

Nachruf auf Philipp Furtwängler. ¹⁾

Von Nikolaus Hofreiter in Wien.

Im Jänner dieses Jahres war das Befinden von Ph. Furtwängler wesentlich schlechter geworden und man mußte auf das Schlimmste gefaßt sein. Am 19. Mai erlitt er neuerdings einen Schlaganfall und verschied wenige Stunden nachher. Ich will nun einen kurzen Überblick über sein arbeitsreiches Leben geben.

Philipp Furtwängler wurde am 21. April 1869 in Elze geboren. Elze ist ein kleiner Ort im Bezirk Hannover. Furtwängler war der älteste Sohn des Orgelbauers Wilhelm Furtwängler und dessen Ehefrau Mathilde geb. Sander. Er war rein deutscher Abstammung und Protestant. Zunächst besuchte er die Volksschule in seinem Heimatort und ging dann nach seiner Konfirmation an das Gymnasium nach Hildesheim. Zu Ostern 1889 erwarb er das Reifezeugnis und begab sich hierauf an die Universität Göttingen. Dort widmete er sich ganz dem Studium der Mathematik und verwandter Fächer. Er hörte bei einer Reihe von Professoren Vorlesungen über Mathematik. Ich nenne: Burkhardt, Fricke, Hölder, Klein, Schönfließ und Weber. Felix Klein hielt damals eine Vorlesung über Zahlentheorie durch zwei Semester. Diese Vorlesung interessierte Furtwängler besonders und er gab den zweiten Teil gemeinsam mit Sommerfeld hektographiert heraus. Klein beschränkte sich auf binäre quadratische Formen und regte Furtwängler an, eine Doktor-Dissertation über ganzzahlige zerlegbare ternäre kubische Formen zu schreiben. Furtwängler machte sich mit Freuden an die Arbeit und schrieb eine umfangreiche Abhandlung. Charakteristisch für die Darstellung ist das Heranziehen räumlicher Punktgitter. Durch diese auf Klein zurückgehende geometrische Interpretation wird die Darstellung viel anschaulicher. Nebenbei hat Furtwängler auch die absolut kleinsten Diskriminanten kubischer Körper ermittelt. Gerade diese Ergebnisse braucht man heute noch manchmal.

Furtwängler war Assistent im Physikalischen Institut der Technischen Hochschule in Darmstadt und am Geodätischen Institut in Potsdam. Er hat sich niemals habilitiert, sondern wurde gleich

¹⁾ Gedächtnisrede, die der Verf. am 7. Juni 1940 in der Wiener Mathematischen Gesellschaft hielt.

Professor. Zuerst war er Professor an der Landwirtschaftlichen Akademie in Bonn (1904—07, 1910—12), dann Professor an der Technischen Hochschule in Aachen (1907—10) und zuletzt Professor an der Universität Wien (1912—38). Seit Oktober 1938 war er in dauerndem Ruhestand. Er war zweimal verheiratet, zuerst mit Ella Buchwald. Dieser Ehe entstammt eine Tochter. Die zweite Ehe ging Furtwängler 1929 mit Emilie Schön ein. Damals war er schon schwer krank. Seine zweite Frau hat ihn durch mehr als zehn Jahre in aufopferungsvoller Weise gepflegt und ihm dadurch geholfen, sein schweres Leiden leichter zu ertragen.

Furtwängler hat eine Reihe bedeutsamer wissenschaftlicher Arbeiten verfaßt, über die ich später noch sprechen werde. In Würdigung seiner hervorragenden Arbeiten erhielt Furtwängler die Ernst Abbe-Gedächtnismedaille für das Jahr 1930. Diese wurde vorher nur einmal für Arbeiten aus reiner Mathematik verliehen, und zwar 1924 an Felix Klein. Furtwängler war wirkli. Mitglied der Akademie der Wissenschaften in Wien, korr. Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin und Mitglied der Deutschen Akademie der Naturforscher in Halle. Er war auch Mitglied der Prüfungskommission für das Lehramt an Mittelschulen. Dieses Amt gereichte ihm weniger zur Ehre als zur Plage, da er eine sehr große Anzahl von Lehramtsprüfungen abhalten mußte. Furtwängler kam um 8 Uhr ins Mathematische Institut und gleich begannen die Rigorosen und Kolloquien. Von 10^h—11^h hatte er Vorlesung und wöchentlich noch zweimal Seminar. Er hielt regelmäßig Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, über Zahlentheorie und Algebra. Die Vorlesungen waren überaus stark besucht. Es wurden Platzkarten für gerade und ungerade Tage ausgegeben. Der starke Besuch seiner Vorlesungen hatte teils seinen Grund darin, weil damals sehr viele Mathematik studierten, vor allem aber wegen seiner ausgezeichneten Vortragsweise. Im Seminar sprach Furtwängler meist über ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie und Algebra. Man erwarb dabei gute Spezialkenntnisse. Unter Furtwänglers Anleitung sind 60 Dissertationen zustande gekommen. Diese Arbeiten behandelten fast immer Probleme der Zahlentheorie und Algebra. Furtwängler war von strengem Pflichtbewußtsein erfüllt. Obwohl er viele Jahre schwer krank war, arbeitete er doch ununterbrochen weiter, schrieb auch in dieser Zeit bedeutungsvolle Arbeiten und widmete sich stets seinen Hörern.

Furtwängler veröffentlichte 49 wissenschaftliche Arbeiten, die größtenteils der Zahlentheorie angehören. Im Anschluß an die Arbeiten

von D. Hilbert: „Über die Theorie der relativ quadratischen Körper“ und „Über die Theorie der relativ Abelschen Körper“ hat sich Furtwängler vor allem die zwei miteinander eng verknüpften Probleme gestellt:

I. Beweis der Existenz des Klassenkörpers zu einem beliebigen algebraischen Zahlkörper.

II. Beweis des Reziprozitätsgesetzes der l -ten Potenzreste in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper, der den Körper der l -ten Einheitswurzel enthält (l ungerade Primzahl).

Furtwängler hat beide Probleme in einer Reihe von Arbeiten behandelt und gelöst. Es sei k ein beliebiger Grundkörper. Der Oberkörper K von k heißt (absoluter) Klassenkörper von k , wenn er die beiden Eigenschaften erfüllt:

1. Die Relativgruppe G von $[K:k]$ ist isomorph mit der Gruppe H der Idealklassen von k .

2. Die Relativediskriminante von $[K:k]$ ist 1. Das Letztere drückt man auch so aus: K ist unverzweigt.

Furtwängler bewies die Existenz des Klassenkörpers durch Konstruktion. Er benutzte dabei die Tatsache, daß die Unterkörper von K und die Untergruppen von G einander entsprechen. In einer weiteren Arbeit zeigte Furtwängler die Zerlegung der Primideale von k im Klassenkörper K . Es ergab sich der folgende einfache Satz: Ist die Anzahl der Idealklassen von k h , \mathfrak{p} ein beliebiges Primideal von k und \mathfrak{p}^n die kleinste Potenz, die in der Hauptklasse von k liegt, so zerfällt \mathfrak{p} im Klassenkörper K von k in genau $\frac{h}{n}$ verschiedene Primideale. Mehrere Arbeiten sind den Reziprozitätsgesetzen für l -te Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern K gewidmet (l ungerade Primzahl, K enthalte den Körper der l -ten Einheitswurzeln). Furtwängler erzielte das schöne Ergebnis: Sind α und β zwei zu l und zueinander prime Zahlen aus K , von denen wenigstens eine primär ist, so gilt

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Seine erste Arbeit über das Reziprozitätsgesetz wurde von der kgl. Gesellschaft in Göttingen preisgekrönt.

Hilbert hat vermutet, daß alle Ideale des Grundkörpers im (absoluten) Klassenkörper Hauptideale werden (Hauptidealsatz). Furtwängler gelang dieser Nachweis bald, wenn die Klassengruppe zyklisch ist. Falls diese aber nicht zyklisch ist, so sind die zahlentheoretischen Verhältnisse sehr kompliziert. Artin erkannte, daß sich das Problem

rein gruppentheoretisch angreifen läßt. Zum Beweis des Hauptidealsatzes ist es hinreichend, ein gewisses Theorem über zweistufige Gruppen zu beweisen. (Eine Gruppe G heißt zweistufig, wenn G nicht Abelsch, aber ihre Kommutatorgruppe Abelsch ist.) Furtwängler ist es nach einiger Mühe gelungen, den tiefliegenden gruppentheoretischen Satz zu beweisen und damit den vollständigen Beweis des Hauptidealsatzes zu erbringen. Diese vielleicht beste Arbeit schrieb Furtwängler im Alter von 60 Jahren.

Mit Hilfe der Theorie der Klassenkörper und der Reziprozitätsgesetze betrachtete Furtwängler relativ Abelsche Körper über imaginär quadratischen Grundkörpern, stellte sie arithmetisch her und bewies ihre Eigenschaften. Er beschränkte sich auf solche Relativkörper, die zu gewissen Ringen des Grundkörpers in enger Beziehung stehen und Ringklassenkörper heißen.

Fermat behauptete: Die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ ist in ganzen Zahlen nicht lösbar, wenn $n > 2$ und $xyz \neq 0$ ist. Trotz aller Bemühungen konnte eine vollständige Lösung des Fermatschen Problems nicht erreicht werden. Furtwängler hat den folgenden wertvollen Satz abgeleitet: Hat die Gleichung für $n = p$ (Primzahl) eine Lösung in ganzen, durch p nicht teilbaren Zahlen x, y, z , so muß jeder Primfaktor r von xyz die Bedingung erfüllen:

$$r^{n-1} \equiv 1 \pmod{p^2}.$$

Furtwängler hat nicht bloß diesen Satz abgeleitet, seine Untersuchungen gehen sehr tief. So erkannte er die Bedeutung des Reziprozitätsgesetzes der l -ten Potenzreste im Körper der l -ten Einheitswurzeln für das Problem. Auch hat er die Beweise der Kriterien von Wieferich und Mirimanoff vereinfacht.

Minkowski hatte ein Kriterium aufgestellt, das aussagt, ob eine gegebene Zahl α eine algebraische Zahl n -ten Grades ist. Furtwängler gelang es, ein etwas einfacheres Kriterium zu finden. Er betrachtet den Ausdruck

$$\xi = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \dots + \alpha^{n-1} x_n$$

dabei läßt er die x_i die ganzen Zahlen $|x_i| \leq t$ durchlaufen. Mit wachsendem t erhält man eine Reihe von Minima ξ_1, ξ_2, \dots . Aus dieser Reihe streicht man alle diejenigen, die von $n-1$ vorhergehenden linear abhängig sind. Die neue Reihe bezeichnen wir mit $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ und nennen sie die Reihe der Hauptminima. Das Kriterium von Furtwängler lautet dann: α ist dann und nur dann eine algebraische Zahl n -ten Grades, wenn die zu α gehörige Reihe der Hauptminima

nicht abbricht und wenn unter den Quotienten $\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i}$ nur eine endliche Anzahl von verschiedenen vorkommt.

Furtwängler schrieb zwei Arbeiten über die simultane Approximation von Irrationalzahlen. Ist α eine beliebige Irrationalzahl, so betrachtet man Approximationen von der Gestalt

$$(1) \quad \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{k}{q^2}.$$

Dabei sind p, q ganz, $k = \text{konst.}$ Man kann fragen:

1. wie klein kann man k wählen, so daß (1) für jede Irrationalzahl unendlich viele Lösungen in ganzen Zahlen p, q hat.

2. wie groß kann man k wählen, so daß (1) für gewisse Irrationalzahlen höchstens endlich viele Lösungen hat.

Die Antwort ist: Ist $k \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$, so hat (1) unendlich viele Lösungen.

Ist $k < \frac{1}{\sqrt{5}}$, so gibt es Irrationalzahlen, so daß (1) nicht unendlich viele Lösungen hat.

Wir nehmen nun mehrere Irrationalzahlen, die rational unabhängig sind, und betrachten Approximationen von der Gestalt

$$(2) \quad \left| \alpha_i - \frac{p_i}{q} \right| < \frac{k}{q^{n-1}} \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

(Simultane Approximation). Man kann nun die entsprechenden Fragen 1 und 2 wie oben stellen. Sobald mehr als eine Zahl approximiert wird, treten große Schwierigkeiten auf. Furtwängler hat sich mit der zweiten Frage befaßt und folgenden tiefliegenden Satz aufgestellt und bewiesen:

Ist d die absolut kleinste Diskriminante der reellen Zahlkörper n -ten Grades und $k < \frac{1}{|d|^{\frac{1}{2(n-1)}}}$, so gibt es $n-1$ reelle, rational unab-

hängige Irrationalzahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$, so daß (2) nicht unendlich viele Lösungen in ganzen Zahlen p_1, \dots, p_{n-1}, q hat. Die Schärfe dieses Satzes folgt daraus, daß für $n=2$ der genaue Wert $\frac{1}{\sqrt{5}}$ heraus-

kommt. Man verdankt Furtwängler die Erkenntnis, daß die Körperdiskriminanten bei dem Problem der Approximation von Irrationalzahlen eine wesentliche Rolle spielen. In der zweiten Arbeit über die simultane Approximation von Irrationalzahlen stellte Furtwängler

einen Algorithmus zur simultanen Approximation von zwei Irrationalzahlen auf.

Furtwängler hat sich viel mit dem folgenden Problem befaßt (Minkowskis Vermutung über die Grenzgitter). Es seien ξ_1, \dots, ξ_n n reelle Linearformen in x_1, \dots, x_n mit der Determinante 1. Dann gibt es bekanntlich ganze Zahlen $x_1, \dots, x_n \neq 0, \dots, 0$, so daß hierfür $|\xi_i| \leq 1$. Man zeigt leicht, daß hier $n-1$ mal das Kleinerzeichen stehen kann. Es bleibt nun der Grenzfall:

$$|\xi_i| < 1 \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Es erhebt sich die Frage: Wann hat dieses System nur die triviale Lösung? Man vermutet: Die triviale Lösung existiert genau dann, wenn sich die ξ_i ganzzahlig unimodular in die Gestalt

$$\begin{array}{l} \xi_{i_1} = y_1 \\ \xi_{i_2} = c_{21} y_1 + y_2, \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \xi_{i_n} = c_{n1} y_1 + \dots + c_{nn-1} y_{n-1} + y_n \end{array}$$

transformieren lassen (i_1, \dots, i_n Permutation von $1, \dots, n$). Geometrisch gedeutet liegt dann eine lückenlose Erfüllung des Raumes mit kongruenten und gleichgerichteten Würfeln vor. Es gelang bisher nur für ein paar Werte von n die Vermutung zu bestätigen. Neue wertvolle Untersuchungen hat Perron angestellt. Furtwängler hat sich bemüht, das Problem allgemein zu lösen, was ihm leider nicht gelang. Von dem, was er erreichte, hat er fast nichts veröffentlicht. Nur im Wirtinger-Festband schrieb er eine kleine Note über Gitter konstanter Dichte. Er nennt ein Gitter von der konstanten Dichte g , wenn jeder Einheitswürfel $u_i \leq \xi_i < u_i + 1$ (u_i beliebig reell) genau g Gitterpunkte hat. Ist $g=1$, so kommt man zu den Grenzgittern.

Bekanntlich hat jede algebraische Gleichung eine Galoissche Gruppe. Es fragt sich, ob es umgekehrt zu jeder Gruppe G eine algebraische Gleichung gibt, deren Galoissche Gruppe G ist (Umkehrproblem). Dieses Problem ist nur teilweise gelöst. Furtwängler hat dazu folgenden Beitrag geleistet. Er gab Gleichungen mit numerischen Koeffizienten jeden Grades an, deren Galoissche Gruppe die symmetrische Permutationsgruppe S_n ist. Die Gleichungen lauten für $n > 4$

$$x^4 (x-2b_1)(x-2b_2) \dots (x-2b_{n-4}) - (-1)^n (2x+4) = 0.$$

Dabei sind die b_i ganz, größer 1 und voneinander verschieden. Die Gleichungen sind irreduzibel und primitiv. Dies folgt aus Kriterien, die Furtwängler zu diesem Zweck abgeleitet hat. Er hat zunächst

das Irreduzibilitätskriterium von Eisenstein verallgemeinert und dann das folgende einfache Kriterium der Primitivität abgeleitet. Sind bei einer irreduziblen ganzzahligen Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

alle Koeffizienten a_i durch die Primzahl p teilbar, a_{n-1} genau durch die erste Potenz, a_n mindestens durch die zweite Potenz von p , so ist die Gleichung primitiv.

Es sei G eine beliebige Permutationsgruppe in n Veränderlichen. Alle rationalen Funktionen mit rationalen Koeffizienten, die bei den Permutationen von G ungeändert bleiben, bilden einen Funktionenkörper K . Man sagt: n Funktionen f_1, \dots, f_n aus K bilden eine Minimalbasis, wenn sich alle Funktionen aus K als rationale Funktionen von f_1, \dots, f_n mit rationalen Koeffizienten darstellen lassen. Ob stets eine Minimalbasis existiert, ist nicht bekannt. Das Problem wurde von verschiedenen Seiten in Angriff genommen. Auch Furtwängler hat dazu einen wertvollen Beitrag geleistet.

Furtwängler schrieb in jüngeren Jahren auch einige Arbeiten zur angewandten Mathematik (Pendel, Schwerkraft, Geodäsie). In der Arbeit „Über die Schwingungen zweier Pendel mit annähernd gleicher Schwingungsdauer auf gemeinsamer Unterlage“ interessierte er sich für die Differentialgleichung des Problems und wies auf die Beziehungen zwischen Differentialgleichungen und algebraischen Gleichungen hin.

Furtwängler verfaßte 3 Artikel der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften (Mechanik der physikalischen Apparate und Versuchsanordnungen, Kartographie, Algebraische Zahlkörper), von denen der letzte noch nicht erschienen ist.

Verzeichnis der Arbeiten:

1. *Zur Begründung der Idealtheorie.* Gött. Nachr. (1895), 381—384.
2. *Zur Theorie der in Linearfaktoren zerlegbaren, ganzzahligen ternären kubischen Formen.* Diss. Göttingen (1896), 64 S.
3. *Über das Reziprozitätsgesetz der l -ten Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet.* Gött. Abb. Neue Folge II, (1902), 3—82.
4. *Über die Schwingungen zweier Pendel mit annähernd gleicher Schwingungsdauer auf gemeinsamer Unterlage.* Sitz. preuß. Akad. Wiss. Berlin (1902), 245—253.
5. *Die Konstruktion des Klassenkörpers für solche algebraischen Zahlkörper, die eine l -te Einheitswurzel enthalten, und deren Idealklassen eine zyklische Gruppe vom Grad l^h bilden.* Gött. Nachr. (1903), 202—217.

6. *Über die Konstruktion des Klassenkörpers für beliebige algebraische Zahlkörper, die eine l -te Einheitswurzel enthalten.* Gött. Nachr. (1903), 282—303.
7. *Über die Reziprozitätsgesetze zwischen l -ten Potenzresten in algebraischen Zahlkörpern, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet.* Math. Ann. **58**, (1903), 1—50.
8. *Die Konstruktion des Klassenkörpers für beliebige algebraische Zahlkörper.* Gött. Nachr. (1904), 173—195.
9. *Die Mechanik der einfachsten physikalischen Apparate und Versuchsanordnungen.* Enzykl. d. Math. Wiss. IV, 7, 1—61.
10. *Allgemeiner Existenzbeweis für den Klassenkörper eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers.* Math. Ann. **63**, (1906), 1—37.
11. *Eine charakteristische Eigenschaft des Klassenkörpers.* Erste Mitteilung. Gött. Nachr. (1906), 417—434.
12. gemeinsam mit F. Kühnen. *Bestimmung der absoluten Größe der Schwerkraft zu Potsdam.* Veröffentl. Geod. Inst. (N. F.) Berlin, P. Stankiewicz. 390 S. (1906).
13. *Eine charakteristische Eigenschaft des Klassenkörpers.* Zweite Mitteilung. Gött. Nachr. (1907), 1—24.
14. *Über die Klassenzahlen Abelscher Zahlkörper.* Journ. f. Math. **134**, (1908), 91—94.
15. gemeinsam mit F. Kühnen. *Erwiderung auf den Vortrag des Herrn W. Felgen-träger: Der Einfluß der Schneiden auf die Bestimmung der Schwerebeschleunigung mit dem Reversionspendel.* Verhandl. deutsche Phys. Ges. **10**, 389—390.
16. *Die Reziprozitätsgesetze für Potenzreste mit Primzahlexponenten in algebraischen Zahlkörpern.* Erster Teil. Math. Ann. **67**, (1909), 1—31.
17. gemeinsam mit R. Bourgeois. *Kartographie.* Enzykl. d. math. Wiss. VI 1, 4, 245—296.
18. *Untersuchungen über die Kreisteilungskörper und den letzten Fermatschen Satz.* Erste Mitteilung. Gött. Nachr. (1910), 554—562.
19. *Über das Minimum einer Quadratsumme linearer Formen.* Math. Ann. **70**, (1911), 405—409.
20. *Über die Klassenzahlen der Kreisteilungskörper.* Journ. f. Math. **140**, (1911), 29—32.
21. *Allgemeiner Beweis des Zerlegungssatzes für den Klassenkörper.* Gött. Nachr. (1911), 293—317.
22. *Die Reziprozitätsgesetze für Potenzreihen mit Primzahlexponenten in algebraischen Zahlkörpern.* Zweiter Teil. Math. Ann. **72**, (1912), 346—386.
23. *Pendel.* Handwörterbuch d. Naturwiss. **7**, Fischer, Jena, 556—573.
24. gemeinsam mit G. Ruhm. *Die mathematische Ausbildung der deutschen Landmesser.* Teubner (Abhandl. über d. math. Unterr. in Deutschl., veranlaßt durch die I. M. U. K. **4**, Heft 8).
25. *Letzter Fermatscher Satz und Eisensteinsches Reziprozitätsgesetz.* Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien **121**, (1912), 589—592.
26. *Die Reziprozitätsgesetze für Potenzreste und Primzahlexponenten in algebraischen Zahlkörpern.* Dritter und letzter Teil. Math. Ann. **74**, (1913), 413—429.
27. *Über das Verhalten der Ideale des Grundkörpers im Klassenkörper.* Mh. f. Math. **27**, (1916), 1—15.
28. *Über Kriterien für die algebraischen Zahlen.* Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien **126**, (1917), 299—309.

29. *Über die Führer von Zahlringen.* Wiener Anzeiger **56**, (1919), Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien **128**, (1919), 239—245.
- 30/31. *Über die Ringklassenkörper für imaginäre quadratische Körper I, II.* Wiener Anzeiger **56**, (1919), 75 ; Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien **128**, (1919); **129**, (1920), 161—200.
32. gemeinsam mit M. Zeisel. *Zur Minkowskischen Parallelepipedaapproximation.* Mh. f. Math. **30**, (1920), 177—198.
33. *Punktgitter und Idealtheorie.* Math. Ann. **82**, (1921), 256—279.
34. *Über Kriterien für irreduzible und für primitive Gleichungen und über die Aufstellung affektfreier Gleichungen.* Math. Ann. **85**, (1922), 34—40.
35. *Über Minimalbasen für Körper rationaler Funktionen.* Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien **134**, (1925), 69—80.
36. *Über die linearen Mannigfaltigkeiten auf Hyperflächen zweiter Ordnung.* Math. Zeitschr. **24**, (1926), 396—400.
37. *Über die simultane Approximation von Irrationalzahlen.* Math. Ann. **96**, (1926), 169—175.
38. *Über die Reziprozitätsgesetze für Primzahlpotenzexponenten.* Journ. f. Math. **157**, (1926), 15—25.
39. *Über die Reziprozitätsgesetze für ungerade Primzahlexponenten.* Math. Ann. **98**, (1927), 539—543.
40. *Fr. Mertens †.* Alm. Akad. Wiss. Wien **77**, (1927), 4 S.
41. *Über die simultane Approximation von Irrationalzahlen II.* Math. Ann. **99**, (1928), 71—83.
42. *Über affektfreie Gleichungen.* Mh. f. Math. **36**, (1929), 89—96.
43. *Beweis des Hauptidealsatzes für die Klassenkörper algebraischer Zahlkörper.* Abh. Hamburg **7**, (1929), 14—36.
44. *Über die Verschärfung des Hauptidealsatzes für algebraische Zahlkörper.* Journ. f. Math. **167**, (1932), 379—387.
45. *Über einen Determinantensatz.* Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien **145**, (1936), 527—528.
46. gemeinsam mit O. Taussky. *Über Schieferringe.* Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien **145**, (1936), 525.
47. *Über Gitter konstanter Dichte.* Mh. f. Math. **43**, (1936), 281—288.
48. *Über die Newtonschen Potenzsummenformeln.* Mh. f. Math. **49**, (1940), 194—196.
49. *Theorie der algebraischen Zahlkörper.* Enzykl. d. math. Wiss. I. Neue Herausgabe (noch nicht erschienen).

(Eingegangen: 3. VI. 1940)