Probab. Theory Relat. Fields 94, 39–51 (1992)

Probability Theory and Related Fields

Equation de Choquet-Deny sur le dual d'un groupe compact

Ph. Biane

Laboratoire de Probabilités, Tour 56 3[e] étage, 4, place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05, France

Reçu le 6 février 1991

Résumé. On étudie les solutions de l'équation de convolution $\phi * \nu = \phi$ où ϕ et ν sont respectivement un poids et un état sur l'algèbre de von Neumann d'un groupe compact G, la convolution $*$ étant déterminée par la structure d'algèbre de Hopf de cette algèbre de von Neumann.

Summary. We study the solutions of the convolution equation $\phi * \nu = \phi$ where ϕ and ν are a weight and a state on the von Neumann algebra of a compact group, and the convolution is given by the Hopf algebra structure of this von Neumann algebra.

Introduction

Soient G un groupe compact, $\mathscr{A}(G)$ son algèbre de von Neumann munie de son coproduit Δ, et ν un état sur cette algèbre. L'application $Q = (\mathrm{id} \otimes \nu) \circ \Delta$ est une application complètement positive de $\mathscr{A}(G)$ dans $\mathscr{A}(G)$, et détermine de ce fait un processus de Markov quantique (voir Accardi et al. [2]), que l'on appelle «marche aléatoire sur le dual de G». Dans [3] j'ai montré que dans le cas où G est le groupe $\mathrm{SU}(n)$, et ν est donnée par la trace normalisée sur la représentation basique, les restrictions de Q à la sous-algèbre engendrée par un tore maximal d'une part, et au centre de l'algèbre d'autre part, s'interprètent comme des noyaux de transition de chaînes de Markov (au sens usuel) sur le réseau $\mathbb{Z}^{n-1}$. De plus, la chaîne de Markov obtenue par restriction au centre s'obtient à partir de l'autre par deux opérations successives: d'abord un meurtre à la sortie d'une chambre de Weyl, puis un conditionnement (au sens de Doob) à partir vers l'infini. Il restait dans [3] un problème en suspens, qui était de montrer qu'il n'y a qu'une seule façon de faire ce conditionnement (c'est à dire que la frontière de Martin de la chaîne de Markov obtenue contient un seul point).

Dans le but de donner une réponse positive à cette question, je résouds dans cet article le problème (P) suivant, dans le cadre général du début:

(P) *trouver tous les poids ϕ normaux semi-finis sur $\mathscr{A}(G)$ qui vérifient l'équation, de type « Choquet-Deny », (†) $\phi * \nu = \phi$, où $*$ est la convolution déterminée par la structure de bialgèbre de $\mathscr{A}(G)$: $\phi * \nu = (\phi \otimes \nu) \circ \Delta$.*

(L'équation (†) s'écrit aussi $\phi Q = \phi$).

Le problème (P) est résolu, dans le cas où $L^2(G)$ est séparable, de la façon suivante:

on montre que les solutions de l'éq. (†) s'obtiennent, comme dans le théorème de Choquet-Deny (voir [6]) comme barycentres de solutions extrémales, ces solutions extrémales étant (moyennant une condition de support sur ν) les poids de la form $\mathrm{tr}(f.)$ où tr est la trace sur $\mathscr{A}$ provenant de celle de $L^2(G)$ et f est une «exponentielle» ν-harmonique, c'est à dire un opérateur positif affilié à $\mathscr{A}$ tel que $\Delta(f) = f \otimes f$ et $\nu(i(f)) = 1$, où i est l'antipode de $\mathscr{A}(G)$. On montre de plus que la représentation est unique, ce qui permet de considérer l'ensemble des exponentielles ν-harmoniques comme une frontière de Martin minimale pour la marche aléatoire quantique donnée par l'état ν.

Le résultat principal de l'article est le théorème 1 énoncé à la fin du par. 3.

Cet article est organisé de la façon suivante:

dans le premier paragraphe, on rappelle la définition de l'algèbre de von Neumann d'un groupe localement compact, et on énonce certaines de ses propriétés. Le deuxième paragraphe est consacré aux notions d'élément primitif et d'exponentielle. Le troisième paragraphe contient la solution du problème (P), et s'inspire de l'article [6] de Deny. Dans la quatrième partie on étudie divers exemples: tout d'abord, on montre que si le groupe est fini il n'y a qu'une seule exponentielle; on montre ensuite que pour une classe de groupes «pas trop commutatifs» si ν est un état tracial, il n'y a qu'une seule exponentielle ν-harmonique, puis on détermine toutes les exponentielles quand G est le groupe $\mathrm{SU}(n)$. Finalement, j'utilise ces résultats pour résoudre le problème initial.

1 Quelques propriétés de l'algèbre d'un groupe compact

Soit G un groupe compact, on note $\mathscr{A}(G)$ l'algèbre de von Neumann d'opérateurs sur $L^2(G)$ (G étant muni de la mesure de Haar normalisée dg) engendrée par les opérateurs de translation à gauche λ_g, $g \in G$, définis par:

si $f \in L^2(G)$, $\lambda_g(f)(h) = f(g^{-1}h)$. (voir Dixmier [7]).

Dans la suite on suppose $L^2(G)$ séparable.

D'après le théorème de Peter-Weyl, l'espace $L^2(G)$ se décompose sous la forme $L^2(G) = \bigoplus_{x \in \Gamma} E_x$ où x parcourt l'ensemble dénombrable Γ des classes de représentations irréductibles de G, et E_x est l'espace des coefficients de la représentation x (si x est de dimension d_x cet espace est de dimension d_x^2). On a une décomposition correspondante $\mathscr{A}(G) = \bigoplus_{x \in \Gamma} M_x$ où M_x est l'algèbre des opérateurs de convolution par les fonctions coefficients de la représentation x. Cette algèbre est isomorphe à $M_{d_x}(\mathbb{C})$, et n'agit que sur la composante E_x de $L^2(G)$.

Un élément a de $\mathscr{A}(G)$ peut donc être décrit par une famille $(a_x)_{x \in \Gamma}$, $a_x \in M_x$ telle que $\|a\| = \sup_{x \in \Gamma} \|a_x\| < +\infty$, avec la norme usuelle des opérateurs.

Structure d'algèbre de Hopf de $\mathscr{A}(G)$

Les formules $\Delta(\lambda_g)=\lambda_g\otimes\lambda_g$ $\varepsilon(\lambda_g)=1$ $i(\lambda_g)=\lambda_{g^{-1}}$, s'étendent par linéarité et continuité à tout $\mathscr{A}(G)$ et définissent un coproduit Δ, une counité ε, et une antipode i sur $\mathscr{A}(G)$ qui en font une algèbre de Hopf-von Neumann cocommutative (cf. [1]). En particulier, on a la relation: $\Delta\circ i=(i\otimes i)\circ\Delta$.

Etats et poids sur $\mathscr{A}(G)$

Soit ν un état sur $\mathscr{A}(G)$, il existe alors une famille $(\nu_x)_{x\in\Gamma}$ de poids finis sur M_x tels que $\nu(a)=\sum\limits_{x\in\Gamma}\nu_x(a_x)$ pour tout $a\in\mathscr{A}(G)$. Chaque ν_x étant un poids sur M_x, il peut être représenté par une matrice $d_x\times d_x$ hermitienne positive. De même, si ϕ est un poids normal semi-fini sur $\mathscr{A}(G)$ il existe une famille $(\phi_x)_{x\in\Gamma}$ de poids finis sur M_x tels que $\phi(a)=\sum\limits_{x\in\Gamma}\phi_x(a_x)$ pour tout a positif dans $\mathscr{A}(G)$. En particulier le poids sur $\mathscr{A}(G)$ induit par la trace de $B(L^2(G))$ est donné par la famille de poids $(d_x\,\mathrm{tr}_x)_{x\in\Gamma}$ où tr_x est la trace canonique sur M_x. La structure de bigèbre de $\mathscr{A}(G)$ permet de définir la convolution de deux poids finis μ et ν sur $\mathscr{A}(G)$ comme le poids $\mu*\nu=(\mu\otimes\nu)\circ\Delta$ sur $\mathscr{A}(G)$. Si ϕ est un poids normal semi-fini sur $\mathscr{A}(G)$, et ν un état on peut de même définir un poids $\phi*\nu$ sur $\mathscr{A}(G)$, comme supremum des poids $\psi*\nu$ tels que ψ est un poids fini $\leqq\phi$.

Lemme 1 *Si ϕ est un poids et μ, ν des états, on a:*

$$\phi*\mu=\mu*\phi \quad et \quad (\phi*\mu)*\nu=\phi*(\mu*\nu).$$

Preuves. Le lemme résulte de la cocommutativité et de la coassociativité du coproduit Δ.

Une algèbre auxiliaire

Nous allons maintenant introduire l'algèbre involutive $\hat{A}(G)=\prod\limits_{x\in\Gamma}M_x$, le produit étant pris au sens algébrique, munie de la topologie produit. On aura également besoin de la sous algèbre (sans unité) $\mathscr{A}^\circ(G)$ formée des éléments dont toutes les composantes sont nulles sauf un nombre fini.

On a les inclusions: $\mathscr{A}^\circ(G)\subset\mathscr{A}(G)\subset\hat{\mathscr{A}}(G)$. $\hat{\mathscr{A}}(G)$ peut être considérée comme une algèbre d'opérateurs non bornés sur $L^2(G)$ affiliés à $\mathscr{A}(G)$, possédant comme domaine commun stable la somme algébrique $\overset{a}{\bigoplus\limits_{x\in\Gamma}}E_x$. Le produit tensoriel algébrique $\hat{\mathscr{A}}(G)\otimes\hat{\mathscr{A}}(G)$ est alors une algèbre d'opérateurs sur la somme algébrique $\overset{a}{\bigoplus\limits_{x\in\Gamma,y\in\Gamma}}E_x\otimes E_y$, et on note $\hat{\mathscr{A}}(G)\hat{\otimes}\hat{\mathscr{A}}(G)$ le produit tensoriel complété pour la topologie de la convergence simple sur $\overset{a}{\bigoplus\limits_{x\in\Gamma,y\in\Gamma}}E_x\otimes E_y$. On a:

$$\hat{\mathscr{A}}(G)\otimes\hat{\mathscr{A}}(G)=\prod_{x\in\Gamma}M_x\otimes\prod_{y\in\Gamma}M_y\subset\hat{\mathscr{A}}(G)\hat{\otimes}\hat{\mathscr{A}}(G)=\prod_{x,y\in\Gamma}M_x\otimes M_y.$$

Un élément f de $\mathscr{A}(G)$ est positif si et seulement si chacune de ses composantes est positive, et alors $\mathrm{tr}(f) = \sum_{x \in \Gamma} d_x \, \mathrm{tr}_x(f_x) \in [0, +\infty]$.

On note $\hat{\mathscr{A}}(G)^+$ l'ensemble des éléments positifs de $\hat{\mathscr{A}}(G)$.

Si ϕ est un poids normal, semi-fini, de $\mathscr{A}(G)$, on voit que ϕ peut se mettre sous la forme $\phi = \mathrm{tr}(f.)$ où $f \in \hat{\mathscr{A}}(G)^+$ est déterminé par ϕ. On peut donc identifier l'ensemble des poids normaux semi-finis sur $\mathscr{A}(G)$ avec un cone convexe saillant de l'espace $\hat{\mathscr{A}}(G)$.

Nous allons étendre la structure d'algèbre de Hopf de $\mathscr{A}(G)$ à l'algèbre $\hat{\mathscr{A}}(G)$:

Proposition 1 *Δ et i ont une unique extension en un coproduit à valeurs dans $\hat{\mathscr{A}}(G) \hat{\otimes} \hat{\mathscr{A}}(G)$ et une antipode de l'algèbre $\hat{\mathscr{A}}(G)$, tous deux continus.*

Lemme 2 *Soit $a_x \in M_x$, pour tous $x, y \in \Gamma$ l'opérateur $\Delta(a_x)$ laisse invariants les espaces $E_y \otimes E_z$ et sa restriction à l'espace $E_y \otimes E_z$ est nulle si x ne figure pas dans la décomposition en composantes irréductibles de la représentation $y \otimes z$. De plus, sur chaque composante de type x de la décomposition de $E_y \otimes E_z$ en sous-représentations irréductibles, $\Delta(a_x)$ agit comme a_x.*

Démonstration. Les espaces $E_y \otimes E_z$ sont stables par les opérateurs $\Delta(\lambda_g)$, et donc par tous les opérateurs $\Delta(a)$, $a \in \mathscr{A}(G)$. De plus $g \to \Delta(\lambda_g)|_{E_y \otimes E_z}$ définit une représentation de G isomorphe au produit tensoriel $(d_y \cdot y) \otimes (d_z \cdot z)$, donc si φ est une fonction de E_x l'opérateur $\int_G \varphi(g) \, \Delta(\lambda_g)|_{E_y \otimes E_z} dg$ est nul si x ne figure pas dans la décomposition de $y \otimes z$ en composantes irréductibles, et agit come l'opérateur de convolution par φ sur chaque composante irréductible de $E_y \otimes E_z$ isomorphe á x.

Démonstration de la proposition 1 Soit $a = (a_x)_{x \in \Gamma} \in \hat{\mathscr{A}}(G)$. D'après le lemme 2, pour tous $y, z \in \Gamma$, l'espace $E_y \otimes E_z$ est invariant par a_x, et pour presque tout $x \in \Gamma$, on a $\Delta(a_x)|_{E_y \otimes E_z} = 0$. Il s'ensuit que la somme $\sum_{x \in \Gamma} \Delta(a_x)|_{E_y \otimes E_z}$ définit bien un opérateur sur $E_y \otimes E_z$. On en conclut que la somme $\Delta(a) = \sum_{x \in \Gamma} \Delta(a_x)$ définit bien un opérateur sur $\overset{\mathrm{a}}{\bigoplus}_{x \in \Gamma, y \in \Gamma} E_x \otimes E_y$ (somme algébrique), et on a ainsi l'extension cherchée de Δ. Si $x \in \Gamma$, soit $\bar{x}$ la représentation irréductible $\bar{x}(g) = {}^t x(g)^{-1}$, alors i envoie M_x dans $M_{\bar{x}}$ et donc l'extension de i à $\hat{\mathscr{A}}(G)$ s'obtient en posant $i(a) = (i(a_{\bar{x}}))_{x \in \Gamma}$. La continuité de Δ et i se vérifie sans problème.

Lemme 3 *Si f est une fonction continue sur G, $\mathrm{tr}(\int_G f(g) \, \lambda_g \, dg) = f(e)$, e étant l'élément neutre de G, et* tr *la trace usuelle sur $\mathscr{B}(L^2(G))$.*

Démonstration. L'opérateur $\int_G f(g) \, \lambda_g \, dg$ est donné par le noyau continu $f(hg^{-1})$ sur $L^2(G \times G)$ et donc sa trace est $\int_G f(gg^{-1}) \, dg = f(e)$.

Lemme 4 *Pour tous f, g, $h \in \hat{\mathscr{A}}(g)^+$ on a:*

a) $\mathrm{tr}(i(f) \, i(h)) = \mathrm{tr}(fh)$

b) $\mathrm{tr}(f \otimes g \Delta(h)) = \mathrm{tr}(i(h) \otimes g \Delta(i(f)))$.

c) $\forall M, N \in \mathscr{A}^\circ(G)$, $\operatorname{tr}(M \otimes N \Delta(f)) = \operatorname{tr}(M * N f)$ *où* $M * N$ *est un élément de* $\mathscr{A}^\circ(G)$, *ne dépendant que de* M *et* N.

Démonstration. Nous allons montrer a) et b) pour des éléments f, g, h quelconques de $\mathscr{A}^\circ(G)$. Soient $f \in M_x$, $g \in M_y$, $h \in M_z$.

On a

$$f = \int_G \mathfrak{f}(g)\, \lambda_g\, dg,$$

$$g = \int_G \mathfrak{g}(g)\, \lambda_g\, dg,$$

$$h = \int_G \mathfrak{h}(g)\, \lambda_g\, dg,$$

où $\mathfrak{f}$ (resp. $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$) $\in E_x$ (resp. E_y, E_z) sont des fonctions continues sur G.

a)
$$i(f) = \int_G \mathfrak{f}(g^{-1})\, \lambda_g\, dg \quad \text{et} \quad i(fh) = i(h)\, i(f),$$

et par conséquent, il suffit de montrer que $\operatorname{tr}(i(f)) = \operatorname{tr}(f)$, mais $\operatorname{tr}(i(f)) = \mathfrak{f}(e^{-1}) = \mathfrak{f}(e) = \operatorname{tr}(f)$.

b)
$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(f \otimes g \Delta(h)) &= \operatorname{tr}\Big(\Big(\int_G \mathfrak{f}(g)\, \lambda_g\, dg \otimes \int_G \mathfrak{g}(g)\, \lambda_g\, dg\Big) \int_G \mathfrak{h}(g)\, \lambda_g \otimes \lambda_g\, dg\Big) \\ &= \operatorname{tr}\Big(\int_G \int_G \Big(\int \mathfrak{f}(h g^{-1})\, \mathfrak{g}(k g^{-1})\, \mathfrak{h}(g)\, dg\Big)\, \lambda_h \otimes \lambda_k\, dh\, dk\Big).\end{aligned}$$

La fonction de (h, k) $\int_G \mathfrak{f}(h g^{-1})\, \mathfrak{g}(k g^{-1})\, \mathfrak{h}(g)\, dg$ sur $G \times G$ est continue, donc, d'après le lemme 3 appliqué à $G \times G$:

$$\operatorname{tr}(f \otimes g \Delta(h)) = \int_G \mathfrak{f}(g^{-1})\, \mathfrak{g}(g^{-1})\, \mathfrak{h}(g)\, dg = \operatorname{tr}(i(h) \otimes g \Delta(i(f))).$$

Pour passer au cas où f, g, h sont dans $\hat{\mathscr{A}}(G)^+$, on remarque que tout élément positif de $\hat{\mathscr{A}}(G)$ est le supremum d'une famille d'éléments positifs de $\mathscr{A}^\circ(G)$, et que les expressions $\operatorname{tr}(fh)$, $\operatorname{tr}(f \otimes g \Delta(h))$ et $\operatorname{tr}(i(h) \otimes g \Delta(i(f)))$ sont croissantes en f, g, h.

Pour c) on remarque d'abord que les expressions ont un sens, car $\hat{\mathscr{A}}(G)$ est le dual topologique de $\mathscr{A}^\circ(G)$. Supposons que seule la composante dans M_x de M est non nulle, ainsi que la composante de N dans M_y, alors d'après le lemme 2, la forme linéaire

$$f \to \operatorname{tr}(M \otimes N \Delta(f))$$

ne dépend que des composantes de f se trouvant sur des M_z, avec z apparaissant dans la décomposition de la représentation $x \otimes y$ en représentations irréductibles, comme il n'y a qu'un nombre fini de tels z, cette forme linéaire est bien de la forme

$$f \to \operatorname{tr}(M * N f)$$

pour un certain élément $M * N$ de $\mathscr{A}^\circ(G)$.

Une conséquence du lemme 4. b) est que le poids $\mathrm{tr}(f.)$ est ν-harmonique si et seulement si $Q(i(f))=i(f)$. L'antipode i permet donc de mettre en bijection les solutions du problème (P) et les «fonctions Q-harmoniques».

2 Elements primitifs et exponentielles

Pour tout élément $f=(f_x)_{x\in\Gamma}$, $g=(g_x)_{x\in\Gamma}$ de $\hat{\mathscr{A}}(G)$, $f\otimes g$ est l'élément $(f_x\otimes g_y)_{x,y\in\Gamma}$ de $\hat{\mathscr{A}}(G)\otimes\hat{\mathscr{A}}(G)$.

Definition Un élément f de $\hat{\mathscr{A}}(G)$ est appelé *élément primitif* s'il est non nul, et si $\Delta(f)=f\otimes f$.

Un élément primitif qui est dans $\hat{\mathscr{A}}(G)^+$ est appelé *exponentielle.* L'ensemble des élément primitifs sera noté $\mathscr{P}$, et celui des exponentielles $\mathscr{E}$.

On note x_0 la représentation triviale de G.

Lemme 5 *Si f est un élément primitif, alors $f_{x_0}=1$.*

Démonstration. Soit $x\in\Gamma$; dans la composante $E_{x_0}\otimes E_x$, $f\otimes f$ agit par $f_{x_0}\otimes f_x$; x est la seule représentation qui figure dans la décomposition de $E_{x_0}\otimes E_x$ en composantes irréductibles pour la représentation $x_0\otimes x$ de G, et d'après le lemme 2, on a

$$\Delta(f_x)|_{E_{x_0}\otimes E_x}=f_{x_0}\otimes f_x=f_x.$$

Si f est non nulle, il existe x tel que $f_x\neq 0$ et donc $f_{x_0}=1$.

Lemme 6 *Si f est un élément primitif et x une représentation unidimensionnelle de G, alors $f_x\neq 0$.*

Démonstration. Soit x^{-1} la représentation inverse de x, alors, $x\otimes x^{-1}$ est la représentation triviale et donc, d'après le lemme 2, $f_x\otimes f_{x^{-1}}=f_{x_0}=1$.

Lemme 7 *Soient f un élément primitif et $x\in\Gamma$,* $\det(f_x)\neq 0$.

Démonstration. a) Considérons la représentation $x^{\otimes d_x}$, le sous espace antisymétrique de cette représentation est stable par G, qui agit dessus par la représentation de dimension 1, $\det(x)$.

b) Soit $(\mathrm{id}\otimes\Delta)^{\otimes d_x-1}\circ\Delta(f)=f^{\otimes d_x}\in\hat{\mathscr{A}}(G)^{\otimes d_x}$. La restriction de cet élément à $E_x^{\otimes d}$ est égale à $f_x^{\otimes d}$, et si on la restreint au sous espace antisymétrique cette restriction est égale d'après a) à $\det(f_x)$, et d'autre part à f_z où z est la représentation de dimension 1, $\det(x)$, par le même argument que dans la démonstration du lemme 2. On a donc $\det(f_x)\neq 0$ d'après le lemme 6.

Proposition 2 *$\mathscr{P}$ est un sous groupe fermé de $\hat{\mathscr{A}}(G)$ contenant G, et $\mathscr{E}$ est fermé dans $\hat{\mathscr{A}}(G)$.*

Démonstration. Tout d'abord, pour tout élément g de G, λ_g est un élément primitif.

Le produit de deux élément primitifs est trivialement un élément primitif, et l'ensemble des solutions de l'équation $\Delta(f)=f\otimes f$ est fermé par continuité de Δ et de l'application diagonale: $f\to f\otimes f$.

D'après le lemme 7, tout élément primitif est inversible dans $\hat{\mathscr{A}}(G)$, et son inverse est un élément primitif, de plus le lemme 5 montre que 0 est un élément isolé de l'ensemble des solutions de l'équation $\Delta(f)=f\otimes f$, ce qui termine la démonstration du premier point; le second résulte de ce que $\hat{\mathscr{A}}(G)^+$ est fermé dans $\hat{\mathscr{A}}(G)$.

Nous établissons maintenant quelques résultats qui seront utiles par la suite.

Proposition 3 *Si f est une exponentielle et ν un état, le poids $\phi = \mathrm{tr}(f.)$ vérifie:*

$$\phi * \nu = \nu(i(f))\, \phi.$$

Démonstration. ν est de la forme $\mathrm{tr}(g.)$, pour un g dans $\hat{\mathscr{A}}(G)^+$, et d'après le lemme 4, pour tout $h \geqq 0$, on a:

$$\begin{aligned}\phi * \nu(h) &= \mathrm{tr}(i(h) \otimes g\Delta(i(f))) = \mathrm{tr}(i(h)\, i(f) \otimes g\, i(f))\\ &= \mathrm{tr}(hf)\, \mathrm{tr}(g\, i(f)) = \nu(i(f))\, \phi(h).\end{aligned}$$

On déduit de la proposition 3 que si $\nu(i(f)) = 1$, ϕ est une solution du problème (P).

Proposition 4 *Les fonctions de la forme $f \to \mathrm{tr}(Mf)$ où $M \in \mathscr{A}^\circ(G)$ forment une algèbre stable par conjugaison et séparant les points sur $\mathscr{E}$.*

Démonstration. Soient M et $N \in \mathscr{A}^\circ(G)$, $f \in \mathscr{E}$ on a: $\mathrm{tr}(Mf)\, \mathrm{tr}(Nf) = \mathrm{tr}(M \otimes N f \otimes f) = \mathrm{tr}(M \otimes N \Delta(f)) = \mathrm{tr}(M * N f)$ d'après le lemme 4. c), et donc les fonctions $f \to \mathrm{tr}(Mf)$ forment une algèbre sur $\mathscr{E}$.

Comme $\overline{\mathrm{tr}(Mf)} = \mathrm{tr}(M^* f^*) = \mathrm{tr}(M^* f)$, elle est stable par conjugaison, et il est immédiat qu'elle sépare les points de $\mathscr{E}$.

On appelle H le groupe des *représentations unidimensionelles* de G. (H est le groupe dual de $G/[G:G]$ où $[G:G]$ est le sous-groupe fermé de G engendré par les commutateurs)).

Proposition 5 *Soit f un élément primitif, l'application $x \to f_x$ est un morphisme de groupes de H dans $\mathbb{C}^*$.*

Démonstration. Soient $x, y \in H$, d'après le lemme 2, on a $f_x \otimes f_y = f_{xy}$, et on obtient le résultat en identifiant les éléments de M_z pour $z \in H$ avec leur trace.

3 Résolution du problème (P)

La résolution du problème (P) va suivre les lignes de l'article [6], en adaptant toutefois les arguments au contexte des algèbres de Hopf. Nous devons tout d'abord introduire une hypothèse sur le poids ν, qui joue le rôle de l'hypothèse de non dégénérescence du support dans [6].

Hypothèse h_ν: pour tout $x \in \Gamma$, et tout poids fini α sur M_x, il existe un entier n et une constante $c > 0$ tels que $\nu^{*n} \geqq c\alpha$ sur M_x.

Dans la suite on supposera cette hypothèse en vigueur.

Considèrons l'ensemble des poids μ normaux, semi-finis, satisfaisant l'inégalité:

$$(\dagger\dagger) \qquad \mu * \nu \leqq \mu.$$

Appelons $\mathscr{S}$ le cone des solutions de (††), et $\mathscr{H}$ le cone des solutions de (†) ($\mathscr{H} \subseteq \mathscr{S}$ de manière évidente). $\mathscr{S}$ et $\mathscr{H}$ sont des cones convexes saillants de $\hat{\mathscr{A}}(G)$.

Lemme 8 *$\mathscr{S}$ est fermé dans $\hat{\mathscr{A}}(G)$.*

Démonstration. Soit μ_n une suite de poids normaux semi-finis vérifiant (††) qui converge dans $\hat{\mathscr{A}}(G)$ vers μ. On suppose que $\nu=\mathrm{tr}(g.)$, $\mu=\mathrm{tr}(f.)$, $\mu_n=\mathrm{tr}(f_n.)$, alors, pour tout sous ensemble A fini de Γ, on pose $f^A_{n,x}=f_{n,x}$ si $x\in A$, $=0$ sinon, et $\mu_{n,A}=\mathrm{tr}(f^A_n.)$; on a: $\mu_{n,A}*\nu\leqq\mu_n$. Soit $h\in\mathscr{A}^\circ(G)$, d'après le lemme 4,

$$\mathrm{tr}(f_n^A\otimes g\Delta(h))=\mathrm{tr}(f_n^A\otimes i(h)\,\Delta(i(g))).$$

L'élément $f_n^A\otimes i(h)$ converge dans $\mathscr{A}^\circ(G)\otimes\mathscr{A}^\circ(G)$, quand $n\to\infty$ vers $f^A\otimes i(h)$, donc

$$\mathrm{tr}(f_n^A\otimes i(h)\,\Delta(i(g)))\to\mathrm{tr}(f^A\otimes i(h)\,\Delta(i(g)))\quad\text{et}\quad \mu_{n,A}*\nu(h)\to\mu_A*\nu(h)$$

pour tout h dans $\mathscr{A}^\circ(G)$, et par conséquent, $\mu_{n,A}*\nu\to\mu_A*\nu$ dans $\mathscr{A}(G)$. On a donc: $\mu_A*\nu\leqq\mu$, et donc, comme cela est vrai pour tout A, on a $\mu*\nu=\sup\limits_A(\mu_A*\nu)\leqq\mu$.

Remarquons qu'il résulte de la démonstration ci-dessus que si $\nu=\mathrm{tr}(g.)$ avec g dans $\mathscr{A}^\circ(G)$, alors $\mathscr{H}$ est un cone fermé.

Pour tout poids normal, semi-fini, $\phi=(\phi_x)_{x\in\Gamma}$ il existe des réels $a_x>0$ tels que

$$\sum_{x\in\Gamma}a_x\,\phi_x(I_{M_x})<+\infty.$$

La fonction h sur le cone des poids définie par $h(\phi)=\sum\limits_{x\in\Gamma}a_x\,\phi_x(I_{M_x})$ est additive, s.c.i., homogène, et le «chapeau» $\mathscr{S}\cap\{\phi/h(\phi)\leqq1\}$ est un compact métrisable; on peut donc utiliser la théorie de Choquet comme dans Dellacherie et Meyer [5, p. 114–116] pour conclure que toute solution de l'éq. (†) (et même (††)) admet une représentation intégrale à l'aide d'éléments extrémaux du cone $\mathscr{S}$. Soit $\mu=\int\lambda\,dm(\lambda)$ une représentation de la solution μ de l'éq.(†) au moyen d'extrémales du cone $\mathscr{S}$, on a:

Lemme 9 *La mesure m est concentrée sur $\mathscr{H}$.*

Démonstration. Soit $(\mathrm{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments positifs de $\mathscr{A}^\circ(G)$ qui engendre $\mathscr{A}^\circ(G)^+$ par combinaisons linéaires à coefficients positifs, on a,

$$\forall n\in\mathbb{N}\int\lambda(\mathrm{e}_n)-\lambda*\nu(\mathrm{e}_n)\,dm(\lambda)=0,\quad\text{et}\quad\lambda(\mathrm{e}_n)-\lambda*\nu(\mathrm{e}_n)\geqq0$$

donc, pour m-presque tout λ, on a:

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad\lambda(\mathrm{e}_n)=\lambda*\nu(\mathrm{e}_n),$$

et donc $\lambda=\lambda*\nu$ pour m-presque tout λ.

On déduit de ces résultats la proposition suivante:

Proposition 6 *Pour toute solution ϕ du problème* (P) *il existe une mesure Borélienne positive m, portée par les génératrices extrémales du cone $\mathscr{H}$ telle que*:

$$\phi=\int\psi\,dm(\psi).$$

(D'après [5] on sait même que la mesure μ peut être choisie comme étant portée par les points extrémaux de $\mathscr{S} \cap \{\psi/h(\psi)=1\}$ où h est une fonction comme ci-dessus telle que $h(\phi)=1$)

Il faut maintenant déterminer les solutions appartenant aux génératrices extrémales. Soit ϕ une telle solution de (†). ϕ est un poids normal semi-fini tel que $\phi * v = \phi$.

Lemme 10 *Il existe un* $\mathrm{r} \in \hat{\mathscr{A}}(G)^+$ *tel que pour tout poids fini* α, *on ait* $\phi * \alpha = \alpha(\mathrm{r})\,\phi$.

Démonstration. a) Soit β un poids donné par $\mathrm{tr}(B.)$ avec $B \in \mathscr{A}^\circ(G)^+$ tel que $\phi * \beta$ est un poids normal semi fini, on a: $(\phi * \beta) * v = \phi * \beta$ d'après le lemme 1, et donc $\phi * \beta$ est aussi une solution de (†).

b) Si α est un poids de M_x, il existe, d'après l'hypothèse h_v, un n tel que v^{*n} soit $\geqq c\alpha$ pour un $c>0$. On a alors $\phi = \phi * (c\alpha) + \phi * (v^{*n} - c\alpha)$. $\phi * (c\alpha) \leqq \phi$, donc c'est un poids normal semi-fini, et d'après a) c'est une solution de (†) par conséquent $\phi * (v^{*n} - c\alpha)$ est également solution de (†) et on a une décomposition de ϕ en somme de deux solutions de (†). Comme ϕ est sur une génératrice extrémale, il existe un nombre $\xi(\alpha)$ tel que $\phi * \alpha = \xi(\alpha)\,\phi$. La fonction $\alpha \to \xi(\alpha)$ est positive, et affine sur l'ensemble des poids de M_x, par conséquent il existe une suite $(\mathrm{r}_x)_{x \in \Gamma}$ d'éléments positifs de M_x tels que

$$\phi * \alpha = \Big(\sum_{x \in \Gamma} \alpha_x(\mathrm{r}_x)\Big)\,\phi$$

pour tout poids fini α sur $\mathscr{A}(G)$. On a donc le résultat en prenant

$$\mathrm{r} = (\mathrm{r}_x)_{x \in \Gamma}.$$

On a vu au par. 1 qu'il existe $f \in \hat{\mathscr{A}}(G)^+$ tel que ϕ soit donné par la formule $\phi(.) = \mathrm{tr}(f.)$.

Lemme 11 $\Delta(i(f)) = i(f) \otimes \mathrm{r}$.

Démonstration. D'après le lemme 5, pour tous g, $h \in \mathscr{A}(G)^+$

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(f \otimes g\,\Delta(h)) &= \mathrm{tr}(fh)\,\mathrm{tr}(g\,\mathrm{r}) \\ &= \mathrm{tr}(i(h) \otimes g\,\Delta(i(f))) && \text{d'après le lemme 4. b)} \\ &= \mathrm{tr}(i(f)\,i(h))\,\mathrm{tr}(g\,\mathrm{r}) && \text{d'après le lemme 4. a)} \\ &= \mathrm{tr}((i(h) \otimes g)(i(f) \otimes \mathrm{r})).\end{aligned}$$

On en déduit que $\Delta(i(f)) = i(f) \otimes \mathrm{r}$.

Comme Δ est cocommutatif, on déduit du lemme 6 que $i(f) \otimes \mathrm{r} = \mathrm{r} \otimes i(f)$ et donc que $i(f)$ est proportionnel à r. $\Delta(i(f))$ est alors proportionnel à $i(f) \otimes i(f)$, et donc, $\Delta(f)$ est proportionnel à $f \otimes f$, et non nul. Ainsi, chaque génératrice extrémale de l'ensemble des solutions de (†) contient une exponentielle.

Si f est une exponentielle, et $\phi = \mathrm{tr}(f.)$, on a $\phi * v = v(i(f))\phi$ d'après la proposition 2, et donc ϕ est v-harmonique si et seulement si $v(i(f)) = 1$. Dans l'ensemble des solutions extrémales de (P), l'application $h \to h/h_{x_0}$ est la projection sur l'ensemble des exponentielles, et par conséquent, dans la proposition 6, on peut écrire la formule $\phi = \int \psi\, d\mu(\psi)$ sous la forme $\phi = \int \psi/\psi(1_{x_0})\, \psi(1_{x_0})\, d\mu(\psi)$ et donc on peut supposer que la mesure μ est portée par $\mathscr{E}$.

Sous l'hypothèse h_ν, les solutions du problème (P) sont les poids de la forme $\phi = \int \mathrm{tr}(f.)\, d\mu(f)$ où μ est une mesure positive finie sur l'ensemble des exponentielles ν-harmoniques (μ est finie, car $\phi(1_{x_0}) = \mu(1) < \infty$). Nous allons montrer maintenant que cette mesure est uniquement déterminée par le poids ϕ.

Proposition 7 *Sous l'hypothèse h_ν, l'ensemble des exponentielles ν-harmoniques est relativement compact dans $\mathscr{E}$.*

Démonstration. Soit f une exponentielle ν-harmonique. Pour tout entier positif n, on a: $\nu^{*n}(i(f)) = \nu(i(f))^n = 1$. Pour tout $x \in \Gamma$, choisissons un n et une constante $c_x > 0$ tels que $\nu^{*n} \geqq c_x \mathrm{Id}$ sur M_x, on a alors $c_x \mathrm{tr}(f_x) \leqq 1$, et donc f est dans le «chapeau» déterminé par la suite $(c_x \varepsilon_x)$ où ε est une fonction strictement positive sur Γ, telle que $\sum_{x \in \Gamma} \varepsilon_x = 1$. Ce chapeau est un compact dans $\hat{\mathscr{A}}(G)$, et $\mathscr{E}$ est fermé dans $\hat{\mathscr{A}}(G)$, d'où le résultat.

Proposition 8 *La mesure μ est entièrement déterminée par le poids ϕ.*

Démonstration. D'après la proposition précédente, la mesure μ est portée par un compact $K \subset \mathscr{E}$, et la connaissance de ϕ donne la valeur de l'intégrale des fonctions sur K de la forme $f \to \mathrm{tr}(Mf)$ où $M \in \mathscr{A}^\circ(G)$. D'après la proposition 4, le théorème de Stone-Weierstrass montre que cette algèbre de fonctions est dense dans l'algèbre des fonctions continues sur K, et donc, la mesure μ est entièrement déterminée par la donnée de ϕ.

En particulier, la proposition 8 montre que les exponentielles ν-harmoniques sont sur les génératrices extrémales du cone $\mathscr{H}$;

On a donc montré le résultat suivant:

Théorème 1 *Sous l'hypothèse h_ν, les solutions du problème* (P) *sont les poids de la forme $\phi = \int_{\mathscr{E}_\nu} \mathrm{tr}(f.)\, d\mu(f)$ où μ est une mesure Borélienne positive finie sur l'ensemble $\mathscr{E}_\nu$ des exponentielles ν-harmoniques, la mesure μ étant uniquement déterminée par le poids ϕ.*

4 Quelques exemples

Proposition 9 *Si G est un groupe fini, l'ensemble des exponentielles de G est réduit à $\{\lambda_e\}$.*

Démonstration. Tout élément de $\hat{\mathscr{A}}(G) = \mathscr{A}(G)$ s'écrit $f = \sum_{g \in G} \alpha_g \lambda_g$ avec $\alpha_g \in \mathbb{C}$, et l'équation $\Delta(f) = f \otimes f$ donne $\sum_{g \in G} \sum_{h \in G} \alpha_g \alpha_h \lambda_g \otimes \lambda_h = \sum_{g \in G} \alpha_g \lambda_g \otimes \lambda_g$. Comme les $\lambda_g \otimes \lambda_h$ forment une base de $\hat{\mathscr{A}}(G) \otimes \hat{\mathscr{A}}(G)$, on voit que les solutions non nulles de cette équation sont les λ_g, $g \in G$. Si λ_g est une exponentielle, sa composante sur chaque M_x est une matrice unitaire et positive, donc c'est Id_{M_x}, et $g = e$.

Ce cas très simple est le pendant du résultat de Choquet et Deny sur les groupes compacts.

Proposition 10 *Si le groupe H n'admet pas de morphismes non-triviaux à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et ν est un état tracial vérifiant l'hypothèse h_ν, l'ensemble des exponentielles ν-harmoniques est réduit à $\{\lambda_e\}$.*

Démonstration. D'après la proposition 5 si f est une exponentielle, pour tout $x \in \Gamma$ on a:

$$\text{dét}(f_x) = 1.$$

ν étant tracial, ν^{*n} l'est également pour tout $n \geqq 1$, et donc il existe des constantes $c_x^n \geqq 0$ telles que

$$\sum_{x \in \Gamma} c_x^n (d_x)^2 = 1, \quad \text{et} \quad \nu^{*n} = \sum_{x \in \Gamma} c_x^n \, d_x \, \text{tr}_x.$$

Si f est ν-harmonique, on a $\nu^{*n}(i(f)) = 1$ pour tout $n \geqq 1$.

La composante de f dans M_x est une matrice positive de déterminant 1, dont la trace est donc $\geqq d_x$ avec égalité uniquement si c'est la matrice identité.

On a donc

$$\nu^{*n}(i(f)) = \sum_{x \in \Gamma} c_x^n \, d_x \, \text{tr}_x(f_x) \geqq \sum_{x \in \Gamma} c_x^n (d_x)^2 = 1$$

avec égalité dans le cas où $f_x = I_{M_x}$ pour tout x de Γ tel que $c_x^n \neq 0$, or d'après l'hypothèse h_ν, il existe pour tout $x \in \Gamma$ un entier n tel que $c_x^n > 0$, ce qui montre que $f = \lambda_e$.

Nous allons maintenant déterminer les éléments primitifs et les exponentielles de l'algèbre $\hat{\mathscr{A}}(\text{SU}(n))$, pour $n \geqq 2$.

On notera x_1 la représentation de base (de dimension n) de $\text{SU}(n)$.

Proposition 11 *Soit g un élément de $\text{SL}(n, \mathbb{C})$, il existe un élément primitif de $\hat{\mathscr{A}}(G)$, λ_g, dont la composante sur M_{x_1} est g. De plus λ_g est une exponentielle si et seulement si g est une matrice hermitienne positive.*

Démonstration. La représentation régulière à gauche permet d'identifier l'algèbre de Lie $\text{su}(n)$ à une sous algèbre de Lie de $\hat{\mathscr{A}}(G)$, et avec cette identification, si $a \in \text{su}(n)$, on a $\Delta(a) = a \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes a$, et $\lambda_{\exp a} = (\text{EXP}\, a_x)_{x \in \Gamma}$, où on a désigné par exp l'application exponentielle $\text{su}(n) \to \text{SU}(n)$, par EXP l'exponentielle dans $\hat{\mathscr{A}}(G)$, (définie par la série usuelle), et a_x est la restriction à E_x de $\frac{d}{dt} \lambda_{\exp(ta)|t=0}$.
Dans l'identité $\Delta(\text{EXP}\, ua) = \text{EXP}\, ua \otimes \text{EXP}\, ua$ dans $\hat{\mathscr{A}}(G) \otimes \hat{\mathscr{A}}(G)$ les composantes de chacun des deux membres dans $M_x \otimes M_y$ sont des fonctions analytiques de u pour tout $(x, y) \in \Gamma^2$, et par conséquent, cette identité se prolonge de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$. Comme toute matrice de $\text{SL}(n, \mathbb{C})$ peut s'écrire $\exp(ua)$ où $u \in \mathbb{C}$ et $a \in \text{su}(n)$, on en déduit la première partie de la proposition 10. Si λ_g est une exponentielle, alors g est hermitienne positive, et réciproquement, si g est hermitienne positive, $g = \exp(ia)$ et $\text{EXP}(ia)^* = \text{EXP}(ia)$ donc λ_g est hermitienne et comme $\lambda_{\exp(ita)}$ est une famille à un paramètre continue d'éléments hermitiens inversibles reliant λ_e à λ_g, on en déduit que λ_g est positive.

Nous allons montrer que la proposition 11 fournit toutes les éléments primitifs de $\hat{\mathscr{A}}(G)$.

Soit $f = (f_x)_{x \in \Gamma}$ un élément primitif de $\hat{\mathscr{A}}(G)$.

Lemme 12 *Soit $g = (g_x)_{x \in \Gamma}$ une élément primitif telle que $g_{x_1} = f_{x_1}$, alors, $g = f$.*

Démonstration. Pour toute représentation irréductible x de $\text{SU}(n)$, il existe un entier k tel que x figure dans la décomposition en composantes irréductibles de $(x_1)^{\otimes k}$ (cf. Bröcker et tom Dieck [4]).

Considérons

$$(\mathrm{id}\otimes\Delta)^{k-1}\circ\Delta(g)_{|(E_{x_1})^{\otimes k}}=g^{\otimes k}_{|(E_{x_1})^{\otimes k}}=(g_{x_1})^{\otimes k}_{|(E_{x_1})^{\otimes k}}.$$

Les restrictions de ces éléments à la composante de type x de $(E_{x_1})^{\otimes k}$ sont données par g_x et f_x, et par conséquent $g_x=f_x$.

Le groupe $\mathrm{SU}(n)$ a une seule représentation de dimension 1 (pour $n\geqq 2$), et donc si f est une exponentielle de $\hat{\mathscr{A}}(\mathrm{SU}(n))$, $\mathrm{d\acute{e}t}(f_{x_1})=1$. On déduit alors de la proposition 11 et du lemme 12 le résultat suivant:

Théorème 2 *Les élément primitifs de $\hat{\mathscr{A}}(\mathrm{SU}(n))$ sont les éléments λ_{g} où $g\in \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$.*

On vérifie aisément que l'application $g\to\lambda_g\in\hat{\mathscr{A}}(G)$ est un homéomorphisme, et en composant avec l'application exponentielle, on voit que $\mathscr{E}$ est homéomorphe à l'espace vectoriel des matrices $n\times n$, hermitiennes de trace nulle.

Donnons maintenant un critère permettant de vérifier qu'un état vérifie l'hypothèse h_ν.

Proposition 12 *Soit ν un état pour lequel il existe un k tel que la restriction á M_{x_1} de ν^{*k} est donnée par un élément inversible de M_{x_1}, alors, ν vérifie l'hypothèse h_ν.*

Démonstration. Il suffit de la vérifier dans le cas où ν est de la forme $\mathrm{tr}(p.)$ avec $p\in M_{x_1}$, inversible. La matrice p peut s'écrire $(\mathrm{d\acute{e}t}\,p)^{1/n}\not{p}$ *où* $\not{p}$ est de déterminant 1. Soit $x\in\Gamma$, il existe un k tel que la représentation x apparaisse dans la décomposition de $(x_1)^{\otimes k}$ en composantes irréductibles.

Considérons $\not{p}^{\otimes k}$ agissant sur $(E_{x_1})^{\otimes k}$, sa restriction aux composantes du type x y est égale à la restriction de $(\mathrm{id}\otimes\Delta)^{k-1}\circ\Delta(\lambda_{\not{p},x})$ et par conséquent, pour $a_x\in M_x$, positif, on a

$$\nu^{*k}(a_x)=\mathrm{tr}(p^{\otimes k}(\mathrm{id}\otimes\Delta)^{k-1}\circ\Delta(a_x))=m(\mathrm{d\acute{e}t}\,p)^{1/n}\,\mathrm{tr}(\lambda_{\not{p},x}\,a_x)$$

où m est le nombre de fois que x apparait dans la représentation $(x_1)^{\otimes k}$. Comme $\lambda_{\not{p},x}$ est inversible dans M_x, il existe une constante c telle que pour tout poids α de M_x, $\nu^{*k}\geqq c\alpha$.

Pour conclure il nous reste à montrer comment les résultat précédents fournissent une réponse positive au problème posé au début de l'introduction. Rappelons les résultats de [3]. On prend $G=\mathrm{SU}(n)$ et ν est l'état $\frac{1}{n}\mathrm{tr}_{x_1}$. On montre alors que l'opérateur Q restreint à la sous algèbre engendrée par le sous groupe diagonal de $\mathrm{SU}(n)$ est l'opérateur de transition d'une chaine de Markov sur un réseau inclus dans $\mathbb{R}^{n-1}$ engendré par n vecteurs e_i vérifiant $\langle e_i|e_j\rangle=\delta_{ij}-\frac{1}{n}$. La restriction de Q au centre de l'algèbre $\mathscr{A}(\mathrm{SU}(n))$ définit quant à lui une chaine de Markov sur l'intersection de ce réseau avec un cone de $\mathbb{R}^{n-1}$ (une chambre de Weyl). De plus, cette deuxième chaine de Markov s'obtient à partir de la première en tuant celle-ci à sa sortie de la chambre de Weyl, puis en conditionnant ce processus tué à partir à l'infini à l'aide d'une fonction harmonique positive. Le problème posé dans l'introduction est de montrer que la deuxième chaine de Markov admet une seule fonction harmonique positive (à une constante multiplicative près), c'est à dire montrer que les seuls éléments centraux positifs de $\hat{\mathscr{A}}(G)$ qui vérifient $Q(h)=h$ sont les multiples positifs de λ_e. On a vu après le lemme 4 que les solutions de $Q(h)=h$ et les solutions de (P) se correspondent. D'après la proposition 11, v vérifie l'hypothèse h_v, donc le théorème 1 montre qu'il suffit de vérifier que la seule exponentielle v-harmonique de $\hat{\mathscr{A}}(\mathrm{SU}(n))$ est λ_e; or v est un état tracial, et $\mathrm{SU}(n)$ vérifie l'hypothèse de la proposition 10, donc cette dernière proposition permet de conclure.

Références

1. Abe, E.: Hopf algebras. (Camb. Tracts Math., vol. 74) Cambridge: Cambridge University Press 1980
2. Accardi, L., Frigerio, A., Lewis, J.T.: Quantum stochastic processes. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **18**, 97–133 (1982)
3. Biane, Ph.: Quantum random walks on the dual of SU(n). Probab. Theory Relat. Fields **89**, 117–129 (1991)
4. Bröcker, T., tom Dieck, T.: Representations of compact Lie groups. (Grad. Texts Math. vol. 98) Berlin Heidelberg New York: Springer 1985
5. Dellacherie, C., Meyer, P.A.: Probabilités et potentiel, tome II. Paris: Hermann 1983
6. Deny, J.: Sur l'équation de convolution $\mu=\mu*\sigma$. In: Séminaire de théorie du potentiel, 4e année, 1959–1960, n^0 5. Paris: Sécretariat mathématiques 1960
7. Dixmier, J.: Les C^*-algèbres et leurs représentations. Paris: Gauthier-Villars 1964