

Ein Ellipsensatz.

Von Wilhelm Rulf in Wien.

Der von Herrn Klug in dieser Zeitschrift (VI. Jahrgang Seite 107) am Anfange der Abhandlung: „Einige Sätze über die Parabel und das hyperbolische Paraboloid“ gegebene Satz, kann auch ohne Punktbezeichnungen und in Folge dessen anschaulicher so ausgesprochen werden:

„Wird ein Winkel mit seinem Scheitel progressiv auf einer Parabel bewegt, so sind die Durchmesser der Parabelschnittpunkte seiner Schenkel stets gleichweit von einander entfernt“. Es liegt nahe, diese Winkelbewegung auch an der Ellipse zu untersuchen. Für letztere ergibt sich folgender Satz:

„Bewegt sich ein Winkel mit seinem Scheitel progressiv auf einer Ellipse, so hat der, auf dem zwischen seinen Schenkeln gelegenen Bogen aufstehende Sector eine constante Fläche“.

Beweis. Beschreibt man über der großen Achse der Ellipse als Durchmesser einen Kreis, so kann man Ellipse und Kreis als affine Figuren betrachten. Sind a, b, c irgend drei Punkte der Ellipse, A, B, C ihre homologen auf dem Kreise, und bewegt sich der Winkel abc progressiv auf der Ellipse, so erhält auch ABC auf dem Kreise diese Bewegung, da parallele gerade Linien auch parallele affine Bilder haben. Ist m der gemeinschaftliche Mittelpunkt des Kreises und der Ellipse, so hat der Kreissector AmC stets dieselbe Fläche, dann sein Mittelpunktswinkel ist doppelt so groß als der sich gleich bleibende Peripheriewinkel ABC . Der Ellipsensector amc kann aber als die Projection des ihm affinen Kreissectors betrachtet werden, und da in derselben Ebene gelegene flächengleiche Figuren flächengleiche Projectionen auf dieselbe Projectionsebene haben, so hat auch der Ellipsensector eine unveränderliche Fläche w. z. B. w.

Wenn man nun die Parabel als eine besondere Ellipse betrachtet, so erkennt man leicht, dass der vom Herrn Klug gegebene Parabelsatz ein besonderer Fall dieses Ellipsensatzes ist. Für die Parabel geht der Sector in den von den Durchmessern eingeschlossenen Flächenstreifen über, und wenn die Durchmesser beständig dieselbe Entfernung haben, so behält auch der Streifen eine constante Fläche, denn bei seiner unendlichen Größe ist die seitliche Begrenzung nicht von Belang.