Probab. Th. Rel. Fields 87, 189–207 (1990)

Probability Theory and Related Fields

Une application de la théorie des excursions à une diffusion réfléchie dégénérée

Bernard Lapeyre
CERMA-ENPC La Courtine, F-93167 Noisy le Grand, France

Reçu 18 juillet 1989; en forme revisée 13 juin 1990

Summary. We consider the $\mathbf{R}^2$-valued reflected stochastic differential equation associated with the degenerated differential operator $(1/2)\partial^2/\partial x^2 + x\partial/\partial y$. We study the excursion phenomenon around the point (0, 0). We are able to identify the law of the inverse of the local time as a stable subordinator with order 1/4 and to give for it an occupation time formula. These facts enable us to study the behavior of the law of the process near the point (0, 0) and to refine, in our case, results obtained by Krée (1985) by means of analytical methods.

Résumé. Nous considérons l'équation différentielle stochastique réfléchie à valeur dans $\mathbf{R}^2$ associée à l'opérateur différentiel dégénéré $(1/2)\partial^2/\partial x^2 + x\partial/\partial y$. On étudie alors le phénomène d'excursion autour du point origine. En particulier, on peut identifier la loi de l'inverse du temps local comme un subordinateur stable d'ordre 1/4 et en donner une formule du type temps d'occupation. Ceci permet alors d'étudier le comportement de la loi du processus au voisinage du point origine pour préciser, dans ce cas particulier, des résultats obtenus par Krée (1985) grâce à des méthodes analytiques.

1. Introduction

Le comportement des diffusions réfléchies à la frontière est bien connu lorsque la partie transverse au bord de la diffusion est non nulle (voir par exemple [7]). Nous allons nous intéresser ici à un cas où cette partie transverse est nulle. Ce type de dégénérescence se rencontre dans la modélisation de certains problèmes mécaniques régis par une équation:

$$\begin{cases} d x_t = y_t\, d t \\ d y_t = f(t, x_t, y_t)\, d t + d\phi_t \end{cases}$$

ϕ_t modélisant les sollicitations aléatoires et f le comportement déterministe du système. Si on impose à $|x_t|$ de rester inférieur à une valeur donnée, on peut modéliser le système par un processus réfléchi avec dégénérescence à la frontière.

Ces équations apparaissent naturellement lorsque l'on modélise le mouvement d'une gouverne d'avion soumise à la turbulence du vent (voir Poirion et Angélini [11]).

P. Krée [9] s'intéresse à ce problème en utilisant des méthodes analytiques. Il montre que sous certaines hypothèses sur le processus, la densité à l'intérieur ne peut avoir de limite en temps que distribution. Les travaux de Poirion et Angélini précisent numériquement ce résultat et indiquent que la densité de la loi de la solution à l'instant t tend vers l'infini, si on se rapproche par l'intérieur du domaine d'un point régulier pour lui-même du processus.

Notre approche est différente de celle de Krée à la fois par ses méthodes et par ses résultats. Nous utilisons, en effet, des résultats de théorie des processus de Markov, en particulier la description du phénomène d'excursion autour de points réguliers pour eux-mêmes, grâce au temps local et à la mesure d'Itô associés. D'autre part nous ne démontrons pas de résultats généraux mais nous étudions en détail l'exemple le plus simple représentatif de ce phénomène d'explosion: la première coordonnée est un mouvement brownien et la deuxième est l'intégrale de ce mouvement brownien réfléchie au point 0.

Nous commençons, dans la deuxième partie, par faire quelques rappels sur la description du phénomène d'excursion au moyen du processus ponctuel de Poisson et par établir la propriéte de récurrence du processus autour du point (0, 0). La troisième partie est consacrée à la recherche d'une mesure invariante pour un processus auxiliaire. On en déduit dans la quatrième partie, la loi du temps local au point (0, 0) et on termine en établissant le lien entre le phénomène d'excursion autour de (0, 0) et l'explosion de la loi en ce point.

2. Position du problème. Rappels

Soit $z=(x, y)$ un point de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^+$, et $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, (\beta_t)_{t\geq 0})$ un mouvement brownien. Nous allons étudier le processus $Z_t=(X_t, Y_t)$ solution du système différentiel suivant:

$$(1) \qquad \begin{cases} X_t^z = x+\beta_t \\ Y_t^t = y + \int_0^t X_s^z\, ds + A_t^z \\ Y_t^z \geqq 0 \\ A_t^z \text{ est un processus croissant} \\ \int_0^t \mathbf{1}_{\{s\in\mathbf{R}^+,\, Y_s^z=0\}}\, dA_s^z = A_t^z \end{cases}$$

Les résultats classiques sur les équations différentielles stochastiques réfléchies (voir [4]) prouvent l'existence, l'unicité forte et l'unicité en loi des solutions du système (1). De plus, si l'on note $x^-=\sup(0, -x)$:

$$Y_t^z = y + \int_0^t X_u^z\, du + \sup_{s\leqq t}\left(y+\int_0^s X_u^z\, du\right)^- .$$

D'autre part on peut montrer que $(Z_t^z)_{t \geqq 0}$ est un processus de Markov fortement fellerien de semigroupe:

$$P_t f(z) = \mathbf{E}(f(Z_t^z))$$

On notera $\mathbf{P}_z$ la loi de Z^z sur l'espace canonique des fonctions continues à valeurs dans $\mathbf{R}^2$. Les applications coordonnées sur cet espace canonique seront notées $Z_t = (X_t, Y_t)$. Sous $\mathbf{P}_z$, X est un mouvement brownien issu de x et:

$$Y_t = y + \int_0^t X_u \, du + \sup_{s \leqq t} \left(y + \int_0^s X_u \, du \right)^- .$$

Nous allons étudier en détail le processus ainsi défini.

2.1. Théorie des excursions – Notations

Nous serons amenés dans cet article à utiliser la théorie du processus ponctuel de Poisson associé à un point régulier pour lui-même d'un processus de Markov pour trois processus différents: le mouvement brownien $(X_t, t \geqq 0)$, le processus $(Z_t, t \geqq 0)$ et un processus auxiliaire qui sera introduit plus tard. Nous allons, dans ce paragraphe, rappeler les grandes lignes de cette théorie dans un cadre général. Pour plus de détail on pourra consulter [12] ou l'article original de Itô [8].

On se donne un semigroupe markovien fellerien P_t sur un espace E localement compact à base dénombrable et la réalisation canonique c.à.d.l.à.g. de ce semigroupe $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{F}_t, Z_t, P_z, \theta_t)$. La tribu $\mathscr{F}_t$ est la complétée de la tribu $\sigma(Z_s, s \leqq t)$.

On suppose que a est un point régulier pour lui-même, ce qui signifie que si l'on note $D_t^Z = \inf\{s > t, Z_s = a \text{ ou } Z_{s-} = a\}$ on a $P_a(D_0^Z = 0) = 1$. On note $M^Z = \{t \geqq 0, Z_t = a \text{ ou } Z_{t-} = a\}$. Son complémentaire est une réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints. On notera $M_{\rightarrow}^Z$ l'ensemble des extrémités gauches de ces intervalles. Dans tous les cas que nous traiterons on pourra supposer, de plus, que M^Z est P_a presque sûrement non borné. Le temps local markovien de Z au point a est l'unique (à un coefficient multiplicatif près) fonctionnelle additive continue parfaite portée par l'ensemble M^Z. On notera $(L_t^Z, t \geqq 0)$ cette fonctionnelle additive que l'on peut normaliser par la condition:

$$E_z\left(\int_0^\infty e^{-s} \, dL_s^Z \right) = E_z(e^{-D_0^Z}).$$

W_e^Z sera l'espace des excursions de Z autour du point a:

$$\begin{aligned} W_e^Z = \{f\colon \mathbf{R}^+ \to E, &\text{ telle que} \\ &\text{si } D^Z(f) = \inf\{t > 0, f(t) \text{ ou } f(t-) = a\} \\ &0 < D^Z(f) < \infty, f(t) = a, \text{ si } t \geqq D^Z(f)\}. \end{aligned}$$

A chaque extrémité gauche $g \in M^Z_{\rightarrow}$, on associe un élément de W^Z_e en posant:

$$\begin{cases} e_g(\omega)(s) = Z_{g+s} & \text{si } 0 \leqq s < D^Z_g - g \\ e_g(\omega)(s) = a & \text{sinon} \end{cases}.$$

Il est alors possible de définir un processus ponctuel N^Z à valeurs dans $(W^Z_e, \mathscr{W}^Z_e)$ muni de la tribu rendant mesurables les applications coordonnées en posant:

$$N^Z(t, de) = \sum_{g \in M^Z_{\rightarrow}, L^Z_g \leqq t} \delta_{e_g}(de).$$

Résumons les résultats de Itô. On notera π_s les applications coordonnées sur W^Z_e et $\tau^Z_t = \inf\{s > 0, L^Z_s > t\}$.

Théorème 2.1. *Sous P_a, N^Z est un $\mathscr{F}_{\tau^Z_t}$-processus ponctuel de Poisson de mesure caractéristique n^Z que l'on appelle mesure des excursions de Z. n^Z est une mesure positive et σ-finie. Sous n le «processus» $(\pi_s, s > 0)$ est markovien de semigroupe $Q_t f(z) = \mathbf{E}_z(f(Z_{t \wedge D^Z_0}))$.*

On en déduit une formule utile parfois appelée formule de balayage.

Proposition 2.2. *Si c est une variable aléatoire positive sur $(W^Z_e, \mathscr{W}^Z_e)$ et H est un processus $\mathscr{F}_{D^Z_t}$-prévisible positif, on a alors pour tout $z \in E$:*

$$\mathbf{E}_z\left(\sum_{g \in M^Z_{\rightarrow}, g > 0} H_g(\omega)\, c(e_g(w))\right) = n^Z(c)\, \mathbf{E}_z\left(\int_0^\infty H_s(\omega)\, dL^Z_s(\omega)\right).$$

Notons enfin que τ^Z_t est, sous $\mathbf{P}_a$, un subordinateur (un p.a.i.s. croissant) de fonction de Lévy $g(p)$ (voir [3]) donnée par:

$$\mathbf{E}_a(e^{-p\tau^Z_s}) = e^{-sg(p)} \quad \text{où} \quad g(p) = \mathbf{E}^Z_a\left(\int_0^\infty e^{-ps}\, dL^Z_s\right).$$

Nous allons maintenant utiliser ces notions pour le mouvement brownien.

2.2. Les excursions du mouvement brownien

Nous noterons L^X_t le temps local markovien en 0 du mouvement brownien X_t et:

$$\tau^X_t = \inf\{s > 0, L^X_s > t\}.$$

On sait, de plus, que L^X_t peut être obtenu, sous P_z par:

$$\mathrm{L}^X_t = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s \in [-\varepsilon, +\varepsilon]\}}\, ds \ \text{ p.s.}$$

Soit $\mathbf{N}^X(\cdot)$ le processus ponctuel de Poisson associé aux excursions de ce mouvement brownien à valeurs dans l'espace $(W^X_e, \mathscr{W}^X_e)$. On note $n^X(\cdot)$ sa mesure caractéristique.

La propriété de scaling de X permet de déduire une propriété du même type sous n^X. Soit c une variable aléatoire à valeurs positives sur $(W_e^X, \mathscr{W}_e^X)$, *et* c^λ la variable aléatoire définie par $c^\lambda(w)=c(w^\lambda)$ où $w^\lambda(t)=w(\lambda^2 t)/\lambda$ on a $\lambda n^X(c^\lambda)=n^X(c)$. Notons $D^X=\inf\{s>0, \pi_s=0\}$ et appliquons ce résultat à:

$$c=\mathbf{1}_{\left\{\int_0^{D^X} \pi_s\, ds>1\right\}},$$

on obtient:

$$n^X\left(\left|\int_0^{D^X} \pi_s\, ds\right|>\lambda^3\right)=\frac{1}{\lambda}\, n^X\left(\left|\int_0^{D^X} \pi_s\, ds\right|>1\right).$$

On en déduit la «loi» de $\int_0^{D^X} \pi_s\, ds$ sous n^X en utilisant la symétrie du mouvement brownien. Si A est un borélien de $\mathbf{R}$:

$$n^X\left(\int_0^{D^X} \pi_s\, ds \in A\right)=C \int_A \frac{dx}{|x|^{4/3}},$$

C étant une constante positive.

2.3. *Excursion de Z autour de* (0, 0)

Nous allons, maintenant, montrer que (0, 0) est le siège d'un phénomène d'excursions pour le processus Z.

La propriété de scaling du mouvement brownien implique une propriété du même type pour Z.

Proposition 2.3. *Si on pose:*

$$Z_t^\lambda=\left(\frac{1}{\lambda}\, X_{\lambda^2 t}, \frac{1}{\lambda^3}\, Y_{\lambda^2 t}\right),$$

alors sous $\mathbf{P}_{(0,0)}$ *la loi de* $(Z_t^\lambda)_{t\geq 0}$ *est identique à celle de* $(Z_t)_{t\geq 0}$.

Démonstration. C'est une conséquence de l'unicité en loi de l'équation différentielle stochastique réfléchie (1). □

On déduit de cette proposition une propriété de régularité du point (0, 0) pour lui-même.

Corollaire 2.4. *Si* $D_0^Z=\inf\{t>0, Z_t=(0,0)\}$, *alors* $\mathbf{P}_{(0,0)}(D_0^Z=0)=1$.

Démonstration. Le corollaire s'obtient alors en remarquant que:

$$D_0^Z \overset{(\text{loi})}{=} D_0^{Z^\lambda}=\frac{1}{\lambda^2}\, D_0^Z.$$

On en déduit que:

$$\forall x<+\infty \qquad \mathbf{P}_{(0,0)}(D_0^Z<x)=\mathbf{P}_{(0,0)}(D_0^Z=0)=\mathbf{P}_{(0,0)}(D_0^Z<+\infty).$$

La loi du zéro-un permet alors d'affirmer que soit $D_0^Z=0$ p.s., soit $D_0^Z=+\infty$ p.s. Nous allons voir que $\mathbf{P}(D_0^Z<+\infty)=1$. En effet si:

$$T=\inf\{t>0,\ Y_t=0\},$$

T a la même propriété de scaling que D_0^Z et donc on a soit $\mathbf{P}_{(0,0)}$ p.s. $T=0$, soit $\mathbf{P}_{(0,0)}$ p.s. $T=\infty$. Cette dernière possibilité est exclue car elle implique que $\mathbf{P}_{(0,0)}$ p.s. $Y_t=\int_0^t X_s\,ds>0$. Donc $T=0$ $\mathbf{P}_{(0,0)}$ p.s. Posons maintenant $T_\varepsilon=\inf\{s\geqq\varepsilon;\ Y_s=0\}$ et $U_\varepsilon=\inf\{s\geqq T_\varepsilon;\ X_s=0\}$. Remarquons que $\mathbf{P}_{(0,0)}$ p.s. $T_\varepsilon<\infty$ pour ε assez petit dépendant de ω. De plus, il est facile de voir que en T_ε, $X_{T_\varepsilon}\leqq 0$, il en résulte que si $t\in[T_\varepsilon, U_\varepsilon[$ alors $Y_t=0$. La récurrence du movement brownien prouve, enfin, que $U_\varepsilon<+\infty$, donc $Z_{U_\varepsilon}=(0,0)$. □

On note alors le temps local markovien de Z au point $(0,0)$ $(L_t^Z)_{t\geqq 0}$.

Proposition 2.5. *Sous chaque* $\mathbf{P}_z^Z$ *on a* $M_{\rightarrow}^X\cap M^Z=\emptyset$. *On en déduit que presque sûrement* dL_t^Z *et* dL_t^X *sont des mesures étrangères.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord qu'il suffit de démontrer le résultat sous $\mathbf{P}_{(0,0)}$. Posons, si $a>0$, $\hat{X}_t=X_{\tau_a^X-t}$, pour $0\leqq t\leqq\tau_a^X$. Notons que $(X_t,\ 0\leqq t\leqq\tau_a^X)$ et $(\hat{X}_t,\ 0\leqq t\leqq\tau_a^X)$ ont même loi. Nous allons démontrer que si q est un rationnel, $q<\tau_a^X$ et si $T_q=\inf\{t>q,\ \hat{X}_t=0\}$, alors $\tau_a^X-T_q\notin M^Z$. Le résultat s'en déduira. On a:

$$Y_t=\int_0^t X_s\,ds-\inf_{u\leqq t}\left\{\int_0^u X_s\,ds\right\},$$

donc:

$$\{\tau_a^X-T_q\in M^Z\}=\left\{\int_u^{\tau_a^X-T_q} X_s\,ds\leqq 0,\ 0\leqq u\leqq\tau_a^X-T_q\right\}$$

$$=\left\{\int_{T_q}^{v}\hat{X}_s\,ds\leqq 0,\ T_q\leqq v\leqq\tau_a^X\right\}.$$

Mais ce dernier événement est de probabilité nulle sous $\mathbf{P}_{(0,0)}$.

De plus, si h est une variable aléatoire positive, en utilisant la formule de balayage pour la mouvement brownien, on obtient:

$$\mathbf{E}_z\left(\sum_{g\in M_{\rightarrow}^X,\,g>0}\mathbf{1}_{\{g\in M^Z\}}\,h(e_g)\right)=n^X(h)\,\mathbf{E}_z\left(\int_0^\infty\mathbf{1}_{\{s\in M^Z\}}\,dL_s^X\right)$$

dL_t^Z étant portée par M^Z, on en déduit que dL^Z et dL^X sont des mesures étrangères. □

Nous allons maintenant étudier le processus $U_t=Y_{\tau_t^X}$, et en particulier déterminer une mesure invariante pour ce processus.

3. Calcul d'une mesure invarinate pour U

Commençons par démontrer le caractère markovien du processus $(U_t,\ t \geqq 0)$ et par calculer son semi-groupe. Nous noterons $V_t = y + \int_0^{\tau_t^X} X_s\, ds$.

Lemme 3.1. *Sous* $\mathbf{P}_z$, (V_t) *est un processus à accroissements indépendants stationnaires de mesure de Levy* $\mu(dx) = C\, dx/|x|^{4/3}$. *De plus:*

$$U_t = V_t + \sup_{s \in [0,t]} V_s^- .$$

Démonstration. On a:

$$\begin{aligned} V_t &= y + \int_0^{\tau_0^X} X_s\, ds + \int_{\tau_0^X}^{\tau_t^X} X_s\, ds \\ &= V_0 + N^X\left(t, \int_0^{D^X} \pi_s\, ds\right), \end{aligned}$$

le caractère poissonnien de N^X prouve alors la première affirmation. L'expression de la mesure de Levy est une conséquence du calcul de la loi de $\int_0^{D^X} \pi_s\, ds$ sous n^X. D'autre part, si l'on note $Y_t^0 = y + \int_0^t X_s\, ds$, on a:

$$Y_{\tau_t^X} = Y_{\tau_t^X}^0 + \sup_{s \in [0, \tau_t^X]} (Y_s^0)^- .$$

Le supremum précédent est atteint en un zéro de X, ceci nous donne le deuxième résultat.

Lemme 3.2. *Sous* $\mathbf{P}_z$*:*

$$U_t - U_0 = \sum_{s \leqq t,\, \Delta V_s \neq 0} \phi(U_{-s}, \Delta V_s)$$

où:

$$\phi(u, \delta v) = \delta v\, \mathbf{1}_{\{u + \delta v \geqq 0\}} - u\, \mathbf{1}_{\{u + \delta u < 0\}}$$

U_t *est un processus de Feller. De plus si* f *est une fonction lipschitzienne tendant vers* 0 *à l'infini,* f *est dans le domaine du générateur infinitésimal* $\mathscr{A}$ *et:*

$$\mathscr{A} f(x) = 3x^{-1/3}\{f(0) - f(x)\} + \int_{y+x \geqq 0} \{f(x+y) - f(x)\} \frac{dy}{|y|^{4/3}}.$$

Démonstration. Notons tout d'abord que, si $(u_i)_{i \geqq 1}$ est une suite de nombres réels, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

1. $a_p = a_0 + \sum_{i=1}^{p} u_i + \sup_{1 \leqq k \leqq p} \left(a_0 + \sum_{i=1}^{k} u_i\right)^- \quad$ si $\quad p \geqq 0$.
2. $a_{p+1} - a_p = \phi(a_p, u_{p+1}),\quad$ si $\quad p \geqq 0$.

Posons $V_t^n = V_0 + \sum_{s \leqq t} \Delta V_s \mathbf{1}_{\{|\Delta V_s| \geqq 1/n\}}$ et $U_t^n = V_t^n + \sup_{s \in [0,T]} (V_s^n)^-$. La mesure de Levy de V intégre x au voisinage de 0, de plus:

$$\mathbf{E}_z\left(\sup_{s \leqq T} |V_s - V_s^n|\right) \leqq \mathbf{E}_z\left(\sum_{s \leqq T, \Delta V_s \neq 0} |\Delta V_s| \mathbf{1}_{\{|\Delta V_s| \leqq 1/n\}}\right) = T\mu(|x| \mathbf{1}_{[0,1/n]}(|x|))$$

donc $\lim_{n \to \infty} \mathbf{E}_z(\sup_{t \in [0,T]} |V_t - V_t^n|) = 0$. On extrait alors une sous suite de V_n (que l'on continue à noter V_n) telle que V soit limite uniforme sur $[0, T]$, presque sûre de V_n. On en déduit immédiatement que, presque sûrement:

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{t \in [0,T]} |U_t - U_t^n| = 0.$$

La remarque précédente montre, en outre, que:

$$U_t^n = \sum_{s \leqq t} \mathbf{1}_{\{|\Delta V_s| \geqq 1/n\}} \phi(U_{s-}^n, \Delta V_s).$$

Pour conclure il suffit de démontrer que:

$$A_n(t) = \sum_{s \leqq t, \Delta V_s \neq 0} \mathbf{1}_{\{|\Delta V_s| \geqq 1/n\}} \phi(U_{s-}^n, \Delta V_s) - \phi(U_{s-}, \Delta V_s),$$

tend vers 0 presque sûrement. Pour cela remarquons que, presque sûrement, $\sum_{s \leqq t, \Delta V_s \neq 0} |\Delta V_s| < +\infty$, puis que:

$$\sum_{s \leqq t, \Delta V_s \neq 0} \mathbf{1}_{\{|\Delta V_s| < 1/n\}} \phi(U_{s-}^n, \Delta V_s) \leqq \sum_{s \leqq t, \Delta V_s \neq 0} \mathbf{1}_{\{|\Delta V_s| < 1/n\}} |\Delta V_s|$$

tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. De plus le théorème de convergence dominée par rapport à la mesure $\sum_{s \leqq t} \delta_{(|\Delta V_s|)}$, la continuité de ϕ et la convergence uniforme de U_n vers U prouvent que:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{s \leqq t, \Delta V_s \neq 0} (\phi(U_{s-}^n, \Delta V_s) - \phi(U_{s-}, \Delta V_s)) = 0$$

On en déduit que $\lim_{t \to 0} A_t^n = 0$, puis le premier résultat du lemme.

D'autre part, comme V_s est un p.a.i.s., on montre que $U_t = Y_{\tau_t^X}$ est un processus de Markov par rapport à la filtration $\sigma(X_s, s \leqq \tau_t^X)$ de semigroupe P_t^U:

$$P_t^U f(u) = \mathbf{E}_{(0,0)}(f(U_t^u))$$

où:

$$U_t^u = u + \sum_{s \leqq t} \phi(U_{s-}^u, \Delta V_s) = u + V_t + \sup_{s \leqq t} (u + V_s)^-.$$

Ce semigroupe est un semigroupe de Feller. En effet on a:

$$|U_t^x - U_t^y| \leqq |x-y| + |\sup_{s\leqq t}(x+V_s^0)^- - \sup_{s\leqq t}(y+V_s^0)^-|$$

$$\leqq 2|x-y|$$

(2) $$P_t^U f(x) \leqq \|f\|_\infty \mathbf{P}(U_t^x < x/2) + \sup_{[x/2,+\infty[} |f(x)|.$$

Enfin $\mathbf{P}_{(0,0)}(U_t^x < x/2) \leqq \mathbf{P}_{(0,0)}(V_t \leqq -x/2)$, ce qui entraîne que:

$$\lim_{x\to\infty} P_{(0,0)}(U_t^x < x/2) = 0.$$

De plus, si f est une fonction lipschitzienne bornée:

$$\mathbf{E}_{(0,0)}(f(U_t^u) - f(u)) = \mathbf{E}_{(0,0)}\Bigg(\sum_{s\leqq t,\, \Delta V_s \neq 0} [f(U_{s-}^u + \phi(U_{s-}^u, \Delta V_s)) - f(U_{s-}^u)]\Bigg),$$

puis:

$$\mathbf{E}_{(0,0)}(f(U_t^u) - f(u)) = \int_0^t \mathbf{E}_{(0,0)}\left(\int [f(U_{s-}^u + \phi(U_{s-}^u, x)) - f(U_{s-}^u)]\, \mu(dx)\right) ds.$$

D'où:

$$P_t^U f(x) = f(x) + \int_0^t P_s^U \mathscr{A} f(x)\, ds.$$

Il est clair sur cette relation que, si $\mathscr{A} f(x)$ est continu et borné tendant vers 0 à l'infini, alors f est dans le domaine de $\mathscr{A}$. On en déduit que si f est lipschitzienne tendant vers 0 à l'infini alors f est dans le domaine de $\mathscr{A}$. □

Nous allons maintenant déterminer une mesure invariante pour le semigroupe P_t^U. Nous commençons par énoncer un lemme calculatoire qui sera utile par la suite.

Lemme 3.3. *Soit $\alpha = 5/6$, alors:*

$$\int_0^{+\infty} \frac{|u^{-\alpha} - 1|}{|u-1|^{4/3}} < +\infty$$

et:

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{-\alpha} - 1}{|u-1|^{4/3}} = 3$$

Démonstration. En posant $u' = 1/u$ entre 1 et $+\infty$, un calcul simple montre que:

$$I(\alpha) = \int_0^1 \left[\frac{u^{-\alpha} - 1}{|u-1|^{4/3}} + \frac{1}{|u-1|^{4/3}} \frac{u^\alpha - 1}{u^{2/3}}\right] du$$

De même, en posant, $v=u^{1-\alpha}$, on obtient:

$$\begin{aligned} I(5/6) &= 6\int_0^1 \frac{(v^5-1)(v-1)}{(1-v^6)^{4/3}}\,dv \\ &= -3\left.\frac{(1-v)^2}{(1-v^6)^{4/3}}\right|_0^1 \\ &= 3. \end{aligned}$$

Nous noterons dans la suite $m(n)=x^{-5/6}$. □

Lemme 3.4. *Si f une fonction lipschitzienne majorée par $K(f)$ $(1\wedge x^{-1/3})$, et si $m(x)=x^{-5/6}$, alors:*

$$\int_{x>0} \mathscr{A}f(x)\,m(x)\,dx=0.$$

Démonstration. Vérifions d'abord que $\int_{x>0} |\mathscr{A}f(x)|\,m(x)\,dx<+\infty$. Sous les hypothèses du lemme $\mathscr{A}f(x)$ est borné. De plus si x est assez grand:

$$\begin{aligned} |\mathscr{A}f(x)| &\leqq 3x^{-1/3}(f(0)-f(x)) \\ &\quad+\left|\int_0^{x/2} \frac{f(z)-f(x)}{|z-x|^{4/3}}\,dz\right|+\left|\int_{x/2}^{\infty} \frac{f(z)-f(x)}{|z-x|^{4/3}}\,dz\right| \\ &\leqq \|f\|_\infty \frac{K}{x^{1/3}}+\int_{\mathbf{R}} \frac{C_1|z|\wedge C_2(x)}{|z|^{4/3}}\,dz \end{aligned}$$

où C_1 est une constante de Lipschitz pour f et $C_2(x)\leqq K(f)\,x^{-1/3}$. On en déduit que:

$$|\mathscr{A}f(x)|\leqq C(f)(1\wedge x^{-2/9}) \tag{3}$$

Pour démontrer le lemme il suffit alors de vérifier que, si f est lipschitzienne bornée:

$$\int_0^\infty m(x)\,dx\int_0^\infty \frac{f(z)-f(x)}{|z-x|^{4/3}}\,dz=3\int_0^\infty [f(x)-f(0)]\,\frac{m(x)}{x^{1/3}}\,dx. \tag{4}$$

Pour cela supposons que $N>0$ et posons $g_n(x,z)=\mathbf{1}_{\{|x-z|>1/n\}}$. En utilisant le théorème de Fubini pour des fonctions intégrables, on obtient:

$$\begin{aligned} &\int_0^N m(x)\,dx\int_0^N g_n(x,z)\,\frac{f(z)-f(x)}{|z-x|^{4/3}}\,dz \\ &\quad=\int_0^N m(x)\,dx\int_0^N g_n(x,z)\,\frac{f(z)-f(0)}{|z-x|^{4/3}}\,dz \\ &\qquad+\int_0^N m(x)\,dx\int_0^N g_n(x,z)\,\frac{f(0)-f(x)}{|z-x|^{4/3}}\,dz \\ &\quad=\int_0^N [f(x)-f(0)]\,dx\int_0^N g_n(x,z)\,\frac{m(z)-m(x)}{|z-x|^{4/3}}\,dz \\ &\quad=\int_0^N [f(x)-f(0)]\,m(x)\,x^{-1/3}\,dx\int_0^{N/x} \mathbf{1}_{\left\{|u-1|\geqq\frac{1}{nx}\right\}}\,\frac{m(u)-1}{|u-1|^{4/3}}\,du. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\int_0^\infty \frac{|m(u)-1|}{|u-1|^{4/3}}\,du<\infty$ et que, si f est lipschitzienne majorée par $K(f)(1\wedge x^{-1/3})$:

$$\int_0^\infty |f(x)-f(0)|x^{-1/3}m(x)\,dx<\infty,$$

$$\int_0^\infty m(x)\,dx\int_0^\infty \frac{|f(z)-f(x)|}{|z-x|^{4/3}}\,dz<\infty,$$

on peut justifier les passages à la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, puis lorsque N tend vers $+\infty$. En utilisant, de plus, le lemme 3.3 on déduit (4). □

On peut maintenant démontrer que $\mathbf{1}_{\{x>0\}}m(x)\,dx$ est une mesure invariante pour le semigroupe P_t^U.

Théorème 3.5. *La mesure* $\nu(dx)=\mathbf{1}_{\{x>0\}}m(x)\,dx$ *est une mesure invariante pour le semigroupe* P_t^U.

Démonstration. Commençons par démontrer que si f est une fonction lipschitzienne majorée par $K(f)$ $(1\wedge x^{-1/3})$ alors on peut trouver $K_t(f)$ croissante en t, tel que:

$$P_t^U f(x)\leqq K_t(f)\,(1\wedge x^{-1/3}). \tag{5}$$

Si V_t^0 est un p.a.i.s. de mesure de Levy $c\,dx/|x|^{4/3}$ issu de 0, sous $\mathbf{P}$ on a (voir [5] p. 572): $\mathbf{P}(|V_1^0|>x)\leqq Kx^{-1/3}$. Par scaling on en déduit que $\mathbf{P}(|V_t^0|>x)$ est majoré par K_t $(1\wedge x^{-1/3})$ où K_t est croissant en temps.

En utilisant (2), il est facile de voir que, pour tout $t>0$, $P_t^U f$ est lipschitzienne. De plus on a:

$$|P_f^U f(x)|\leqq \mathbf{E}(|f(U_t^x)|\,\mathbf{1}_{\{U_t^x\leqq x/2\}})+\mathbf{E}(|f(U_t^x)|\,\mathbf{1}_{\{U_t^x>n/2\}}),$$
$$|P_t^U f(x)|\leqq K(f)\,(1\wedge (x/2)^{-1/3})+\|f\|_\infty\,\mathbf{P}(U_t^x\leqq x/2),$$

et $\mathbf{P}$ $(U_t^x\leqq x/2)\leqq \mathbf{P}(x+V_t^0\leqq x/2)\leqq K_t$ $(1\wedge x^{-1/3})$. On en déduit (5).

Si f est lipschitzienne et majorée par $K(f)$ $(1\wedge x^{-1/3})$, alors f est dans le domaine de $\mathscr{A}$, donc:

$$P_t^U f(x)=f(x)+\int_0^t P_s^U\,\mathscr{A} f(x)\,ds=f(x)+\int_0^t \mathscr{A}P_s^U f(x)\,ds.$$

De plus, en utilisant les estimations (3) et (5), on obtient:

$$\sup_{s\in[0,T]} |\mathscr{A}P_s^U f(x)|\leqq K_T(f)\,(1\wedge x^{-2/9}),$$

d'où

$$\int_{x>0} P_t^U f(x)\,m(x)\,dx=\int_{x>0} f(x)\,m(x)\,dx+\int_{x>0} m(x)\,dx\int_0^t \mathscr{A}P_s^U f(x)\,ds$$
$$=\int_{x>0} f(x)\,m(x)\,dx+\int_0^t ds\int_{x>0} \mathscr{A}P_s^U f(x)\,m(x)\,dx.$$

Mais, l'estimation (5) et le lemme 3.4 permettent alors d'affirmer que si $s \geqq 0$, $\int\limits_{x>0} \mathscr{A} P_s^U f(x)\, m(x)\, dx = 0$, d'où:

$$\int\limits_{x>0} P_t^U f(x)\, m(x)\, dx = \int\limits_{x>0} f(x)\, m(x)\, dx.$$

Enfin $f \to \int\limits_{x>0} P_t^U f(x) m(x) dx$ est une mesure de Radon positive sur $\mathbf{R}^+$ qui coïncide avec $m(x)\, dx$ sur les fonctions régulières à support compact, donc ces deux mesures sont égales.

Nous noterons $\mathbf{P}_u^U$ la famille de lois sur l'espace canonique des fonctions c.à.d.l.à.g. à valeurs dans $\mathbf{R}^+$ qui font des applications coordonnées (que l'on notera U_t) un processus de Markow de semigroupe P_t^U et issu de u. Nous allons maintenant étudier les excursions de U_t autour du point 0.

Lemme 3.6. *Sous* $\mathbf{P}_0^U$, $(U_{\lambda t},\, t \geqq 0) \overset{\text{(loi)}}{=} (\lambda^3 U_t,\, t \geqq 0)$. *En particulier, le point* 0 *est un point régulier pour lui-même.*

Démonstration. La loi $\mathbf{P}_0^U$ est identique à celle de $Y_{\tau_t^X}$ sous $\mathbf{P}_{(0,0)}$. De plus si l'on appelle L^{X^λ} le temps local en 0 de $X^\lambda = X_{\lambda^2 t}/\lambda$, on a successivement, sous $\mathbf{P}_{(0,0)}$, $\lambda L_t^X = L_{\lambda^2 t}^X$, $\lambda^2 \tau_t^{X^\lambda} = \tau_{\lambda t}^X$. Comme $\lambda^3 Y_t^\lambda = Y_{\lambda^2 t}$, on obtient pour $U_t^\lambda = Y_{\tau_t^{X^\lambda}}^\lambda$, $\lambda^3 U_t^\lambda = U_{\lambda t}$. Ceci prouve le premier point. Le deuxième point s'en déduit. □

On peut alors définir une mesure d'excursion pour le processus U autour du point 0. On notera L_t^U le temps local associé construit sur l'espace canonique et $n^U(\cdot)$ l'intensité du processus ponctuel de Poisson des excursions autour de ce point. $n^U(\cdot)$ est une mesure σ-finie sur l'espace $(W_e^U, \mathscr{W}_e^U)$ des lacets c.à.d.l.à.g. issus de 0.

Nous aurons besoin du lemme technique suivant dans la suite.

Lemme 3.7. *Si* $B_\varepsilon = \{x \in \mathbf{R},\, 0 \leqq x \leqq \varepsilon\}$, *on a:*

$$\mathbf{E}_u^U\left(\int_0^{D_0^U} \mathbf{1}_{\{U_s \in B_\varepsilon\}}\, ds\right) \leqq C\varepsilon^{1/3},$$

où C est une constante indépendante de u.

Démonstration. Remarquons que si $(V_s, s \geqq 0)$ est un p.a.i.s. de mesure de Levy $c\,dx/|x|^{4/3}$ issu de 0 sous $\mathbf{P}$, on a:

$$\mathbf{E}_u^U\left(\int_0^{D_0^U} \mathbf{1}_{\{U_s \in B_\varepsilon\}}\, ds\right) \leqq \mathbf{E}\left(\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{u+V_s \in B_\varepsilon\}}\, ds\right).$$

D'autre part, la transformée de Fourier de la loi de V_1 est dans L^1, donc V_1 admet une loi à densité bornée par une constante M. On en déduit, par scaling, que:

$$\mathbf{E}_u^U\left(\int_0^{D_0^U} \mathbf{1}_{\{U_s \in B_\varepsilon ds\}}\right) \leqq \int_0^\infty \mathbf{P}(u + s^3 V_1 \in B_\varepsilon)\, ds = \varepsilon^{1/3} \int_0^\infty \left(\frac{M}{s^3} \wedge 1\right) ds. \quad \square$$

La mesure ν précédente étant invariante par le semigroupe associé à U, la mesure $\mathbf{P}_\nu^U = \int_{\mathbf{R}} \mathbf{P}_x^U \nu(dx)$ est invariante par translation dans le temps. On se trouve alors dans une situation d'excursions stationnaires au sens développé par [10]. On peut, en particulier, affirmer que:

Proposition 3.8. *Si f est une fonction borélienne positive:*

$$\nu(f) = n^U\left(\int_0^{D^U} f(\pi_s)\,ds\right),$$

π_s notant les applications coordonnées et:

$$D^U = \inf\{t>0, \pi_t = 0 \text{ ou } \pi_{t-} = 0\}.$$

Cette proposition va nous permettre d'expliciter la loi de $(L_t^U)_{t\geqq 0}$ et de préciser la propriété de scaling du couple $(L_t^U, U_t)_{t\geqq 0}$.

Théorème 3.9. *Sous $\mathbf{P}_0^U$, la loi de $(U_{\lambda t}, L_{\lambda t}^U)_{t\geqq 0}$ est identique à celle de $(\lambda^3 U_t, \lambda^{1/2} L_t^U)_{t\geqq 0}$. En particulier, l'inverse de $(L_t^U)_{t\geqq 0}$ est un subordinateur stable d'ordre 1/2.*

Démonstration. Notons que pour t fixé, $\mathbf{E}_0^U(L_t^U) < +\infty$. Il suffit, pour cela, de remarquer que l'on a si $f(x) = \mathbf{1}_{\{|x|<1\}}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_0^U(L_t^U)\, n^U\left(\int_0^{D^U} f(\pi_s)\,ds\right) &= \mathbf{E}_0^U\left(\int_{D_0^U}^{D_t^U} f(U_s)\,ds\right)\\
&\leqq \mathbf{E}_0^U\left(\int_0^t f(U_s)\,ds\right) + \mathbf{E}_0^U\left(E_{U_t}^U\left(\int_0^{D_0^U} f(U_s)\,ds\right)\right)\\
&\leqq Kt + K',
\end{aligned}$$

la dernière in égalité s'obtenant grâce au lemme 3.7. On vérifie, d'autre part, que $n^U\left(\int_0^{D^U} f(\pi_s)\,ds\right) \neq 0$. Sous $\mathbf{P}_0^U$, on a, si f est une fonction borélienne positive:

$$\mathbf{E}_0^U\left(\int_{D_0^U}^{D_t^U} f(U_s)\,ds\right) = \mathbf{E}_0^U\left(\int_{D_0^{U^\lambda}}^{D_t^{U^\lambda}} f(U_s^\lambda)\,ds\right)$$

donc:

$$\mathbf{E}_0^U\left(\int_{D_0^U}^{D_t^U} f(U_s)\,ds\right) = \frac{1}{\lambda}\,\mathbf{E}_0^U\left(\int_{D_0^U}^{D_{\lambda t}^U} f(U_s/\lambda^3)\,ds\right).$$

Ce qui prouve, en appliquant la formule de balayage, que:

$$\mathbf{E}_0^U(L_t^U)\, n^U\left(\int_0^{D^U} f(\pi_s)\,ds\right) = \frac{1}{\lambda}\,\mathbf{E}_0^U(L_{\lambda t}^U)\, n^U\left(\int_0^{D^U} f\left(\frac{1}{\lambda^3}\pi_s\right)ds\right).$$

Mais, en posant $y=x/\lambda^3$, il vient:

$$\nu\left(f\left(\frac{\cdot}{\lambda^3}\right)\right)=\int_{\mathbf{R}} f\left(\frac{x}{\lambda^3}\right)\frac{dx}{x^{5/6}}=\lambda^{1/2}\int_{\mathbf{R}} f(y)\frac{dy}{y^{5/6}}=\lambda^{1/2}\,\nu(f).$$

On en déduit, en tenant compte de la proposition 3.8, que:

$$\mathbf{E}_0^U(L_{\lambda t}^U)=\lambda^{1/2}\,\mathbf{E}_0(L_t^U).$$

Ceci prouve que $\mathbf{E}_0(L_t^U)=K\sqrt{t}$.

De plus si, $L_t^{U^\lambda}$ est le temps local de $U^\lambda=U_{\lambda t}/\lambda^3$, en 0, N^{U^λ} le processus de Poisson des excursions associées à U^λ, il est facile de vérifier que l'on a, si c est une variable aléatoire intégrable pour $(\mathscr{W}_e^U, W_e^U, n^U)$:

$$N^{U^\lambda}(L_t^{U^\lambda}, c)=N^U(L_{\lambda t}, c^\lambda),$$

où $e^\lambda(t)=e(\lambda t)/\lambda^3$ et $c^\lambda(e)(t)=c(e^\lambda(t))$. De plus N^U et N^{U^λ} sont des processus de Poisson, on en déduit que $N^{U^\lambda}(L_t^{U^\lambda}, c)-L_t^{U^\lambda}\,n^{U^\lambda}(c)$ et $N^U(L_{\lambda t}^U, c^\lambda)-L_{\lambda t}^U\,n^U(c^\lambda)$ sont des $\mathscr{F}_{\lambda t}$-martingales. En tenant compte du fait que $n^{U^\lambda}(c)=n^U(c)$, on en déduit que $L_t^{U^\lambda}\,n^U(c)-L_{\lambda t}^U\,n^U(c^\lambda)$ est une martingale continue à variation finie. Donc:

$$L_t^{U^\lambda}\,n^U(c)=L_{\lambda t}^U\,n^U(c^\lambda),$$

mais en prenant l'espérance sous $\mathbf{P}_0^U$, en tenant compte du résultat précédent et de l'identité en loi de U et U^λ on déduit: $n^U(c)=\lambda^{1/2}\,n^U(c^\lambda)$, puis $L_{\lambda t}^U=\lambda^{1/2}\,L_t^{U^\lambda}$.

Nous allons utiliser le critère de récurrence de [1] pour donner une forme explicite du temps local de U. Il suffit de vérifier que si $A\subset\mathbf{R}$, et si $\nu(A)>0$ alors sous chaque $\mathbf{P}_u^U$ on a:

$$\int_0^\infty \mathbf{1}_A(U_s)\,ds=+\infty \quad \text{p.s.}$$

Pour cela, considérons le processus $\int_0^{\tau_t^U}\mathbf{1}_A(U_s)\,ds$. C'est un p.a.i.s. croissant de mesure de Levy:

$$n^U\left(\int_0^{D^U}\mathbf{1}_A(\pi_u)\,du\in dx\right),$$

dont l'espérance vaut:

$$n^U\left(\int_0^{D^U}\mathbf{1}_A(\pi_u)\,du\right)=\nu(A)>0$$

Ce qui prouve la récurrence du processus U. On va en déduire une forme explicite du temps local L^U.

Proposition 3.10. *Sous chaque mesure $\mathbf{P}_u^U$ on a pour tout t, au sens de la convergence en probabilité:*

$$L_t^U=\lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{1}{\varepsilon^{1/6}}\int_0^t \mathbf{1}_{\{U_s\in[-\varepsilon,+\varepsilon]\}}\,ds$$

Démonstration. Si $B_\varepsilon = \{x \in \mathbf{R}, |x| \leqq \varepsilon\}$, le critère de récurrence précédemment démontré permet d'affirmer que sous $\mathbf{P}_0^U$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{L_t^U} \int_0^t \mathbf{1}_{\{U_t \in B_1\}} \, ds = K \quad \text{p.s.}$$

En utilisant la propriété de scaling pour $\lambda = 1/t$, on obtient, au sens de la convergence en loi vers une constante et donc pour la convergence en probabilité que:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{1/2}}{L_1^U} \int_0^1 \mathbf{1}_{\{U_s \in B_{1/t^3}\}} \, ds = K.$$

Si l'on pose $\varepsilon = 1/t^3$, on obtient le résultat sous $\mathbf{P}_0^U$.

De plus en utilisant le lemme 3.7, on déduit que, sous $\mathbf{P}_0^U$ (puis sous $\mathbf{P}_u^U$ en utilisant la propriété de Markov forte en D_0^U), au sens de la convergence en probabilité:

$$L_t^U = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^{1/6}} \int_{D_0^U}^{D_t^U} \mathbf{1}_{\{U_s \in [-\varepsilon, +\varepsilon]\}} \, ds.$$

En utilisant une fois de plus le lemme 3.7 on obtient le résultat final. □

Nous allons déduire de ces résultats la loi de $(L_t^Z, t \geqq 0)$.

4. Caractérisation de la loi de L^Z

Nous allons nous placer sous la loi $\mathbf{P}_z^Z$. Sous cette loi on note θ_t la famille de translations associées à Z, L_t^X le temps local en 0 de X et L_t^U le temps local en 0 de U. L^X est une fonctionnelle additive pour les translations θ_t et L_t^U est une fonctionnelle additive pour les translations associées à U, $\theta_{\tau_t^X}$. On prend des versions continues et parfaites de ces fonctionnelles additives. Le théorème suivant permet d'expliciter L_t^Z.

Théorème 4.1. *Pour tout $t \in \mathbf{R}^+$, on a presque sûrement:*

$$L_t^Z = c\, L_{L_t^X}^U,$$

c étant une constante strictement positive.

Démonstration. Nous allons vérifier que $L_{L_t^X}^U$ est une fonctionnelle additive continue de Z portée par le fermé aléatoire M^Z. La proposition (45.10) de [12], p. 409, nous donnera alors le résultat.

La continuité découle de celle de L^U et de L^X. Le fait que le support de $L_{L_t^X}^U$ soit inclus dans M^Z est clair. Notons que, comme on a choisi une version parfaite de L_t^U on a:

$$\mathbf{P}_z^Z \quad \text{p.s.} \quad \forall u, v \in \mathbf{R}^+ \qquad L_{u+v}^U = L_u^U + L_v^U \circ \theta_{\tau_u^X}.$$

Donc:

$$L_{L_{t+s}^X}^U = L_{L_t^X + L_s^X \circ \theta_t}^U = L_{L_t^X}^U + L_{L_s^X \circ \theta_t}^U \circ \theta_{\tau_{L_t^X}^X}.$$

De plus, sur l'intervalle $]t, \tau_{L_t^X}^X]$, L_t^U ne croît pas, on a donc, presque sûrement pour tout $s \in \mathbf{R}^+$:

$$L_s^U(\theta_{D_t^X}(\omega)) = L_s^U(\theta_t(\omega)).$$

On en déduit que $\mathbf{P}_z^Z$ p.s. $\forall s, t \in \mathbf{R}^+$:

$$L^U_{L^X_{t+s}} = L^U_{L^X_t} + (L^U_{L^X_s}) \circ \theta_t. \quad \square$$

Corollaire 4.2.

$$(X_t, Y_t, L^Z_t; t \geqq 0) \overset{(\text{loi})}{=} \left(\frac{1}{\lambda} X_{\lambda^2 t}, \frac{1}{\lambda^3} X_{\lambda^2 t}, \frac{1}{\lambda^{1/2}} L^Z_{\lambda^2 t}; t \geqq 0\right)$$

En particulier, l'inverse de $(L^Z_t)_{t \geqq 0}$ est un subordinateur stable d'ordre 1/4.

Démonstration. Plaçons-nous sous $\mathbf{P}^Z_{(0,0)}$. Notons $X^\lambda_t = X_{\lambda^2 t}/\lambda$, $Y^\lambda_t = Y_{\lambda^2 t}/\lambda^3$, $Z^\lambda_t = (X^\lambda_t, Y^\lambda_t)$, L^{X^λ} le temps local de X^λ, τ^{X^λ} son inverse, $U^\lambda_t = Y^\lambda_{\tau^{X^\lambda}_t}$, L^{U^λ} le temps local en 0 de U^λ. On vérifie aisément alors que $\lambda L^{X^\lambda}_t = L^X_{\lambda^2 t}$ et $\lambda^{1/2} L^{U^\lambda}_t = L^U_{\lambda t}$. Et donc $\lambda^{1/2} L^{Z^\lambda}_t = L^Z_{\lambda^2 t}$. Le résultat s'en déduit. $\square$

On peut comme dans le paragraphe précédent obtenir le temps local comme une "densité d'occupation".

Corollaire 4.3. *Si $V_{\varepsilon,\eta} = \{(x, y), |x| \leqq \varepsilon, |y| \leqq \eta\}$, on a, pour tout point de départ z, au sens de la convergence en probabilité:*

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} \frac{1}{\varepsilon^{3/2}} \int_0^t \mathbf{1}_{\{Z_s \in V_{\varepsilon,\varepsilon^3}\}} ds = C L^Z_t.$$

Démonstration. Nous ne faisons qu'ébaucher cette démonstration, elle est en effet très proche de la méthode utilisée pour le processus U. On remarque, en utilisant le théorème (8.1) de [6], que $\mu^Z(f) = n^Z\left(\int_0^{D^Z} f(\pi_s) ds\right)$ est une mesure invariante pour le semigroupe P_t. On reprend alors la même démarche que pour le processus U et l'on prouve que $(Z_t, t \geqq 0)$ est un processus récurrent au sens de [1]. On en déduit alors le résultat annoncé en appliquant le théorème ergodique et la propriété de scaling. $\square$

4.1. Propriété d'explosion de la loi de Z_t

Nous allons démontrer dans ce paragraphe des résultats précisant le comportement de la loi de Z_t au voisinage du point régulier (0, 0). Le corollaire suivant précise ce comportement dans $\{(x, y); y > 0\}$.

Corollaire 4.4. *Pour tout point de départ $z = (x, y)$ avec $y \geqq 0$, pour tout $s > 0$, on a:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^{3/2}} \mathbf{P}_z(0 < Y_s \leqq \varepsilon; |X_s| \leqq \varepsilon) = +\infty. \tag{6}$$

Remarque 4.5. (6) implique en particulier que Z_t ne peut avoir une densité bornée dans $\{(x, y), y > 0\}$ au voisinage de (0, 0).

L'exposant 3/2 n'est pas optimal. On peut penser au vu du corollaire 4.3 que:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^{3/2}} \mathbf{P}_z(0 < Y_s \leqq \varepsilon; |X_s| \leqq \varepsilon^3)$$

existe et est finie. De même, si l'on pose $\varphi(\varepsilon)=\mu^Z(V_{\varepsilon,\varepsilon})$, on peut conjecturer que:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varphi(\varepsilon)}\mathbf{P}_z(0<Y_s\leqq\varepsilon;\ |X_s|\leqq\varepsilon)=K<+\infty.$$

Nous n'avons cependant pas de preuve de ces résultats.

Démonstration. Pour démontrer (6) commençons par établir l'estimation suivante, si $z=(x,y)$ avec $y\geqq 0$ et $s<t$ alors:

$$\lim_{h\to 0}\int_s^t\frac{1}{h^{3/2}}\mathbf{P}_z(|X_u|\leqq h,\ 0<Y_s\leqq h)\,du=\infty \tag{7}$$

Pour cela considérons:

$$A_h^t=\mathbf{E}_{(0,0)}\left\{\int_0^t\mathbf{1}_{\{|X_u|\leqq h,\ 0<Y_s\leqq h\}}\,ds\right\},$$

en utilisant la propriété de scaling on obtient:

$$A_h^t=h^2\,\mathbf{E}_{(0,0)}\left\{\int_0^{t/h^2}\mathbf{1}_{\{0<Y_s\leqq 1/h^2,\ |X_s|\leqq 1\}}\,ds\right\}.$$

Donc si $h<1/\sqrt{A}$:

$$\begin{aligned}A_h^t\geqq{}& h^2\,\mathbf{E}_{(0,0)}(L^Z_{t/h^2})\,n^Z\left(\int_0^{D^Z}\mathbf{1}_{\{0<Y_s\leqq A,\ |X_s|\leqq 1\}}\,ds\right)\\ &-h^2\,\mathbf{E}_{(0,0)}\left(\mathbf{E}_{Z_t}\left(\int_0^{D_0^Z}\mathbf{1}_{\{0<Y_s\leqq A,\ |X_s|\leqq 1\}}\,ds\right)\right)\end{aligned}\tag{8}$$

Mais si l'on pose:

$$G(A)=n^Z\left(\int_0^{D^Z}\mathbf{1}_{\{0<Y_s\leqq A,\ |X_s|\leqq 1\}}\,ds\right).$$

Il est clair, par convergence monotone, que:

$$\lim_{A\to\infty}G(A)=n^Z\left(\int_0^{D^Z}\mathbf{1}_{\{0<Y_s,\ |X_s|\leqq 1\}}\,ds\right).$$

Montrons que le deuxième membre de cette égalité vaut $+\infty$. Pour cela, notons que si f est une fonction borélienne positive:

$$\begin{aligned}&E_{(0,0)}\left(\int_0^\infty e^{-\alpha s}f(X_s)\,ds\right)\\ &=n^Z\left(\int_0^{D^Z}e^{-\alpha s}f(X_s)\,ds\right)\mathbf{E}_{(0,0)}\left(\int_0^\infty e^{-\alpha s}\,dL_s^Z\right)\\ &=C\alpha^{-1/4}\,n^Z\left(\int_0^{D^Z}e^{-\alpha s}f(X_s)\,ds\right).\end{aligned}$$

Mais le potentiel du mouvement brownien se calcule explicitement (voir [3] par exemple), donc en utilisant la stabilité de la loi de L^Z on obtient:

$$n^Z\left(\int_0^{D^Z} e^{-\alpha s} f(X_s)\,ds\right)=C\alpha^{-1/4}\int f(y)\,e^{-|y|\sqrt{2\alpha}}\,dy.$$

On en déduit que:

$$n^Z\left(\int_0^{D^Z} \mathbf{1}_{\{|X_s|\leqq 1\}}\,ds\right)=+\infty.$$

D'autre part, en utilisant la propriété de Markov forte sous n^Z en $T=\inf\{s>0, Y_s=0\}$ et le fait que le potentiel d'une boule pour le brownien tué est borné, on obtient:

$$n^Z\left(\int_0^{D_0^Z} \mathbf{1}_{\{Y_s=0,\,|X_s|<1\}}\,ds\right)\leqq K\,n^Z(1\wedge D^Z)<+\infty.$$

On peut donc affirmer que $\lim\limits_{A\to+\infty} G(A)=+\infty$. Mais si $h<1/\sqrt{A}$, on a d'après (8) et comme $\mathbf{E}_{(0,0)}(L_t^Z)=C\,t^{1/4}$:

$$A_h^t\geqq C\,h^{3/2}\,t^{1/4}\,n^Z\left(\int_0^{D^Z} \mathbf{1}_{\{0<Y_s\leqq A,\,|X_s|\leqq 1\}}\,ds\right)$$
$$-h^2\,\mathbf{E}_{(0,0)}\left(\mathbf{E}_{Z_t}\left(\int_0^{D_0^Z} \mathbf{1}_{\{0<Y_s\leqq A,\,|X_s|\leqq 1\}}\,ds\right)\right).$$

D'autre part le couple $\left(X_1, \int_0^1 X_s\,ds\right)$ admet une densité bornée, d'où:

$$\mathbf{E}_z\left(\int_0^{D_0^Z} \mathbf{1}_{\{0<Y_s\leqq A,\,|X_s|\leqq 1\}}\,ds\right)$$
$$\leqq \int_0^{+\infty} \mathbf{P}\left(0<y+xs+s^{3/2}\int_0^1 X_u\,du\leqq A,\; x+s^{1/2}|X_1|\leqq 1\right)ds$$
$$\leqq \int_0^{\infty}\left(\frac{MA}{s^2}\wedge 1\right)ds<+\infty.$$

On obtient donc que, pour tout A, $\liminf\limits_{h\to 0} A_h^t/h^{3/2}\geqq CG(A)$ puis:

$$\lim_{h\to\infty} A_t^h/h^{3/2}=+\infty.$$

Ceci établit (7) pour $s=0$ et $z=(0,0)$. De plus la propriété de Markov prouve que:

$$\mathbf{E}_z\left\{\int_0^t \mathbf{1}_{\{|X_s|\leqq h,\;0<Y_s\leqq h\}}\,ds\right\}\geqq \mathbf{E}_z\left\{\mathbf{1}_{\{D_0^Z\leqq 1\}}\,\varphi_t^h(D_0^Z)\right\}$$

où l'on a posé:

$$\varphi_t^h(s)=\mathbf{E}_{(0,0)}\left\{\int_0^{t-s} \mathbf{1}_{\{|X_u|\leqq h,\ 0<Y_u\leqq h\}}\,du\right\}.$$

Dès que $s<t$ on a $\lim\limits_{h\to\infty} \varphi_t^h(s)/h^{3/2}=\infty$, d'après ce qui précède. Le lemme de Fatou donnera (7) pour $s=0$ et z quelconque, sous réserve que $\mathbf{P}_z(D_0^Z\leqq t)>0$ pour $t>0$. Mais $T\leqq D_0^Z$; on a donc:

$$\mathbf{P}_z\{D_0^Z\leqq t\}\geqq \mathbf{P}_z\{T\leqq t/2;\ \mathbf{P}_{(X_T,0)}(D_0^Z\leqq t/2)\}>0.$$

Pour démontrer le résultat pour $s\neq 0$, on utilise, de nouveau, la propriété de Markov et le lemme de Fatou.

Nous allons déduire de (6) le corollaire 4.4. Notons, tout d'abord, que, par scaling, si $c>1$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{(0,0)}(|X_s|\leqq h, 0<Y_s\leqq h)&=\mathbf{P}_{(0,0)}(|X_{c^2s}|\leqq ch, 0<|Y_{c^2s}|\leqq c^3 h)\\ &\geqq \mathbf{P}_{(0,0)}(|X_{c^2s}|\leqq h, 0<|Y_{c^2s}|\leqq h).\end{aligned}$$

$\mathbf{P}_{(0,0)}\ (Z_s\in V_h)$ est donc décroissante. On en déduit (6) lorsque $z=(0,0)$. Pour généraliser au cas où $z\neq(0,0)$, on utilise la propriété de Markov forte en D_0^Z et le lemme de Fatou.

Remerciements. Je tiens à remercier Nicole El Karoui pour le soutien qu'elle m'a accordé au cours de ma thèse, ce travail en est une conséquence.

Je remercie Jean François Le Gall pour l'aide qu'il m'a apportée pendant la réalisation de ce travail. Cet article lui doit beaucoup.

Je remercie enfin vivement Damien Lamberton pour de fructueuses discussions.

Réfèrences

1. Azéma, J., Duflo, M., Revuz, D.: Mesure invariante des processus de Markov récurrents. Dans: Meyer, P.A. (ed.) Seminaire de Probabilités III, pp. 24–34. Berlin Heidelberg New York: Springer 1969
2. Blumenthal, R.M., Getoor, R.K.: Markov processes and potential theory. New York London: Academic Press 1968
3. Dellacherie, C., Meyer, P.A.: Probabilités et potentiels. Processus de Markov (Tome IV). Paris: Hermann 1987
4. Karoui, N.El., Chaleyat-Maurel, M.: Un probléme de réflexion et ses applications au temps local et aux equations différentielles stochastiques sur **R**. Astérisque **52–53**, 117–144 (1978)
5. Feller, W.: An introduction to probability theory and its applications (Tome II). New York: Wiley 1971
6. Getoor, R.K.: Excursions of a Markov process. Ann. Probab. **7**, 244–266 (1979)
7. Ikeda, N., Watanabe, S.: Stochastic differential equations and diffusion processes. Tokyo: North Holland 1981
8. Itô, K.: Poisson point processes and their applications to Markov processes. Lect. Notes, Université de Kyoto, 1969
9. Krée, P.: New boundary value problems connected with multivalued stochastic differential equations. Brezis-Lions seminar. Montreal: Pitman 1985
10. Pitman, J.: Stationary excursions. Dans: Azéma, J., Meyer, P.A., Yor, M. (ed.) Séminaire de Probabilités XXI. (Lect. Notes Math., vol. 1247, pp. 289–302) Berlin Heidelberg New York: Springer 1987
11. Poirion, F., Angélini, J.J.: Vibrations aléatoires avec contraintes: modèlisation et résolution numérique dans le cas d'une gouverne. La Recherche Aérospatiale **6**, 385–394 (1985)
12. Rogers, L.C.G., Williams, D.: Diffusions, Markov processes and Martingales (Tome 2) Ito calculus. Wiley 1987

Note ajoutée aux epreuves: Jean Bertoin me signale que l'on peut retrouver le résultat sur l'indice de stabilité de L_t^U contenu dans le théorème 3.9 au moyen de la théorie de Wiener Hopf pour les p.a.i.s. (vois Fristedt (1973) Sample functions of stochastic processes with stationary independent increments, Adv. Probability 3, 241–396).