Probab. Theory Relat. Fields 104, 255–282 (1996)

Probability Theory and Related Fields

Sur le théorème de Berry–Esseen pour les suites faiblement dépendantes

Emmanuel Rio

URA n° 0743 CNRS, Université de Paris-Sud, Bât. 425, Mathématique, F-91405 Orsay Cedex, France (e-mail: rio@stats.matups.fr)

Reçu le 17 Janvier 1995 / Version révisée le 31 Mai 1995

Résumé. Nous étendons la méthode de démonstration du théorème de Berry–Esseen proposée par Bergström aux suites de variables aléatoires faiblement dépendantes. En particulier, nous montrons que, pour les suites stationnaires de variables aléatoires réelles bornées, la vitesse de convergence dans le théorème limite central en distance de Lévy est de l'ordre de $n^{-1/2}$ dès que la suite $(\theta_p)_{p>0}$ des coefficients de mélange uniforme satisfait la condition $\Sigma_{p>0} p\theta_p < \infty$.

About the Berry–Esseen Theorem for weakly dependent sequences

Abstract. We extend the method of Bergström for the rates of convergence in the central limit theorem to weakly dependent sequences. In particular, we prove that, for stationary and uniformly mixing sequences of real-valued and bounded random variables, the rate of convergence in the central limit theorem is of the order of $n^{-1/2}$ as soon as the sequence $(\theta_p)_{p>0}$ of uniform mixing coefficients satisfies $\Sigma_{p>0} p\theta_p < \infty$.

Mathematics Subject Classifications (1991): 60 F 05

Introduction

Dans cet article, nous étudions la vitesse de convergence dans le théorème limite central pour des suites de variables aléatoires réelles faiblement dépendantes. Nous considérons donc une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de variables aléatoires réelles centrées et de variance finie. Posons $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ et $V_n = \text{Var}\, S_n$. Quand les variables X_i sont indépendantes et équidistribuées, $V_n^{-1/2} S_n$ converge en loi vers la loi gaussienne standard. Il est alors naturel de chercher à évaluer la vitesse à laquelle cette convergence a lieu. L'une des distances les plus courantes pour estimer la vitesse de convergence est la distance uniforme entre les fonctions de répartition. Si Y est une variable aléatoire gaussienne de loi $N(0,1)$, nous poserons donc

$$\Pi_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\mathbb{P}(V_n^{-1/2} S_n \leqq x) - \mathbb{P}(Y \leqq x)| . \tag{I.1}$$

Pour les suites de variables aléatoires indépendantes, le théorème de Berry–Esseen donne une évaluation de Π_n en fonction de la somme des moments cubiques absolus des variables X_i. Par exemple, quand les variables X_i sont équidistribuées,

$$\Pi_n \leqq 4\mathbb{E}(|X_1|^3) n^{-1/2} . \tag{I.2}$$

[voir Esseen (1945)]. Nous renvoyons à Petrov (1975) pour des estimations de Π_n sous des hypothèses de moment sur $|X_1|$ plus faibles et à Zolotarev (1990) pour une revue des résultats connus dans le cas indépendant. La méthode classique pour obtenir (I.2) est la méthode des fonctions caractéristiques. Cependant, il est possible de montrer (I.2) sans utiliser la fonction caractéristique de S_n: en modifiant la méthode de Lindeberg (1922), Bergström (1944) a montré (I.2) par récurrence sur n. Bergström (1945) et Sazonov (1968) ont étendu cette méthode aux vecteurs aléatoires. Enfin Bergström (1972) a étendu la méthode de Lindeberg au TLC pour les suites triangulaires uniformément mélangeantes, mais il n'a pas donné de vitesses de convergence.

Les résultats connus pour les variables dépendantes sont de différentes sortes. Une première généralisation possible est l'extension aux accroissements de martingales. Dans ce cas, en étendant la méthode de Bergström (1944) aux martingales, Bolthausen (1982a) a donné les vitesses de convergence optimales sous certaines hypothèses de variance conditionnelle des variables. Par exemple, un contrôle des moments cubiques des variables conduit à une vitesse de convergence de l'ordre de $n^{-1/4}$. Quand les variables sont uniformément bornées, la vitesse de convergence est de l'ordre de $n^{-1/2} \log n$. De plus, Bolthausen (1982a) montre sur des exemples l'optimalité des vitesses obtenues dans le cadre où il se place. Par conséquent les techniques de martingales ne permettent pas d'obtenir des vitesses de convergence en $O(n^{-1/2})$ dans le TLC.

Une seconde extension possible est l'extension aux chaînes de Markov. Soit $(\xi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ une chaîne de Markov Harris-récurrente et stationnaire. Bolthausen (1982b) montre que la vitesse de convergence dans le TLC est liée à l'intégrabilité des temps de régénération de la chaîne [voir Nummelin (1984) pour une définition des temps de régénération]. En particulier, si $X_i = f(\xi_i)$ pour une fonction f bornée et si les accroissements des temps de régénération ont un moment cubique fini, alors $\Pi_n = O(n^{-1/2})$. De plus Bolthausen (1980) montre que cette condition d'intégrabilité sur les temps de régénération est satisfaite quand les coefficients $(\alpha_p)_{p>0}$ de mélange fort au sens de Rosenblatt (1956) de la suite $(\xi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ satisfont la condition de sommabilité

$$\sum_{p>0} p\alpha_p < \infty . \tag{I.3}$$

De plus, si la condition (I.3) n'est pas vérifiée, les moments cubiques des temps de régénération de la chaîne peuvent être infinis. La vitesse de convergence dans le TLC n'est alors plus en $O(n^{-1/2})$. La vitesse de convergence dans le

TLC pour les chaînes de Markov est donc liée à la vitesse de convergence des coefficients de mélange fort vers 0.

Une question naturelle est d'étendre ces résultats sur les chaînes de Markov aux suites fortement mélangeantes. Dans ce cas, pour les suites stationnaires de variables aléatoires bornées, Ibragimov et Linnik (1971) ont montré le TLC sous la condition minimale

$$\sum_{p>0} \alpha_p < \infty \,. \tag{I.4}$$

Sous la condition de mélange $\alpha_p = O(n^{-1-\delta})$, qui interpole entre (I.3) et (I.4), Rio (1995) a montré que $\Pi_n = O(n^{-\delta/2})$ pour les suites stationnaires et fortement mélangeantes de variables aléatoires bornées, pourvu que $\delta < (-1+\sqrt{5})/2$. Mais il obtenait seulement $\Pi_n = O(n^{-1/3})$ sous (I.3).

Pour obtenir des vitesses de convergence plus rapides, de nombreux auteurs ont utilisé la méthode proposée par Stein (1972). Dans le cas indépendant, Götze (1991) a appliqué cette méthode aux vecteurs aléatoires et a donné des vitesses de convergence optimales ainsi qu'une dépendance en la dimension en $k^{1/2}$, améliorant ainsi des résultats antérieurs de Bentkus (1986) et de Nagaev (1976). Dans le cas dépendant, Tikhomirov (1980) montre que pour des suites stationnaires géométriquement mélangeantes de variables ayant un moment d'ordre quatre fini, $\Pi_n = O(n^{-1/2}\log n)$. Malheureusement ni cette méthode ni la méthode de Bernstein [voir Zuparov (1991) pour une application de cette méthode aux suites faiblement dépendantes] ne permettent d'obtenir une vitesse de convergence en $O(n^{-1/2})$ dans le TLC pour les suites faiblement dépendantes. Aussi les meilleures vitesses de convergence connues pour les suites de variables aléatoires fortement ou uniformémemt mélangeantes sont de la forme $O(n^{-1/2}(\log n)^{\beta})$ avec $\beta \geqq 1$, et ces vitesses sont atteintes seulement quand les taux de mélange sont géométriques. Enfin, pour des suites avec décroissance géométrique de la dépendance, Götze et Hipp (1983) ont étudié les développements asymptotiques de la fonction de répartition de S_n.

Dans cet article nous étudions donc la vitesse de convergence dans le TLC pour les suites uniformément mélangeantes. Nous montrons que, pour les suites stationnaires de variables aléatoires bornées, de suite de coefficients de mélange uniforme $(\theta_p)_{p\geqq 0}, \Pi_n = O(n^{-1/2})$ dès que $\Sigma_{p\geqq 0}\, p\theta_p < \infty$, pourvu que $\lim_n V_n = +\infty$. La méthode utilisée pour obtenir ce résultat est une extension de la méthode de Bergström (1944) aux suites faiblement dépendantes. Nous obtenons ce résultat comme conséquence d'un théorème plus général qui s'applique aussi à certaines suites non fortement mélangeantes.

1. Définitions et résultats

1.1. Une nouvelle mesure de dépendance

Afin d'énoncer un résultat sur les vitesses de convergence s'appliquant aussi à certains processus faiblement dépendants mais non mélangeants, nous allons introduire une nouvelle mesure de la dépendance entre une sous-tribu $\mathscr{A}$ de $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire X à valeurs dans un espace métrique $(\mathscr{X}, d)$.

Définition. *Notons $\Lambda(\mathscr{X},d)$ l'espace des fonctions de $(\mathscr{X},d)$ dans* [0,1] *lipschitziennes de rapport un. On pose*

$$\varphi(\mathscr{A},X) = \sup_{f\in\Lambda(\mathscr{X},d)} \|\mathbb{E}(f(X)|\mathscr{A}) - \mathbb{E}(f(X))\|_\infty . \tag{1.1}$$

Soit $\varphi(\mathscr{A},\mathscr{B})$ le coefficient de mélange uniforme au sens d'Ibragimov (1962) entre les sous-tribus $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$. Si $\mathscr{X} = \mathbb{R}$ est muni de la distance usuelle,

$$\sup_{B\in\mathscr{B}} \varphi(\mathscr{A},\mathbb{1}_B) = \varphi(\mathscr{A},\mathscr{B}) , \tag{1.2}$$

ce qui justifie la notation (1.1). Enfin, si X est une variable aléatoire réelle $\mathscr{B}$-mesurable,

$$\varphi(\mathscr{A},X) \leqq \varphi(\mathscr{A},\mathscr{B}) . \tag{1.3}$$

Nous allons maintenant définir les coefficients $(\varphi_p)_{p\geq 0}$ de dépendance uniforme d'une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de variables aléatoires réelles ainsi.

Définition. *Soit $\mathscr{F}_k$ la tribu engendrée par les variables $(X_i)_{i\leqq k}$. On munit $\mathbb{R}^l$ de la distance associée à la norme $\|x\|_\infty = \sup_{i\in[1,l]}|x_i|$. On pose $\varphi_0 = 1$ et*

$$\varphi_p = \sup_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ p\leqq p_1<p_2<p_3}} \varphi(\mathscr{F}_k,(X_{k+p_1},X_{k+p_2},X_{k+p_3})) \quad pour\ p > 0 . \tag{1.4}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème principal,

Théorème 1. *Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une suite stationnaire de variables aléatoires réelles centrées et bornées par M. Supposons que la suite $(\varphi_p)_{p\geqq 0}$ de coefficients de dépendance uniforme de $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ satisfait*

$$\sum_{p>0} p\varphi_p < \infty . \tag{a}$$

Soit Π_n l'écart uniforme défini par (I.1). *Si $\limsup_n V_n = \infty$, alors $\Pi_n \leqq A'n^{-1/2}$, la constante A' dépendant uniquement de la suite des coefficients de dépendance uniforme, de la borne M des variables et de l'écart-type asymptotique $\sigma = \lim_n(V_n/n)^{1/2}$ des variables $S_n/\sqrt{n}$ (voir* (2.2)–(2.4) *pour l'existence de σ).*

Les coefficients $(\varphi_p)_{p\geqq 0}$ sont majorés par les coefficients de mélange uniforme au sens d'Ibragimov. Donc le théorème 1 s'applique aux suites uniformément mélangeantes. Mais les coefficients définis par (1.4) fournissent aussi des résultats pour certaines suites non mélangeantes: soit $(U_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est le processus autorégressif d'ordre un défini à partir d'une suite $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de variables i.i.d. de loi de Bernoulli par $U_i = \Sigma_{j\geqq 0}a^j\varepsilon_{i-j}$ avec a dans $]0,1[$ et $X_i = \mathbb{1}_{U_i\leqq t}$. La suite $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ ainsi définie n'est pas fortement mélangeante et donc a fortiori pas uniformément mélangeante, mais le théorème 1 s'applique encore, comme le montre la section ci-dessous.

1.2. Application aux suites causales faiblement dépendantes

Soit $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $[a,b]\cap\mathbb{R}$, avec a et b dans $\bar{\mathbb{R}}$. La suite $(U_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est définie par

$$U_i = F(\varepsilon_{i-j} : j \in \mathbb{N}) , \tag{1.5}$$

où F est une fonction mesurable bornée (une telle suite est appelée *weakly dependent shift* dans la terminologie anglo-saxonne).

Notation. Pour toute suite $(u_i)_{i\geqq 0}$ de nombres réels et tout entier naturel k, on définit la suite $(u_i^k)_{i\geqq 0}$ par $u_i^k = u_i \mathbb{1}_{i\leqq k}$ et on pose

$$\delta_k = \sup\{|F(u_i\colon i \in \mathbb{N}) - F(u_i^k\colon i \in \mathbb{N})|\colon (u_i)_{i\in\mathbb{N}} \in [a,b]^{\mathbb{N}}\} . \tag{1.6}$$

Le corollaire suivant se déduit du théorème 1 [voir annexe A].

Corollaire 1. *Soit $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires réelles, stationnaire, de suite des coefficients de mélange uniforme $(\theta_p)_{p\geqq 0}$ telle que $\Sigma_{p\geqq 0} p\theta_p < \infty$.*
Soit H une fonction bornée sur $\mathbb{R}$ et $(U_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ la suite définie par (1.5). *Posons $X_i = H(U_i) - \mathbb{E}(H(U_i))$. Supposons que* $\limsup_n V_n = \infty$. *Alors la suite $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ satisfait les hypothèses et les conclusions du théorème* 1 *si*

$$\sum_{p\geqq 0} p\mathbb{E}(\omega_H(U_0, 2\delta_p)) < \infty , \tag{1.7}$$

où $\omega_H(x,\eta) = \sup_{|y-x|\leqq\eta}|H(y) - H(x)|$ désigne la fonction d'oscillation maximale de H.

Donnons maintenant deux applications du corollaire 1.

Exemple 1. Soit $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre s dans $]0,1/2]$. Soit $(\gamma_p)_{p\geqq 0}$ une suite décroissante de réels tels que

$$0 < \gamma_{p+1} \leqq \gamma_p/2 \quad \text{pour tout } p \geqq 0 . \tag{1.8}$$

Définissons les variables U_i par

$$U_i = \sum_{j\geqq 0} \gamma_j \varepsilon_{i-j} . \tag{1.9}$$

Dans ce cas $\delta_k = \Sigma_{p>k}\gamma_p$ convient dans (1.6). Soient $H(x) = \mathbb{1}_{x\leqq t}$ et $X_i = U_i - \mathbb{E}(H(U_i))$. Alors $\omega_H(u, 2\delta_p) = \mathbb{1}_{|u-t|\leqq 2\delta_p}$. Par conséquent la majoration suivante de la concentration maximale de la loi de U_0 implique (1.7): pour tout entier naturel k,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{P}(x - 2\delta_k \leqq U_0 \leqq x + 2\delta_k) \leqq 5(1-s)^{k+1} . \tag{1.10}$$

(Nous montrerons (1.10) dans l'annexe B). Regardons maintenant le processus autorégressif d'ordre un défini par

$$U_i = aU_{i-1} + \varepsilon_i = \sum_{j\geqq 0} a^j \varepsilon_{i-j} . \tag{1.11}$$

Quand a est dans $]0,1/2]$, (1.10) s'applique directement. Supposons maintenant que a est dans $]1/2,1]$ et considérons le plus petit entier positif l tel que $a^l \leqq 1/2$. On se ramène au cas précédent en décomposant U_0 ainsi:

$$U_0 = \sum_{r=0}^{l-1} a^r \sum_{j \geqq 0} a^{lj} \varepsilon_{-r-lj} = \sum_{r=0}^{l-1} a^r U_{0,r} .$$

Comme les variables $U_{0,r}$ sont indépendantes,

$$(1.12) \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{P}(x - 2\delta \leqq U_0 \leqq x + 2\delta) \leqq \sup_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{P}(x - 2\delta \leqq U_{0,0} \leqq x + 2\delta) .$$

Or $U_{0,0}$ satisfait (1.8) et (1.9). Donc la suite $(U_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ définie par (1.11) vérifie (1.7).

Exemple 2. Soit $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires réelles bornées stationnaire et uniformément mélangeante au sens d'Ibragimov, de suite de coefficients de mélange uniforme $(\theta_p)_{p \geqq 0}$ telle que $\Sigma_{p \geqq 0}\, p\theta_p < \infty$. Considérons une suite $(\gamma_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de coefficients réels absolument sommable et définissons la suite $(U_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ par (1.9). Soit α dans $]0,1]$ et H une fonction numérique α-höldérienne telle que $|H(x) - H(y)| \leqq |x-y|^\alpha$ pour tout couple (x,y) de réels. Alors $\omega_H(x,\delta) \leqq \delta^\alpha$ et (1.6) est satisfaite avec $\delta_k = \|\varepsilon_0\|_\infty \Sigma_{p>k} |\gamma_p|$. Par conséquent la condition (1.7) est satisfaite pour toutes les valeurs de α lorsque les coefficients $(\gamma_p)_{p \geqq 0}$ décroissent géométriquement en valeur absolue. Notons que, si la fonction H est lipschitzienne, la condition (1.7) sera satisfaite dès que $\Sigma_{p \geqq 0}\, p^2 |\gamma_p| < \infty$.

2. Preuve du théorème principal

Nous allons en premier donner quelques propriétés élémentaires des coefficients de dépendance uniforme. La première est l'inégalité de covariance suivante.

Lemme 1. *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $(\mathcal{X}, d)$. Si g est dans $\Lambda(\mathcal{X}, d)$, et si Y est une variable aléatoire réelle $\mathcal{A}$-mesurable et intégrable, alors*

$$|\mathrm{Cov}(Y, g(X))| \leqq \varphi(\mathcal{A}, X)\mathbb{E}(|Y|) .$$

En particulier, si les variables X_i sont bornées par $M \geqq 1$,

$$(2.1) \qquad |\mathrm{Cov}(X_i, X_j)| \leqq 2M^2 \varphi_{|i-j|}$$

(pour montrer (2.1), appliquer le lemme 1 avec $g(x) = ((x+M)/2M)^+ \wedge 1$). Par conséquent, si les variables X_i sont bornées, l'hypothèse (a) du théorème 1 assure que

$$(2.2) \qquad \sum_{t \in \mathbb{Z}} |t\, \mathrm{Cov}(X_0, X_t)| < \infty .$$

Posons $\sigma^2 = \Sigma_{t \in \mathbb{Z}} \mathrm{Cov}(X_0, X_t)$. Puisque

$$(2.3) \qquad V_n = \mathrm{Var}\, S_n = n\sigma^2 - \sum_{t \in \mathbb{Z}} (n \wedge |t|)\, \mathrm{Cov}(X_0, X_t) ,$$

(2.2) entraîne l'alternative suivante [voir par exemple Bradley (1985)]. Soit $\sigma = 0$, auquel cas la suite $(V_n)_{n>0}$ est bornée, soit $\sigma \neq 0$ et alors

$$\lim_{n \to \infty} (n\sigma^2)^{-1} V_n = 1 . \tag{2.4}$$

En particulier, sous les hypothèses du théorème 1, nous sommes dans le second cas. Quitte à renormaliser les variables on peut alors se ramener à $\sigma = 1$. Soit $v_k = V_k - V_{k-1}$. Sous (2.2), avec la normalisation proposée, v_k converge vers 1 quand k tend vers l'infini. Aussi le théorème 1 est un corollaire du théorème suivant, qui s'applique aussi aux suites non stationnaires.

Théorème 2. *Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires réelles centrées et bornées par M, vérifiant l'hypothèse (a) du théorème* 1. *Posons $v_k = V_k - V_{k-1}$. Si*

$$v_k \geqq 1/2 \text{ à partir d'un certain rang } n_0 , \tag{b}$$

alors $\Pi_n \leqq An^{-1/2}$, la constante A dépendant uniquement de la suite des coefficients de dépendance uniforme, de la borne M des variables et de n_0.

Preuve. Pour majorer Π_n, nous allons procéder par récurrence. Nous faisons donc l'hypothèse de récurrence suivante au rang n:

$$\Pi_k \leqq Ak^{-1/2} \quad \text{pour tout } k < n . \tag{$\mathscr{H}(n)$}$$

Nous allons majorer Π_n en reprenant la méthode proposée par Bergström (1944). Le premier pas est de régulariser la fonction de répartition. Soit donc

$$\phi_\varepsilon(x) = (2\pi)^{-1/2} \varepsilon^{-1} \exp(-x^2/2\varepsilon^2)$$

le noyau gaussien d'écart-type ε. On pose $\phi = \phi_1$. Le lemme suivant, dû à Bergström (1944), permet de régulariser S_n.

Lemme 2. *Soit F et G deux fonctions de répartition. On suppose que G a une densité uniformément majorée par B. Si $\|F - G\|_\infty \geqq \Delta B$, alors*

$$\|(F - G) * \phi_\varepsilon\|_\infty \geqq \Delta B \left(3 \int_0^{\Delta/2\varepsilon} \phi(v)\, dv - 1 \right) \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0 .$$

Le pas suivant est de décomposer le terme d'erreur à l'aide de la méthode de Lindeberg. Afin de majorer les erreurs élémentaires, nous utiliserons souvent le lemme suivant [voir Bolthausen (1982a)].

Lemme 3. *Soient F et G deux fonctions de répartition, et X et Y deux variables aléatoires de fonctions de répartition respectives F et G. Alors, pour toute fonction f de variation totale $V(f)$ bornée,*

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} |\mathbb{E}(f(X + a))| \leqq \|F - G\|_\infty V(f) + \|f * G'\|_\infty .$$

Nous utiliserons aussi le lemme de saturation suivant.

Lemme 4. *Soit O_M l'opérateur qui à toute fonction g associe* $\sup_{y\in[-M,M]} g(\,\cdot\, - y)$. *Pour toute fonction g continue et à variation bornée, $O_M \cdot g$ est à variation bornée, et*

(a) $$V(O_M \cdot g) \leqq V(g)\,.$$

De plus, si g est intégrable,

(b) $$\int_{\mathbb{R}} O_M \cdot g(x)\,dx \leqq \int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx + MV(g)\,.$$

Preuve. Puisque g est à variation bornée $g = g_1 - g_2$, les fonctions g_1 et g_2 étant croissantes et telles que $V(g) = V(g_1) + V(g_2)$. Clairement

$$\begin{aligned} O_M \cdot g(x) + g_2(x-M) - g_2(x+y-M) \\ \leqq O_M \cdot g(x+y) \leqq O_M \cdot g(x) + g_1(x+y+M) - g_1(x+M)\,, \end{aligned}$$

ce qui montre que la variation totale de $O_M \cdot g$ est majorée par $V(g_1) + V(g_2)$. Pour montrer (b), il suffit d'intégrer en la variable x l'inégalité suivante:

$$O_M \cdot g(x) \leqq g(x) + (g_1(x+M) - g_1(x)) + (g_2(x) - g_2(x-M))\,.$$

2.1. La méthode de Lindeberg

Dans la suite, $M \geqq 1$. Notons d'abord, que d'après l'inégalité (2.1),

(2.5) $$|v_k| \leqq 4M^2 \sum_{p=0}^{k-1} \varphi_p\,,$$

ce qui assure que la suite $(v_k)_{k>0}$ est bornée.

Notation. On pose $\Delta_k(f) = \mathbb{E}(f(S_{k-1} + X_k) - f(S_{k-1} + Y_k))$.

Soit $(Y_i)_{i\geqq n_0}$ une suite de variables aléatoires gaussiennes indépendantes centrées avec $\operatorname{Var} Y_k = v_k$. Soit Y une variable aléatoire gaussienne standard, indépendante des variables ci-dessus. ε étant un paramètre que l'on choisira ultérieurement, on pose

$$T_{k,n} = \varepsilon Y + \sum_{i=k+1}^{n} Y_i \quad \text{et} \quad T_{n,n} = \varepsilon Y\,.$$

Soit $H(x) = \mathbb{1}_{x\geqq 0}$ et $f_k(x) = \mathbb{E}(H(y - x - T_{k,n}))$. On note F_Z la fonction de répartition de la variable aléatoire réelle Z. Clairement

$$F_{S_n+\varepsilon Y}(y) - F_{S_{n_0-1}+T_{n_0-1,n}}(y) = \sum_{k=n_0}^{n} \Delta_k(f_k)\,.$$

Nous allons maintenant majorer $\Delta_k(f_k)$ en fonction du maximum de la dérivée cubique de f_k. Pour finir la majoration, nous utiliserons la majoration suivante des dérivées de f_k. La preuve est facile et sera donc omise.

Lemme 5. *Sous les hypothèses du théorème 2, f_k a des dérivées continues à tout ordre et, pour tout $k \geqq n_0$ et tout $i > 0$,*

$$\|f_k^{(i)}\|_\infty \leqq 2^{i/2}(n-k+\varepsilon^2)^{-i/2} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\phi^{(i-1)}(x)|\,.$$

En adaptant la méthode utilisée par Rio (1995) pour les suites fortement mélangeantes, nous obtenons la borne suivante sur $\Delta_k(f)$.

Lemme 6. *Soit f une fonction trois fois continûment dérivable. Si $M \geqq 1$,*

$$|\Delta_k(f)| \leqq 13M^3\|f'''\|_\infty \sum_{p=0}^{k-1} (1+p)\varphi_p\,.$$

Preuve. Clairement $\Delta_k(f) = \Delta_{1,k}(f) - \Delta_{2,k}(f)$, où

$$\Delta_{1,k}(f) = \mathbb{E}(f(S_{k-1}+X_k)) - \mathbb{E}(f(S_{k-1})) - \frac{v_k}{2}\mathbb{E}(f''(S_{k-1}))$$

et

$$\Delta_{2,k}(f) = \mathbb{E}(f(S_{k-1}+Y_k)) - \mathbb{E}(f(S_{k-1})) - \frac{v_k}{2}\mathbb{E}(f''(S_{k-1}))\,.$$

Le lemme 6 découle donc des estimées suivantes:

$$|\Delta_{2,k}(f)| \leqq \frac{8\sqrt{\pi}}{3\sqrt{3}} M^3 \sup_{a\in\mathbb{R}} |\mathbb{E}(f'''(S_{k-1}+a))| \sum_{p=0}^{k-1} (1+p)\varphi_p \tag{2.6}$$

et

$$|\Delta_{1,k}(f)| \leqq 8M^3\|f'''\|_\infty \sum_{p=0}^{k-1} (1+p)\varphi_p\,. \tag{2.7}$$

Pour montrer (2.6), appliquons la formule de Taylor intégrale à l'ordre trois:

$$f(S_{k-1}+Y_k) - f(S_{k-1}) - f'(S_{k-1})Y_k - \frac{Y_k^2}{2}f''(S_{k-1})$$

$$= \frac{Y_k^3}{2}\int_0^1 (1-t)^2 f'''(S_{k-1}+tY_k)\,dt\,.$$

En prenant l'espérance dans cette égalité et en notant que Y_k est indépendante de S_{k-1}, nous obtenons:

$$\begin{aligned} |\Delta_{2,k}(f)| &\leqq \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} v_k^{3/2} \sup_{a\in\mathbb{R}} |\mathbb{E}(f'''(S_{k-1}+a))| \\ &\leqq \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} v_k^{3/2} \|f'''\|_\infty\,. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Pour majorer v_k, nous allons appliquer l'inégalité de Hölder: puisque $\varphi_p \leqq 1$,

$$\sum_{p=0}^{k-1} \varphi_p \leqq \sum_{p=0}^{k-1} ((1+p)\varphi_p)^{2/3}(1+p)^{-2/3}$$
$$\leqq \left(\sum_{p=0}^{k-1} ((1+p)\varphi_p)\right)^{2/3} \left(\sum_{p=0}^{k-1} (1+p)^{-2}\right)^{1/3}.$$

Donc, en appliquant (2.5),

$$v_k^{3/2} \leqq 8M^3\sqrt{\frac{\pi^2}{6}} \sum_{p=0}^{k-1} (1+p)\varphi_p . \tag{2.9}$$

ce qui achève la preuve de (2.6).

Pour montrer (2.7), appliquons la formule de Taylor à l'ordre trois:

$$f(S_k) - f(S_{k-1}) = f'(S_{k-1})X_k + \tfrac{1}{2}f''(S_{k-1})X_k^2 + \tfrac{1}{6}f'''(S_{k-1} + \theta X_k)X_k^3 , \tag{2.10}$$

avec θ dans [0,1]. Puisque $|X_k| \leqq M$,

$$|f'''(S_{k-1} + \theta X_k)X_k^3| \leqq M^3 \|f'''\|_\infty . \tag{2.11}$$

Nous devons maintenant estimer les termes d'ordre un et deux. Clairement

$$\operatorname{Cov}(f''(S_{k-1}), X_k^2) = \sum_{i=1}^{k-1} \operatorname{Cov}(f''(S_i) - f''(S_{i-1}), X_k^2) . \tag{2.12}$$

En appliquant le lemme 1 avec $g(x) = (x \wedge M)^2/2M^2$ et en notant que $f''(S_i) - f''(S_{i-1})$ est $\mathscr{F}_i$-mesurable, nous obtenons:

$$|\operatorname{Cov}(f''(S_i) - f''(S_{i-1}), X_k^2)| \leqq 2M^2\varphi_{k-i}\mathbb{E}(|f''(S_i) - f''(S_{i-1})|) \tag{2.13}$$
$$\leqq 2M^3\varphi_{k-i}\|f'''\|_\infty .$$

En sommant (2.13) en i, nous en déduisons que

$$|\operatorname{Cov}(f''(S_{k-1}), X_k^2)| \leqq 2M^3\|f'''\|_\infty \sum_{p=1}^{k-1} \varphi_p . \tag{2.14}$$

Pour estimer le terme d'ordre un, nous utilisons à nouveau l'argument de sommes glissantes. Clairement

$$f'(S_{k-1})X_k = \sum_{i=1}^{k-1} (f'(S_i) - f'(S_{i-1}))X_k .$$

Afin de faire apparaître la dérivée seconde de f, écrivons la formule de Taylor à l'ordre deux:

$$f'(S_i) - f'(S_{i-1}) = f''(S_{i-1})X_i + \tfrac{1}{2}f'''(S_{i-1} + \theta X_i)X_i^2 ,$$

avec θ dans [0,1]. Appliquons le lemme 1 avec $\mathscr{A} = \mathscr{F}_i$, $Y = f'''(S_{i-1} + \theta X_i)X_i^2$ et $X = X_k$, $g(x) = (x + M)/2M$. Il vient:

$$|\mathrm{Cov}(f'''(S_{i-1} + \theta X_i)X_i^2, X_k)| \leqq 2M^3 \|f'''\|_\infty \varphi_{k-i} . \tag{2.15}$$

Nous sommes donc ramenés à l'évaluation de $\mathbb{E}(f''(S_{i-1})X_iX_k)$.

Posons $j = \sup(0, 2i - k)$. Clairement

$$\mathbb{E}(f''(S_{i-1})X_iX_k) = \mathbb{E}(f''(S_j)X_iX_k) + \mathbb{E}((f''(S_{i-1}) - f''(S_j))X_iX_k) .$$

En appliquant à nouveau le lemme 1 et en notant que

$$|(f''(S_{i-1}) - f''(S_j))X_i| \leqq (k - i - 1)M^2 \|f'''\|_\infty ,$$

il vient:

$$|\mathbb{E}((f''(S_{i-1}) - f''(S_j))X_iX_k)| \leqq 2M^3 \|f'''\|_\infty (k - i - 1)\varphi_{k-i} . \tag{2.16}$$

Pour estimer l'espérance de $f''(S_j)X_iX_k$, nous allons majorer la covariance de $f''(S_j)$ avec X_iX_k. Clairement

$$\mathrm{Cov}(f''(S_j), X_iX_k) = \sum_{l=1}^{j} \mathrm{Cov}(f''(S_l) - f''(S_{l-1}), X_iX_k) ,$$

avec la convention que cette somme est nulle si $j = 0$. Appliquons le lemme 1 avec $\mathscr{A} = \mathscr{F}_l$ et $X = (X_i, X_k)$. Puisque les variables sont bornées par M, nous pouvons choisir $\mathscr{X} = [-M, M]^2$. La fonction $g(x_i, x_k) = (1 + M^{-2}x_ix_k)/2$ est donc dans $\Lambda(\mathscr{X}, d)$, et

$$\begin{aligned} &|\mathrm{Cov}(f''(S_l) - f''(S_{l-1}), X_iX_k)| \\ &\qquad \leqq 2M^2 \varphi_{l-i} \mathbb{E}(|f''(S_l) - f''(S_{l-1})|) \leqq 2M^3 \|f'''\|_\infty \varphi_{l-i} . \end{aligned} \tag{2.17}$$

En regroupant (2.15)–(2.17), nous obtenons alors:

$$\begin{aligned} &|\mathrm{Cov}(f'(S_i) - f'(S_{i-1}), X_k) - \mathbb{E}(f''(S_j))\mathbb{E}(X_iX_k)| \\ &\qquad \leqq 2M^3 \|f'''\|_\infty ((k - i)\varphi_{k-i} + \sum_{p=k-i}^{k-1} \varphi_p) , \end{aligned} \tag{2.18}$$

avec la convention que $S_p = 0$ pour $p \leqq 0$. Enfin, pour revenir à $f''(S_{k-1})$, on note que

$$|f''(S_j) - f''(S_{k-1})| \leqq 2M(k - i) \|f'''\|_\infty ,$$

ce qui, avec (2.1), entraîne que

$$|\mathbb{E}(f''(S_j) - f''(S_{k-1}))\mathbb{E}(X_iX_k)| \leqq 4M^3 \|f'''\|_\infty (k - i)\varphi_{k-i} . \tag{2.19}$$

En ajoutant (2.18) et (2.19) et en sommant sur i, nous avons donc:

(2.20)

$$|\mathbb{E}(f'(S_{k-1})X_k) - \mathbb{E}(f''(S_{k-1})) \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{E}(X_iX_k)| \leqq 8M^3 \|f'''\|_\infty \sum_{p=1}^{k-1} p\varphi_p .$$

Il suffit alors de regrouper la formule de Taylor (2.10) et les inégalités (2.11), (2.14) et (2.20) pour obtenir (2.7). Le lemme 6 est démontré.

Revenons à la preuve du théorème 2. Nous allons commencer par majorer Δ_k pour les petites valeurs de k. Supposons donc que $k < n - [n/3]$, où $[x]$ désigne la partie entière de x. Pour $i = 3$, une application du lemme 5 donne

$$\|f_k'''\|_\infty \leqq 4(\pi e)^{-1/2}(n-k+\varepsilon^2)^{-3/2}\,. \tag{2.21}$$

Donc le lemme 6 assure que, pour tout $\varepsilon \geqq 1$,

$$\sum_{k=n_0}^{n-[n/3]-1} |\Delta_k(f_k)| \leqq 40M^3 n^{-1/2} \sum_{p\geqq 0}(1+p)\varphi_p\,. \tag{2.22}$$

Nous sommes donc ramenés à la majoration des termes peu régularisés. Pour ces termes le contrôle du maximum de la dérivée cubique de f_k n'est pas suffisant pour majorer au mieux $\Delta_k(f_k)$. Pour améliorer cette majoration quand $k \geqq n - [n/3]$, nous allons utiliser le procédé d'accélération de la convergence de Bergström (1944).

2.2. *Le procédé d'accélération de la convergence de Bergström*

Pous améliorer les majorations des quantités qui sont apparues lors de la preuve du lemme 6, nous allons utiliser l'hypothèse de récurrence $\mathscr{H}(n)$, combinée avec les lemmes 3 et 4. Cette méthode conduit à la majoration suivante pour les grandes valeurs de k.

Proposition 1. *Supposons que $n \geqq 6n_0$. Posons*

$$\psi(n,\varepsilon) = \sum_{q=0}^{n} \frac{(1+q^2)\varphi_q}{\sqrt{q^2+\varepsilon^2}} \quad et \quad \psi(\varepsilon) = \lim_{n\to+\infty} \psi(n,\varepsilon)\,.$$

Alors il existe une constante universelle $c \geqq 1$ telle que, sous $\mathscr{H}(n)$,

$$\sqrt{n}\sum_{k=n-[n/3]}^{n} |\Delta_k(f_k)| \leqq cM^4(\psi(n,1)+A\psi(n,\varepsilon)) \leqq cM^4(\psi(1)+A\psi(\varepsilon))\,,$$

pourvu que $\varepsilon \geqq M$ et $A \geqq M \geqq 1$.

Avant de démontrer la proposition 1, nous allons finir la preuve du théorème 2.

Fin de la preuve du théorème 2. Soit $n \geqq 6n_0$. En réunissant (2.22) et la proposition 1, nous obtenons l'existence d'une constante positive $K \geqq M$ dépendant de M et de $\psi(1)$ telle que, sous $\mathscr{H}(n)$,

$$|\mathbb{P}(S_n + \varepsilon Y \leqq x) - \mathbb{P}(S_{n_0-1} + T_{n_0-1,n} \leqq x)| \leqq Kn^{-1/2}(1+A\psi(\varepsilon))$$

dès que $\varepsilon \geqq M$ et $A \geqq M$ (rappelons que $M \geqq 1$ par hypothèse). De plus, il est facile de montrer que, si T_n est une variable aléatoire de loi $N(0, V_n)$

indépendante de Y, alors

$$|\mathbb{P}(S_{n_0-1}+T_{n_0-1,n}\leqq x)-\mathbb{P}(T_n+\varepsilon Y\leqq x)|\leqq C(n_0M)^2n^{-1}$$

sous $\mathscr{H}(n)$. Par conséquent, quitte à modifier K, sous des contraintes identiques,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|\mathbb{P}(S_n+\varepsilon Y\leqq x)-\mathbb{P}(T_n+\varepsilon Y\leqq x)|<Kn^{-1/2}(1+A\psi(\varepsilon))\,.$$

Revenons à la fin de la preuve. Quand $A\geqq\sqrt{6n_0}$, l'hypothèse de récurrence est vraie au rang $6n_0$. Montrons alors que, pour $n\geqq 6n_0$, l'hypothèse $\mathscr{H}(n+1)$ est impliquée par $\mathscr{H}(n)$ si A est choisi convenablement. Appliquons le lemme 2 avec $\Delta=3\varepsilon$:

$$3\int_0^{\Delta/2\varepsilon}\phi(v)\,dv-1\geqq\frac{2}{7}\,.$$

Donc, sous $\mathscr{H}(n)$,

$$\mathrm{II}_n<n^{-1/2}7K(1+A\psi(\varepsilon))/2\,.$$

Comme $n\geqq 6n_0$, l'hypothèse (b) du théorème 2 assure que $V_n\geqq(n-n_0)/2\geqq n/3$ et donc la densité de T_n est uniformément majorée par $n^{-1/2}$. Donc $B=n^{-1/2}$ convient dans le lemme 2. Alors

$$\Delta=7K(1+A\psi(\varepsilon))/2\,.$$

Quand ε varie de 1 à l'infini, ψ décroit continûment de $\psi(1)$ à 0. Donc l'équation $\Delta=3\varepsilon$, qui équivaut à

$$(E)\qquad \psi(\varepsilon)=\frac{1}{A}\left(\frac{6}{7K}\varepsilon-1\right)\,,$$

a une unique solution $\varepsilon(A)$ dans $[7K/6,+\infty[$, et cette solution croit de $7K/6$ à l'infini quand A décrit $]0,+\infty[$. Pour montrer que, pour A assez grand, $\mathscr{H}(n)$ implique $\mathscr{H}(n+1)$, il suffit donc de montrer qu'il existe $A_0>0$ tel que $3\varepsilon(A)\leqq A$ dès que $A\geqq A_0$. Puisque $\varepsilon(A)$ décroit vers 0 quand A tend vers l'infini, il existe $A_0>0$ tel que $7KA\psi(\varepsilon)\leqq A$ pour $A\geqq A_0$. Si $A\geqq\sup(A_0,7K,6n_0)$, alors d'une part $\mathscr{H}(6n_0)$ est satisfaite, et d'autre part $3\varepsilon(A)=\Delta\leqq A$ et l'hypothèse $\mathscr{H}(n)$ implique alors $\mathscr{H}(n+1)$. Donc, par récurrence, $\mathscr{H}(n)$ est vraie pour $n\geqq 6n_0$.

Preuve de la proposition 1. Dans la suite, $k\geqq n-[n/3]$. Le lemme suivant donne des majorations des termes provenant de l'inégalité de covariance du lemme 1.

Lemme 7. *Supposons que $n\geqq 6n_0$. Soit $i>0$, $k\geqq n-[n/3]$ et l entier dans $[n/3,k]$. Soit $g_{k,i}=Q_M\cdot|f_k^{(i)}|$. Alors, il existe des constantes universelles positives c_i telles que, sous l'hypothèse de récurrence $\mathscr{H}(n)$ et avec les notations des lemmes* 3 *et* 4,

$$\text{(a)}\qquad \sup_{a\in\mathbb{R}}\mathbb{E}(g_{k,i}(S_l+a))\leqq c_in^{-1/2}(A(n-k+\varepsilon^2)^{-i/2}+(n-k+\varepsilon^2)^{(1-i)/2})$$

pourvu que $A\geqq M$, et

(b) $$\sup_{a\in\mathbb{R}} |\mathbb{E}(f_k^{(i)}(S_l+a))| \leqq c_i n^{-1/2}(A(n-k+\varepsilon^2)^{-i/2}+n^{(1-i)/2})\,.$$

Preuve. Appliquons le lemme 2 avec $X = S_l$ et $Y = T_l$. Puisque sous $\mathscr{H}(n)$, $\|f * G'\|_\infty \leqq \|f\|_1 \|G'\|_\infty$,

$$\mathbb{E}(g_{k,i}(S_l+a)) \leqq Al^{-1/2}V(g_{k,i}) + (2\pi V_l)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} g_{k,i}(x)\,dx\,. \tag{2.23}$$

Comme $n \geqq 6n_0$ et $l \geqq n/3$, l'hypothèse (b) du théorème 2 assure que $V_l \geqq n/12$. De plus, une application du lemme 4 donne

$$\int_{\mathbb{R}} g_{k,i}(x)\,dx \leqq V(f_k^{(i-1)}) + MV(f_k^{(i)}) \quad \text{et} \quad V(g_{k,i}) \leqq V(f_k^{(i)})\,.$$

Or la variation totale d'une fonction qui tend vers zero à l'infini est majorée par le double de la somme des valeurs absolues des ses extremas locaux. Quand $i > 0$, comme les zéros de $f_k^{(i+1)}$ sont les zéros d'un polynôme de degré i, nous en déduisons que

$$V(f_k^{(i)}) \leqq 2i\|f_k^{(i)}\|_\infty \leqq C_i(n-k+\varepsilon^2)^{-i/2} \tag{2.24}$$

par le lemme 5, C_i étant une constante ne dépendant que de i. Enfin, si $i = 0$, $V(f_k) = 1$. En partant de (2.23) et en introduisant les inégalités ci-dessus, nous obtenons donc:

$$\mathbb{E}(g_{k,i}(S_l+a)) \leqq 2n^{-1/2}(C_i(A+M)(n-k+\varepsilon^2)^{-i/2} + C_{i-1}(n-k+\varepsilon^2)^{(1-i)/2})\,,$$

ce qui établit (a).

Pour montrer (b), appliquons le lemme 3 à nouveau.

$$|\mathbb{E}(f_k^{(i)}(S_l+a))| \leqq Al^{-1/2}V(f_k^{(i)}) + \|(G * f_k)^{(i+1)}\|_\infty\,. \tag{2.25}$$

En faisant porter les dérivations sur G dans le produit de convolution et en notant que $\|f_k\|_\infty = 1$, il vient:

$$\|(G * f_k)^{(i+1)}\|_\infty \leqq \|G^{(i+1)}\|_1 \leqq 2i \sup_{x\in\mathbb{R}} |G^{(i)}(x)| \leqq C_i(2/V_l)^{i/2}\,,$$

ce qui, combiné avec (2.24) et (2.25), implique (b).

Appliquons maintenant (2.6) suivi de (b) du lemme 7 à $\Delta_{2,k}(f_k)$. Nous obtenons:

$$|\Delta_{2,k}(f_k)| \leqq 8\psi(n,1)M^3 n^{-1/2}(A(n-k+\varepsilon^2)^{-3/2} + n^{-1})\,. \tag{2.26}$$

Cette majoration est analogue à celle obtenue par Bergström (1944). Dans le cas des variables indépendantes, S_{k-1} et X_k sont indépendantes, et donc $|\Delta_{1,k}(f_k)|$ se majore par la même méthode. Malheureusement, pour les suites de variables dépendantes, une application directe de la méthode de Bergström ne permet pas d'obtenir une vitesse de convergence dans le TLC de l'ordre de $n^{-1/2}$. En effet, même sous des hypothèses sur l'espérance conditionnelle et la variance conditionnelle de X_k sachant S_{k-1}, la formule de Taylor à l'ordre trois conduit à une vitesse de l'ordre de $n^{-1/2}\log n$ pour des variables uniformément bornées [voir Bolthausen (1982a)]. Cette remarque justifie un développement à l'ordre quatre pour les suites de variables faiblement dépendantes.

Appliquons la formule de Taylor à l'ordre quatre:

$$\Delta_{1,k}(f_k) = \mathbb{E}(f'_k(S_{k-1})X_k) + \tfrac{1}{2}\mathbb{E}(f''_k(S_{k-1})(X_k^2 - v_k)) + \tfrac{1}{6}\mathbb{E}(f'''_k(S_{k-1})X_k^3) + \mathbb{E}(R_k)\,,$$

où

$$(2.27)\qquad |R_k| \leqq \tfrac{1}{24} g_{k,4}(S_{k-1})X_k^4 \leqq \tfrac{1}{24} g_{k,4}(S_{k-1})M^4\,.$$

Majoration du reste d'ordre quatre. (2.27) suivi d'une application de (a) du lemme 7 donne:

$$|\mathbb{E}(R_k)| \leqq \frac{c_4}{24}(A+\varepsilon^{-1})M^4 n^{-1/2}(n-k+\varepsilon^2)^{-3/2} \leqq \frac{c_4}{12} AM^4 n^{-1/2}(n-k+\varepsilon^2)^{-3/2}$$

si $\varepsilon \geqq 1$ et $A \geqq M \geqq 1$. En sommant en k, nous en déduisons que

$$(2.28)\qquad \sum_{k=n-[n/3]}^{n} |R_k| \leqq c_4 M^4 A \varepsilon^{-1} n^{-1/2}\,.$$

Majoration des termes d'ordre deux et trois. Afin de revenir à une situation identique à celle du cas indépendant, nous allons majorer les quantités $|\mathrm{Cov}(f'''_k(S_{k-1}), X_k^3)|$ et $|\mathrm{Cov}(f''_k(S_{k-1}), X_k^2)|$. Soit donc i égal à 2 ou à 3. k étant fixé, posons $l = [(n-k)^{1/2}]$. Clairement

$$(2.29)\qquad f_k^{(i)}(S_{k-1}) = f_k^{(i)}(S_{k-l-1}) + \sum_{j=1}^{l} (f_k^{(i)}(S_{k-j}) - f_k^{(i)}(S_{k-j-1}))\,.$$

Par la formule de Taylor

(2.30)

$$f_k^{(i)}(S_{k-j}) - f_k^{(i)}(S_{k-j-1}) = X_{k-j} f_k^{(i+1)}(S_{k-j-1}) + X_{k-j}^2 \int_0^1 (1-v) f_k^{(i+2)}(S_{k-j-1} + vX_{k-j})\,dv\,.$$

En appliquant le lemme 1 avec $X = X_k$, $g(x) = (x^i + M^i)/4M^i$ et $\mathscr{A} = \mathscr{F}_{k-j}$, il vient:

$$(2.31)\quad |\mathrm{Cov}(f_k^{(i+2)}(S_{k-j-1} + vX_{k-j})X_{k-j}^2, X_k^i)| \leqq 4M^{i+2}\varphi_j \mathbb{E}(g_{k,i+2}(S_{k-j}))\,.$$

Comme $j \leqq (n-k)^{1/2}$, nous pouvons appliquer (a) du lemme 7. Par conséquent

$$(2.32)\qquad |\mathrm{Cov}(f_k^{(i+2)}(S_{k-j-1} + vX_{k-j})X_{k-j}^2, X_k^2)| \leqq 4c_{i+2}M^{i+2}\varphi_j A n^{-1/2}(n-k+\varepsilon^2)^{-(1+i)/2}\,,$$

pourvu que $A \geqq M \geqq 1$ et $\varepsilon \geqq 1$.

Pour majorer les termes provenant des dérivées d'ordre $i+1$, nous écrivons à nouveau
(2.33)
$$f_k^{(i+1)}(S_{k-j-1}) = \sum_{m=j+1}^{l} (f_k^{(i+1)}(S_{k-m}) - f_k^{(i+1)}(S_{k-m-1})) + f_k^{(i+1)}(S_{k-l-1}) .$$

Nous allons maintenant appliquer le lemme 1 ainsi.

Si $j \geqq m-j$, nous prenons $X = X_k$, $g(x) = (x^i + M^i)/4M^i$ et $\mathscr{A} = \mathscr{F}_{k-j}$, comme précédemment. Alors
(2.34)
$$|\mathrm{Cov}((f_k^{(i+1)}(S_{k-m}) - f_k^{(i+1)}(S_{k-m-1}))X_{k-j}, X_k^i)| \leqq 4M^{i+2}\varphi_j \mathbb{E}(g_{k,i+2}(S_{k-j})) ,$$

ce qui conduit à un majorant identique à celui de l'inégalité (2.33).

Si maintenant $m > 2j$, nous appliquons le lemme 1 à

$$Y = f_k^{(i+1)}(S_{k-m}) - f_k^{(i+1)}(S_{k-m-1}) \quad \text{et} \quad X = (X_{k-j}, X_k) .$$

En choisissant $\mathscr{A} = \mathscr{F}_{k-m}$ et $g(x_{k-j}, x_k) = x_{k-j}(x_k^i - \mathbb{E}(X_k^i))/4M^{i+1} + 1/2$, nous obtenons

$$(2.35) \qquad |\mathrm{Cov}(f_k^{(i+1)}(S_{k-m}) - f_k^{(i+1)}(S_{k-m-1}), X_{k-j}(X_k^i - \mathbb{E}(X_k^i)))| \\ \leqq 4M^{i+2}\varphi_{j-m}\mathbb{E}(g_{k,i+2}(S_{k-m})) .$$

En procédant de même pour le terme résiduel $\mathrm{Cov}(f_k^{(i+1)}(S_{k-l-1})X_{k-j}, X_k^i)$, nous obtenons les majorations suivantes. Si $l < 2j$,

$$(2.36) \qquad |\mathrm{Cov}(f_k^{(i+1)}(S_{k-l-1})X_{k-j}, X_k^i)| \leqq 4M^{i+1}\varphi_j \mathbb{E}(g_{k,i+1}(S_{k-l-1})) ,$$

et si $l \geqq 2j$,
(2.37)
$$|\mathrm{Cov}(f_k^{(i+1)}(S_{k-l-1}), X_{k-j}(X_k^2 - \mathbb{E}(X_k^2)))| \leqq 4M^{i+1}\varphi_{l+1-j}\mathbb{E}(g_{k,i+1}(S_{k-l-1})) ,$$

En sommant en m dans (2.34) et (2.35) et en ajoutant (2.36) et (2.37), nous en déduisons que

$$(2.38) \qquad |\mathrm{Cov}(f_k^{(i+1)}(S_{k-j-1})X_{k-j}, X_k^2)| \\ \leqq 4M^{i+2}\sum_{m=j+1}^{l}(\varphi_j \wedge \varphi_{m-j})\mathbb{E}(g_{k,i+2}(S_{k-m})) \\ + 4M^{i+1}(\varphi_j \wedge \varphi_{l+1-j})\mathbb{E}(g_{k,i+1}(S_{k-l-1})) \\ + \mathbb{1}_{2j \leqq l}|\mathbb{E}(f_k^{(i+1)}(S_{k-2j}))\mathrm{Cov}(X_{k-j}, X_k^2)| .$$

Ajoutons maintenant (2.31) et appliquons l'inégalité (a) du lemme 7 aux deux premiers termes du majorant et (b) du lemme 7 au dernier terme du majorant.

Puisque, d'après le lemme 1, $|\mathrm{Cov}(X_{k-j}, X_k^i)| \leqq 4M^{i+1}\varphi_j$, nous obtenons:

$$\begin{aligned}(2.39)\qquad &\frac{\sqrt{n}}{CM^{i+1}}|\mathrm{Cov}(f_k^{(i)}(S_{k-j}) - f_k^{(i)}(S_{k-j-1}), X_k^i)| \\ &\leqq AM(n-k+\varepsilon^2)^{(-1-i)/2}\sum_{m=j}^{l}(\varphi_j \wedge \varphi_{m-j}) \\ &+ A(\varphi_j \wedge \varphi_{l+1-j})(n-k+\varepsilon^2)^{-i/2} \\ &+ \varphi_j(A(n-k+\varepsilon^2)^{(-1-i)/2} + n^{-i/2}),\end{aligned}$$

pourvu que $A \geqq M \geqq 1$ et $\varepsilon \geqq 1$, C étant une constante universelle (dans la suite, C sera une constante différente à chaque ligne). En sommant (2.39) en j, on a donc montré que

$$\begin{aligned}(2.40)\qquad &\frac{\sqrt{n}}{CM^{i+1}}|\mathrm{Cov}(f_k^{(i)}(S_{k-1}) - f_k^{(i)}(S_{k-l-1}), X_k^i)| \\ &\leqq A(n-k+\varepsilon^2)^{(1-i)/2}\varphi_{[(l+1)/2]} \\ &+ AM(n-k+\varepsilon^2)^{(-i-1)/2}\sum_{j=1}^{l} j\varphi_j + n^{-i/2}\sum_{j=1}^{l}\varphi_j\,.\end{aligned}$$

Enfin une application du lemme 1 ainsi que (a) du lemme 7 montrent que, sous l'hypothèse de récurrence,

$$(2.41)\qquad |\mathrm{Cov}(f_k''(S_{k-l-1}), X_k^i)| \leqq CM^{i+1}n^{-1/2}A\varphi_l(n-k+\varepsilon^2)^{(1-i)/2},$$

ce qui assure que ce terme est de l'ordre du premier terme du majorant de (2.40). Posons $l = [(n-k)^{1/2}]$. Quand $\varepsilon \geqq M$, $M(n-k+\varepsilon^2)^{-1/2} \leqq 1$. Le terme d'ordre trois et le terme d'ordre deux ont alors le majorant commun suivant:

$$\begin{aligned}(2.42)\qquad &\frac{\sqrt{n}}{CM^4}|\mathrm{Cov}(f_k^{(i)}(S_{k-1}), X_k^i)| \leqq A(n-k+\varepsilon^2)^{-1/2}\varphi_{[(l+1)/2]} \\ &+ A(n-k+\varepsilon^2)^{-3/2}\sum_{j=1}^{l} j\varphi_j + n^{-1}\sum_{j=1}^{l}\varphi_j\,.\end{aligned}$$

Pour finir le calcul, on totalise en $(n-k)$ et on intervertit les sommations, ce qui donne

$$(2.43)\qquad \sum_{k=n-[n/3]}^{n}|\mathrm{Cov}(f_k^{(i)}(S_{k-1}), X_k^i)| \leqq CM^4 n^{-1/2}\left(\sum_{p=1}^{[n^{1/2}]}\varphi_p + A\sum_{p=1}^{[n^{1/2}]}\frac{p\varphi_p}{\sqrt{p^2+\varepsilon^2}}\right).$$

Pour conclure, on note que, d'après (b) du lemme 7

$$(2.44)\qquad |\mathbb{E}(f_k'''(S_{k-1}))\mathbb{E}(X_k^3)| \leqq CM^3 n^{-1/2}(A(n-k+\varepsilon^2)^{-3/2} + n^{-1}).$$

Donc, en sommant (2.44) en $(n-k)$ et en ajoutant (2.43), on a montré que

$$(2.45)\qquad \sum_{k=n-[n/3]}^{n} (|\mathbb{E}(f_k'''(S_{k-1})X_k^3)| + |\operatorname{Cov}(f_k''(S_{k-1}),X_k^2)|) \leqq CM^4 n^{-1/2} \sum_{p=0}^{[n^{1/2}]} \left(\varphi_p + A\frac{(1+p)\varphi_p}{\sqrt{p^2+\varepsilon^2}}\right).$$

Majoration du terme principal. Il reste à estimer le terme d'ordre un, qui est égal à

$$(2.46)\qquad D_k = \operatorname{Cov}(f_k'(S_{k-1}),X_k) - \mathbb{E}(f_k''(S_{k-1}))\sum_{i=1}^{k-1}\mathbb{E}(X_iX_k).$$

Comme précédemment, on pose $l = [(n-k)^{1/2}]$. Clairement,

$$(2.47)\qquad f_k'(S_{k-1}) = f_k'(S_{k-l-1}) + \sum_{j=1}^{l}(f_k'(S_{k-j}) - f_k'(S_{k-j-1})).$$

Par la formule de Taylor

$$(2.48)\qquad f_k'(S_{k-j}) - f_k'(S_{k-j-1}) = X_{k-j}f_k''(S_{k-j-1}) + X_{k-j}^2 f_k'''(S_{k-j-1}) + X_{k-j}^3\int_0^1 (1-v)^2 f_k^{(4)}(S_{k-j-1}+vX_{k-j})\,dv.$$

Les covariances des deux derniers termes de la formule de Taylor ci-dessus avec X_k se majorent exactement comme les termes d'ordre deux de l'égalité (2.30), ce qui conduit à une majoration identique à celle de (2.42).

Afin de majorer D_k, nous allons maintenant approcher $\operatorname{Cov}(f_k''(S_{k-j-1})X_{k-j},X_k)$ par $\mathbb{E}(f''(S_{k-1}))\mathbb{E}(X_{k-j}X_k)$. Clairement

$$(2.49)\qquad f_k''(S_{k-j-1}) = \sum_{m=j+1}^{l}(f_k''(S_{k-m}) - f_k''(S_{k-m-1})) + f_k''(S_{k-l-1}).$$

Afin d'évaluer les termes de la somme glissante, on applique la formule de Taylor à l'ordre deux:

$$(2.50a)\qquad f_k''(S_{k-m}) - f_k''(S_{k-m-1}) = f_k'''(S_{k-m-1})X_{k-m} + R_{k,m}$$

avec

$$(2.50b)\qquad R_{k,m} = X_{k-m}^2\int_0^1 (1-v)f_k^{(4)}(S_{k-m-1}+vX_{k-m})\,dv.$$

Majorons maintenant les erreurs provenant des restes intégraux. Comme dans la majoration du terme d'ordre deux, on distingue deux cas: $m > 2j$ et $m \leqq 2j$. Cependant, contrairement à ce qui se passe pour le terme d'ordre deux, les termes provenant du cas $m > 2j$ contribuent à l'approximation de la quantité

$\mathrm{Cov}(f_k'(S_{k-1}), X_k)$ par le second terme de D_k. Aussi la majoration obtenue est de la forme suivante:

$$\left|\sum_{m=j+1}^{l} \mathbb{E}(R_{k,m}X_{k-j}X_k) - \sum_{m=2j+1}^{l} \mathbb{E}(R_{k,m})\mathbb{E}(X_{k-j}X_k)\right| \leqq CM^4\left(\sum_{m=j+1}^{l} \varphi_{m-j} \wedge \varphi_j\right) An^{-1/2}(n-k+\varepsilon^2)^{-3/2}, \tag{2.51}$$

avec la convention $\Sigma_{i=t}^{s} a_i = 0$ si $t > s$. Pour revenir à une somme allant de $j+1$ à l dans le second terme à gauche, on note alors que, d'après (a) du lemme 7,

$$|\mathbb{E}(R_{k,m})| \leqq CM^2 An^{-1/2}(n-k+\varepsilon^2)^{-3/2}. \tag{2.52}$$

Donc, en appliquant (2.1), nous obtenons:

$$\left|\sum_{m=j+1}^{l} \mathbb{E}(R_{k,m}X_{k-j}X_k) - \sum_{m=j+1}^{l} \mathbb{E}(R_{k,m})\mathbb{E}(X_{k-j}X_k)\right| \leqq CM^4\left(j\varphi_j + \sum_{m=j+1}^{l} \varphi_{m-j} \wedge \varphi_j\right) An^{-1/2}(n-k+\varepsilon^2)^{-3/2}. \tag{2.53}$$

Regardons maintenant le terme principal. Pour revenir à des termes d'ordre quatre, nous allons à nouveau l'écrire sous la forme d'une somme glissante. Clairement

$$f_k'''(S_{k-m-1})X_{k-m} = \sum_{p=m+1}^{l} (f_k'''(S_{k-p}) - f_k'''(S_{k-p-1}))X_{k-m} + f_k'''(S_{k-l-1})X_{k-m}. \tag{2.54}$$

Nous allons maintenant appliquer le lemme 1 au produit

$$(f_k'''(S_{k-p}) - f_k'''(S_{k-p-1}))X_{k-m}X_{k-j}X_k .$$

Afin de minimiser le reste, ce lemme sera appliqué là où l'espacement entre les variables est le plus important. Nous suivons en cela la méthode proposée par Doukhan et Portal (1983) pour obtenir des inégalités de moment de type Rosenthal [voir aussi Doukhan (1994)]. Nous allons donc séparer suivant les différentes configurations possibles.

Premier cas: $p - m > m$. Afin d'optimiser les termes provenant du lemme 1, nous allons l'appliquer à $X = (X_{k-m}, X_{k-j}, X_k)$ et $Y = f_k'''(S_{k-p}) - f_k'''(S_{k-p-1})$. Nous reviendrons ensuite à

$$\mathrm{Cov}((f_k'''(S_{k-p}) - f_k'''(S_{k-p-1}))X_{k-m}, X_{k-j}X_k)$$

en notant que, si S, U, V et W sont des variables aléatoires bornées, alors

$$\mathrm{Cov}(SU, VW) - \mathbb{E}(S)\mathbb{E}(UVW) = \mathrm{Cov}(S, UVW) - \mathbb{E}(SU)\mathbb{E}(VW). \tag{2.55}$$

Ici nous prendrons $S = f_k'''(S_{k-p}) - f_k'''(S_{k-p-1})$, $U = X_{k-m}$, $V = X_{k-j}$ et $W = X_k$. Pour majorer le premier terme, appliquons le lemme 1 à $Y = S$, $X = (U, V, W)$, $g(u, v, w) = uvw/(3M^3) + 1/2$ et $\mathscr{A} = \mathscr{F}_{k-m}$. Il vient:

$$|\operatorname{Cov}(S, X_{k-m}X_{k-j}X_k)| \leqq 3M^3\varphi_{p-m}\mathbb{E}(|S|)\,. \tag{2.56}$$

Pour majorer le dernier terme, on note que, d'après (2.1), $|\mathbb{E}(X_{k-j}X_k)| \leqq 2M^2\varphi_j$, et que, d'après le lemme 1, $|\mathbb{E}(SX_{k-m})| \leqq 2M\varphi_{p-m}\mathbb{E}(|S|)$. Donc

$$|\mathbb{E}(SX_{k-m})\mathbb{E}(X_{k-j}X_k)| \leqq 4M^3\varphi_{p-m}\mathbb{E}(|S|)\,. \tag{2.57}$$

En rentrant les inégalités (2.56) et (2.57) dans (2.55) et en notant que

$$|S| \leqq Mg_{k,4}(S_{k-p})\,, \tag{2.58}$$

nous avons donc montré que:

(2.59)

$$|\operatorname{Cov}(SX_{k-m}, X_{k-j}X_k) - \mathbb{E}(S)\mathbb{E}(X_{k-m}X_{k-j}X_k)| \leqq 7M^4\varphi_{p-m}\mathbb{E}(g_{k,4}(S_{k-p}))\,,$$

où $S = f_k'''(S_{k-p}) - f_k'''(S_{k-p-1})$. De même, si $l - m \geqq m$ et $S' = f_k'''(S_{k-l-1})$,

(2.60)

$$|\operatorname{Cov}(S'X_{k-m}, X_{k-j}X_k) - \mathbb{E}(S')\mathbb{E}(X_{k-m}X_{k-j}X_k)| \leqq 7M^3\varphi_{l+1-m}\mathbb{E}(g_{k,3}(S_{k-l-1}))\,.$$

Fixons m et j, et sommons sur les entiers p tels que $p - m > m$. Quand $l - m \geqq m$, (2.59) et (2.60) suivis d'une application de (a) du lemme 7 assurent que

(2.61)

$$|\operatorname{Cov}(f_k'''(S_{k-2m-1})X_{k-m}, X_{k-j}X_k) - \mathbb{E}(f_k'''(S_{k-2m-1}))\mathbb{E}(X_{k-m}X_{k-j}X_k)|$$

$$\leqq CAM^3n^{-1/2}\left(M(n-k+\varepsilon^2)^{-3/2}\sum_{p=2m+1}^{l}\varphi_{p-m} + (n-k+\varepsilon^2)^{-1}\varphi_{l+1-m}\right),$$

pourvu que $A \geqq M$ et $\varepsilon \geqq 1$.

Pour contrôler le second terme à gauche, nous allons majorer l'espérance de $UVW = X_{k-m}X_{k-j}X_k$ ainsi. Si $m - j > j$, nous appliquons le lemme 1 à $X = (V, W)$, $Y = U = X_{k-m}$. Alors $\mathscr{A} = \mathscr{F}_{k-m}$ et $g(v, w) = vw/(2M^2) + 1/2$. Dans le cas contraire, nous appliquons le lemme 1 à $X = W$, $Y = UV$. Nous obtenons donc:

$$|\mathbb{E}(X_{k-m}X_{k-j}X_k)| \leqq 2M^3(\varphi_{m-j} \wedge \varphi_j)\,. \tag{2.62}$$

Donc, en appliquant (b) du lemme 7, il vient:

$$\begin{aligned} &|\mathbb{E}(f_k'''(S_{k-2m-1}))\mathbb{E}(X_{k-m}X_{k-j}X_k)| \\ &\quad \leqq CM^3n^{-1/2}(\varphi_{m-j} \wedge \varphi_j)(n^{-1} + A(n-k+\varepsilon^2)^{-3/2})\,. \end{aligned} \tag{2.63}$$

(2.63) et (2.61) entraînent donc que

$$(2.64)\quad |\mathrm{Cov}(f_k'''(S_{k-2m-1})X_{k-m}, X_{k-j}X_k)| \leqq CM^3 n^{-3/2}(\varphi_{m-j} \wedge \varphi_j) + CAM^3 n^{-1/2} \times \left(M(n-k+\varepsilon^2)^{-3/2} \sum_{p=2m+1}^{l} \varphi_{p-m} + (n-k+\varepsilon^2)^{-1}\varphi_{l+1-m} \right).$$

Second cas: $p - m < m + 1$. Nous allons distinguer deux sous-cas. Supposons dans un premier temps que $m - j \leqq j$. Alors, d'après le lemme 1 appliqué à

$$Y = (f_k'''(S_{k-p}) - f_k'''(S_{k-p-1}))X_{k-m}X_{k-j} \quad \text{et} \quad X = X_k\,,$$

nous avons:

$$(2.65)\quad |\mathbb{E}((f_k'''(S_{k-p}) - f_k'''(S_{k-p-1}))X_{k-m}X_{k-j}X_k)| \leqq CAM^4 n^{-1/2}(n-k+\varepsilon^2)^{-3/2}\varphi_j\,.$$

En appliquant (2.1), nous en déduisons que, quitte à doubler C,

$$(2.66)\quad |\mathrm{Cov}((f_k'''(S_{k-p}) - f_k'''(S_{k-p-1}))X_{k-m}, X_{k-j}X_k)| \leqq CAM^4 n^{-1/2}(n-k+\varepsilon^2)^{-3/2}\varphi_j\,.$$

Quand $m \geqq 2j + 1$, d'après le lemme 1 appliqué à

$$Y = (f_k'''(S_{k-p}) - f_k'''(S_{k-p-1}))X_{k-m} \quad \text{et} \quad X = (X_{k-j}, X_k)\,,$$

suivi de (2.58) et de (a) du lemme 7,

$$(2.67)\quad |\mathrm{Cov}((f_k'''(S_{k-p}) - f_k'''(S_{k-p-1}))X_{k-m}, X_{k-j}X_k)| \leqq CAM^4 n^{-1/2}(n-k+\varepsilon^2)^{-3/2}\varphi_{m-j}\,.$$

En réunissant (2.66) et (2.67), nous avons donc montré l'analogue suivant de (2.61):

$$(2.68)\quad |\mathrm{Cov}((f_k'''(S_{k-p}) - f_k'''(S_{k-p-1}))X_{k-m}, X_{k-j}X_k)| \leqq CAM^4 n^{-1/2}(n-k+\varepsilon^2)^{-3/2}(\varphi_{m-j} \wedge \varphi_j)\,.$$

Des arguments similaires montrent que, si $l - m < m$,

$$(2.69)\quad |\mathrm{Cov}(f_k'''(S_{k-l-1})X_{k-m}, X_{k-j}X_k)| \leqq CAM^3 n^{-1/2}(n-k+\varepsilon^2)^{-1}(\varphi_{m-j} \wedge \varphi_j)\,.$$

Revenons à p quelconque. Si $l - m < m$ nous sommons (2.68) sur les entiers p dans $[m+1, l]$ et nous ajoutons (2.69). Si $l - m \geqq m$, nous sommons (2.68) sur les entiers p dans $[m+1, 2m]$ et nous ajoutons (2.64). Nous obtenons ainsi:

$$(2.70)\quad \frac{\sqrt{n}}{CM^3}|\mathrm{Cov}(f_k'''(S_{k-m-1})X_{k-m}, X_{k-j}X_k)|$$
$$\leqq (\varphi_{m-j} \wedge \varphi_j)(n^{-1} + AM(n-k+\varepsilon^2)^{-3/2})$$
$$+ AM(n-k+\varepsilon^2)^{-3/2} \sum_{p=2m+1}^{l} \varphi_{p-m} + A(n-k+\varepsilon^2)^{-1}\varphi_{1+[l/4]}\,.$$

Pour revenir aux dérivées secondes, il suffit alors de sommer en m dans (2.70), et d'introduire conjointement (2.53) et l'inégalité ainsi obtenue dans (2.49) et (2.50), ce qui donne:

$$(2.71)\quad \frac{\sqrt{n}}{CM^3}|\mathrm{Cov}(f_k''(S_{k-j-1}) - f_k''(S_{k-l-1}), X_{k-j}X_k)|$$
$$\leqq n^{-1}\left(j\varphi_j + \sum_{q=j+1}^{l} \varphi_q\right) + AM(n-k+\varepsilon^2)^{-3/2} \sum_{q=1}^{l} q(\varphi_j \wedge \varphi_q)$$
$$+ A(n-k+\varepsilon^2)^{-1} l\varphi_{1+[l/4]}\,.$$

Enfin il est facile de montrer à l'aide du lemme 1 et de (a) du lemme 7 que

$$(2.72)\quad |\mathrm{Cov}(f_k''(S_{k-l-1}), X_{k-j}X_k)| \leqq CM^2 n^{-1/2} A(\varphi_{l+1-j} \wedge \varphi_j)(n-k+\varepsilon^2)^{-1/2}\,.$$

Comme $l \leqq (n-k)^{1/2} \leqq (n-k+\varepsilon^2)^{1/2}$, nous obtenons finalement, en ajoutant (2.71) et (2.72),

$$(2.73)\quad \frac{\sqrt{n}}{CM^3}|\mathrm{Cov}(f_k''(S_{k-j-1}), X_{k-j}X_k)|$$
$$\leqq n^{-1} \sum_{q=1}^{l} (\varphi_j \wedge \varphi_q) + AM(n-k+\varepsilon^2)^{-3/2} \sum_{q=1}^{l} q(\varphi_j \wedge \varphi_q)$$
$$+ A(n-k+\varepsilon^2)^{-1}\varphi_{1+[l/4]}\,.$$

Pour conclure cette partie de la majoration, regardons maintenant l'erreur commise en remplaçant $\mathbb{E}(f_k''(S_{k-j-1}))\mathbb{E}(X_{k-j}X_k)$ par $\mathbb{E}(f_k''(S_{k-1}))\mathbb{E}(X_{k-j}X_k)$.

Comme dans (2.49), nous écrivons:

$$(2.74)\qquad f_k''(S_{k-1} - f_k''(S_{k-j-1})) = \sum_{m=1}^{j} (f_k''(S_{k-m}) - f_k''(S_{k-m-1}))\,.$$

Afin d'évaluer les termes de la somme glissante, on applique (2.50). Le reste $R_{k,m}$ se majore à l'aide de (2.52). Pour majorer les termes principaux, on utilise la décomposition (2.54). Avec les notations de (2.56) et (2.60), nous sommes alors ramenés aux majorations de $|\mathrm{Cov}(S, X_{k-m})|$ et de $|\mathrm{Cov}(S', X_{k-m})|$. Comme auparavant, il suffit alors d'appliquer le lemme 1 et (a) du lemme 7 pour obtenir la majoration suivante:

$$\text{(2.75)}\quad \frac{\sqrt{n}}{ACM}|\mathrm{Cov}(f_k'''(S_{k-m-1}), X_{k-m})| \leqq M(n-k+\varepsilon^2)^{-3/2}\sum_{p=m+1}^{l}\varphi_{p-m} + (n-k+\varepsilon^2)^{-1}\varphi_{l+1-m}\,,$$

pourvu que $A \geqq M$ et $\varepsilon \geqq 1$. En ajoutant (2.52) et en sommant sur m, nous en déduisons que

$$\text{(2.76)}\quad \frac{\sqrt{n}}{ACM}|\mathbb{E}(f_k''(S_{k-1} - f_k''(S_{k-j-1}))| \leqq jM(n-k+\varepsilon^2)^{-3/2}\sum_{q=1}^{l}\varphi_q + j(n-k+\varepsilon^2)^{-1}\varphi_{l+1-j}\,.$$

En multipliant l'inégalité (2.76) par l'inégalité (2.1), puis en notant que $\varphi_j\varphi_q \leqq (\varphi_j \wedge \varphi_q)$ et $j\varphi_j\varphi_{l+1-j} \leqq l\varphi_{1+[l/4]}$, il vient:

$$\text{(2.77)}\quad \frac{\sqrt{n}}{CM^3}|\mathbb{E}(f_k''(S_{k-j-1}) - f_k''(S_{k-1}))\mathbb{E}(X_{k-j}X_k)| \leqq AM(n-k+\varepsilon^2)^{-3/2}\sum_{q=1}^{l} j(\varphi_j \wedge \varphi_q) + A(n-k+\varepsilon^2)^{-1/2}\varphi_{1+[l/4]}\,.$$

Pour finir, nous ajoutons (2.77) à (2.73), ce qui donne:

$$\text{(2.78)}\quad \frac{\sqrt{n}}{CM^3}|\mathbb{E}(f_k''(S_{k-j-1})X_{k-j}X_k) - \mathbb{E}(f_k''(S_{k-1}))\mathbb{E}(X_{k-j}X_k)| \leqq n^{-1}\sum_{q=1}^{l}(\varphi_j \wedge \varphi_q) + AM(n-k+\varepsilon^2)^{-3/2}\sum_{q=1}^{l}(j+q)(\varphi_j \wedge \varphi_q) + A(n-k+\varepsilon^2)^{-1/2}\varphi_{1+[l/4]}\,.$$

Nous revenons alors à $f_k'(S_{k-j}) - f_k'(S_{k-j-1})$ à l'aide de la formule de Taylor (2.48), ce qui donne:

$$\text{(2.79)}\quad \frac{\sqrt{n}}{CM^4}|\mathbb{E}((f_k'(S_{k-j}) - f_k'(S_{k-j-1}))X_k) - \mathbb{E}(f_k''(S_{k-1}))\mathbb{E}(X_{k-j}X_k)| \leqq n^{-1}\sum_{q=1}^{1}(\varphi_j \wedge \varphi_q) + A(n-k+\varepsilon^2)^{-3/2}\sum_{q=1}^{l}(j+q)(\varphi_j \wedge \varphi_q) + A(n-k+\varepsilon^2)^{-1/2}\varphi_{1+[l/4]}\,.$$

Afin de revenir à D_k nous devons encore majorer $\mathbb{E}(f_k'(S_{k-l-1})X_k)$ d'une part et le produit $\mathbb{E}(f_k''(S_{k-1}))\Sigma_{j>1}\mathbb{E}(X_{k-j}X_k)$ d'autre part. Majorons le premier terme. En appliquant le lemme 1 et ensuite (a) du lemme 7 avec $i = 1$,

(2.80)
$$\begin{aligned}|\mathbb{E}(f_k'(S_{k-l-1})X_k)| &\leqq 2M\varphi_{l+1}\mathbb{E}(g_{k,1}(S_{k-l-1}))\\ &\leqq 2CMn^{-1/2}\varphi_{l+1}(A(n-k+\varepsilon^2)^{-1/2}+1)\,.\end{aligned}$$

Pour majorer le second terme, notons en premier que, d'après (a) du lemme 7, sous l'hypothèse de récurrence,

$$|\mathbb{E}(f_k''(S_{k-1}))| \leqq Cn^{-1} + CAn^{-1/2}(n-k+\varepsilon^2)^{-1/2}\,.$$

Secondement, d'après (2.1),

$$\sum_{j>l} |\mathbb{E}(X_{k-j}X_k)| \leqq 2M^2 \sum_{p=l+1}^{n} \varphi_p\,.$$

Donc

(2.81)
$$\begin{aligned}&|\mathbb{E}(f_k''(S_{k-1}))| \sum_{j>l} |\mathbb{E}(X_{k-j}X_k)|\\ &\qquad\leqq CM^2n^{-1/2}(A(n-k+\varepsilon^2)^{-1/2}+n^{-1/2}) \sum_{p=l+1}^{n} \varphi_p\,.\end{aligned}$$

En sommant (2.79) sur les entiers j dans $[1, l]$ et en ajoutant (2.80) et (2.81), nous obtenons:

(2.82)
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{n}}{CM^4}|D_k| \leqq{}& \varphi_l + n^{-1/2}\sum_{p=l+1}^{n}\varphi_p + n^{-1}\sum_{q=1}^{n} q\varphi_q + A(n-k+\varepsilon^2)^{-1/2}\\ &\times\left(l\varphi_{1+[l/4]} + \sum_{p=l+1}^{n}\varphi_p\right) + A(n-k+\varepsilon^2)^{-3/2}\sum_{q=1}^{l} q^2\varphi_q\,,\end{aligned}$$

où $l = l(k) = [\sqrt{n-k}]$. Pour conclure, nous devons sommer (2.82) sur les entiers k compris entre $n - [n/3]$ et n. Notons d'abord que

$$\sum_{k=n-[n/3]}^{n} \varphi_{l(k)} \leqq \sum_{l=0}^{n}(1+2l)\varphi_l$$

et que

$$n^{-1/2}\sum_{k=n-[n/3]}^{n}\ \sum_{p=l(k)+1}^{n}\varphi_p \leqq n^{-1/2}\sum_{k=n-[n/3]}\ \sum_{p=1}^{n}\frac{p\varphi_p}{l(k)+1} \leqq 2\sum_{p=1}^{n} p\varphi_p\,.$$

Par conséquent

(2.83)
$$\sum_{k=n-[n/3]}^{n}\left(\varphi_{l(k)} + n^{-1/2}\sum_{p=l(k)+1}^{n}\varphi_p + n^{-1}\sum_{q=1}^{n}q\varphi_q\right) \leqq 5\sum_{q=0}^{n}(1+q)\varphi_q\,.$$

Les autres termes sont dominés, à une constante près, par $A\psi(n, \varepsilon)$. Regardons, par exemple, le terme

$$\sum_{k=n-[n/3]}^{n} (n-k+\varepsilon^2)^{-1/2} \sum_{p=l(k)+1}^{n} \varphi_p .$$

En intervertissant les sommations, nous obtenons:

$$\sum_{k=n-[n/3]}^{n} (n-k+\varepsilon^2)^{-1/2} \sum_{p=l(k)+1}^{n} \varphi_p \leqq \sum_{p=1}^{n} \varphi_p \sum_{q=0}^{p^2-1} (q+\varepsilon^2)^{-1/2} . \tag{2.84}$$

Or, si $\varepsilon \geqq 1$,

$$\sum_{q=0}^{p^2} (q+\varepsilon^2)^{-1/2} \leqq 2(\sqrt{p^2+\varepsilon^2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}) \leqq \frac{2(1+p^2)}{\sqrt{p^2+\varepsilon^2}} ,$$

et donc

$$\sum_{k=n-[n/3]}^{n} (n-k+\varepsilon^2)^{-1/2} \sum_{p=l(k)+1}^{n} \varphi_p \leqq 2\psi(n, \varepsilon) . \tag{2.85}$$

Les deux autres termes se traitent de façon similaire. Nous avons donc ètabli que

$$\sum_{k=n-[n/3]}^{n} |D_k| \leqq CM^4 n^{-1/2} (\psi(n, 1) + \psi(n, \varepsilon)) . \tag{2.86}$$

En ajoutant (2.28) et (2.45) à (2.86), nous obtenons alors une inégalité analogue pour la quantité $\Sigma_{k=n-[n/3]}^{n} |\Delta_{1,k}(f_k)|$. Pour conclure la preuve de la proposition 1, il suffit alors de sommer l'inégalité (2.26) en k et de l'ajouter.

Annexe A: Suites causales faiblement dépendantes

Dans cette annexe, nous montrons le corollaire 1. Ce corollaire est une conséquence immédiate de l'évaluation suivante des coefficients $(\varphi_p)_{p \geqq 0}$.

Lemme 8. *Sous les hypothèses du corollaire* 1, *pour tout entier* l *dans* $[0, p]$,

$$\varphi_p \leqq 4\theta_{p-l} + 12\mathbb{E}(\omega_H(U_0, 2\delta_l) \wedge 1) .$$

Preuve. Nous devons majorer $\varphi(\mathscr{F}_{k-p}, (X_{p_1}, X_{p_2}, X_{p_3}))$ pour $p_3 > p_2 > p_1 \geqq k$. Clairement nous pouvons nous ramener à $k = 0$ par une translation des indices. Soit $l \leqq p$. Nous allons d'abord remplacer $(X_{p_1}, X_{p_2}, X_{p_3})$ par le vecteur aléatoire obtenu en oubliant les variables $(\varepsilon_j)_{j<-l}$. Pour $m \geqq 0$, nous posons donc

$$U_{m,l} = F(\varepsilon_{m-j} \mathbb{1}_{m-j \geqq -l} : j \in \mathbb{Z}) \text{ et } X_{m,l} = H(U_{m,l}) - \mathbb{E}(H(U_m)) .$$

En appliquant (1.6), il vient:

$$|U_{m,l} - U_m| \leqq \delta_l . \tag{A.1}$$

Donc

$$(A.2) \qquad |H(U_{m,l}) - H(U_m)| \leqq \omega_H(U_{m,l}, \delta_l) \wedge \omega_H(U_m, \delta_l) .$$

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $[0,1]$, lipschitzienne de rapport un. D'après (A.2),

$$|f(X_{p_1}, X_{p_2}, X_{p_3}) - f(X_{p_1,l}, X_{p_2,l}, X_{p_3,l})| \leqq \sum_{i=1}^{3} (\omega_H(U_{p_i,l}, \delta_l) \wedge 1) .$$

Par conséquent

$$(A.3) \qquad \begin{aligned} &\|\mathbb{E}(f(X_{p_1}, X_{p_2}, X_{p_3}) - f(X_{p_1,l}, X_{p_2,l}, X_{p_3,l}) | \mathscr{A})\|_\infty \\ &\leqq \sum_{i=1}^{3} \|\mathbb{E}(\omega_H(U_{p_i,l}, \delta_l) \wedge 1 | \mathscr{A})\|_\infty . \end{aligned}$$

Or les variables $\omega_H(U_{p_i,l}, \delta_l) \wedge 1$ sont mesurables pour la tribu $\mathscr{G}_{-l} = \sigma(\varepsilon_m : m \geqq -l)$ et à valeurs dans [0,1]. Puisque la suite $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est uniformément mélangeante, il en découle via (1.3) que

$$\|\mathbb{E}(\omega_H(U_{p_i,l}, \delta_l) \wedge 1 | \mathscr{A})\|_\infty \leqq \theta_{p-l} + \mathbb{E}(\omega_H(U_{p_i,l}, \delta_l) \wedge 1) .$$

Enfin, en appliquant à nouveau (A.1), on note que $\omega_H(U_{p_i,l}, \delta_l) \leqq 3\omega_H(U_{p_i}, 2\delta_l)$, ce qui, avec les deux inégalités précédentes, implique que

$$(A.4) \qquad \begin{aligned} &\|\mathbb{E}(f(X_{p_1}, X_{p_2}, X_{p_3}) - f(X_{p_1,l}, X_{p_2,l}, X_{p_3,l}) | \mathscr{A})\|_\infty \\ &\leqq 3\theta_{p-l} + 9\mathbb{E}(\omega_H(U_0, 2\delta_l) \wedge 1) . \end{aligned}$$

Dans un second temps, nous appliquons à nouveau (1.3) à la variable $\mathscr{G}_{-l}$-mesurable $(X_{p_1,l}, X_{p_2,l}, X_{p_3,l})$. Ainsi

$$(A.5) \qquad \|\mathbb{E}(f(X_{p_1,l}, X_{p_2,l}, X_{p_3,l})) - \mathbb{E}(f(X_{p_1,l}, X_{p_2,l}, X_{p_3,l}) | \mathscr{A})\|_\infty \leqq \theta_{p-l} .$$

Enfin, pour revenir à $\mathbb{E}(f(X_{p_1}, X_{p_2}, X_{p_3}))$, on note que, d'après (A.1) et (A.2),

$$|f(X_{p_1}, X_{p_2}, X_{p_3}) - f(X_{p_1,l}, X_{p_2,l}, X_{p_3,l})| \leqq \sum_{i=1}^{3} (\omega_H(U_{p_i}, \delta_l) \wedge 1) ,$$

ce qui assure que

$$(A.6) \qquad |\mathbb{E}(f(X_{p_1}, X_{p_2}, X_{p_3})) - \mathbb{E}(f(X_{p_1,l}, X_{p_2,l}, X_{p_3,l}))| \leqq 3\mathbb{E}(\omega_H(U_0, 2\delta_l) \wedge 1) .$$

Pour obtenir le lemme 8, il suffit alors d'ajouter (A.4), (A.5) et (A.6).

Annexe B: Processus linéaires à innovations discrètes

Dans cette annexe, nous montrons (1.10). Posons $U_{0,k} = \Sigma_{p=0}^{k} \gamma_p \varepsilon_{-p}$. Alors

$$(B.1) \qquad \delta_k = \sum_{p \geqq k+1} \gamma_p \quad \text{et} \quad 0 \leqq U_0 - U_{0,k} < \delta_k \text{ p.s.}$$

Donc, pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\text{(B.2)} \qquad \mathbb{P}(U_0 \in [x - 2\delta_k, x + 2\delta_k]) \leqq \mathbb{P}(x - 3\delta_k < U_{0,k} \leqq x + 2\delta_k)\,.$$

Soit $(b_0, \ldots, b_k)$ élément quelconque de $\{0,1\}^{k+1}$. Clairement

$$\text{(B.3)} \qquad \mathbb{P}(\varepsilon_0 = b_0, \ldots, \varepsilon_{-k} = b_k) \leqq (1 - s)^{k+1}\,.$$

Donc, pour majorer la probabilité que $U_{0,k}$ tombe dans un intervalle donné, il suffit de minorer l'écart minimal entre les points de la forme $\Sigma_{p=0}^{k} \gamma_p b_p$. Soient donc $(b_0, \ldots b_k)$ et $(b'_0, \ldots, b'_k)$ deux éléments distincts de $\{0,1\}^{k+1}$. Soit j le plus petit entier tel que $b_j \neq b'_j$. Si, par exemple $b'_j = 1$ et $b_j = 0$, alors

$$\sum_{p=0}^{k} \gamma_p b'_p - \sum_{p=0}^{k} \gamma_p b_p \geqq \gamma_j - \sum_{p=j+1}^{k} \gamma_p \geqq \gamma_j - \sum_{p=j+1}^{\infty} \gamma_p + \delta_k$$

car $\delta_k = \Sigma_{p \geqq k+1} \gamma_p$. Or, d'après (1.8), $\Sigma_{p=j+1}^{\infty} \gamma_p \leqq \gamma_j$, et donc

$$\text{(B.4)} \qquad \sum_{p=0}^{k} \gamma_p b'_p - \sum_{p=0}^{k} \gamma_p b_p \geqq \delta_k\,.$$

Par conséquent, les points de la forme $\Sigma_{p=0}^{k} \gamma_p b_p$ sont écartés de δ_k au moins. Il suffit alors d'appliquer (B.2)–(B.4) pour obtenir (1.10).

Références

Bentkus, V.: Dependence of the Berry–Esseen estimate on the dimension. Litovsk. Mat. Sb. **26**, 205–210 (in Russian) (1986)

Bergström, H.: On the central limit theorem. Skandinavisk Aktuarietidskrift **27**, 139–153 (1944)

Bergström, H.: On the central limit theorem in the space $\mathbb{R}^k$, $k > 1$. Skandinavisk Aktuarietidskrift **28**, 106–127 (1945)

Bergström, H.: On the convergence of sums of random variables in distribution under mixing condition. Periodica math. Hungarica **2**, 173–190 (1972)

Bolthausen, E.: The Berry–Esseen theorem for functionals of discrete Markov chains. Z. Wahrsch. verw. Gebiete **54**, 59–73 (1980)

Bolthausen, E.: Exact convergence rates in some martingale central limit theorems. Ann. of Probab. **10**, 672–688 (1982a)

Bolthausen, E.: The Berry–Esseen theorem for strongly mixing Harris recurrent Markov chains. Z. Wahrsch. verw. Gebiete **60**, 283–289 (1982b)

Bradley, R.: On the central limit question under absolute regularity. Ann. of Probab. **13**, 1314–1325 (1985)

Doukhan, P.: Mixing. Properties and Examples. Lect. Notes in Statist. Vol. 85 Berlin: Springer (1994)

Doukhan, P., Portal, F.: Moments de variables aléatoires mélangeantes. C.R. Acad. Sci. Paris Série 1 **297**, 129–132 (1983)

Esseen, C.: Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace–Gaussian law. Acta Math. **77**, 1–125 (1945)

Götze, F.: On the rate of convergence in the multivariate CLT. Ann. of Probab. **19**, 724–739 (1991)

Götze, F., Hipp, C.: Asymptotic expansions for sums of weakly dependent random vectors. Z. Wahrsch. verw. Gebiete **64**, 211–239 (1983)

Ibragimov, I.A.: Some limit theorems for stationary processes. Theor. Probab. Appl. **7**, 349–382 (1962)

Ibragimov, I.A., Linnik, Y.V.: Independent and stationary sequences of random variables Amsterdam: Wolters-Noordhoff 1971

Lindeberg, J.W.: Eine neue Herleitung des Exponentialgezetzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mathematische Zeitschrift **15**, 211–225 (1922)

Nagaev, S.V.: An estimate of the remainder term in the multidimensional central limit theorem. Proc. Third Japan-USSR Symp. Probab. Theory Lect. Notes in Math., Vol. 550, pp 419–438 Berlin: Springer 1976

Nummelin, E.: General irreducible Markov chains and non negative operators. London: Cambridge University Press 1984

Petrov, V.V.: Sums of independent random variables. Berlin: Springer 1975

Rio, E.: About the Lindeberg method for strongly mixing sequences. Soumis à European Series in Applied and Industrial Mathematics: Probability and Statistics, 1995

Rosenblatt, M.: A central limit theorem and a strong mixing condition. Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **42**, 43–47 (1956)

Sazonov, V.V.: On the multi-dimensional central limit theorem. Sankhya Ser. A. **30**, 181–204 (1968)

Stein, C.: A bound on the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. and Prob., II, pp. 583–602, London: Cambridge University Press 1972

Tikhomirov, A.N.: On the convergence rate in the central limit theorem for weakly dependent random variables. Theor. Probab. Appl. **25**, 790–809 (1980)

Zolotarev, V.M.: Real refinements of limit theorems in probability theory. Proc. Steklov institute of mathematics 1990 (1) 23–47

Zuparov, T.M.: On the rate of convergence in the central limit theorem for weakly dependent random variables. Theor. Probab. Appl. **36**, 783–792 (1991)