Probab. Theory Relat. Fields 102, 45 – 56 (1995)

Probability Theory and Related Fields

Mouvement moyen et système dynamique gaussien

Thierry de la Rue

Département de Mathématiques, URA CNRS 1378, Université de Rouen, F-76821 Mont-Saint-Aignan Cedex, France (e-mail: delarue@univ-rouen.fr)

Received: 29 November 1993/In revised form: 23 November 1994

Summary. In the situation of the classical mean motion, we have n planets moving in the plane, planet $k+1$ being a satellite of planet k. A classical result then states that planet n has a mean motion, *i.e.* its mean angular speed between time 0 and time t has a limit when $t \to \infty$. We show in this article that any real gaussian dynamical system can be interpreted as the limit of this situation, when $n \to \infty$. From a given nonatomic probability measure σ on $[0,\pi]$, we construct a transformation T of the complex brownian path $(B_u)_{0 \leqq u \leqq 1}$ which preserves Wiener measure. T is defined as the limit of a sequence T_n, where T_n acts as the motion of 2^n planets. In this way we get a real gaussian dynamical system, whose spectral measure is the symetric probability on $[-\pi,\pi]$ obtained from σ. The transformation T can be inserted in a flow $(T^t)_{t\in\mathbb{R}}$, and the "orbits" $t \mapsto Z_t = B_1 \circ T^t$ still have almost surely a mean motion, which is the mean of σ.

Mathematics Subject Classification: 28D99, 60J65

1 Le mouvement moyen "classique"

La situation classique du calcul du mouvement moyen a pour origine l'étude du mouvement des planètes. Dans une vision (très) simplifiée de l'univers, on imagine n astres qui se déplacent dans un plan dont l'origine est la Terre. L'astre 1 décrit autour de la Terre une orbite circulaire de rayon a_1, à une vitesse angulaire α_1; de manière générale, l'astre $k+1$ tourne autour de l'astre k à une distance a_{k+1} de celui-ci, et avec une vitesse angulaire α_{k+1}. On s'intéresse au mouvement de l'astre n par rapport à la Terre.
Si on repère chaque point du plan par une affixe complexe, la position de l'astre n à l'instant t est

$$z(t) = a_1 e^{i(\alpha_1 t+\beta_1)} + \cdots + a_n e^{i(\alpha_n t+\beta_n)} ,$$

où les β_k sont les angles repérant les astres les uns par rapport aux autres à l'instant $t = 0$.
Pour un choix général des a_k et des β_k, $z(t)$ ne s'annule jamais. On peut donc écrire la position à l'instant t sous la forme

$$z(t) = \rho(t)e^{i\varphi(t)}$$

où $\rho(t) > 0$, et $t \mapsto \varphi(t)$ est une fonction réelle continue (en fait, de classe C^∞).

C'est Lagrange [3] qui pose le premier la question du mouvement moyen: $(\varphi(t) - \varphi(0))/t$ représente la vitesse angulaire moyenne entre l'instant 0 et l'instant t. Lagrange se demande si cette moyenne a une limite lorsque t tend vers l'infini. Le mouvement moyen, lorsqu'il existe, est alors $m = \lim_{t \to +\infty} \varphi(t)/t$.

Hartman fut le premier à montrer l'existence du mouvement moyen dans le cas général. Weyl a ensuite établi une formule pour ce mouvement moyen, qui avait été conjecturée par Wintner: lorsque les α_k sont rationnellement indépendants, le mouvement moyen existe et vaut

$$m = p_1\alpha_1 + \cdots + p_n\alpha_n$$

où les p_k sont des coefficients positifs ne dépendant que des rayons a_k. Plus exactement, soient $\theta_1, \ldots, \theta_{k-1}, \theta_{k+1}, \ldots, \theta_n$ $n-1$ variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme sur $[0, 2\pi] \cdot p_k$ est alors la probabilité que la somme

$$a_1e^{i\theta_1} + \cdots + a_{k-1}e^{i\theta_{k-1}} + a_{k+1}e^{i\theta_{k+1}} + \cdots + a_ne^{i\theta_n}$$

soit de module inférieur à a_k. On a de plus le résultat remarquable suivant:

$$p_1 + \cdots + p_n = 1 .$$

Ainsi, m est une combinaison linéaire convexe des vitesses angulaires. Intuitivement, la formule de Wintner peut se comprendre ainsi: l'astre k ne contribue au mouvement moyen que lorsqu'il est assez près de la Terre pour tourner autour!

Le lecteur curieux pourra trouver tous les détails concernant les résultats de ce paragraphe dans [2, 5, 6].

On va maintenant établir l'existence d'un mouvement moyen dans une autre situation, qui peut s'interpréter comme la limite du cadre précédent lorsque le nombre n de planètes tend vers l'infini. La courbe obtenue en reliant chaque astre k à l'astre $k+1$ ressemble alors étrangement à une trajectoire brownienne...

2 Une transformation de la trajectoire brownienne

Notons $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ l'espace canonique du mouvement brownien complexe issu de zéro, sur l'intervalle de temps $[0, 1]$:

- Ω est l'ensemble des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$, qui s'annulent en $u = 0$. Pour $\omega \in \Omega$ et $0 \leqq u \leqq 1$, on note $B_u(\omega)$ la position de la trajectoire ω à l'instant u.

– μ est la mesure de Wiener sur Ω.
– $\mathscr{A}$ est la tribu borélienne complétée pour μ.
Soit σ une mesure de probabilité sur $[0, \pi]$, supposée diffuse i.e. pour tout $x \in [0, \pi]$, $\sigma(\{x\}) = 0$. Pour tout $x \in [0, \pi]$, posons

$$f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sigma([0, x]);$$

l'application f est alors continue et croissante de $[0, \pi]$ sur $[0, 1]$.

2.1 Découper, tourner et recoller

Pour tout entier $n \geqq 0$, on définit une transformation T_n de $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ de la façon suivante:

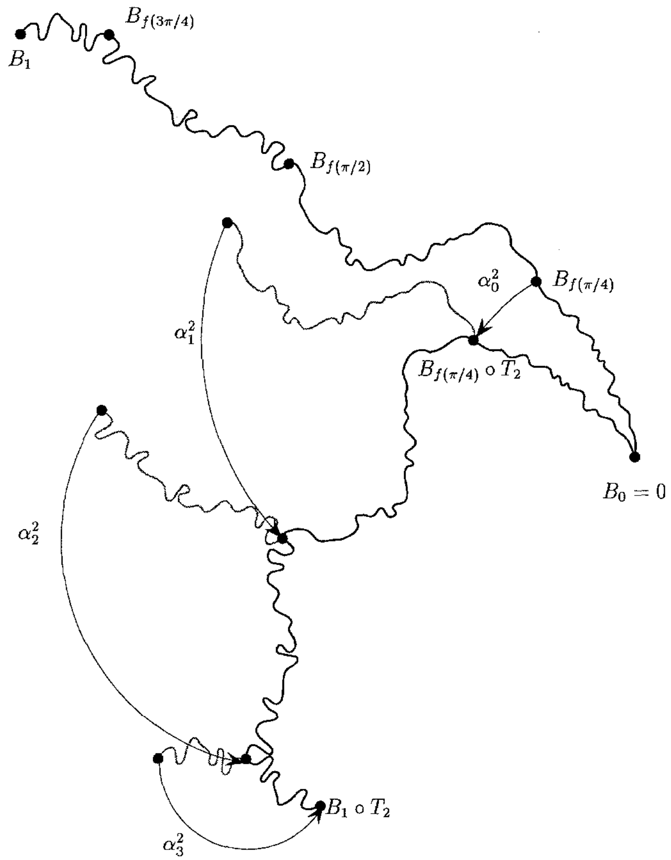

Fig. 1. Action de T_2 sur une trajectoire continue.

– Pour $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$, on fixe un réel α_k^n appartenant à l'intervalle $J_k^n \stackrel{\text{déf}}{=} \left[\frac{k}{2^n}\pi, \frac{k+1}{2^n}\pi\right]$.
– Soit $\omega \in \Omega$: la trajectoire ω est "coupée" en 2^n morceaux, correspondant aux intervalles de temps $f(J_0^n), \dots, f(J_{2^n-1}^n)$. Le morceau correspondant à $f(J_k^n)$ est tourné de l'angle α_k^n. La trajectoire $T_n(\omega)$ est obtenue en recollant bout à bout les nouveaux morceaux.

Plus précisément, notons pour tout $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$

$$R_k^n \stackrel{\text{déf}}{=} B_{f((k+1)/2^n\pi)} - B_{f((k/2^n)\pi)} .$$

Soit u un réel dans [0, 1], et k tel que $u \in f(J_k^n)$. On a alors

$$B_u \circ T_n = \sum_{j=0}^{k-1} e^{i\alpha_j^n} R_j^n + e^{i\alpha_k^n}\left(B_u - B_{f((k/2^n)\pi)}\right) .$$

Sous μ, $(B_u \circ T_n)_{0 \leqq u \leqq 1}$ est encore un mouvement brownien complexe issu de zéro, et donc T_n préserve la mesure μ.

De la même manière, pour tout réel t on peut définir la transformation T_n^t, obtenue en remplaçant l'angle α_k^n par $t\alpha_k^n$. La famille $(T_n^t)_{t \in \mathbb{R}}$ est alors un groupe de transformations de Ω préservant μ.

2.2 *Définition de la transformation T*

Considérons la partie Ω_0 de Ω définie par

$$\Omega_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{\omega \in \Omega / \sum_{k=0}^{2^n-1} |R_k^n(\omega)|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\right\} .$$

La mesure σ étant diffuse, on a

$$\sup_k \left[f\left(\frac{k+1}{2^n}\pi\right) - f\left(\frac{k}{2^n}\pi\right)\right] = \sup_k \sigma(J_k^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Par une propriété classique du mouvement brownien[1], on a donc $\mu(\Omega_0) = 1$.

Proposition 2.1 *Pour tout $\omega \in \Omega_0$, la suite des trajectoires $(T_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément par rapport à u sur* [0, 1] *vers une trajectoire continue et issue de zéro, notée $T(\omega)$. Sous μ, $(B_u \circ T)_{0 \leqq u \leqq 1}$ est encore un mouvement brownien, et donc T préserve la mesure μ. Enfin, pour tout $\omega \in \Omega_0$, $T(\omega) \in \Omega_0$.*

Preuve. Soit u un réel dans $[0, 1]$, et k tel que $u \in f(J_k^n)$. Pour tout x réel, notons $[x]$ la partie entière de x, et posons $l = [k/2]$. On a alors

[1] Voir par exemple [4]

$$
\begin{aligned}
&|B_u \circ T_{n+1} - B_u \circ T_n| \\
&= \Bigg| \sum_{j=0}^{k-1} e^{i\alpha_j^{n+1}} R_j^{n+1} e^{i\alpha_k^{n+1}} \left(B_u - B_{f((k/2^{n+1})\pi)}\right) \\
&\quad - \sum_{j=0}^{l-1} e^{i\alpha_j^n} R_j^n - e^{i\alpha_l^n}\left(B_u - B_{f(l/2^n \pi)}\right)\Bigg| \\
&\leqq \sum_{j=0}^{k-1} \left| e^{i\alpha_j^{n+1}} - e^{i\alpha_{[j/2]}^n}\right| \left| B_{f(((j+1)/2^{n+1})\pi)} - B_{f(j/2^{n+1}\pi)}\right| \\
&\quad + \left| e^{i\alpha_k^{n+1}} - e^{i\alpha_{[k/2]}^n}\right| \left| B_u - B_{f((k/(2^{n+1}))\pi)}\right| \\
&\leqq \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\pi}{2^n} \left| B_{f(((j+1)/(2^{n+1}))\pi)} - B_{f((j/2^{n+1})\pi)}\right| + \frac{\pi}{2^n}\left| B_u - B_{f((k/2^{n+1})\pi)}\right| \\
&\leqq \sqrt{(k+1)\left(\frac{\pi}{2^n}\right)^2} \\
&\quad \sqrt{\sum_{j=0}^{k-1} \left| B_{f(((j+1)/2^{n+1})\pi)} - B_{f((j/2^{n+1})\pi)}\right|^2 + \left| B_u - B_{f((k/2^{n+1})\pi)}\right|^2} \,.
\end{aligned}
$$

Or, comme la trajectoire est uniformément continue sur $[0, 1]$, on a pour n assez grand

$$\left| B_u - B_{f((k/2^{n+1})\pi)}\right|^2 \leqq 1 \,.$$

De plus, comme $\omega \in \Omega_0$, on a aussi pour n assez grand

$$\sum_{j=0}^{k-1} \left| B_{f(((j+1)/2^{n+1})\pi)} - B_{f((j/2^{n+1})\pi)}\right|^2 \leqq 3 \,.$$

Ainsi, pour n assez grand (“assez grand” dépendant de ω, mais pas de u), on a

$$|B_u \circ T_{n+1} - B_u \circ T_n| \leqq 2\pi \frac{1}{2^{n/2}} \,,$$

ce qui suffit à montrer la convergence uniforme de la suite de trajectoires $(T_n(\omega))$. La trajectoire limite $T(\omega)$ est forcément continue et issue de zéro.

En utilisant des résultats classiques sur la convergence en probabilité des variables aléatoires gaussiennes, on obtient immédiatement que $(B_u \circ T)_{0 \leqq u \leqq 1}$ est un processus gaussien centré. De plus, la convergence ayant lieu aussi dans L^2, on montre facilement que ce processus est encore un mouvement brownien. Montrons enfin que pour tout $\omega \in \Omega_0, T(\omega) \in \Omega_0$. En utilisant la majoration obtenue ci-dessus, on trouve

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} |R_k^n \circ T - R_k^n \circ T_n| \leqq \sum_{p \geq n} 2\pi \frac{1}{2^{p/2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{k=0}^{2^n-1}|R_k^n\circ T|^2-\sum_{k=0}^{2^n-1}|R_k^n|^2\right|\\&\quad=\left|\sum_{k=0}^{2^n-1}|R_k^n\circ T|^2-\sum_{k=0}^{2^n-1}|R_k^n\circ T_n|^2\right|\\&\quad\leqq\sup_k(|R_k^n\circ T|+|R_k^n|)\sum_{k=0}^{2^n-1}R_k^n\circ T-R_k^n\circ T_n|\xrightarrow[n\to\infty]{}0.\quad\square\end{aligned}$$

Dans la suite, on se restreindra donc à l'espace probabilisé $(\Omega_0,\mathscr{A},\mu)$.

Proposition 2.2 *Soit γ la mesure de probabilité symétrique sur $[-\pi,\pi]$ définie par*

$$\gamma(A)\overset{\text{déf}}{=}\frac{\sigma(A\cap[0,\pi])+(-A\cap[0,\pi])}{2}.$$

Alors $(\Omega_0,\mathscr{A},\mu,T)$ est un système dynamique gaussien réel de mesure spectrale γ.

Preuve. Soit $\mathscr{H}_1$ le sous-espace gaussien de $L^2(\mu)$ engendré par la famille $(B_u)_{0\leqq u\leqq 1}$, et notons λ la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. Il existe un isomorphisme entre $\mathscr{H}_1$ et $L^2([0,1],2\lambda)$, qui fait correspondre $\mathbb{1}_{[0,u]}$ à B_u. De manière générale, si $f\in L^2([0,1],2\lambda)$, on note $\int_0^1 f(u)\,dB_u$ l'élément de $\mathscr{H}_1$ correspondant.

Pour tout $u\in[0,1]$, et tout $n\in\mathbb{N}$, on a alors par définition de T_n

$$B_u\circ T_n=\int_0^1\mathbb{1}_{[0,u]}\varphi_n(v)\,dB_v=\int_0^u\varphi_n(v)\,dB_v,$$

où

$$\varphi_n(v)\overset{\text{déf}}{=}\sum_{k=0}^{2^n-1}e^{i\alpha_k^n}\mathbb{1}_{f(J_k^n)}(v).$$

Or, on vérifie facilement la convergence presque sûre et dans $L^2(2\lambda)$ de φ_n vers $e^{i\psi}$, où

$$\psi(v)\overset{\text{déf}}{=}\inf\{t\in[0,\pi]/\sigma([0,t])\;=\;v\}.$$

On a donc

$$B_u\circ T=\lim_{n\to\infty}B_u\circ T_n=\int_0^u e^{i\psi(v)}\,dB_v.$$

Par suite, pour tout $X\in\mathscr{H}_1$, si $X\;=\;\int_0^1 f(u)\,dB_u$, alors

$$X\circ T\;=\;\int_0^1 e^{i\psi(u)}f(u)\,dB_u.$$

Soit $\mathscr{H}_2$ le sous-espace gaussien de $L^2(\mu)$ engendré par la famille $(\overline{B_u})_{0\leqq u\leqq 1}$. On vérifie immédiatement que $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ sont orthogonaux, et $\mathscr{H}_2$ est aussi isomorphe à $L^2(2\lambda)$. Si $\tilde{X} = \int_0^1 f(u)\, d\overline{B_u}$, on obtient de même que ci-dessus

$$\tilde{X} \circ T = \int_0^1 f(u) e^{-i\psi(u)}\, d\overline{B_u}\,.$$

Finalement, notons $\mathscr{H} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$. $\mathscr{H}$ est un sous-espace gaussien, et tout $X \in \mathscr{H}$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$X = \int_0^1 f(u)\, dB_u + \int_0^1 g(u)\, d\overline{B_u}\,.$$

où f et g sont dans $L^2(2\lambda)$. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a alors

$$X \circ T^p = \int_0^1 f(u) e^{ip\psi(u)}\, dB_u + \int_0^1 g(u) e^{-ip\psi(u)}\, d\overline{B_u}\,.$$

Remarquons que pour toute fonction h mesurable bornée de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{C}$, on a l'égalité

$$\int_0^1 h(\psi(v))\, dv = \int_0^\pi h(t)\, d\sigma(t)\,.$$

En effet, on le vérifie facilement lorsque h est une indicatrice d'intervalle, et cela suffit pour montrer que σ est la mesure image de λ par ψ.
Posons maintenant

$$X_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}(B_1 + \overline{B_1}) = \Re e(B_1)\,,$$

et pour tout $p \in \mathbb{Z}$

$$X_p \stackrel{\text{déf}}{=} X_0 \circ T^p = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{ip\psi(u)}\, dB_u + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-ip\psi(u)}\, d\overline{B_u}\,.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\langle X_0, X_p \rangle_{L^2(\mu)} &= \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^{ip\psi} \right\rangle_{L^2(2\lambda)} + \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^{-ip\psi} \right\rangle_{L^2(2\lambda)} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 e^{ip\psi(u)}\, du + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-ip\psi(u)}\, du \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi e^{ipt}\, d\sigma(t) + \frac{1}{2}\int_0^\pi e^{-ipt}\, d\sigma(t) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ipt}\, d\gamma(t)\,.
\end{aligned}$$

Ainsi, le processus $(X_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ est un processus réel gaussien stationnaire, de mesure spectrale γ.
Il reste maintenant à montrer que la tribu engendrée par les X_p est $\mathscr{A}$ tout entière. Pour cela, il suffit de voir que l'espace $\mathscr{V}$ engendré par les X_p est

$\mathscr{H}$ tout entier. Or, $\mathscr{V}$ est isomorphe à $L^2([-\pi,\pi],\gamma)$, X_p correspondant à $e^{ip\cdot}$. Pour tout $u \in [0,1]$, soit $F_u \in \mathscr{V}$ correspondant à $2.\mathbb{1}_{[0,\psi(u)]}$. On a alors

$$\begin{aligned}\langle F_u, X_p\rangle_{L^2(\mu)} &= \langle 2.\mathbb{1}_{[0,\psi(u)]}, e^{ip\cdot}\rangle_{L^2(\gamma)} \\ &= \int_0^{\psi(u)} e^{-ips} d\sigma(s) \\ &= \int_0^u e^{-ip\psi(s)} ds \\ &= \langle B_u, X_p\rangle_{L^2(\mu)} \,.\end{aligned}$$

On a donc pour tout $Y \in \mathscr{V}$

$$\langle F_u, Y\rangle_{L^2(\mu)} = \langle B_u, Y\rangle_{L^2(\mu)}$$

et donc F_u est la projection orthogonale de B_u sur $\mathscr{V}$. De plus, $||F_u||^2 = 2u = ||B_u||^2$, d'où $F_u = B_u$.

3 Insertion de T dans un flot et mouvement moyen

Pour tout $\omega \in \Omega_0$ et tout réel t, on peut définir aussi $T^t(\omega)$ comme la limite uniforme sur $[0,1]$ des trajectoires $(T_n^t(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$. De même, T^t est une transformation de Ω_0 préservant la mesure μ. On a $T^1 = T$, et on devine facilement que pour tous réels s et t, $T^{s+t} = T^s \circ T^t$. (La démonstration est laissée au lecteur courageux...)

On appellera *orbite* de ω la fonction qui à tout réel t associe

$$Z_t(\omega) \stackrel{\text{déf}}{=} B_1 \circ T^t(\omega) \,.$$

Proposition 3.1 *Pour tout $\omega \in \Omega_0$, l'orbite de ω est de classe C^∞, et pour presque tout $\omega \in \Omega_0$, elle ne passe pas par l'origine.*

Preuve. Fixons $\omega \in \Omega_0$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$t \mapsto Z_{n,t} \stackrel{\text{déf}}{=} B_1 \circ T_n^t = \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{it\alpha_k^n} R_k^n$$

est clairement de classe C^∞, la dérivée p-ième en t étant

$$Z_{n,t}^{(p)} = \sum_{k=0}^{2^n-1} i^p (\alpha_k^n)^p e^{it\alpha_k^n} R_k^n \,.$$

Soient α et β dans $[0, \pi]$, et $t \in \mathbb{R}$. On a l'inégalité

$$\begin{aligned}\left|\alpha^p e^{it\alpha} - \beta^p e^{it\beta}\right| &\leqq \left|\alpha^p e^{it\alpha} - \alpha^p e^{it\beta}\right| + \left|\alpha^p e^{it\beta} - \beta^p e^{it\beta}\right| \\ &\leqq \pi^p|t||\alpha-\beta| + |\alpha^p - \beta^p| \\ &\leqq (|t|\pi^p + p\pi^{p-1})|\alpha-\beta| \,.\end{aligned}$$

En utilisant cette inégalité, et en effectuant des calculs similaires à ceux faits dans la Proposition 2.1, on montre de la même façon la convergence de $Z_{n,t}^{(p)}$ *uniformément par rapport à t sur tout compact de* $\mathbb{R}$, ce qui prouve que l'orbite de ω est bien de classe C^∞.

La seconde partie de la Proposition 3.1 découle alors du lemme suivant:

Lemme 3.2 *Soit* $(X_t)_{0\leqq t\leqq 1}$ *un processus gaussien complexe stationnaire,* X_0 *étant de loi* $N_2(0,1)$. *Supposons que* $t\mapsto X_t$ *soit presque sûrement de classe* C^1. *Alors presque sûrement* (X_t) *ne passe pas par l'origine.*

Preuve. Par Fubini, on a

$$\mathbb{E}\left[\int_0^1 \frac{1}{|X_t|}dt\right] = \int_0^1 \mathbb{E}\left[\frac{1}{|X_t|}\right]dt = \mathbb{E}\left[\frac{1}{|X_0|}\right] < +\infty .$$

On a donc presque sûrement

$$\int_0^1 \frac{1}{|X_t|}dt < +\infty . \tag{1}$$

Or, il est facile de voir que pour tout ω vérifiant (1) et pour lequel $t\mapsto X_t(\omega)$ est de classe C^1,$X_t(\omega)$ ne peut pas s'annuler. □

Bien sûr, le Lemme 3.2 prouve aussi que presque sûrement, les applications $t\mapsto Z_{n,t}$ ne passent pas par l'origine. On peut donc écrire pour presque tout $\omega\in\Omega_0$

$$Z_t = \rho_t e^{iA_t} \quad \text{et} \quad Z_{n,t} = \rho_{n,t}e^{iA_{n,t}}$$

où ρ_t et $\rho_{n,t}$ sont strictement positifs, et $t\mapsto A_t$, $t\mapsto A_{n,t}$ sont des fonctions réelles continues (en fait, de classe C^∞).

Proposition 3.3 *Pour presque tout* ω, *le mouvement moyen existe, et il ne dépend pas de* ω; i.e. *il existe un réel m tel que*

$$\frac{1}{t}A_t \xrightarrow[t\to+\infty]{\text{p.s.}} m .$$

De plus, on a

$$m = \int_0^\pi x\, d\sigma(x) .$$

Preuve. Pour presque tout ω (en fait, pour tous les ω dont l'orbite ne passe pas par 0), on a écrit $Z_t = \rho_t e^{iA_t}$, où toutes les fonctions sont de classe C^∞. Dérivons par rapport à t:

$$\frac{d}{dt}Z_t = \left(\frac{d}{dt}\rho_t\right)e^{iA_t} + i\left(\frac{d}{dt}A_t\right)Z_t$$

$$\frac{\frac{d}{dt}Z_t}{Z_t} = \frac{\frac{d}{dt}\rho_t}{\rho_t} + i\left(\frac{d}{dt}A_t\right)$$

$$\frac{d}{dt}A_t = \Im m\left(\frac{\frac{d}{dt}Z_t}{Z_t}\right).$$

De même, on a presque sûrement

$$\frac{d}{dt}A_{n,t} = \Im m\left(\frac{(d/dt)\,Z_{n,t}}{Z_{n,t}}\right).$$

Or, on sait que $Z_{n,t} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} Z_t$, et que $(d/dt)Z_{n,t} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} (d/dt)Z_t$. On a donc

$$\frac{d}{dt}A_{n,t} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \frac{d}{dt}A_t\,.$$

Soient V et $(V_n)_{n\in N}$ les variables aléatoires définies par

$$V \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d}{dt}A_t\bigg|_{t=0} \quad ; \quad V_n \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d}{dt}A_{n,t}\bigg|_{t=0}.$$

Lemme 3.4 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n \in L^1(\mu)$, $V \in L^1(\mu)$ et $V_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} V$.*

En effet, puisqu'on sait déjà que $V_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} V$, il suffit de prouver que la famille $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable. Pour cela, montrons que cette famille est bornée dans L^p pour tout p tel que $1 \leqq p < 2$:

$$V_n = \Im m\left(\frac{(d/dt)Z_{n,t}\big|_{t=0}}{Z_{n,0}}\right) = \Im m\left(\frac{\Sigma_{k=0}^{2^n-1}\, i\alpha_k^n R_k^n}{B_1}\right).$$

Remarquons que $\Re e(R_k^n)$ et $\Im m(R_k^n)$ sont deux variables réelles gaussiennes centrées indépendantes, de variance $\sigma(J_k^n)$. Posons

$$s_n^2 \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{2^n-1} \alpha_k^n \sigma(J_k^n).$$

On a bien sûr $0 \leqq s_n^2 \leqq \pi$, car s_n^2 est une combinaison linéaire convexe des α_k^n, et on peut écrire

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} \alpha_k^n R_k^n = s_n^2 B_1 + \sum_{k=0}^{2^n-1} (\alpha_k^n - s_n^2) R_k^n.$$

On vérifie alors facilement que $Y_n \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{2^n-1}(\alpha_k^n - s_n^2)R_k^n$ est indépendant de B_1. On a donc

$$|V_n| \leqq s_n^2 + \left|\frac{Y_n}{B_1}\right|,$$

d'où

$$\|V_n\|_p \leqq s_n^2 + \left\|\frac{Y_n}{B_1}\right\|_p \leqq \pi + \|Y_n\|_p \left\|\frac{1}{B_1}\right\|_p.$$

Mais la variance de Y_n est toujours majorée par 2π, et comme $p < 2$, on a $\|1/B_1\|_p < +\infty$. On en déduit $\|V_n\| \leqq K_p$, où K_p ne dépend pas de n, et le Lemme 3.4 est établi.

Puisque $V \in L^1$, on peut appliquer le théorème de Birkhoff au flot (T^t) pour prouver que presque sûrement $(1/t)\int_0^t V(T^\tau\omega)\,d\tau$ a une limite quand $t \to +\infty$, notée $\overline{V}(\omega)$. Or

$$\int_0^t V(T^\tau\omega)\,d\tau = A_t - A_0$$

et donc

$$\frac{A_t}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{\text{p.s}} \overline{V}(\omega).$$

De plus, la mesure σ étant diffuse, on sait que la transformation $T = T^1$ est ergodique (voir [1]). On a donc $\overline{V}(\omega) \overset{\mu\text{.p.s.}}{=} \mathbb{E}[V]$.

Il reste maintenant à calculer le mouvement moyen $m = \mathbb{E}[V]$. Grâce au Lemme 3.4, on a bien sûr

$$m = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[V_n].$$

Mais on a vu que

$$V_n = \Im m\left(i\left(s_n^2 + \frac{Y_n}{B_1}\right)\right).$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[V_n] &= \Im m\left(i\ \mathbb{E}\left[s_n^2 + \frac{Y_n}{B_1}\right]\right) \\
&= \Im m\left(i\ s_n^2 + i\mathbb{E}[Y_n]\mathbb{E}\left[\frac{1}{B_1}\right]\right) \\
&= \Im m(i\ s_n^2) = s_n^2.
\end{aligned}$$

Enfin, on vérifie facilement que $s_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^\pi x\,d\sigma(x)$. Ainsi, m est bien la moyenne de σ. □

Références

1. Cornfeld, I.P., Fomin, S.V., Sinai, Ya.G.: Ergodic Theory (Grundlernen Math. Wiss. 245) Berlin Heidelberg New York: Springer 1982
2. Jessen, B., Tornehave, H.: Mean motion and zeros of almost periodic functions. Acta Math. 77, 138–279 (1945)

3. Lagrange, L.: Théorie des variations séculaires des éléments des planètes I et II. In: Œuvres 5(pp. 123–344) Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin 1781
4. Levy, P.: Le mouvement brownien plan. Am. J. Math. **62**, 487–550 (1940)
5. Sternberg, S.: Celestial Mecanics. New York Amsterdam: Benjamin 1969
6. Weyl, H.: Mean motion. Am. J. Math. **60**, 889–896 (1938)