Probab. Theory Relat. Fields 102, 83 – 103 (1995)

**Probability Theory** and Related Fields



# Inegalités Barlow – Yor pour les temps locaux d'intersection de deux mouvements Browniens plans

**P. Mathieu**

LATP. CMI., Rue Joliot-Curie, F-13453 Marseille Cedex 13, France
(e-mail: PMathieu @gyptis.univ-mrs.fr)

Received: 29 June 1994 / In revised form: 14 December 1994

**Summary.** We prove $L_p$ majorations for the suprema of the intersection local time of two planar Brownian motions. We deduce a sufficient condition on the correlation of two Brownian motions for their i.l.t. to be continuous.

**Résumé.** On prouve des majorations en norme $L_p$ pour le suprema des temps locaux d'intersection de deux mouvements browniens plans, renormalisés ou non. On en déduit une condition suffisante sur la corrélation entre deux browniens pour que leur t.l.i. soient continus.

*Mathematics Subject Classification (1991):* 60J65, 60J55

## 0 Introduction

Soient $(\beta_u, u \geqq 0)$ et $(\beta'_v, v \geqq 0)$ deux $\mathscr{F}$-mouvements browniens plans issus de 0. Pour étudier les recoupements des trajectoires de $(\beta_u, u \leqq t)$ et $(\beta'_v, v \leqq s)$ on introduit les *temps locaux d'intersection* de $\beta$ et $\beta'$, soit le processus indexé par $\mathbb{R}^2$, $(\alpha(x, t, s), x \in \mathbb{R}^2)$ (Voir Geman et al. [5], Mathieu [9], Rosen [12] ou Yor [17]). Formellement, $\alpha$ est défini par l'intégrale:

$$(*) \qquad \alpha(x, t, s) = \int_0^t du \int_0^s dv\, \delta_x(\beta_u - \beta'_v)$$

où $\delta_x$ désigne la masse de Dirac au point $x$.

On peut donner un sens à l'expression ci-dessus en remplaçant la masse de Dirac par une suite de fonctions $f_N$ telle que la mesure $f_N(x)dx$ converge vers $\delta_x$ quand $N$ tend vers $+\infty$. Il faut cependant être précautionneux quant au choix de $f_N$ pour obtenir la convergence de $\int_0^t du \int_0^s dv\, f_N(\beta_u - \beta'_v)$.

Une foix l'existence des temps locaux d'intersection établie, différents auteurs ont étudié les propriétés de régularité de $\alpha(x, t, s)$ en $x$. Geman et al. [4] ou Yor [17] ont montré que si $\beta$ et $\beta'$ sont indépendants alors pour tous $t, s \geqq 0$ et tout $\varepsilon < 1$, presque sûrement, la fonction $x \to \alpha(x, t, s)$ est höldérienne d'exposant $\varepsilon$. Il n'en est pas de même pour les temps locaux d'auto-intersection d'un mouvement brownien plan. En effet si $\beta = \beta'$ alors $\alpha(x, t, s) \to +\infty$ quand $x \to 0$. Il faut alors *renormaliser* $\alpha$. Plus précisement, on montre que le processus $\gamma(x, t, s) = \alpha(x, t, s) - \mathbb{E}[\alpha(x, t, s)]$ admet un prolongement continu en $x = 0$. De plus $\gamma$ est p.s. höldérien d'exposant $\varepsilon$ en $x$, pour tout $\varepsilon < 1$.

Afin de mieux comprendre ce dernier résultat, nous nous sommes intéressés aux situations intermédiaires entre le cas $\beta$ et $\beta'$ indépendants et le cas $\beta = \beta'$ en considérant les t.l.i. de couples de mouvements browniens corrélés. Deux questions se posent alors: existe-t-il un analogue du résultat de renormalisation, et sous quelles conditions sur la corrélation entre $\beta$ et $\beta'$ les t.l.i. ont-ils les mêmes propriétés de régularité que dans le cas indépendant? Nous avons donné dans Mathieu [9] une réponse positive à la première question. L'une des motivations du travail présenté ici est d'étudier la seconde question.

Dans la suite de cet article nous nous placerons dans le cadre suivant: $(\Omega, (\mathscr{F}_t, t \geqq 0), \mathbb{P})$ est un espace de probabilités filtré. On note $\mathscr{G} = \mathscr{F}_\infty$. Soient $(\beta_u, u \geqq 0)$ et $(\beta'_v, v \geqq 0)$ deux $\mathscr{F}$-mouvements browniens plans issus de 0 i.e. pour tous $t \geqq s \geqq 0$, $\beta_t - \beta_s$ et $\beta'_t - \beta'_s$ sont indépendants de $\mathscr{F}_s$.

On notera $R_{t,s} = [0, t] \times [0, s]$.

Dans Mathieu [9] nous avons donné une construction des t.l.i. de $\beta$ et $\beta'$, $(\alpha(x, t, s), x \in \mathbb{R}^2, t \geqq 0, s \geqq 0)$. Nous avons noté que $\alpha(x, t, s)$ peut prendre la valeur $+\infty$ et n'est pas toujours continu. C'est néanmoins la version la plus régulière de la densité d'occupation du champ aléatoire $(\beta_u - \beta'_v, (u, v) \in R_{t,s})$. Nous avons également prouvé que le processus $\alpha(x, t, s) - \mathbb{E}[\alpha(x, t, s) \,\|\, \sigma(\beta_u - \beta'_u, u \geqq 0)]$, défini pour $\alpha(x, t, s) < +\infty$, admet un (unique) prolongement continu (et fini) à $\mathbb{R}^2$, soit $\gamma(x, t, s)$. Nous appelons $\gamma$ le *temps local d'intersection renormalisé* (t.l.i.r.) de $\beta$ et $\beta'$.

L'objet de cet article est de décrire les propriétés de régularité des t.l.i. ou t.l.i.r. de $\beta$ et $\beta'$ à travers certaines inégalités maximales. Nous chercherons donc des estimations en norme $L_p$ de quantités du type:

$$\sup_{x,y} \frac{\gamma(x, t, s) - \gamma(y, t, s)}{|x - y|^\varepsilon}$$

ou

$$\sup_{x,y} \frac{\alpha(x, t, s) - \alpha(y, t, s)}{|x - y|^\varepsilon}$$

pour $\varepsilon \in ]0, 1[$. En fait, comme c'est en général le cas pour les inégalités en théorie des martingales, il ne serait pas naturel de se restreindre à des temps $t$ et $s$ déterministes. De même que dans Mathieu [9], nous aurons recours à la théorie des inégalités pour des processus arrêtés à des temps aléatoires quelconques (Voir Barlow et al. [2], Bismut-Yor [3], Mathieu [8] ou Yor [15]). Rappelons qu'on désigne par *temps aléatoires* les variables $\mathscr{G}$-mesurables positives.

**Theoreme 0.1** *pour tous* $q > 0$, $\eta > 2$, $\varepsilon \in ]0, 1[$, $\delta \in ]0, 2-\varepsilon[$, *il existe une constante, C, indépendante du choix de* $\beta$ *et* $\beta'$, *telle que, pour tout couple de temps aléatoires* $(K, L)$, *on ait*:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \leqq K, s \leqq L} \sup_{x \neq y} \left(\frac{\gamma(x, t, s) - \gamma(y, t, s)}{|x - y|^{\varepsilon}}\right)^q\right] \leqq C \|L^{(2-\varepsilon-\delta)q/2}\|_\eta \| K^{(\delta/2)q}\|_\eta .$$

En général $\alpha(., t, s)$ est à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}_+$. Il est donc exclu que les temps locaux d'intersection verifient eux-mêmes les inégalités ci-dessus. Cependant nous montrons que si $\beta$ et $\beta'$ sont indépendants, ou seulement "peu liés", alors $\alpha(., t, s)$ est continu (et fini) et satisfait les inégalités du théorème 0.1.

**Theoreme 0.2** *Soit* $\Gamma \in \mathcal{G}$. *Supposons qu'il existe* $m > 0$, *tel que*, $\mathbb{P}$. *p.s. sur* $\Gamma$ *et pour presque tout* $u \geqq 0$, *on ait*:

$$2 - \frac{d\langle\beta_1, \beta_1'\rangle}{du} - \frac{d\langle\beta_2, \beta_2'\rangle}{du} \geqq m$$

*Alors*:
(i) *pour tous* $t, s \geqq 0$, *le processus* $x \to \alpha(x,t,s)\mathbb{I}_\Gamma$ *est fini et continu.*
(ii) *Pour tous* $q > 0$, $\eta > 2$, $\varepsilon \in [0, 1[$, $\delta \in ]0, 2-\varepsilon[$, *il existe une constante* $C$ *(dépendant de* $\Gamma$*) telle que, pour tout couple de temps aléatoires* $(K,L)$, *on ait*:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \leqq K, s \leqq L} \sup_{x \neq y} \left(\frac{\alpha(x, t, s) - \alpha(y, t, s)}{|x - y|^{\varepsilon}}\right)^q I_\Gamma\right] \leqq C \|L^{(2-\varepsilon-\delta)q/2}\|_\eta \| K^{(\delta/2)q}\|_\eta .$$

(iii) *Pour tous* $p > 0$, $\eta > 2$, $\varepsilon \in [0, 1[$, *il existe une constante C, telle que, pour tout couple de temps aléatoires* $(K,L)$, *on ait*:

$$\|\sup_x \alpha(x, K, L)\mathbb{I}_\Gamma\|_p \leqq C\|K^{1-\varepsilon}\|_{\eta p}\|L^{\varepsilon}\|_{\eta p} .$$

Remarquons que si $\beta$ et $\beta'$ sont indépendants, alors

$$\frac{d\langle\beta_1, \beta_1'\rangle}{du} - \frac{d\langle\beta_2, \beta_2'\rangle}{du} = 0$$

et le théorème s'applique avec $\Gamma = \Omega$.

Mais les hypothèses du théorème sont aussi vérifiées avec $\Gamma = \Omega$ si, par exemple, $\beta_1$ et $\beta_1'$ sont indépendants, et $\beta_2 = \beta_2'$.

Par analogie avec les inégalités obtenues par Barlow et Yor [1] pour les temps locaux d'un mouvement brownien réel, nous appelerons les inégalités des théorèmes 0.1 et 0.2 *Inégalités Barlow-Yor.* Ces inégalités impliquent évidemment les propriétés de régularité höldérienne de $\gamma$ ou $\alpha$ mais elles sont plus précises et présentent un interêt en soi dans la mesure où elles expriment en quel sens les temps locaux d'intersection sont contrôlés par les normes des browniens arrêtés $(\beta_t, t \leqq K)$ et $(\beta_s', s \leqq L)$ dans les espaces de Hardy $H_p$. Dans le cas indépendant il est possible de préciser les inégalités du théorème 0.2 soit en remplaçant les temps aléatoires par des temps d'arrêt (Voir 4), soit en remplaçant les puissance de $L$ par des puissances de $\log L$ (Voir 3.2).

L'article est organisé de la facon suivante: la fin de cette introduction est consacrée à des rappels sur les inégalités pour des processus arrêtés à des temps aléatoires. Dans la partie 1 nous établissons les lemmes techniques dont nous aurons besoin. La partie 2 est la démonstration du théorème 0.1. Dans la partie 3 nous montrons le théorème 0.2 puis étudions le cas indépendant. Finalement, la partie 4 est consacrée à des inégalités Barlow-Yor pour les t.l.i. de deux mouvements browniens indépendants arrêtés à des temps d'arrêt. Remarquons qu'il aura été nécessaire d'établir d'abord des inégalités pour des temps quelconques avant de pouvoir préciser les résultats pour des temps d'arrêt. Mentionnons que les t.l.i. de deux mouvements browniens indépendants à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ satisfont des inégalités Barlow-Yor (Voir Mathieu [10]).

## *0.1 Lemmes préliminaires*

Nous rappelons ici quelques résultats connus sur les inégalités en théorie des martingales. Nous commençons par énoncer deux lemmes généraux:

Nous ferons appel au lemme de Garsia Rodemich Rumsey (en abrégé G.R.R.) tel qu'il est formulé dans Barlow Yor [1, p. 203] (Cf. aussi Meyer [11]):

**Lemme 0.3 (G.R.R.).** *Soit* $(U(a), a \in \mathbb{R}^d)$ *une famille de variables aléatoires à valeur dans un espace de Banach. On suppose que p.s. la fonction* $a \to U(a)$ *est continue. Supposons qu'il existe* $\alpha > d$, $\gamma > 0$ *et* $H_{\alpha,\gamma}$, *tels que pour tous* $a$ *et* $b$, *on ait*:

$$\mathbb{E}[| U(a) - U(b) |^\gamma] \leqq H_{\alpha,\gamma} \mid a - b \mid^\alpha$$

*alors, pour* $\varepsilon \in [0, (\alpha - d)/\gamma[$ et $r > 0$, *on a*:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{|a|<r,\, |b|<r} \left(\frac{U(a) - U(b)}{\mid a - b \mid^\varepsilon}\right)^\gamma\right] \leqq H_{\alpha,\gamma} C^0_{\gamma,\alpha,\varepsilon,d} r^{\alpha-\varepsilon\gamma} .$$

De plus il est possible de choisir:

$$C^0_{\gamma,\alpha,\varepsilon,d} = c_d 8^\gamma 2^{\varepsilon\gamma} \left(1 + \frac{2d}{\varepsilon\gamma}\right) \frac{1}{\alpha - \varepsilon\gamma - d}$$

où $c_d$ est une constante universelle ne dépendant que de $d$.
Rappelons le résultat sur les inégalités à temps quelconques que nous utiliserons (Cf. Barlow Jacka Yor [2] ou Mathieu [8] pour la preuve).

**Lemme 0.4** *Soient* $(A_t, t \geqq 0)$, $(B_t, t \geqq 0)$ *deux processus croissants continus à droite, tels que, pour tout t,* $A_t$ *et* $B_t$ *soient* $\mathscr{G}$*-mesurables, et* $A_0 = B_0 = 0$. *On suppose qu'il existe* $p_0 \geqq 0$ *tel que, pour tout* $p > p_0$, *il existe* $C_p \in \mathbb{R}_+$, *tel que, pour tout temps aléatoire L on ait*:

$$\mathbb{E}[A_L^p] \leqq C_p \|B_L^p\|_\infty .$$

*Alors, pour tous* $\eta > 1$, $q > 0$, *il existe une constante* $C_{\eta,q}$ *telle que, pour tout temps aléatoire L, on ait*:

$$\mathbb{E}[A_L^q] \leqq C_{\eta,q} \|B_L^q\|_\eta .$$

D'après la proposition 2.4.1 Barlow Jacka Yor [2], on peut choisir

$$C_{\eta,q} = c_{\eta,q}\left(\inf_{p>p_0,\, p>q\eta/(\eta-1)} C_p^{q/p}\right)$$

où $c_{\eta,q}$ est une constante ne dépendant plus que de $\eta$ et $q$.

Les inégalités sur les martingales dont nous aurons besoin sont les inégalités de Burkholder–Davis–Gundy (B.D.G.) et celles de Barlow–Jacka–Yor (B.J.Y.):

$M$ désigne une martingale continue réelle issue de 0.

*Inégalités B.D.G.* Pour tout $p > 0$, il existe une constante $C_p$, telle que pour tout temps d'arrêt $T$ on ait:

$$\| \sup_{t \leqq T} | M_t | \|_p \leqq C_p \| \sqrt{\langle M \rangle_T} \|_p$$

De plus, pour $p \geqq 2$, on peut choisir $C_p \leqq c^p p^{p/2}$, où $c$ est une constante universelle (Cf. Burkholder [4] et Barlow Yor [1]).

*Inégalités B.J.Y.* Pour tous $p > 0$, $\eta > 1$, il existe une constante $C_{p,\eta}$, telle que pour tout temps aléatoire $L$ on ait:

$$\| \sup_{t \leqq L} | M_t | \|_p \leqq C_{p,\eta} \| \sqrt{\langle M \rangle_L} \|_{p\eta}$$

(Voir Barlow et al. [2])

*Notations.*

On notera $X_t^* = \sup_{u \leqq t} | \beta_u |$ et $Y_s^* = \sup_{v \leqq s} | \beta'_v |$. Dans la suite $C_p, C_{p,\varepsilon} \ldots$ désignent des constantes dont la valeur est susceptible de changer de ligne en ligne. On s'est efforcé d'indiquer en indice de quels paramètres elles dépendent.

## 1 Quelques inégalités

Nous avons regroupé dans les quatre lemmes qui suivent des inégalités sur certaines fonctionnelles du mouvement brownien.

Soient $\varepsilon \in [0, 1[$, $p > 0$, $\delta \in ]0, 1 - \varepsilon/2[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\varepsilon_n = 1 - 2^{-n}$.

**Lemme 1.1** *On pose*

$$\xi_p^\varepsilon(s) = \sup_z \mathbb{E}\left[\left(\int_0^s \frac{dv}{| \beta'_v - z |^{2\varepsilon}}\right)^p\right].$$

*Il existe une constante, $C^1_{\varepsilon,p}$, telle que, pour tout $s \geqq 0$, on ait:*

$$\xi_p^\varepsilon(s) \leqq C^1_{\varepsilon,p} s^{p(1-\varepsilon)}.$$

*Démonstration.* Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $\varepsilon_n > \varepsilon$. D'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on a:

$$\xi_p^\varepsilon(s) \leqq s^{p(1-\varepsilon\varepsilon_n^{-1})} \xi^{\varepsilon_n}_{p\varepsilon\varepsilon_n^{-1}}(s).$$

Il suffit donc de montrer le lemme pour $\varepsilon = \varepsilon_n$. On procède par récurrence: comme $\xi_p^0(s) = s^p$, l'inégalité est vraie pour $n = 0$. D'après la formule d'Itô, pour $\varepsilon \geqq \frac{1}{2}$:

$$
\begin{aligned}
&| \beta'_s - z |^{2-2\varepsilon} - | z |^{2-2\varepsilon} \\
&= 2(1-\varepsilon)\int_0^s \left( d\beta'_v ; \frac{\beta'_v - z}{| \beta'_v - z |^{2\varepsilon}} \right) + 2(1-\varepsilon)^2 \int_0^s dv \frac{1}{| \beta'_v - z |^{2\varepsilon}}
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\xi_p^\varepsilon(s) &\leqq C_{\varepsilon,p} \sup_z \left( \mathbb{E}\left[ \left|| \beta'_s - z |^{2-2\varepsilon} - | z |^{2-2\varepsilon}\right|^p \right] \right. \\
&\qquad \left. + \mathbb{E}\left[ \left| \int_0^s \left( d\beta'_v ; \frac{\beta'_v - z}{| \beta'_v - z |^{2\varepsilon}} \right) \right|^p \right] \right) \\
&\leqq C_{\varepsilon,p} \sup_z \left( \mathbb{E}\left[ | \beta'_s |^{p(2-2\varepsilon)} \right] + \mathbb{E}\left[ \left| \int_0^s \left( d\beta'_v ; \frac{\beta'_v - z}{| \beta'_v - z |^{2\varepsilon}} \right) \right|^p \right] \right) \\
&\leqq C_{\varepsilon,p} \left( s^{p(1-\varepsilon)} + \xi_{p/2}^{2\varepsilon - 1}(s) \right) \quad \text{d'après B.D.G.}
\end{aligned}
$$

i.e. $\xi_p^{\varepsilon_{n+1}}(s) \leqq C_{\varepsilon,p}(s^{p(1-\varepsilon_{n+1})} + \xi_{p/2}^{\varepsilon_n}(s))$. On en déduit le lemme.

**Lemme 1.2** *On pose*

$$\psi_p^\varepsilon(t,s) = \sup_z \mathbb{E}\left[ \left( \sup_{u \leqq t} \int_0^s \frac{dv}{|\beta_u - \beta'_v - z|^{2\varepsilon}} \right)^p \right]$$

*Pour tout $\eta > 0$, tel que $\varepsilon + \eta < 1$, il existe une constante, $C^2_{\varepsilon,\eta,p}$, telle que, pour tout $t \geqq s \geqq 0$, on ait*:

$$\psi_p^\varepsilon(t,s) \leqq C^2_{\varepsilon,\eta,p} s^{p(1-\varepsilon-\eta)} t^{\eta p}$$

*Démonstration.* Soient $x, y \in \mathbb{R}^2$.

$$
\begin{aligned}
&\sup_z \mathbb{E}\left[ \left( \left| \int_0^s \frac{dv}{| x - z - \beta'_v |^{2\varepsilon}} - \int_0^s \frac{dv}{| y - z - \beta'_v |^{2\varepsilon}} \right| \right)^p \right] \\
&\leqq C_{p,\varepsilon,\eta} | x - y |^{2\eta p} \ldots \\
&\quad \ldots \sup_z \left( \mathbb{E}\left[ \left( \int_0^s \frac{dv}{| x - z - \beta'_v |^{2(\varepsilon+\eta)}} \right)^p \right] + \mathbb{E}\left[ \left( \int_0^s \frac{dv}{| x - z - \beta'_v |^{2(\varepsilon+\eta)}} \right)^p \right] \right) \\
&\leqq C_{p,\varepsilon,\eta} | x - y |^{2\eta p} s^{p(1-\varepsilon-\eta)}
\end{aligned}
$$

d'après le lemme 1.1.
Donc, d'aprés G.R.R., pour tout temps aléatoire $K$:

$$
\begin{aligned}
&\sup_z \mathbb{E}\left[ \left( \sup_{u \leqq K} \left| \int_0^s \frac{dv}{|\beta_u - z - \beta'_v|^{2\varepsilon}} - \int_0^s \frac{dv}{| - z - \beta'_v|^{2\varepsilon}} \right| \right)^p \right] \\
&\leqq \sup_z \mathbb{E}\left[ \left( \sup_{|x| \leqq X_K^*} \left| \int_0^s \frac{dv}{|x - z - \beta'_v|^{2\varepsilon}} - \int_0^s \frac{dv}{| - z - \beta'_v|^{2\varepsilon}} \right| \right)^p \right] \\
&\leqq C_{p,\varepsilon,\eta} \|X_K^*\|_\infty^{2\eta p} s^{p(1-\varepsilon-\eta)}
\end{aligned}
$$

Le lemme 0.4 nous autorise à remplacer dans l'expression ci-dessus $\|(X_K^*)^{2\eta p}\|_\infty$ par $\|(X_K^*)^{2\eta p}\|_2$. Or $\|(X_K^*)^{2\eta p}\|_2 \leqq C_p \|K^{\eta p}\|_3$ d'après B.J.Y. D'où, en choisissant $K = t$:

$$\sup_z \mathbb{E}\left[\left(\sup_{u \leqq t} \left| \int_0^s \frac{dv}{|\beta_u - z - \beta_v'|^{2\varepsilon}} - \int_0^s \frac{dv}{|-z-\beta_v'|^{2\varepsilon}} \right|\right)^p\right] \leqq C_{p,\varepsilon,\eta}\, t^{\eta p} s^{p(1-\varepsilon-\eta)} .$$

D'après le lemme 1.1

$$\sup_z \mathbb{E}\left[\left(\int_0^s \frac{dv}{|-z-\beta_v'|^{2\varepsilon}}\right)^p\right] \leqq C_{p,\varepsilon,\eta} s^{p(1-\varepsilon)} \leqq C_{p,\varepsilon,\eta}\, t^{\eta p} s^{p(1-\varepsilon-\eta)} .$$

On en déduit le lemme.

**Lemme 1.3** *On pose*

$$\phi_p^\varepsilon(t,s) = \sup_z \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t du \int_0^{s\wedge u} \frac{du}{|\beta_u - \beta_v' - z|^{2\varepsilon}}\right)^p\right] .$$

*Il existe une constante, $C^3_{\varepsilon,p}$, telle que, pour tout $t, s \geqq 0$, on ait:*

$$\phi_p^\varepsilon(t,s) \leqq C^3_{\varepsilon,p} s^p t^{p(1-\varepsilon)} .$$

*Démonstration.* Il suffit de montrer le lemme pour $\varepsilon = \varepsilon_n$. C'est évident pour $\varepsilon = 0$, et, si $\varepsilon \in [\frac{1}{2}, 1[$, de même que pour le lemme 1.1, d'aprés la formule d'Itô:

$$\phi_p^\varepsilon(t,s) \leqq C_p \sup_z \left( \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{s\wedge t} dv \left| |\beta_t - \beta_v' - z|^{2-2\varepsilon} - |\beta_v' + z|^{2-2\varepsilon} \right|\right)^p\right] \right.$$
$$\left. + \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{s\wedge t} dv \left| \int_v^t \left(d\beta_u; \frac{\beta_u - \beta_v' - z}{|\beta_u - \beta_v' - z|^{2\varepsilon}}\right)\right|\right)^p\right]\right) .$$

Or

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{s\wedge t} dv \left| |\beta_t - \beta_v' - z|^{2-2\varepsilon} - |\beta_v' + z|^{2-2\varepsilon}\right|\right)^p\right] \leqq (s\wedge t)^p \mathbb{E}[|\beta_{s\wedge t}|^{(2-2\varepsilon)p}]$$
$$\leqq C_{p,\varepsilon} s^p t^{p(1-\varepsilon)}$$

et, d'après Cauchy–Schwarz

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{s\wedge t} dv \left| \int_v^t \left(d\beta_u; \frac{\beta_u - \beta_v' - z}{|\beta_u - \beta_v' - z|^{2\varepsilon}}\right)\right|\right)^p\right]$$
$$\leqq C_p s^{p/2} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{s\wedge t} dv \left| \int_v^t \left(d\beta_u; \frac{\beta_u - \beta_v' - z}{|\beta_u - \beta_v' - z|^{2\varepsilon}}\right)\right|^2\right)^{p/2}\right]$$
$$\leqq C_p s^{p/2} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{s\wedge t} dv \int_v^t du \frac{1}{|\beta_u - \beta_v' - z|^{2(2\varepsilon-1)}}\right)^{p/2}\right] .$$

(On a utilisé pour la seconde inégalité l'indépendance de $\beta_u - \beta_v$ et $\beta'_v$ pour $u \geqq v$, et la version des inégalités B.D.G. donnée dans le corollaire 12 de Jacka–Yor [7].)
Donc

$$\phi_p^\varepsilon(t, s) \leqq C_{p,\varepsilon}(t^{p(1-\varepsilon)} s^p + s^{p/2} \phi_{p/2}^{2\varepsilon-1}(t, s)) .$$

On conclu par récurrence sur $\varepsilon_n$.

**Lemme 1.4** *Soient* $\varepsilon \in [0, 1[$ *et* $\delta \in ]0, 1 - \varepsilon/2[$.
*Il existe une constante,* $C^4_{\varepsilon, \delta, p}$, *telle que, pour tous* $t \geqq s \geqq 0$, *on ait:*

$$\sup_z \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t du \left(\int_0^{s\wedge u} \frac{dv}{|\beta_u - \beta'_v - z|^{1+\varepsilon}}\right)^2\right)^{p/2}\right] \leqq C^4_{\varepsilon,\delta,p} s^{p(1-\delta-(\varepsilon/2))} t^{\delta p} .$$

*Démonstration.* Soit $\alpha \in ]1, 2/(1+\varepsilon)[$.
On a:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t du \left(\int_0^{s\wedge u} \frac{dv}{|\beta_u - \beta'_v - z|^{1+\varepsilon}}\right)^2\right)^{p/2}\right] \\
&\leqq s^{p(1-\alpha^{-1})} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t du \left(\int_0^{s\wedge u} \frac{dv}{|\beta_u - \beta'_v - z|^{\alpha(1+\varepsilon)}}\right)^{2/\alpha}\right)^{p/2}\right] \\
&\leqq s^{p(1-\alpha^{-1})} \ldots \\
&\quad \ldots \mathbb{E}\left[\left(\left(\int_0^t du \int_0^{s\wedge u} \frac{dv}{|\beta_u - \beta'_v - z|^{\alpha(1+\varepsilon)}}\right)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. \sup_{u \leqq t}\left(\int_0^s \frac{dv}{|\beta_u - \beta'_v - z|^{\alpha(1+\varepsilon)}}\right)^{(2/\alpha)-1}\right)^{p/2}\right] \\
&\leqq s^{p(1-\alpha^{-1})} \sqrt{\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t du \int_0^{s\wedge u} \frac{dv}{|\beta_u - \beta'_v - z|^{\alpha(1+\varepsilon)}}\right)^p\right]} \ldots \\
&\quad \ldots \sqrt{\mathbb{E}\left[\left(\sup_{u \leqq t}\left(\int_0^s \frac{dv}{|\beta_u - \beta'_v - z|^{\alpha(1+\varepsilon)}}\right)^{(2/\alpha)-1}\right)^p\right]} \\
&= s^{p(1-\alpha^{-1})} \sqrt{\psi_{p((2/\alpha)-1)}^{(\alpha/2)(1+\varepsilon)}(t, s) \phi_p^{(\alpha/2)(1+\varepsilon)}(t, s)} \\
&\leqq C s^{p(1-\alpha^{-1})} s^{(p/2)((2/\alpha)-1)(1-(\alpha/2)(1+\varepsilon)-\eta)} t^{\eta(p/2)((2/\alpha)-1)} s^{(p/2)} t^{(p/2)(1-(\alpha/2)(1+\varepsilon))} \\
&= C s^{(p/2)(-\eta((2/\alpha)-1)+(\alpha/2)(1+\varepsilon)+1-\varepsilon)} t^{(p/2)(\eta(2/\alpha)-1)-(\alpha/2)(1+\varepsilon)+1)}
\end{aligned}$$

d'après les lemmes précédents. $\eta$ a été choisi tel que $\eta + (\alpha/2)(1+\varepsilon) < 1$, $\eta > 0$.

Posons $\delta(\eta, \alpha) = \frac{1}{2}(-\eta((2/\alpha) - 1) + (\alpha/2)(1 + \varepsilon) + 1 - \varepsilon)$. On remarque que quand $\eta \to 0$ et $\alpha \to 2/(1 + \varepsilon)$, alors $\delta(\eta, \alpha) \to 0$. Il est donc posible de choisir $\eta$ et $\alpha$ tels que $\delta(\eta, \alpha) < \delta$.

## 2 Inegalites Barlow–Yor pour les T.L.I.R.

La preuve du théorème 0.1 repose sur la formule de Tanaka–Rosen:
$\mathbb{P}.p.s.$, pour tous $x \in \mathbb{R}^2$, $t, s \geqq 0$, $\pi\alpha(x, t, s) = -2\alpha_2(x, t, s) + \gamma^0(x, t, s)$ avec

$$\gamma^0(x, t, s) = \alpha_2'(x, t, s) + \alpha_2''(x, t, s) - \alpha_1(x, t, s) - \alpha_1'(x, t, s)\,,$$

$$\alpha_1(x, t, s) = \int_0^t \left( d\beta_u; \int_0^{u\wedge s} dv \frac{\beta_u - \beta_v' - x}{|\beta_u - \beta_v' - x|^2} \right)\,,$$

$$\alpha_1'(x, t, s) = \int_0^s \left( d\beta_u'; \int_0^{v\wedge t} du \frac{\beta_u - \beta_v' - x}{|\beta_u - \beta_v' - x|^2} \right)\,,$$

$$\alpha_2'(x, t, s) = \int_0^{t\wedge s} du \log|\beta_t - \beta_u' - x|\,,$$

$$\alpha_2''(x, t, s) = \int_0^{t\wedge s} du \log|\beta_u - \beta_s' - x|\,,$$

et

$$\alpha_2(x, t, s) = \int_0^{t\wedge s} du \log|\beta_u - \beta_u' - x|\,.$$

Dans la preuve que nous avons donné de cette formule dans Mathieu [9] nous avions admis le résultat du lemme 1.4. La démonstration de la formule de Tanaka–Rosen est donc maintenant complète.

$\alpha_2(x, t, s)$ est $\sigma(\beta_u - \beta_u', u \geqq 0)$-mesurable, donc

$$\gamma(x, t, s) = \gamma^0(x, t, s) - \mathbb{E}\left[\gamma^0(x, t, s) \,\|\, \sigma(\beta_u - \beta_u')\right]\,.$$

Pour montrer le théorème 0.1, il suffit donc de prouver les inégalitès Barlow–Yor pour $\gamma^0$:

**Theoreme 2.1** *pour tous $q > 0$, $\eta > 2$, $\varepsilon \in ]0, 1[$, $\delta \in ]0, 2 - \varepsilon[$, il existe une constante, $C$, indépendante du choix de $\beta$ et $\beta'$, telle que, pour tout couple de temps aléatoires $(K, L)$, on ait:*

$$\mathbb{E}\left[ \sup_{t\leqq K, s\leqq L} \sup_{x\neq y} \left( \frac{\gamma^0(x, t, s) - \gamma^0(y, t, s)}{|x - y|^\varepsilon} \right)^q \right] \leqq C\|L^{(2-\varepsilon-\delta)q/2}\|_\eta \|K^{(\delta/2)q}\|_\eta\,.$$

*Remarques.* de même que dans Mathieu [8], on montrerait que le théorème 2.1 implique l'inégalité: pour tous $q > 0$, $\eta > 1$, $\theta > 0$, $\varepsilon \in [0, 1[$, $\delta \in ]0, 2 - \varepsilon[$, il existe une constante, $C$, indépendante du choix de $\beta$ et $\beta'$, telle que, pour tout couple de temps aléatoires (i, $K, L$), on ait:

$$\mathbb{E}\left[ \sup_{t\leqq K, s\leqq L} \sup_{x\neq y} \left( \frac{\gamma^0(x, t, s) - \gamma^0(y, t, s)}{|x - y|^\varepsilon} \right)^q \right] \leqq C\|L^{(2-\varepsilon-\delta)q/2} K^{(\delta/2)q} (1 + |\log K|^\theta + |\log L|^\theta)\|_\eta\,.$$

*Démonstration.* La démonstration s'articule autour de l'inégalité suivante: pour $t \in \mathbb{R}_+$, $s \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ et $\varepsilon \in [0, 1[$, $\delta \in ]0, 2-\varepsilon[$, $p > p_0$, on a:

$$(*) \qquad \mathbb{E}\left[\sup_{t' \leqq t, s' \leqq s} |\gamma^0(x, t', s') - \gamma^0(y, t', s')|^p\right] \leqq C_{p,\varepsilon,\delta}\, |x-y|^{p\varepsilon} \, s^{(p/2)(2-\varepsilon-\delta)} t^{(p/2)\delta} .$$

(a) Montrons que les différents termes de la formule de Tanaka–Rosen pour $\gamma^0$ vérifient $(*)$:
Soient $x$ et $y$ dans $\mathbb{R}^2$.
(i) Soient $t \geqq 0$, $s \geqq s'$.

$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{t' \leqq t} |\alpha_1(x, t', s) - \alpha_1(y, t', s)| - \sup_{t' \leqq t} |\alpha_1(x, t', s') - \alpha_1(y, t', s')|\right)^p\right]$$

$$\leqq \mathbb{E}\left[\sup_{s' \leqq t' \leqq t} |\int_{s'}^{t'} \left(d\beta_u; \int_{u\wedge s'}^{u\wedge s} dv \frac{\beta_u - \beta'_v - x}{|\beta_u - \beta'_v - x|^2} - \frac{\beta_u - \beta'_v - y}{|\beta_u - \beta'_v - y|^2}\right) |^p\right]$$

$$\leqq C_p \mathbb{E}\left[\left(\int_{s'}^{t} du | \int_{s'}^{u\wedge s} dv \frac{\beta_u - \beta'_v - x}{|\beta_u - \beta'_v - x|^2} - \frac{\beta_u - \beta'_v - y}{|\beta_u - \beta'_v - y|^2} |^2\right)^{p/2}\right]$$

par B.D.G.

$$\leqq C_{\varepsilon,p} |x-y|^{\varepsilon p} \mathbb{E}\left[\left(\int_{s'}^{t} du (\int_{s'}^{u\wedge s} dv \frac{1}{|\beta_u - \beta'_v - x|^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{|\beta_u - \beta'_v - y|^{1+\varepsilon}})^2\right)^{p/2}\right]$$

$$\text{car} \left|\frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2}\right| \leqq C_\varepsilon |a-b|^\varepsilon \left(\frac{1}{|a|^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{|b|^{1+\varepsilon}}\right)$$

$$\leqq C_{\varepsilon,\delta,p} |x-y|^{\varepsilon p} (s-s')^{p(1-(\varepsilon+\delta)/2)} t^{\delta p/2}$$

pour tous $\delta \in ]0, 2-\varepsilon[$, d'aprés le lemme 1.4.
De G.R.R., on déduit:

$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{t' \leqq t, s' \leqq s} |\alpha_1(x, t', s') - \alpha_1(y, t', s')|\right)^p\right]$$

$$\leqq C_{\varepsilon,\delta,p} |x-y|^{\varepsilon p} s^{p(1-(\varepsilon+\delta)/2)} t^{\delta p/2}$$

$$\text{pour } 2 < p(1-(\varepsilon+\delta)/2) .$$

(ii) On cherche maintenant à évaluer $\alpha''_2$.

$$\sup_{t' \leqq t, s' \leqq s} |\alpha''_2(x, t', s') - \alpha''_2(y, t', s')|^p$$

$$\leqq C_\varepsilon |x-y|^\varepsilon \sup_{s' \leqq s} \left(\int_0^{t\wedge s} dv \frac{1}{|\beta_v - \beta'_{s'} - x|^\varepsilon} + \int_0^{t\wedge s} dv \frac{1}{|\beta_v - \beta'_{s'} - y|^\varepsilon}\right) .$$

Soit $(L_t^a, a \in \mathbb{R}_+, t \in \mathbb{R}_+)$ une version bicontinue des temps locaux de $|\beta|$. On notera $L_t^* = \sup_a L_t^a$
Alors

$$\int_0^t \frac{dv}{|\beta_v - \beta_s' - x|^\varepsilon} \leqq \int_0^t \frac{dv}{|\,|\beta_v| - |\beta_s' + x|\,|^\varepsilon}$$

$$\leqq \int_{\mathbb{R}_+} da \frac{L_t^a}{|a - |\beta_s' - x|\,|^\varepsilon}$$

$$\leqq L_t^* \int_0^{X_t^*} \frac{da}{|a - |\beta_s' - x|\,|^\varepsilon}$$

$$\leqq C L_t^* |X_t^*|^{1-\varepsilon} .$$

D'où, compte tenu de l'inégalité $\mathbb{E}[(L_t^*)^q] \leqq C_q t^{q/2}$, $\forall q > 0$ (Cf. Barlow Yor [1]: corollaire 5.2.1.)

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t' \leqq t, s' \leqq s} |\alpha_2''(x, t', s') - \alpha_2''(y, t', s')|^p\right] \leqq C_p |x-y|^{\varepsilon p} (t \wedge s)^{(p/2)(2-\varepsilon)}$$

Les calculs pour les autres termes de T-R(2) sont semblables.
Des résultats de (i) et (ii), on déduit (*).
(b) Montrons que (*) implique le théorème: Soient $\varepsilon \in ]0, 1[$, $\delta \in ]0, 2-\varepsilon[$ Soient $\varepsilon' \in ]\varepsilon, 1[$, $\delta' \in ]0, 2-\varepsilon'[$. Soit $p_0$, tel que (*) soit vérifiée pour $\varepsilon'$, $\delta'$ et $p_0 > 2/(\varepsilon' - \varepsilon)$. Alors pour $p > p_0$, on a $\varepsilon < \varepsilon' - (2/p)$

On applique G.R.R. à (*): pour tout $r > 0$, $t \geqq 0$, $s \geqq 0$:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t' \leqq t, s' \leqq s, |x| < r, |y| < r, x \neq y} \left(\frac{\gamma^0(x, t', s') - \gamma^0(y, t', s')}{|x-y|^\varepsilon}\right)^p\right]$$
$$\leqq C_{p, \varepsilon, \varepsilon', \delta'} \, r^{p(\varepsilon' - \varepsilon)} s^{(p/2)(2-\varepsilon'-\delta')} t^{(p/2)\delta'}$$

Posons $\phi(t) = t + (X_t^*)^2 + (Y_t^*)^2$.
On a, pour tout couple de temps aléatoires $(K, \mathrm{L})$:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \leqq K, s \leqq L, |x|, |y| \leqq 3\sqrt{\phi(K \vee L)}, x \neq y} \left(\frac{\gamma^0(x, t, s) - \gamma^0(y, t, s)}{|x-y|^\varepsilon}\right)^p\right]$$
$$\leqq \mathbb{E}\left[\sup_{t \leqq \|K\|_\infty, s \leqq \|L\|_\infty, |x|, |y| \leqq 3\|\sqrt{\phi(K \vee L)}\|_\infty, x \neq y} \left(\frac{\gamma^0(x, t, s) - \gamma^0(y, t, s)}{|x-y|^\varepsilon}\right)^p\right]$$
$$\leqq C_{p, \varepsilon, \varepsilon', \delta'} \|L\|_\infty^{p/2(2-\varepsilon'-\delta')} \|K\|_\infty^{(p/2)\delta'} \, \|\phi(K \vee L)\|_\infty^{(p/2)(\varepsilon'-\varepsilon)}$$
$$\leqq C_{p, \varepsilon, \varepsilon', \delta'} \|\phi(L)\|_\infty^{(p/2)(2-\varepsilon'-\delta'} \|\phi(K)\|_\infty^{(p/2)\delta'} (\|\phi(K)\|_\infty$$
$$+ \|\phi(L)\|_\infty)^{(p/2)(\varepsilon'-\varepsilon)}$$

Si$\|\phi(L)\|_\infty > \|\phi(K)\|_\infty$, on choisit $\delta = \delta'$.

Si$\|\phi(L)\|_\infty < \|\phi(K)\|_\infty$, on choisit $\delta' = \delta + \varepsilon - \varepsilon'$.

Dans tous les cas, on a:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \leqq K, s \leqq L, |x|, |y| \leqq 3\sqrt{\phi(K \vee L)}, x \neq y} \left(\frac{\gamma^0(x, t, s) - \gamma^0(y, t, s)}{|x-y|^{\varepsilon}}\right)^p\right]$$

$$\leqq C_{p,\varepsilon,\delta} \|\phi(L)\|_{\infty}^{(p/2)(2-\varepsilon-\delta)} \|\phi(K)\|_{\infty}^{(p/2)\delta} \tag{1}$$

Par ailleurs, le support de $\alpha(., t, s)$ est contenu dans la boule centrée de rayon $\phi(t \vee s)$, donc, si $x \geqq 2\sqrt{\phi(t \vee s)}$, alors

$$\gamma^0(x, t, s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{t \wedge s} \mathrm{du} \log|\beta_u - \beta'_u - x|$$

et

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \leqq K, s \leqq L, |x|, |y| \geqq 2\sqrt{\phi(K \vee L)}, x \neq y} \left(\frac{\gamma^0(x, t, s) - \gamma^0(y, t, s)}{|x-y|^{\varepsilon}}\right)^p\right]$$

$$\leqq C\mathbb{E}\left[\sup_{|x| \geqq 2\sqrt{\phi(K \vee L)}} \left(\int_0^{K \wedge L} du \frac{1}{|\beta_u - \beta'_u - x|^{\varepsilon}}\right)^p\right]$$

$$\leqq C\mathbb{E}\left[\left(\frac{K \wedge L}{\phi(K \vee L)^{\varepsilon/2}}\right)^p\right]$$

$$\leqq C\mathbb{E}[\phi(K \wedge L)^{p(1-(\varepsilon/2))}]$$

$$\leqq C\|\phi(L)\|_{\infty}^{(p/2)(2-\varepsilon-\delta)} \|\phi(K)\|_{\infty}^{(p/2)\delta} \tag{2}$$

(1) et (2) impliquent:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \leqq K, s \leqq L, x \neq y} \left(\frac{\gamma^0(x, t, s) - \gamma^0(y, t, s)}{|x-y|^{\varepsilon}}\right)^p\right] \leqq C\|\phi(L)\|_{\infty}^{(p/2)(2-\varepsilon-\delta)} \|\phi(K)\|_{\infty}^{(p/2)\delta}$$

(Notez que si $|x| \leqq 2\sqrt{\phi(K \vee L)}$ et $|y| \geqq 3\sqrt{\phi(K \vee L)}$, alors il existe $z$ tel que $2\sqrt{\phi(K \vee L)} \leqq |z| \leqq 3\sqrt{\phi(K \vee L)}$ et $|x-z| \leqq |x-y|$, $|y-z| \leqq |x-y|$. Alors

$$|\gamma^0(x, t, s) - \gamma^0(y, t, s)| \leqq |x-y|^{\varepsilon}\Big(\sup_{|z| \leqq 3\sqrt{\phi(K \vee L)}, z \neq x} \frac{\gamma^0(x, t, s) - \gamma^0(z, t, s)}{|x-z|^{\varepsilon}} + \ldots$$

$$\ldots \sup_{|z| \geqq 2\sqrt{\phi(K \vee L)}, z \neq y} \frac{\gamma^0(y, t, s) - \gamma^0(z, t, s)}{|y-z|^{\varepsilon}}\Big).)$$

Notons que d'aprés B.J.Y, $\|\phi(L)\|_q \leqq C_{q,\eta}\|L\|_{q\eta}$, pour $q > 0$ et $\eta > 1$.

Donc, d'aprés le lemme 0.4:

pour tout $p > 0, \eta > 1$, il existe $C_{p,\eta,\varepsilon,\delta}$, telle que pour tous temps aléatoires $K, L$:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \leqq K, s \leqq L, x \neq y}\left(\frac{\gamma^0(x,t,s)-\gamma^0(y,t,s)}{|x-y|^{\varepsilon}}\right)^p\right] \leqq C_{p,\eta,\varepsilon,\delta}\|L^{(p/2)(2-\varepsilon-\delta)}\|_{\eta}$$

$$\|\phi(K)^{(p/2)\delta}\|_{\infty}$$

(On a appliqué le lemme 0.4 pour un temps $K$ fixé avec $B_t = \phi(t)^{(2-\varepsilon-\delta/2)}\|\phi(K)\|_{\infty}^{(\delta/2)}$.)

On applique maintenant une seconde fois le lemme 0.4 en tenant compte de la valeur de la constante donnée dans l'énoncé du lemme:

pour tous $q > 0, \theta > 1$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \leqq K, s \leqq L, x \neq y}\left(\frac{\gamma^0(x,t,s)-\gamma^0(y,t,s)}{|x-y|^{\varepsilon}}\right)^q\right] \leqq C_{p,q,\eta,\theta,\varepsilon,\delta}\|L^{(p/2)(2-\varepsilon-\delta)}\|_{\eta}^{(q/p)}$$

$$\|(K)^{(q/2)\delta}\|_{\theta}\,.$$

Donc, pour tous $q > 0, \theta > 2$, en choisissant $\eta = \theta - 1$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \leqq K, s \leqq L, x \neq y}\left(\frac{\gamma^0(x,t,s)-\gamma^0(y,t,s)}{|x-y|^{\varepsilon}}\right)^q\right] \leqq C_{p,q,\eta,\theta,\varepsilon,\delta}\|L^{(q/2)(2-\varepsilon-\delta)}\|_{\theta}$$

$$\|(K)^{(q/2)\delta}\|_{\theta}\,.$$

## 3 Inégalités Barlow–Yor pour les T.L.I. (Non Renormalises)

D'après les résultats de Mathieu 9, il est exclu que les t.l.i. vérifient les inégalités Barlow–Yor en général mais nous allons montrer que, sous certaines conditions sur la covariance de $\beta$ et $\beta'$, on peut obtenir les inégalités Barlow–Yor pour $\alpha$.

### *3.1 Condition suffisante pour que les t.l.i. vérifient les inégalités Barlow–Yor: preuve du théorème 0.2*

On note:

$$\beta(u) = (\beta_1(u), \beta_2(u)) \,\text{et}\, \beta'(u) = (\beta_1'(u), \beta_2'(u))$$

$$h_1(u) = 1 - \frac{d\langle\beta_1, \beta_1'\rangle u}{du} \quad h_2(u) = 1 - \frac{d\langle\beta_2, \beta_2'\rangle u}{du}\,,$$

$$h_{1,2}(u) = -\frac{1}{2}\left(\frac{d\langle\beta_1, \beta_2'\rangle u}{du} + \frac{d\langle\beta_2, \beta_1'\rangle u}{du}\right)\,.$$

Alors $h_{1,2}^2 \leqq h_1 h_2 \leqq 1$, $0 \leqq h_1$, $0 \leqq h_2$. $\Gamma$ vérifie les conditions du théorème: $\mathbb{P}.p.s.$ sur $\Gamma$ et pour presque tout $u$, $h_1(u) + h_2(u) \geqq m > 0$.

De même que pour le théorème 2.1, il nous suffit de montrer que, pour tout $p > p_0$, $\varepsilon \in [0,1[$, $\delta \in ]0, 2-\varepsilon[$:
$(*)$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t' \leqq t, s' \leqq s} |\alpha(x,t',s') - \alpha(y,t',s')|^p \mathbb{I}_\Gamma\right] \leqq C_{p,\varepsilon,\delta}\, |x-y|^{\varepsilon p}\, s^{(p/2)(2-\varepsilon-\delta)} t^{p(\delta/2)}$$

On sait déja que $\gamma^0$ vérifie $(*)$, il ne reste qu'à montrer que:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t' \leqq t, s' \leqq s} |\alpha_2(x,t',s') - \alpha_2(y,t',s')|^p \mathbb{I}_\Gamma\right] \leqq C_{p,\varepsilon,\delta}\, |x-y|^{\varepsilon p}\, s^{(p/2)(2-\varepsilon-\delta)} t^{p(\delta/2)}$$

Cela découlera du lemme:

**Lemme 3.1** *Sous les hypothèses du theórème.*

*Soient* $p > 0$, $\varepsilon \in [0,1[$. *Il existe une constante* $C^5_{p,\varepsilon}$, *telle que, pour tout* $t \geqq 0$ , *on ait:*

$$\sup_x \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \frac{du}{|\beta_u - \beta'_u - x|^\varepsilon} \mathbb{I}_\Gamma\right)^p\right] \leqq C^5_{p,\varepsilon}\, t^{p(1-(\varepsilon/2))}$$

*Démonstration.* D'après la formule d'Itô :

$$\begin{aligned}
&|\beta_t - \beta'_t - x|^{2-\varepsilon} - |x|^{2-\varepsilon} \\
&\quad = (2-\varepsilon)\int_0^t (d(\beta_u - \beta'_u); \beta_u - \beta'_u - x)|\beta_u - \beta'_u - x|^{-\varepsilon} \\
&\quad\quad + (2-\varepsilon)\int_0^t \frac{du}{|\beta_u - \beta'_u - x|^{2+\varepsilon}} \\
&\quad\quad\quad \times [|\beta_u - \beta'_u - x|^2 (h_1(u) + h_2(u)) - \varepsilon((\beta_1(u) - \beta'_1(u) - x_1)^2 h_1(u) \\
&\quad\quad\quad + 2(\beta_1(u) - \beta'_1(u) - x_1)(\beta_2(u) - \beta'_2(u) - x_2) h_{1,2}(u) \\
&\quad\quad\quad + (\beta_2(u) - \beta'_2(u) - x_2)^2 h_2(u))] \,.
\end{aligned}$$

Soit $c \geqq 0$ tel que, $\mathbb{P}.p.s.$ sur $\Gamma$ et pour presque tout $u$, on ait:

$$c \leqq h_1(u) + h_2(u) - \varepsilon h_1(u); \quad c \leqq h_1(u) + h_2(u) - \varepsilon h_2(u)$$

et

$$c^2 - c(h_1 + h_2)(2-\varepsilon) + (h_1 + h_2 + -\varepsilon h_1)(h_1 + h_2 + -\varepsilon h_2) - \varepsilon^2 h^2_{1,2} \geqq 0 \,.$$

(Ce qui est possible avec nos hypothèses.)

Alors, sur $\Gamma$:

$$\begin{aligned}
&|\beta_u - \beta'_u - x|^2 (h_1 + h_2) - \varepsilon\left((\beta_1(u) - \beta'_1(u) - x_1)^2 h_1 + \cdots\right. \\
&\quad + 2(\beta_1(u) - \beta'_1(u) - x_1)(\beta_2(u) - \beta'_2(u) - x_2) h_{1,2} + \cdots \\
&\quad \left. + (\beta_2(u) - \beta'_2(u) - x_2)^2 h_2\right) \geqq c|\beta_u - \beta'_u - x|^2 \,.
\end{aligned}$$

Donc, sur $\Gamma$

$$\int_0^t \frac{du}{|\beta_u - \beta'_u - x|^\varepsilon} \leqq c(|\beta_t - \beta'_t - x|^{2-\varepsilon} - |x|^{2-\varepsilon} - (2-\varepsilon) \int_0^t (d(\beta_u - \beta'_u); \beta_u - \beta'_u - x)|\beta_u - \beta'_u - x|^{-\varepsilon}) .$$

On a

$$\mathbb{E}\left[(|\beta_t - \beta'_t - x|^{2-\varepsilon} - |x|^{2-\varepsilon})^p\right] \leqq C_{p,\varepsilon}(|x|^{(2-\varepsilon)p} + t^{p(1-(\varepsilon/2))})$$

d'après B.D.G.
Et:

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t (d(\beta_u - \beta'_u); \beta_u - \beta'_u - x)|\beta_u - \beta'_u - x|^{-\varepsilon}\right)^p\right]$$

$$\leqq C_{p,\varepsilon}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t du\,|\beta_u - \beta'_u - x|^{2(1-\varepsilon)}\right)^{p/2}\right] \quad \text{d'après B.D.G.}$$

$$\leqq C_{p,\varepsilon}(t^{p/2}\mathbb{E}\left[(X_t^*)^{p(1-\varepsilon)}\right] + t^{p/2}|x|^{p(1-\varepsilon)})$$

$$\leqq C_{p,\varepsilon}(t^{p(1-\varepsilon)/2} + t^{p/2}|x|^{p(1-\varepsilon)})$$

$$\leqq C_{p,\varepsilon}(|x|^{(2-\varepsilon)p} + t^{p(1-(\varepsilon/2))})$$

Donc:

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \frac{du}{|\beta_u - \beta'_u - x|^\varepsilon}\mathbb{I}_\Gamma\right)^p\right] \leqq C_{\varepsilon,p}(|x|^{(2-\varepsilon)p} + t^{p(1-(\varepsilon/2))})$$

d'où, pour tout temps aléatoire $K$:

$$\sup_x \mathbb{E}\left[\left(\int_0^K \frac{du}{|\beta_u - \beta'_u - x|^\varepsilon}\mathbb{I}_\Gamma\right)^p\right]$$

$$\leqq \sup_{|x| \leqq 2\|\sqrt{K}+X_K^*+Y_K^*\|_\infty} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^K \frac{du}{|\beta_u - \beta'_u - x|^\varepsilon}\mathbb{I}_\Gamma\right)^p\right]$$

$$+ \sup_{|x| \geqq 2\|\sqrt{K}+X_K^*+Y_K^*\|_\infty} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^K \frac{du}{|\beta_u - \beta'_u - x|^\varepsilon}\mathbb{I}_\Gamma\right)^p\right]$$

$$\leqq C_{p,\varepsilon}\left(\|\sqrt{K} + X_K^* + Y_K^*\|_\infty^{p(2-\varepsilon)} + \mathbb{E}\left[\left(\frac{K}{\|\sqrt{K} + X_K^* + Y_K^*\|_\infty^\varepsilon}\right)^p\right]\right)$$

$$\leqq C_{p,\varepsilon}\|\sqrt{K} + X_K^* + Y_K^*\|_\infty^{p(2-\varepsilon)} .$$

On déduit alors du lemme 0.4 et de B.J.Y. que

$$\sup_x \mathbb{E}\left[\left(\int_0^K \frac{du}{|\beta_u - \beta'_u - x|^\varepsilon} \mathbb{I}_\Gamma\right)^p\right] \leqq C_{p,\varepsilon} \| K^{p(1-(\varepsilon/2))} \|_2 .$$

*Fin de la preuve du théorème 0.2:*
On a:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{t' \leqq t, s' \leqq s} |\alpha_2(x,t',s') - \alpha_2(y,t',s')|^p \mathbb{I}_\Gamma\right] \\
&\leqq C_{\varepsilon,p} |x-y|^{\varepsilon p} \sup_z \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t\wedge s} \frac{du}{|\beta_u - \beta'_u - z|^\varepsilon} \mathbb{I}_\Gamma\right)^p\right] \\
&\leqq C_{\varepsilon,p} |x-y|^{\varepsilon p} (t \wedge s)^{(1-(\varepsilon/2))p}
\end{aligned}$$

d'après le lemme C.1.

$(*)$ est donc établie. Le lemme de Kolmogorov implique que le processus $x \to \alpha(x, t, s)$ admet une version continue. On déduit de $(*)$ les inégalités (ii) de même que pour le théorème 0.1. De plus $\mathbb{P}$. *p.s.*, le support de $\alpha(., K, L)$ est compact. Les inégalités (iii) découlent donc des inégalités (ii) pour $\varepsilon = 0$.

### *3.2 Précision sur les inégalités Barlow–Yor dans le cas indépendent*

Nous précisons un peu les inégalités du théorème 0.2.
On suppose dans ce paragraphe que $\beta$ et $\beta'$ sont indépendants.

**Theoreme 3.2** *Pour tous $q > 0$, $\eta > 1$, $\varepsilon \in [0, 1[$, il exite une constante, $C$, telle que pour tous temps aléatoires, $L$, on ait*:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \leqq L} \sup_{x \neq y} \left(\frac{\alpha(x,t,1) - \alpha(y,t,1)}{|x-y|^\varepsilon}\right)^q\right] \leqq C(1 + \|(\log^+ L)^{3q}\|_\eta) .$$

*Démonstration.* De même que pour le théorème 0.2., il suffit de montrer que: pour tous $\varepsilon \in [0, 1[$, $p \geqq p(\varepsilon)$, $r \geqq r(\varepsilon)$, $t \geqq t(\varepsilon)$:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s \leqq t} \sup_{|x|,|y| < r, x \neq y} \left(\frac{\alpha(x,s,1) - \alpha(y,s,1)}{|x-y|^\varepsilon}\right)^p\right] \leqq C_{\varepsilon,p} (\log r + \log t)^{3p} \quad (1)$$

En effet, (1) implique, grâce au théorème 0.2, que, pour $p \geqq p(\varepsilon)$, et tout temps aléatoire, $L$, on a:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{s \leqq L} \sup_{x \neq y} \left(\frac{\alpha(x,s,1) - \alpha(y,s,1)}{|x-y|^\varepsilon}\right)^p\right] \\
&\leqq C_{\varepsilon,p} \left\| \left(\log^+ \frac{L}{t(\varepsilon)} + \log^+ \frac{X_L^*}{r(\varepsilon)} + \log^+ \frac{Y_L^*}{r(\varepsilon)}\right)^3 + L \wedge t(\varepsilon) + L \wedge T_{r(\varepsilon)} \right\|_\infty^p \Bigg)
\end{aligned}$$

où $T_{r(\varepsilon)} = \inf\{t; X_t^* \geqq r(\varepsilon) \text{ ou } Y_t^* \geqq r(\varepsilon)\}$ .

Après avoir remarqué que, pour $q > 0$, $\eta > 1$ (Voir Mathieu [8]):

$$\|\log^+ X_L^*\|_q \leqq C_{q,\eta}\|1 + \log^+ L\|_{q\eta}$$

il suffit d'appliquer le lemme 0.1 pour conclure.

Pour montrer (1), nous avons besoin d'informations sur les constantes qui apparaissent dans les différents lemmes de 1. Puis il faudra reprendre les calculs de la preuve du théorème 2.1, et évaluant à chaques étapes la constante. Les calculs sont longs mais sans difficultés. Nous ne donnons pas les détails ici et préférons renvoyer le lecteur à Mathieu 10.

## 4 Inégalités pour des temps d'arrêt

Nous nous sommes jusqu'à présent intéressés à des inégalités pour des processus arrêtés à des temps aléatoires quelconques. Dans certains cas particuliers, il est possible de prouver des résultats plus précis en arrêtant nos processus à des temps d'arrêt. Cela ne semble cependant pas toujours possible.

Soit $\varepsilon \in [0, 1[$. On désire maintenant exhiber une famille de couples de temps aléatoires, $\mathscr{T}$, telle que, pour tout $p > 0$, il existe une constante $C_p$, telle que, si $(T, S) \in \mathscr{T}$, on ait:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s \leqq S, t \leqq T, x \neq y}\left(\frac{\alpha(x,t,s) - \alpha(y,t,s)}{|x-y|^{\varepsilon}}\right)^p\right] \leqq C_p \, \mathbb{E}\left[(ST)^{(p/4)(2-\varepsilon)}\right] \qquad (1)$$

Posons

$$a_{t,s} = \sup_{x \neq y} \frac{\alpha(x,t,s) - \alpha(y,t,s)}{|x-y|^{\varepsilon}} .$$

Les calculs de Barlow–Yor suggèrent de prendre pour $\mathscr{T}$, l'ensemble des couples de temps d'arrêt, et, pour établir (1), d'évaluer des quantités du type:

$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{s \leqq S, t \leqq T} a_{t,s} - \sup_{s \leqq \sigma, t \leqq T} a_{t,s} - \sup_{s \leqq S, t \leqq r} a_{t,s} + \sup_{s \leqq \sigma, t \leqq r} a_{t,s}\right)^p \| \mathscr{F}_{\sigma \vee \tau}\right] \qquad (2)$$

où $(T, S) \in \mathscr{T}$, $(\tau, \sigma) \in \mathscr{T}$, $T \geqq \tau$, $S \geqq \sigma$ *p.s.* et $\mathbb{E}[\,\|\,]$ désigne l'espérance conditionnelle.

puis d'appliquer le lemme (4.3) de Barlow–Yor [1], dont l'énoncé est:

**Lemme 4.1** (*Barlow–Yor*). *Soient $A, B, C$ trois processus continus, adaptés et croissants, avec $A_0 = 0$, $B_0$, $C_0 \geqq 0$.*

*On suppose qu'il existe $k \geqq 1$ tel que, pour tous temps d'arrêt $S, T$, tels que $S \leqq T$ p.s., et pour tout $F \in \mathscr{F}_S$:*

$$\mathbb{E}\left[(A_T - A_S)^k \| F\right] \leqq \|B_T^k \mathbb{I}_F\|_\infty \|C_T^k \mathbb{I}_F\|_\infty .$$

*Alors, pour tout $p > 0$, il existe une constante $C_p$ telle que pour tout temps d'arrêt $T$, on ait:*

$$\mathbb{E}[(A_T)^p] \leqq C_p \mathbb{E}[(B_T C_T)^p] .$$

Le calcul de (1) mène naturellement à considérer:

$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{s\leqq S-\sigma, t\leqq T-\tau} a_{\tau,\sigma}(R_{t,s})\right)^p \|\mathcal{F}_{\sigma\vee\tau}\right]$$

où $R_{t,s} = [0,t]\times[0,s]$, $(\alpha_{a,b}(x.B), a,b\in\mathbb{R}_+, x\in\mathbb{R}^d, B$ borelien de $(\mathbb{R}_+)^2)$ désigne les temps locaux d'intersection des mouvements browniens $(\beta_{a+u} - \beta_a, u\geqq 0)$ et $(\beta'_{b+u} - \beta'_b, u\geqq 0)$ calculés pour $(u,v)\in B$

$$a_{a,b}(B) = \sup_{x\neq y}\frac{\alpha_{a,b}(x,B)-\alpha_{a,b}(x,B)}{|x-y|^\varepsilon}\,.$$

Or il n'est pas sûr que, conditionnellement à $\mathcal{F}_{\tau\vee\sigma}$, $\beta_{u+\tau}-\beta_\tau$ et $\beta'_{\sigma+v}-\beta'_\sigma$ soient encore des mouvements browniens.

Pour échapper à cette difficulté, on supposera que $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t\vee\mathcal{G}'_t$, où $\mathcal{G}_t$ et $\mathcal{G}'_t$ sont deux filtrations indépendantes telles que $\beta$ (resp $\beta'$) soit un $\mathcal{G}$ (resp $\mathcal{G}'$)-mouvement brownien et on prendra pour $\mathcal{T}$, l'ensemble des couples $(T,S)$, tels que $\mathcal{T}$ (resp $S$) soit un temps d'arrêt pour $\mathcal{G}$ (resp $\mathcal{G}'$). Alors, pour $(\tau,\sigma)\in\mathcal{T}$, conditionnellement à $\mathcal{F}_{\tau\vee\sigma}$, $\beta_{u+\tau}-\beta_\tau$ et $\beta'_{\sigma+v}-\beta'_\sigma$ sont encore des mouvements browniens indépendants. Remarquons que, si l'on ne suppose plus $\beta$ et $\beta'$ indépendants mais seulement définis dans la même filtration, il n'est plus possible de choisir $\mathcal{T}$ comme ci-dessus.

### *4.1 Inégalités Barlow–Yor pour les t.l.i. arrêtés à des temps d'arrêt*

**Theoreme 4.2** *Sous les hypothèses ci-dessus i.e. $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont deux filtrations indépendantes telles que $\beta$ (resp $\beta'$) est un $\mathcal{G}$ (resp $\mathcal{G}'$) mouvement brownien, alors pour tous $q > 0$, $\varepsilon\in[0,1[$, $\delta\in]0,2-\varepsilon[$, il existe une constante C telle que, pour tout $\mathcal{G}$ (res$\mathcal{G}'$)-temps d'arrêt $T$(resp $S$), on ait*:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leqq T, s\leqq S}\sup_{x\neq y}\left(\frac{\alpha(x,t,s)-\alpha(y,t,s)}{|x-y|^\varepsilon}\right)\right] \leqq C\mathbb{E}\left[S^{(q/2)(2-\varepsilon-\delta)}\right]\mathbb{E}\left[T^{(q/2),\delta}\right]$$

On utilisera le lemme 4.5, lui même consèquence de la version suivante du lemme de Barlow–Yor:

**Lemme 4.3** *Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$, deux filtrations satisfaisant les conditions habituelles. On suppose $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ indépendantes. Soit $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t\vee\mathcal{G}'_t$. soit $(A_t, t\in\mathbb{R}_+)$ un processus continu, croissant, $\mathcal{F}$-prévisible, tel que $A_0 = 0$, et que, quels que soient $q\geqq 1$, $t\in\mathbb{R}_+$, $\mathbb{E}[A_t^q] < \infty$.*

*On suppose que il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $q\geqq 1$, il existe $C_q$, telle que pour tout $T,S,\mathcal{G}$-temps d'arrêt tels que $T\geqq S$ , et $F\in\mathcal{G}_S$:*

$$\mathbb{E}[(A_T-A_S)^q\|F] \leqq C_q\|T^{\alpha q}\mathbb{I}_F\|_\infty\,.$$

*Alors pour tout $q > 0$, il existe une constante $C_q$, telle que pour tout $\mathcal{G}$-temps d'arrêt $T$:*

$$\mathbb{E}[(A_T)^q] \leqq C_q\mathbb{E}[(T^\alpha)^q]\,.$$

*Démonstration.* Soit $q \geqq 1$
On pose:

$$A'_t = \mathbb{E}[(A_t)^q \| \mathscr{G}_\infty] = \mathbb{E}[(A_t)^q \| \mathscr{G}_t] .$$

Alors $A'_t$ est continu et croissant.
On a:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[A'_T - A'_S \| F] \\
&\quad = \mathbb{E}[A^q_T - A^q_S \| F] \\
&\quad \leqq C_q \mathbb{E}\left[(A_T - A_S) A_T^{q-1} \| F\right] \\
&\quad \leqq C_q (\mathbb{E}[(A_T - A_S)^q \| F]^{(1/q)} (\mathbb{E}[(A_T)^q \| F])^{1-(1/q)} \\
&\quad \leqq C_q \| T^\alpha \mathbb{I}_F \|_\infty \| A'_T \mathbb{I}_F \|_\infty^{1-(1/q)} .
\end{aligned}$$

Donc, d'après le lemme de Barlow–Yor: il existe, pour tout $p > 0$, une constante $C_{p,q}$ telle que:

$$\mathbb{E}[(A'_T)^p] \leqq C_{p,q} \mathbb{E}\left[\left(T^\alpha A_T'^{\,1-(1/q)}\right)^p\right] .$$

En particulier:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(A_T)^q] &\leqq C_q \mathbb{E}\left[T^\alpha (A'_T)^{1-(1/q)}\right] \\
&\leqq C_q (\mathbb{E}[(T)^{\alpha q}])^{(1/q)} (\mathbb{E}[A'_T])^{1-(1/q)} .
\end{aligned}$$

Quel que soit $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathbb{E}[(A_{t \wedge T})^q] < \infty$ donc:

$$\mathbb{E}[(A_{t \wedge T})^q] \leqq C_q \mathbb{E}[(t \wedge T)^{\alpha q}] .$$

On fait tendre $t$ vers $\infty$.
D'où:

$$\mathbb{E}[(A_T)^q] \leqq C_q \mathbb{E}[(T)^{\alpha q}] .$$

Le lemme est donc démontré quand $Q \geqq 1$.
Le cas $q < 1$ s'en déduit par des lemmes classiques (Cf. Meyer [11], ou Revuz–Yor [12], par exemple).

*Remarque 4.4* On montre, grâce au lemme 4 Barlow Yor 1, qu'on peut choisir $C'_q \leqq c_q C_q$, où $c_q$ est une constante universelle ne dépendant que de $q$.

**Lemme 4.5** *Soient $\mathscr{G}, \mathscr{G}', \mathscr{F}$ comme dans le lemme 4.3. Soit $(A_{t,s}, s \geqq 0, t \geqq 0)$, un processus continu, tel que $A_{t,s}$ soit $\mathscr{G}_t \vee \mathscr{G}'_s$-adapté, et ait tous ses moments finis, et, p.s., pour tous $t \geqq t', s \geqq s'$, $u \to A_{u,s} - A_{u,s'}$ et $v \to A_{t,v} - A_{t',v}$ sont croissants et $A_{0,s} = A_{t,0} = 0$.*

*On suppose qu'il existe $\alpha > 0, \beta > 0$ tels que, pour tous $q \geqq 1$, il existe une constante $C_q$, telle que, pour tous $\mathscr{G}$ (resp $\mathscr{G}'$)-temps d'arrêt $T \geqq \tau$ (resp $S \geqq \sigma$), $F \in \mathscr{G}_\tau \vee \mathscr{G}'_\sigma$, on ait:*

$$\mathbb{E}[(A_{T,S} - A_{\tau,S} - A_{T,\sigma} + A_{\tau,\sigma})^q \| F] \leqq C \| S^{\alpha q} \mathbb{I}_F \|_\infty \| T^{\beta q} \mathbb{I}_F \|_\infty .$$

*Alors, pour tous* $q > 0$, *il existe une constante*, $C$, *telle que pour tous* $T$ (resp $S$), $\mathscr{G}$ (resp $\mathscr{G}'$)-*temps d'arrêt, on ait*:

$$\mathbb{E}[(A_{T,S})^q] \leqq C\mathbb{E}\left[\left(S^\alpha T^\beta\right)^q\right] .$$

*Démonstration.* Fixons $T \geqq \tau$, deux $\mathscr{G}$-temps d'arrêt, et $F \in \mathscr{G}_\tau$. On se place sous la probabilité conditionnelle sachant $F$. On notera alors $\mathbb{E}^F$ et ${}^F\|\cdot\|_p$ l'espérance et la norme $L_p$ associées.

Posons $\tilde{A}_s = A_{T,s} - A_{\tau,s}$. $\tilde{A}$ est croissant, continu, et $\mathscr{G}_T \vee \mathscr{G}'_s$-adapté. De plus, $\tilde{A}$ vérifie les hypothèses du lemme 4.3: pour tous $S \geqq \sigma$, $\mathscr{G}'$-temps d'arrêt, $G \in \mathscr{G}'_\sigma$, $q \geqq 1$, on a:

$$\mathbb{E}^F[(\tilde{A}_S - \tilde{A}_\sigma)^q \| G] \leqq C_q\, {}^F\|\mathbb{I}_G S^{\alpha q}\|_\infty\, {}^F\|\mathbb{I}_G T^{\beta q}\|_\infty .$$

Donc pour tous $q \geqq 1$, il existe $C_q$, telle que pour tout $S, \mathscr{G}'$-temps d'arrêt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^F[(\tilde{A}_S)^q] &= \mathbb{E}[(A_{T,S} - A_{\tau,S})^q \| F]\\ &\leqq C_q \|\mathbb{I}_F T^{\beta q}\|_\infty \mathbb{E}[S^{\alpha q}] .\end{aligned}$$

On applique une seconde fois le lemme 4.2, en tenant compte de la remarque. d'où: pour tous $q \geqq 1$, il existe une constante $C_q$, telle que, pour tous $T$ (resp $S$), $\mathscr{G}$ (resp $\mathscr{G}'$)-temps d'arrêt, on ait:

$$\mathbb{E}[(A_{T,S})^q] \leqq C_q \mathbb{E}[S^{\alpha q}]\mathbb{E}[T^{\beta q}] .$$

*Dèmonstration du théorème 4.3.* On applique le lemme 4.5, avec:

$$A_{t,s} = \sup_{s' \leqq s, t' \leqq t} a_{t',s'}$$

Il suffit pour cela de remarquer que, si $T \geqq \tau$ (resp $S \geqq \sigma$) sont deux $\mathscr{G}$ (resp $\mathscr{G}'$)-temps d'arrêt, on a:

$$A_{T,S} - A_{\tau,S} - A_{T,\sigma} + A_{\tau,\sigma} \leqq \sup_{s \leqq S-\sigma, t \leqq T-\tau} \alpha_{\tau,\sigma}(R^{t,s}) .$$

Or les deux mouvements browniens $\beta_{\tau+u} - \beta_\tau$ et $\beta'_{\sigma+v} - \beta'_\sigma$ sont indépendants entre eux, et indépendants de $\mathscr{G}_\tau \vee \mathscr{G}'_\sigma$.

Donc $a_{\tau,\sigma}(R^{t,s})$ est indépendant de $\mathscr{G}_\tau \vee \mathscr{G}'_\sigma$, et a même loi que $a_{t,s}$. Donc, pour tous $p > 0$, $\varepsilon \in [0,1[$, $\delta \in ]0, 2-\varepsilon[$, il existe $C_{p,\varepsilon,\delta}$, telle que, pour tous $t \geqq 0$, $s \geqq 0$, $F \in \mathscr{G}_\tau \vee \mathscr{G}'_\sigma$:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[(A_{T,S} - A_{\tau,S} - A_{T,\sigma} + A_{\tau,\sigma})^p \| F]\\ &\quad\leqq \mathbb{E}\left[\left(\sup_{s \leqq S-\sigma, t \leqq T-\tau} a_{\tau,\sigma}(R^{t,s})\right)^p \| F\right]\\ &\quad\leqq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left(\sup_{s \leqq \|(S-\sigma)\mathbb{I}_F\|_\infty, t \leqq \|(T-\tau)\mathbb{I}_F\|_\infty} a_{\tau,\sigma}(R^{t,s})\right)^p \| \mathscr{G}_\tau \vee \mathscr{G}'_\sigma\right] \| F\right]\end{aligned}$$

$$\leqq C_{p,\varepsilon,\delta}\|(S-\sigma)\mathbb{I}_F\|_{\infty}^{(p/2)(2-\varepsilon-\delta)}\|(T-\tau)\mathbb{I}_F\|_{\infty}^{(p/2)\delta}$$

d'après le théorème 3.2

$$\leqq C_{p,\varepsilon,\delta}\|S\mathbb{I}_F\|_{\infty}^{(p/2)(2-\varepsilon-\delta)}\|T\mathbb{I}_F\|_{\infty}^{(p/2)\delta}$$

## References


1. Barlow, M., Yor, M.: Semi martingale inequalities via the Garsia Rodemich Rumsey lemma and applications to local times. J. Funct. Ana. **49**, 199–229 (1982)
2. Barlow, M., Jacka, S, Yor, M.: Inequalities for a pair of processes stopped at a random time. Proc. L.M.S. **52**, 142–172 (1986)
3. Bismut, J.M., Yor, M.: An inequality for processes that satisfy Kolmogorov's continuity criterion. Application to continuous martingales. Journ. Funct. Analysis **51**, 166–173 (1983)
4. Burkholder, DL.: Distribution function inequalities for martingales. Ann. Probab. **1**, 19–42 (1973)
5. Geman, D., Horowitz, J., Rosen, J.: A local time analysis of intersections of Brownian paths in the plane. Ann. Probab. **12**, 86–107 (1984)
6. Gundy, RP.: Some topics in probability and analysis. C.B.M.S. 70 (1989)
7. Jacka, S., Yor, M.: Inequalities for non moderate functions of a pair of processes. Proc L.M.S **67**, 649–672 (1993)
8. Mathieu, P.: Inégalités en norme $L_p$ pour le produit des supremas de plusieurs martingales arrêtées à des temps aléatoires. Ann. l'I.H.P. **29**(4), 467–484 (1993)
9. Mathieu, P.: Construction et renormalisation des temps locaux d'intersection de deux mouvements browniens plans. Stochastics **46**, 117–140 (1994)
10. Mathieu, P.: Thèse de doctorat. Laboratoire de Probabilités. Université PARIS VI. (1992)
11. Meyer, PA.: Chapitre 19, complément à Dellacherie C, Meyer PA.: probabilités et potentiel. Université de Strasbourg, 1990
12. Revuz, D., Yor, M.: Continuous martingales and Brownian motion. Berlin: Springer 1990
13. Rosen, J.: A local time approach of the self intersection of Brownian paths in space. Comm. Math. Phys. **88**, 327–338 (1983)
14. Weinryb, S., Yor, M.: Le mouvement brownien de Lévy indexé par $\mathbb{R}^3$ comme limite centrale de temps locaux d'intersection. Séminaire XXII. (Lect. Notes Math., vol. 1321 pp. 225–248) Berlin: Springer 1988
15. Yor, M.: Inégalités de martingales continues arrêtées à un temps quelconque. Grossissement de filtrations: exemples et applications. (Lect. Notes Math., vol. 1118, pp. 110–170) Berlin: Springer 1985
16. Yor, M.: Renormalisation et convergence en loi pour les temps locaux d'intersection du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^3$. Séminaire XIX (Lect. Notes Math., vol. 1123, pp. 351–365) Berlin: Springer 1985
17. Yor, M.: Précision sur l'existence et la continuité des temps locaux d'intersection du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$. Séminaire XX (Lect. Notes Math., vol. 1204, pp, 532–541) Berlin: Springer 1986
18. Yor, M.: Application de la relation de domination à certains renforcements des inégalités de martingales. Séminaire XVI. (Lect. Notes Math., vol. 920) Berlin: Springer 1982
19. Yor, M.: Remarques sur certaines constructions des mouvements browniens fractionnaires. Séminaire XXII. (Lect. Notes Math., vol. 1321, pp. 217–223) Berlin: Springer 1988