der Brennpunkte nutzbar zu machen *auch noch, wenn* $\mathfrak{K}_1$ *und* $\mathfrak{K}_2$ *nur ungleichseitige Brennpunkte besitzen,* wie in dem eingangs genannten Beispiele (Fig. 1). — Hier ist, da beim Problem der kürzesten Linie stets $\varphi = cx + \gamma$ und daher $\Delta(x, a) = x - a$ ist,

$$0 < Q_1(\beta_1) = \frac{\beta_1 - x_2}{\beta_1 - x_1} < 1 \quad \text{und} \quad 0 < Q_1(\beta_2) = \frac{\beta_2 - x_2}{\beta_2 - x_1} < 1,$$

also

$$Q_1(\beta_1) < Q_1(\beta_2).$$

Es ist also die für ein Extremum notwendige Bedingung (22) nicht erfüllt, unser Kriterium liefert also das Resultat, daß kein Minimum vorliegen kann, wie das die Anschauung von vornherein lehrte. —

Erwähnt sei zum Schluß noch eine aus (22) leicht zu gewinnende und vielleicht häufig leichter zu handhabende andere Formulierung unseres Kriteriums, nämlich:

$$(22^*) \qquad \Delta(\beta_1, \beta_2) \cdot \Delta(\beta_1, x_1) \cdot \Delta(\beta_2, x_2) \cdot \Delta(x_1, x_2) \leqq 0.$$

(Eingegangen am 18. 10. 1934.)

Zusatz bei der Korrektur (23. 12. 1934): Nachträglich bemerke ich, daß sich die rein rechnerische Herleitung unserer Hauptformeln (19) ziemlich erheblich vereinfacht, wenn man von vornherein die Endpunktsabszissen x_1 und x_2 (anstatt c und γ) als Parameter der $\mathfrak{E}^{(2)}$-Schar benutzt, also anstatt von $\varphi(x, c, \gamma)$ sogleich von der Funktion $\psi(x, x_1, x_2)$ ausgeht, und demgemäß $\Delta(x, a)$ durch folgenden Ausdruck definiert:

$$\Delta(x, a) = \left(\frac{\partial \psi(a)}{\partial x_2} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi(a)}{\partial x_1} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_2}\right)_0,$$

der sich von unserem früheren $\Delta(x, a)$ höchstens um einen (unwesentlichen) Faktor unterscheiden kann.

Doch ist dieser Weg heuristisch weit weniger befriedigend, da er nicht so zwangsläufig auf diese Δ-Funktionen führt, auf deren Verwendung doch gerade die einfache Formulierung (22) unseres Kriteriums beruht. — Die (nachträgliche) Einführung der Δ's und ebenso der Konstanten Γ erscheint bei diesem Verfahren eben etwas gekünstelt. Bei ihr spielen die folgenden Darstellungen eine wesentliche Rolle:

$$\Delta(x, x_1) = -h_1 \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_2}, \quad \Delta(x, x_2) = h_2 \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_1}, \quad \Delta(x_1, x_2) = h_1 \cdot h_2.$$