigma^m))$ faible pour tout m.

On remarque maintenantr que, grâce à (2.5) et (6.22), il existe une fonction continue β définie sur $[0,1]$ telle que $\beta(0) = 0$ et que

$$\left| \int_x^{x'} \frac{1}{\rho_{0k}(x'')}\, dx'' \right| \leq \beta(\delta)$$

pour tout $(x, x', \delta) \in [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ avec $|x - x'| \leq \delta$ et pour tout k. Or, comme u_k et ρ_k satisfont à (1.26) et que r_k est définie par (2.1), on a, comme on le vérifie sans peine,

$$r_k(x, t) = \left[r_\Gamma^n + n \int_0^x \frac{1}{\rho_k(x', t)}\, dx' \right]^{1/n} . \tag{6.37}$$

Comme on a $\rho_k = \rho_{0k} J_k$, on déduit de (6.33) et de l'existence d'une fonction β mentionnée ci-dessus que

(6.38) $\exists \beta^* \in C^0([0, 1])$ telle que $\beta(0) = 0$ et que $|r_k(x, t) - r_k(x', t)| \leq \beta^*(\delta)$ pour tout $(k, x, x', \delta) \in \mathbb{N} \times [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ avec $|x - x'| \leq \delta$.

D'autre part, en vertu de (2.3), (3.18), (5.2), (5.19), on a

$$\sup_{k \geq 1} (\sup \{ |u_k(x, t)| \,|\, 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq t \leq \bar{t} \}) < \infty .$$

Il s'ensuit qu'il existe une constante finie C_{55} telle que

$$|r_k(x, t) - r_k(x, t')| \leq C_{55} |t - t'| \tag{6.39}$$

$$\text{pour tout } (k, x, t, t') \in \mathbb{N} \times [0, 1] \times [0, \bar{t}] \times [0, \bar{t}].$$

Grâce à (6.38), (6.39), on peut appliquer le théorème d'Ascoli-Arzelà à toute sous-suite de $\{r_k\}$ pour en extraire une sous-suite convergente dans $C^0([0, 1] \times \times [0, \bar{t}])$.

Il résulte de ceci et de (5.17), (6.35), (6.36) qu'il existe une sous-suite de $\{(u_k, \rho_k, T_k, r_k)\}$ et un triplet (u, T, r) tels que les relations (6.40)-(6.48) mentionnées ci-dessous soient vérifiées. Nous notons encore k l'indice de la sous-suite pour simplifier la notation.

(6.40) u_k converge vers u dans $L^p(0, \bar{t}; C^0(\Sigma^m))$ fort et dans $L^p(0, \bar{t}; H^1(\Sigma^m))$ faible pour tout m $(1 < p < \infty)$,

(6.41) $u_k \to u$ presque partout dans $[0, 1] \times [0, \bar{t}]$ et dans $L^\infty(0, \bar{t}; L^4(0, 1))$ faible* ,

(6.42) $\partial_t u_k$ converge vers $\partial_t u$ dans $L^2(0, \bar{t}; L^2(0, 1))$ faible,

(6.43) T_k converge vers T dans $L^2(0, \bar{t}; C^0(\Sigma^m))$ fort et dans $L^2(0, \bar{t}; H^1(\Sigma^m))$ faible pour tout m,

(6.44) $T_k \to T$ presque partout dans $[0, 1] \times [0, \bar{t}]$ et dans $L^\infty(0, \bar{t}; L^2(0, 1))$ faible* ,

(6.45) r_k converge vers r dans $C^0([0, 1] \times [0, \bar{t}])$,

(6.46) $\rho_k(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT)$ converge vers un A_1 dans $L^2(0, \bar{t}; H^1(0, 1))$ faible,

(6.47) $\rho_k \partial_x T_k$ converge vers un A_2 dans $L^2(0, \bar{t}; L^2(0, 1))$ faible,

(6.48) $\rho_0^{1/2} \partial_x(r^{n-1}u_k)$ converge vers A_3 dans $L^\infty(0, \bar{t}; L^2(0, 1))$ faible* ,

(6.49) $\rho_0^{1/2} \partial_x T_k$ converge vers un A_4 dans $L^2(0, \bar{t}; L^2(0, 1))$ faible.

On remarque d'abord que, en vertu de (6.41), (6.45), on a

(6.50) $$r(x, t) = r_0(x) + \int_0^t u(x, t')\,dt' \quad \text{presque partout dans } [0, 1] \times [0, \bar{t}].$$

En outre, en vertu de (3.12), (3.18), (6.20), il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout k, on ait

$$r_k(x, t) - r_k(y, t) = \int_y^x \frac{1}{r_k^{n-1}\rho_k} \geqslant \varepsilon(x - y) \qquad \forall (x, y, t) \in [0, 1] \times [0, x] \times [0, \bar{t}],$$

et donc, grâce à (6.45), on a

(6.51) $$r(x, t) - r(y, t) \geqslant \varepsilon(x - y) \qquad \forall (x, y, t) \in [0, 1] \times [0, x] \times [0, \bar{t}].$$

D'autre part, il résulte de (6.13) et de (6.45) que

(6.52) $$f_k \circ r_k \to f \circ r \quad \text{dans } C^0([0, 1] \times [0, \bar{t}]).$$

Donc, en rappelant que (6.45) implique que

$$\left(\frac{r_k(1,0)}{r_k(1,t)}\right)^\alpha \to \left(\frac{r(1,0)}{r(1,t)}\right)^\alpha \qquad \text{dans } C^0([0,\bar{t}]),$$

et en tenant compte de (6.41), (6.44) (voir aussi la déduction de (3.11)), on voit aisément que le second membre de (3.10) relatif à u_k, ρ_{0k}, T_k, r_k, converge presque partout dans $[0,1]\times[0,\bar{t}]$ vers la même expression relative à u, ρ_0, T, r. Ceci signifie que

$$J_k \to J \text{ presque partout dans } [0,1]\times[0,\bar{t}], \tag{6.53}$$

où J est définie par l'expression (3.10) relative à u, ρ_0, T, r. Grâce à (6.33), il est évident qu'il existe deux constantes J_1, J_2 telles que

$$0 < J_1 \leqslant J \leqslant J_2 < \infty \text{ presque partout dans } [0,1]\times[0,\bar{t}]. \tag{6.54}$$

On définit maintenant

$$\rho = J\rho_0 . \tag{6.55}$$

On voit aisément que

(6.56) $\rho_k \to \rho$ presque partout dans $[0,1]\times[0,\bar{t}]$ et dans $L^s(]0,1[\times]0,\bar{t}])$ fort pour tout $s\in[1,\infty[$.

Il n'est pas difficile de vérifier de la même manière que dans [1] que

$$A_1 = \rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT) \quad \text{dans } L^2(0,\bar{t}; H^1(0,1)), \tag{6.57}$$

$$A_2 = \rho\partial_x T \quad \text{dans } L^2(0,\bar{t}; L^2(0,1)), \tag{6.58}$$

$$A_3 = \rho_0^{1/2}\partial_x(r^{n-1}u) \quad \text{dans } L^\infty(0,\bar{t}; L^2(0,1)), \tag{6.59}$$

$$A_4 = \rho_0^{1/2}\partial_x T \quad \text{dans } L^2(0,\bar{t}; L^2(0,1)). \tag{6.60}$$

On considère maintenant l'égalité évidente (voir (1.28))

$$\int_0^{\bar{t}} \varphi(t)u_k(0,t)\,dt = \int_0^{\bar{t}}\int_0^1 \varphi(t)\frac{1}{r_T^{n-1}}\left\{r_k(x,t)^{n-1}u_k(x,t) + \right.$$
$$\left. + \frac{x-1}{\rho_0(x)^{1/2}}\rho_0(x)^{1/2}\partial_x(r_k(x,t)^{n-1}u_k(x,t))\right\}dx\,dt = 0,$$

où φ est une fonction arbitrairement choisie de $L^2(0,\bar{t})$. A l'aide de (6.41), (6.45), (6.48), (6.59), on peut passer à la limite pour $k\to\infty$ dans cette relation, de sorte qu'on obtient

$$u|_{x=0} = 0 \quad \text{dans } L^2(0,\bar{t}). \tag{6.61}$$

Si on tient compte aussi de (6.46), (6.57), on peut passer de manière analogue à la limite dans l'égalité

$$\int_0^{\bar t} \varphi(t)\left\{\left[\rho_k(\mu\partial_x(r_k^{n-1}u_k) - RT_k) - 2(n-1)\eta\frac{1}{r_k}u_k\right]\Big|_{x=1}\right\}(t)\,dt =$$

$$= \int_0^{\bar t}\int_0^1 \varphi\{\rho_k(\mu\partial_x(r_k^{n-1}u_k) - RT_k) + x\partial_x(\rho_k(\mu\partial_x(r_k^{n-1}u_k) - RT_k))\}\,dx\,dt -$$

$$-2(n-1)\eta\int_0^{\bar t}\int_0^1 \varphi\frac{1}{r_k(1,t)^n}\left\{r_k^{n-1}u_k + \frac{x}{\rho_0^{1/2}}\rho_0^{1/2}\partial_x(r_k^{n-1}u_k)\right\}dx\,dt = 0\,,$$

de sort qu'on obtient

$$\left[\rho(\mu\partial_x(r^{n-1}u) - RT) - 2(n-1)\eta\frac{1}{r}u\right]\Big|_{x=1} = 0 \quad \text{dans } L^2(0,\bar t). \tag{6.62}$$

On déduit immédiatement de (6.42), (6.45), (6.46), (6.52), (6.57) que

$$(1.25) \text{ est vérifiée dans } L^2(0,\bar t; L^2(0,1))\,. \tag{6.63}$$

Comme on le voit aisément, les relations (6.62), (6.63) entraînent que

$$\rho\partial_x(r^{n-1}u) - \frac{R}{\mu}\rho T + \frac{1}{\mu}\int_x^1 \frac{1}{r^{n-1}}(\partial_t u - f\circ r)\,dx' - \alpha\frac{1}{r}u|_{x=1} = 0$$

$$\text{dans } L^2(0,\bar t; L^2(0,1))\,,$$

où α est défini par (3.8). Cela étant, comme la dérivée par rapport à t de ρ s'écrit

$$\partial_t\rho = \rho\left(-\frac{R}{\mu}\rho T + \frac{1}{\mu}\int_x^1 \frac{1}{r^{n-1}}(\partial_t u - f\circ r)\,dx' - \alpha\frac{1}{r}u|_{x=1}\right)$$

(voir (3.10), (6.55) et l'explication qui suit (6.53)), il vient

$$\partial_t\rho = -\rho^2\partial_x(r^{n-1}u) \quad \text{dans } L^2(0,\bar t; L^2(0,1))\,.$$

Mais, grâce à (6.54), (6.55), (6.59), le second membre de (1.26) appartient à $L^\infty(0,\bar t; L^2(0,1))$, c'est-à-dire que

$$\partial_t\rho = -\rho^2\partial_x(r^{n-1}u) \quad \text{dans } L^\infty(0,\bar t; L^2(0,1)). \tag{6.64}$$

Nous constantons facilement que les conditions initiales $(1.32)_1$, $(1.32)_2$ sont vérifiées au moins dans $L^2(0,1)$. Donc, jusqu'ici nous avons démontré que (u,ρ,T,r) vérifie les relations (2,12)-(2.20) (voir (6.41), (6.42), (6.44), (6.45), (6.46), (6.48), (6.49), (6.50), (6.51), (6.54), (6.55), (6.57), (6.59), (6.60), (6.61), (6.62), (6.63), (6.64)).

Pour achever la démonstration, il ne nous reste donc qu'à montrer que (u, ρ, T, r) vérifie même (2.21).

Il est clair que l'égalité intégrale de (2.21) est vérifiée par (u_k, ρ_k, T_k, R_k). Il suffit donc de passer à la limite dans cette relation. On considère d'abord l'intégrale

$$I_A(k) = \int_0^{\bar{t}} \int_0^1 r_k^{n-1} u_k \varphi \partial_x (\rho_k (\mu \partial_x (r_k^{n-1} u_k) - RT_k)) .$$

Tout comme dans [1], on peut choisir un sous-domaine Σ^m (voir (6.32)) et une fonction test $\varphi \in L^4(0, \bar{t}; H^1(0, 1))$ jouissant des propriétés

$$\partial_t \varphi \in L^1(0, \bar{t}; L^2(0, 1)) , \qquad \varphi(\cdot, \bar{t}) = 0 , \qquad \operatorname{supp} \partial_x \varphi \subset \Sigma^m ,$$

de sorte que la contribution de l'intégrale sur $[0, 1] \backslash \Sigma^m$ soit aussi petite qu'on veut. D'autre part, grâce à (6.40), (6.45), (6.46), (6.57), l'intégrale

$$\int_0^{\bar{t}} \int_{\Sigma^m} r_k^{n-1} u_k \varphi \partial_x (\rho_k (\mu \partial_x (r_k^{n-1} u_k) - RT_k))$$

tend vers la même intégrale relative à (u, ρ, T, r), quand k tend vers $+\infty$; il en résulte que

$$I_A(k) \to \int_0^{\bar{t}} \int_0^1 r^{n-1} u \varphi \partial_x (\rho (\mu \partial_x (r^{n-1} u) - RT)) \qquad \text{pour } k \to \infty$$

(pour les détails, voir [1]).

D'autre part, grâce à (6.30), (6.40), (6.45), (6.46), (6.47), (6.57), (6.58), on voit aisément qu'on peut passer à la limite pour $k \to \infty$ dans tous les autres termes de l'égalité intégrale de (2.21).

A la fin, comme dans [1], étant donné que l'ensemble des fonctions test φ jouissant des propriétés mentionnées ci-dessus est dense dans l'espace des fonctions test défini dans (2.21), on voit sans peine que l'égalité intégrale de (2.21) est vérifiée pour toutes les foncions test indiquées dans (2.21), ce qui achève la démonstration du théorème. ■

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. FUJITA-YASHIMA - M. PADULA - A. NOVOTNÝ, *Equation monodimensionelle d'un gaz visqueux et calorifère avec des conditions initiales moins restrictives*, Ricerche Mat., 42 (1993), pp. 199-248.

[2] N. ITAYA, *Sur la solution globale dans le temps des équations de Navier-Stokes compressibles à symétrie sphérique*, (en japonais). Jnmonshu Kobe Univ. Comm., **21-1**, Kobe (1985).

[3] A. V. KAZHIKHOV, *Sur la solubilité globale des problèmes aux limites monodimensionnels pour les équations d'un gaz visqueux et calorifère* (en russe), Dinamika Sploshnoj Sredy (Dynamique du Milieu continu), 24, Novosibirsk (1976), pp. 45-61.

[4] A. V. KAZHIKHOV, *Sur la solubilité des problèmes monodimensionnels aux valeurs initiales-limitées pour les équations d'un gaz visqueux et calorifère*, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, 284 (1977), pp. 317-320.

[5] J. L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod/Gauthier-Villars, Paris (1969).

[6] L. D. LANDAU - E. M. LIFSHITZ, *Hydrodynamique* (en russe), Nauka, Moscou (1954) (la dernière édition: 1986); *Mécanique des fluides* (traduction française), Mir, Moscou (1971).

[7] V. B. NIKOLAEV:, *La solubilité globale des équations du mouvement d'un gaz visqueux avec la symétrie axiale et sphérique* (en russe), Dinamicheskie zadachi mekhaniki sploshnoj sredy, **63**, Sibirskoe otdelenie Akad. Nauk SSSR, Inst. Gidrodinamiki (1983).

[8] V. V. SHELUKHIN, *Problèmes aux limites pour les équations d'un gaz barotropique visqueux avec la densité initiale non-négative* (en russe), Niestatsionarnye Problemy Mekhaniki, **74**, Sibirskoe otdelenie Akad. Naux SSSR, Inst. Gidrodinamiki (1986), pp. 108-125.

[9] A. TANI, *On the first initial-boundary value problem of compressible viscous fluid motion*, Publ. R. I. M. S. Kyoto Univ., **13** (1977), pp. 193-253.

[10] A. TANI, *On the free boundary value problem compressible viscous fluid motion*, J. Math. Kyoto Univ., **21** (1981), pp. 839-859.