Probab. Theory. Relat. Fields 90, 377–402 (1991)

Probability Theory and Related Fields

Décroissance exponentielle du noyau de la chaleur sur la diagonale (II)

G. Ben Arous[1] et R. Léandre[2]

[1] Département de mathématiques, Université Paris Sud, F-91405 Orsay, France
[2] Département de mathématiques, Université Louis Pasteur, rue Descartes, F-67084 Strasbourg France

Reçu le 3 mars 1988; en forme revisée le 9 juillet 1991

Summary. We give some conditions for the heat kernel to have an asymptotic expansion in small time such that all coefficients vanish, although the phenomenon seems difficult to understand by large deviations theory. The fact that the leading term is not zero is strongly related to Bismut's condition. These examples are related to the Varadhan estimates of the density of a dynamical system submitted to small random perturbations. To understand that type of asymptotic, one must modify the definition of the distance by adding the Bismut condition (unnoticed, but hidden, in classical cases).

0 Introduction

Cet article est la suite de l'étude entreprise dans [BA-L]. Le problème considéré était celui du rôle du drift dans le comportement asymptotique du noyau de la chaleur hypoelliptique sur la diagonale. Si $p_t(x, y)$ désigne le noyau de la chaleur associé à l'opérateur $L = \frac{1}{2} \sum X_i^2 + X_0$, les X_i étant des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^d$ vérifiant l'hypothèse de Hörmander forte, on montre dans [BA-l] que $p_t(x, y)$ décroît exponentiellement lorsque $X_0(x)$ n'appartient pas à l'espace vectoriel engendré par les crochets (en x) de longueur inférieure ou égale à 2 des champs $X_1, \ldots, X_m$. Ceci provient intuitivement du fait que la partie diffusion agit alors dans une échelle de temps trop lente pour compenser l'action du drift; en d'autres termes, cela signifie qu'il faut dépenser beaucoup d'énergie pour compenser l'action du drift et revenir au point de départ.

Nous allons mettre en évidence des phénomènes plus subtils. De façon générale, si $X_0(x)$ appartient à l'espace vectoriel engendré par les crochets de longueur $\leqq 2$ des champs $X_1, \ldots, X_m$, alors on a un développement asymptotique:

$$p_t(x, x) = \frac{1}{\sqrt{t}^{\,Q(x)}} \left(\sum_0^N c_k(t) \sqrt{t}^{\,k} + O(\sqrt{t}^{\,N+1}) \right). \tag{0.1}$$

([L.2], [L.1], [BA-2]) pour un certain entier $Q(x)$ défini à partir de la géométrie de l'algèbre de Lie engendrée par les $X_0, \ldots, X_m$. Si de plus:

$$X_0(x) = \sum_{i=1}^{N} f_i(x) X_i(x) + \sum_{i,\, j \neq 0} f_{i,j}(x)[X_i, X_j](x) \tag{0.2}$$

où les $f_i(x)$, $f_{i,\,j}(x)$ sont *des fonctions* C^∞, alors on sait que le terme dominant $c_0(x)$ est non nul ([J-S]) et donc le développement précédent donne un équivalent de $p_t(x, x)$.

Par contre, il est possible, comme on le verra dans l'exemple traité dans la première partie du présent article, que ce coefficient $c_0(x)$ (et tous les autres) soit nul et qu'en fait $p_t(x, x)$ décroisse exponentiellement lorsque $t \to 0$, ceci dans un cas où l'opérateur L est elliptique presque partout (en fait, sauf sur une droite) et où le drift appartient en tout point à l'espace horizontal, c'est-à-dire à l'espace vectoriel engendré par les $X_1, \ldots, X_m$ (mais où bien sûr il est impossible de l'écrire sous la forme (0.2)).

Ce phénomène, comme on le verra, provient d'une structure plus fine, à savoir ici le signe du drift. Après avoir traité l'exemple par un calcul direct de grandes déviations, nous indiquons le lien existant entre ce phénomène et un système dynamique perturbé. On voit ainsi que l'action usuelle définie en suivant [F-V] (ou plutôt [Az] dans le cas hypoelliptique) ne donne pas l'estimation correcte de la densité de transition du système de transition du système dynamique perturbé.

Dans la partie II, on s'intéresse au problème de la non nullité du terme dominant $c_0(x)$ dans le développement (0.1), c'est-à-dire à la pertinence de ce développement. On donne une condition nécessaire et suffisante fondée sur la forme quadratique de Malliavin déterministe introduite par J.-M. Bismut dans [B.1]. On montre que l'ensemble des chemins reliant x à y ne doit pas être singulier en tous ses points. A cette fin, on doit utiliser une amélioration du théorème du support de D. Stroock et SR.S. Varadhan ([I-W], [S-V]) dont nous rejetons la démonstration en appendice. Il faut remarquer que cette condition est toujours vérifiée lorsque le drift X_0 est identiquement nul (cf. [L.2], Théorème 1.1, Principe de la petite boucle).

Dans la partie III, nous appliquons au problème de l'estimation de la densité de transition d'un système perturbé les résultats de la partie II. Cela nous permet d'introduire une nouvelle action supérieure à l'action usuelle, définie par un problème variationnel nouveau et qui permet dans les bons cas de décrire le comportement asymptotique de la densité de transition. Cela nous permet donc de comprendre l'exemple traité dans la partie I.

1 Un exemple de décroissance exponentielle du noyau de la chaleur sur la diagonale avec un drift dans l'espace horizontal

Nous allons donner ici un exemple qui montre que le phénomène de décroissance exponentielle peut se produire même lorsque le drift est dans l'espace vectoriel engendré par les champs X_i, en x.

Soit, sur $\mathbb{R}^2$, l'opérateur

$$L = \frac{1}{2}(\partial^2_{x_1} + x_1^{2n}\partial^2_{x_2}) + x_1^p\partial_{x_2} \tag{1.1}$$

ou encore $L = \frac{1}{2}\sum_1^2 X_i^2 + X_0$ avec $X_1 = \partial_{x_1}$, $X_2 = x_1^n\partial_{x_2}$, $X_0 = x_1^p\partial_{x_2}$; où n et p sont des entiers positifs.

L vérifie l'hypothèse de Hörmander forte, c'est-à-dire dim Lie $(X_1, X_2)(x) = 2$ pour tout x, et L est en fait elliptique hors de l'axe $D = \{x_1 = 0\}$.

Soit $p_t(x, y)$ le noyau de la chaleur associé à L; nous allons comme en [BA-L] étudier le comportement asymptotique de $p_t(x, x)$ lorsque t tend vers zéro. Nous savons que (cf. [L.4]):

$$\lim_{t \to 0} t \log p_t(x, x) = 0 \tag{1.2}$$

et que si $x \in D^c$:

$$p_t(x, x) \sim \frac{c(x)}{t} \tag{1.3}$$

avec $c(x) > 0$.

Nous nous restreignons donc au cas $x \in D$.

Le cas où $p = 0$ a été étudié dans [BA-L, théorème 1.3]. Nous nous limitons donc ici au cas où $p > 0$. Remarquons alors que le drift X_0 appartient en tout point x à l'espace vectoriel $C_1(x)$ engendré par $X_1(x)$ et $X_2(x)$, c'est-à-dire que:

$$n(x) = 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^2) \tag{1.4}$$

(en utilisant les notations de l'introduction de [BA-L]).

On a alors le résultat suivant qui généralise le théorème (1.3) de [BA-L].

Théorème 1.1 a) *Si $n \leqq p + 1$, on a:*

$$\forall x \in D \quad p_t(x, x) \sim \frac{K(p, n)}{\sqrt{t}^{n+2}} \tag{1.5}$$

si $p > n - 1$, la constante $K(p, n)$ est donnée par:

$$K(p, n) = \frac{1}{2\pi} E\left[\left(\int_0^1 w^{2n}(s)\,ds\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \tag{1.6}$$

et si $p = n - 1$:

$$K(n-1, n) = \frac{1}{2\pi} E\left[\left(\int_0^1 w^{2n}(s)\,ds\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{\left(\int_0^1 w^{n-1}(s)\,ds\right)^2}{\int_0^1 w^{2n}(s)\,ds}\right]\right] \tag{1.7}$$

où w désigne un pont brownien d'extrémités nulles sur $[0,1]$.

b) *Si $n > p + 1$ et si p est pair, alors on a:*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{t \to 0} t^{1-\beta} \log p_t(x, x) = -\frac{1}{2} C(p, n) < 0 \tag{1.8}$$

avec $\beta = \dfrac{2}{n - p + 1}$ *et*

$$C(p, n) = \inf_{\varphi \in H_0^1([0,1)], \mathbb{R})} \left(\frac{\left(\int_0^1 \varphi^p(s)\, \mathrm{d}s \right)^2}{\int_0^1 \varphi^{2n}(s)\, \mathrm{d}s} + \int_0^1 \dot{\varphi}^2(s)\, \mathrm{d}s \right). \tag{1.9}$$

Remarque 1) Il est facile de vérifier que si p est impair et si $n > p + 1$, l'infimum donné par $C(p, n)$ défini en (1.9) est nul et donc que le phénomène décrit en (1.8) du théorème dépend de la parité de p.
2) Remarquons que l'ordre $1 - \beta$ de décroissance exponentielle donné au b) du théorème (1.1) a une signification géométrique qui éclaire l'apparition du phénomène de décroissance exponentielle.

Introduisons pour cela la définition suivante:

Soit en général des champs de vecteurs $X_1 \ldots X_m$, et X_0 sur $\mathbb{R}^d$ tels que Lie $(X_1 \ldots X_m)(x) = T_x \mathbb{R}^d \ \forall x \in \mathbb{R}^d$.

Définition 1.2 *Pour $x \in \mathbb{R}^d$, soit $N(x)$ le plus petit entier k tel que le drift X_0 appartienne à l'idéal sur l'anneau des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ engendré par les crochets de longueur inférieure ou égale à k, des champs $X_1 \ldots X_m$ (sur un voisinage de x).*

Cet entier $N(x)$ est toujours supérieur à $n(x)$. On a ici, si $x \in D$:

$$N(x) = n - p + 1$$

et l'ordre de décroissance exponentiel, plutôt que de valoir $1 - \frac{2}{n(x)}$ comme en [BA-L], vaut ici: $1 - \beta = 1 - \frac{2}{N(x)}$.

Soulignons de nouveau que la condition $n > p + 1$, c'est-à-dire $N(x) \geqq 3$, n'est pas suffisant pour assurer la décroissance exponentielle de $p_t(x, x)$ (sur notre exemple, le a) du théorème 1.1 dit que c'est nécessaire). En effet, l'information fournie par $N(x)$ ne comprend pas la parité de p (i.e. le signe du drift).

Preuve du théorème 1.1 Elle commence comme celle du théorème 1.3 de [BA-L]. La diffusion de générateur $\varepsilon^2 L$, issue de $x \in D$ est donnée par:

$$\begin{aligned} y_1^\varepsilon(t) &= \varepsilon w_t^1 \\ y_2^\varepsilon(t) &= \varepsilon^{n+1} \int_0^t (w_s^1)^2\, \mathrm{d}w_s^2 + \varepsilon^{p+2} \int_0^t (w_s^1)^p\, \mathrm{d}s + x_2 \end{aligned} \tag{1.10}$$

où (w^1, w^2) désigne un mouvement brownien de dimension 2.

Le noyau de la chaleur $p_{\varepsilon^2}(u, u)$ est la densité de la loi de la variable aléatoire $(y_1^\varepsilon(1), y_2^\varepsilon(1))$.

Conditionnellement à w^1, $y_2^\varepsilon(1)$ est gaussienne, de moyenne $m(\varepsilon)$ et de variance $\sigma^2(\varepsilon)$ données par:

$$m(\varepsilon) = x_2 + \varepsilon^{p+2} \int_0^1 (w_s^1)^p \, ds \tag{1.11}$$

$$\sigma(\varepsilon) = \varepsilon^{2n+2} \int_0^1 (w_s^1)^{2n} \, ds \tag{1.12}$$

On a donc, pour $x \in D$:

$$p_{\varepsilon^2}(x, x) = \frac{1}{2\pi\varepsilon^{n+2}} E\left[\left(\int_0^1 (w_s^1)^{2n} \, ds\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon^{2(n-p-1)}} F(w^1)\right] \middle| w_1^1 = 0\right] \tag{1.13}$$

où l'on a posé:

$$F(\varphi) = \frac{1}{2} \frac{\left(\int_0^1 \varphi^p(s) \, ds\right)^2}{\int_0^1 \varphi^{2n}(s) \, ds} . \tag{1.14}$$

Si $n \leqq p + 1$, on obtient le théorème 1.1, a) par convergence dominée, grâce au lemme 1.4 de [BA-L].

Par contre, si $n > p + 1$, posons $\eta = \varepsilon^\alpha$; avec $\alpha = \frac{n-p-1}{n-p+1}$, on a:

$$p_{\varepsilon^2}(x, x) = \frac{1}{2\pi\varepsilon^{n+2-n\alpha}} E\left[\left(\int_0^1 (\eta w_s)^{2n} \, ds\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{\eta^2} F(\eta w)\right]\right] \tag{1.15}$$

où w désigne un pont brownien.

Comme dans la preuve de théorème 1.3 de [BA-L], le comportement asymptotique de (1.15) est donné par le principe des grandes déviations pour le pont brownien. Mais ici l'analyse de la méthode de Laplace est plus difficile: en effet, le rôle du point $w = 0$ est plus gênant.

Commençons par prouver la minoration suivante, si p est pair:

$$\liminf_{\eta \to 0}, \eta^2 \log E\left(\left(\int_0^1 (\eta w_s)^{2n} \, ds\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{F(\eta w)}{\eta^2}}\right) \geqq -C(p, n), \tag{1.16}$$

ce qui montrera bien sûr que, compte tenu de (1.15) et de la définition de β donnée après (1.8), que

$$\liminf_{\eta \to 0} (\varepsilon^2)^{1-\beta} \log p_{\varepsilon^2}(x, x) \geqq -C(p, n). \tag{1.17}$$

Pour cela, on a:

Lemme 1.3 *Si p est pair et $n > p+1$:*
a) *on a pour tout $\varphi \in H_0^1$ ([0,1], $\mathbb{R}$):*

$$\int_0^1 \varphi^{2n} \leqq (n+1)^2 \Big(\sup_{s \in [0,1]} |\varphi(s)| \Big)^{2(n-1-p)} \Big(\int_0^1 \dot{\varphi}^2(s)\, \mathrm{d}s \Big) \Big(\int_0^1 \varphi^p(s)\, \mathrm{d}s \Big)^2 \quad (1.18)$$

b) *L'infimum $C(p,n)$ est atteint et strictement positif.*

Preuve du lemme. Dans la suite du a), on peut se limiter au cas où φ est à valeurs positives ou nulles (par la parité de p). Soit donc $\varphi \in H_0^1$ tel que $\varphi(s) \geqq 0\ \forall s \in [0,1]$. Posons:

$$\psi(t) = \int_0^t \varphi(s)^{n-1}\, \mathrm{d}s \quad (1.19)$$

ψ est croissante; on a donc, pour tout $t \in [0,1]$:

$$\psi(t) \leqq \psi(1) \leqq \Big(\sup_{s \in [0,1]} \varphi(s) \Big)^{n-1-p} \int_0^1 \varphi^p(s)\, \mathrm{d}s. \quad (1.20)$$

On a alors en intégrant par parties:

$$\int_0^1 \varphi^{2n}(s)\, \mathrm{d}s = \int_0^1 \varphi^{n+1}(s) \dot{\psi}(s)\, \mathrm{d}s \leqq (n+1) \int \varphi^n(s) |\dot{\varphi}(s)| \psi(s)\, \mathrm{d}s \quad (1.21)$$

$$\int_0^1 \varphi^{2n}(s)\, \mathrm{d}s \leqq (n+1) |\psi|_\infty \Big(\int_0^1 \varphi^{2n}(s)\, \mathrm{d}s \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_0^1 \dot{\psi}(s)^2\, \mathrm{d}s \Big)^{\frac{1}{2}} \quad (1.22)$$

d'où, par (1.20)

$$\Big(\int \varphi^{2n}(s)\, \mathrm{d}s \Big)^{\frac{1}{2}} \leqq (n+1) |\varphi|_\infty^{n-1-p} \Big(\int_0^1 \varphi^p(s)\, \mathrm{d}s \Big) \Big(\int_0^1 \dot{\varphi}(s)^2\, \mathrm{d}s \Big)^{\frac{1}{2}} \quad (1.23)$$

ce qui prouve le a).

Passons au b): Par le a) on a, si $\varphi \in H_0^1$ ([0,1], $\mathbb{R}$):

$$\int_0^1 \varphi^{2n}(s)\, \mathrm{d}s \leqq (n+1)^2 \Big(\int_0^1 \dot{\varphi}(s)^2\, \mathrm{d}s \Big)^{n-p} \Big(\int_0^1 \varphi^p(s)\, \mathrm{d}s \Big)^2 \quad (1.24)$$

d'où

$$F(\varphi) \geqq \frac{1}{2(n+1)^2} \frac{1}{\Big(\int_0^1 \dot{\varphi}(s)^2\, \mathrm{d}s \Big)^{n-p}} \quad (1.25)$$

et en notant $I(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \dot{\varphi}(s)\,ds\right)$:

$$(F+I)(\varphi) \geqq I(\varphi) + \frac{1}{2^{n-p+1}(n+1)^2}\frac{1}{I(\varphi)^{n-p}} \tag{1.26}$$

ce qui montre que: $C(p,n) = \inf_{\varphi \in H_0^1}((F+I)(\varphi)) > 0$.

On sait donc déjà que $C(p,n) > 0$; reste à voir que cet infimum est atteint. Soit donc $\varphi_k \in H_0^1$ une suite minimisante, i.e.: $\lim_{k\to\infty}(F+I)(\varphi_k) = C(p,n)$. Alors, la suite (φ_k) est bornée dans H^1, elle a donc une sous-suite $(\varphi_{k'})$, qui converge faiblement vers φ (et uniformément), avec $\liminf_{k'\to\infty} I(\varphi_{k'} \geqq I(\varphi)$.

L'inégalité (1.18) permet de montrer que φ est non identiquement nulle. On a en effet:

$$F(\varphi_k) \geqq \frac{1}{2(n+1)^2}\frac{1}{I(\varphi_k)}\frac{1}{|\varphi_k|_\infty^{2(n-1-p)}}. \tag{1.27}$$

Or $I(\varphi_k)$ est bornée donc, si $\varphi_{k'}$ converge vers zéro, on a:

$$\lim_{k'\to\infty} F(\varphi_{k'}) = +\infty \tag{1.28}$$

ce qui est absurde.

Ainsi $\varphi_{k'}$ converge uniformément vers un φ non nul, et donc par la continuité de F en un tel point, on a: $\lim_{k'\to\infty} F(\varphi_{k'}) = F(\varphi)$ et donc:

$$C(p,n) = \liminf_{k'\to\infty}(F+I)(\varphi_{k'}) \geqq F(\varphi) + I(\varphi) \tag{1.29}$$

ce qui montre que $F(\varphi) + I(\varphi) = C(p,n)$, et donc que l'infimum $C(p,n)$ est atteint. Ce qui achève la preuve du lemme 1.3.

La minoration (1.16) est alors simple.

Soit φ_0 tel que $(F+I)(\varphi_0) = C(p,n)$.

Soit $\varrho \in]0, |\varphi_0|_\infty[$. Sur la boule uniforme ouverte $B_\infty(\varphi_0, \varrho)$ de centre φ_0 et de rayon ϱ, F est bornée ainsi que $\int_0^1 \varphi^{2n}(s)\,ds$.

Soit $K = \sup_x\left(\int_0^1 \varphi^{2n}(s)\,ds,\ \varphi \in B_\infty(\varphi_0, \varrho)\right) > 0$. Alors $0 < K < \infty$.

On a alors:

$$\begin{aligned} &E\left[\left(\int_0^1 (\eta w_s)^{2n}\,ds\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{\eta^2}F(\eta w)\right]\right] \\ &\geqq E\left[\left(\int_0^1 (\eta w_s)^{2n}\,ds\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{\eta^2}F(\eta w)\right];\ \eta w \in B_\infty(\varphi_0, \varrho)\right] \quad (1.30) \\ &\geqq \frac{1}{\sqrt{K}} E\left[\exp\left[-\frac{1}{\eta^2}\widehat{F}(\eta w)\right];\ \eta w \in B_\infty(\varphi_0, \varrho)\right] \end{aligned}$$

Or F est continue bornée sur $B_\infty(\varphi_0, \varrho)$; on a donc:

$$\liminf_{\eta \to 0} \eta^2 \log E\left[\exp\left[-\frac{1}{\eta^2}F(\eta w)\right]; B_\infty(\varphi_0, \varrho)\right] \geqq -\inf_{B_\infty(\varphi_0, \varrho)}(F+I) \tag{1.31}$$
$$= -C(p, n)$$

d'où l'on tire:

$$\liminf_{\eta \to 0} \eta^2 \log E\left[\left(\int_0^1 (\eta w_s)^{2n}\, ds\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{\eta^2}F(\eta w)\right]\right] \geqq -C(p, n) \tag{1.33}$$

Le problème provient ici du fait que, pour une telle majoration, il est important de savoir que la fonction F est semi-continue inférieurement [V].

Ici la difficulté provient du point $\varphi = 0$. En effet, les valeurs d'adhérence de F lorsque φ tend vers zéro sont tout l'intervalle $[0, \infty]$. Ainsi le seul prolongement semi continu inférieurement de F en 0 est obtenu en posant $F(0) = 0$, ce qui donne alors: $(F + I)(0) = 0$ et donc une majoration sans intérêt.

Pour montrer que le point 0 n'intervient pas dans cette majoration, il faut exclure les voisinages de 0 pour une raison plus subtile. Commençons d'abors par remarquer qu'il est intuitivement évident que 0 n'est pas un point important dans cette méthode de Laplace puisque le lemme (1.3) montre que: $\lim_{\varphi \to 0}(F + I)(\varphi) = +\infty$.

Passons à la preuve du résultat crucial suivant:

Lemme 1.4 *On a:*

$$\lim_{\varrho \to 0} \limsup_{\eta \to 0} \eta^2 \log E\left[\left(\int_0^1 (\eta w_s)^n\, ds\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{\eta^2}F(\eta w)\right]; \quad |\eta w|_\infty \leqq \varrho\right] = -\infty. \tag{1.34}$$

En effet, soit $\varrho > 0$; on a:

$$E\left[\left(\int_0^1 (\eta w_s)^n\, ds\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{\eta^2}F(\eta w)\right]; \quad |\eta w|_\infty \leqq \varrho\right]$$
$$\leqq E\left[\left(\int_0^1 (\eta w_s)^n\, ds\right)^{-1}\right]^{\frac{1}{2}} E\left[\exp\left[-\frac{2}{\eta^2}F(\eta w)\right]; \quad |\eta w|_\infty \leqq \varrho\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{1.35}$$

Or on sait (cf. [BA-L], lemme 1.4) que:

$$E\left[\left(\int_0^1 (w_s)^n\, ds\right)^{-1}\right] < \infty.$$

De plus, on a:

Lemme 1.5 *Soit* φ *une fonction hölderienne d'exposant* α *sur* $[0,1]$*; on a, si* $|\varphi|_\alpha = \sup \frac{|\varphi_t - \varphi_s|}{|t-s|^\alpha}$:

$$F(\varphi) \geqq \frac{1}{2^{\frac{1}{\alpha}+p+1}} \frac{1}{|\varphi|_\infty^{2(n-p)-\frac{1}{\alpha}}} \frac{1}{|\varphi|_\alpha^{1/\alpha}}. \tag{1.36}$$

Preuve du lemme Il existe un intervalle I de longueur au moins $\left(\frac{|\varphi|_\infty}{2|\varphi|_\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ sur lequel: $|\varphi(t)| \geqq \frac{|\varphi|_\infty}{2}$.
D'où l'on tire:

$$\int_0^1 \varphi^p(s)\,\mathrm{d}s \geqq \left(\frac{|\varphi|_\infty}{2|\varphi|_\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{|\varphi|_\infty}{2}\right)^p \tag{1.37}$$

(car p est pair).
De plus, on a:

$$\int_0^1 \varphi^{2n}(s)\,\mathrm{d}s \leqq |\varphi|_\infty^{2n-p} \int_0^1 \varphi^p(s)\,\mathrm{d}s \tag{1.38}$$

En appliquant (1.38) puis (1.37), on a:

$$\begin{aligned} F(\varphi) = \frac{1}{2}\frac{(\int \varphi^p(s)\,\mathrm{d}s)^2}{\int \varphi^{2n}(s)\,\mathrm{d}s} &\geqq \frac{1}{2|\varphi|_\infty^{2n-p}} \int_0^1 \varphi^p(s)\,\mathrm{d}s \\ &\geqq \frac{1}{2^{\frac{1}{\alpha}+p+1}} \frac{1}{|\varphi|_\infty^{2(n-p)-\frac{1}{\alpha}}} \frac{1}{|\varphi|_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Ce qui prouve (1.5).
On a alors:

$$\begin{aligned} &E\left[\exp\left[-\frac{2}{\eta^2}F(\eta w)\right];\ |\eta w|_\infty \leqq \varrho;\ |\eta w|_\alpha \leqq \frac{1}{\sqrt{\varrho}}\right] \\ &\qquad \leqq \exp\left[-\frac{1}{2^{\frac{1}{\alpha}+p}} \frac{1}{\varrho^{2(n-p)-\frac{3}{2\alpha}}} \cdot \frac{1}{\eta^2}\right]. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Si on choisit $\alpha > \frac{3}{8}$, on a: $2(n-p) - \frac{3}{2\alpha} \geqq 4 - \frac{3}{2\alpha} > 0$, car $n-p \geqq 2$.

De plus, on choisit $\alpha < \frac{1}{2}$, il existe une constante $C(\alpha)$ telle que:

$$P\left(|\eta w|_\alpha > \frac{1}{\sqrt{\varrho}}\right) \leqq \exp\left[-\frac{C(\alpha)}{\eta^2 \varrho}\right]. \tag{1.41}$$

Ceci est en effet une conséquence du fait que la norme hölderienne $|\,|_\alpha$ est p.s. finie si $\alpha < \frac{1}{2}$, et du théorème de Fernique [Fe].

De (1.40) et (1.41), on tire trivialement le lemme (1.4).

Ainsi, en choisissant ϱ assez petit, on a, si $C > C(p, n)$:

$$E\left[\left(\int_0^1 (\eta w_s)^n \, ds\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{\eta^2} F(\eta w)\right] ; \ |\eta w|_\infty \leqq \varrho\right] \leqq \exp\left[\frac{-C}{\eta^2}\right]. \tag{1.42}$$

Il reste à étudier le terme complémentaire:

$$\begin{aligned} E&\left[\left(\int_0^1 (\eta w_s)^n \, ds\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{\eta^2} F(\eta w)\right] |\eta w|_\infty \geqq \varrho\right] \\ &\leqq \frac{1}{\varrho^{\frac{n}{2}}} E\left[\exp\left[-\frac{1}{\eta^2} F(\eta w)\right] ; \ |\eta w|_\infty \geqq \varrho\right] \end{aligned} \tag{1.43}$$

Or, en posant:

$$\begin{aligned} \widehat{F}(\varphi) &= F(\varphi) \qquad \text{si} \quad |\varphi|_\infty \geqq \varrho \\ \widehat{F}(\varphi) &= +\infty \qquad \text{si} \quad |\varphi|_\infty \leqq \varrho \end{aligned}$$

On a:

$$E\left[\exp\left[-\frac{1}{\eta^2} F(\eta w)\right] ; \ |\eta w|_\infty \geqq \varrho\right] \leqq E\left[\exp\left[-\frac{1}{\eta^2} \widehat{F}(\eta w)\right]\right].$$

Or $\widehat{F}$ est semi-continue inférieurement; on a donc:

$$\limsup_{\eta \to 0} \eta^2 \log E\left[\exp\left[-\frac{1}{\eta^2} \widehat{F}(\eta w)\right]\right] \leqq -\inf(\widehat{F} + I). \tag{1.44}$$

Si ϱ est assez petit: $\inf(\widehat{F} + I) = \inf(F + I) = C(p, n)$.

On a ainsi:

$$\begin{aligned} \limsup_{\eta \to 0} \eta^2 \log E&\left[\exp\left[-\frac{1}{\eta^2} F(\eta w)\right] \left(\int_0^1 (\eta w_s)^n \, ds\right)^{-\frac{1}{2}} ; \ |\eta w|_\infty \geqq \varrho\right] \\ &\leqq -C(p, n). \end{aligned} \tag{1.45}$$

De (1.34) et (1.45), on tire la majoration cherchée (1.33)

On a ainsi montré que:

$$\lim_{\eta \to 0} \eta^2 \log E\left(e^{-\frac{1}{\eta^2} F(\eta w)} \left(\int_0^1 (\eta w_s)^n \, ds\right)^{-\frac{1}{2}}\right) = -C(p, n) \tag{1.46}$$

et donc, par (1.15), que:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{2(1-\beta)} \log p_{\varepsilon^2}(x, x) = -C(p, n), \tag{1.47}$$

ce qui achève la preuve du théorème.
Remarque. En fait, la preuve du théorème (1.1) b) repose sur une observation simple: le principe de grandes déviations de Schilder n'est ni optimal, ni suffisant ici. Il suffit de vérifier (c'est assez simple) que, dans ce principe de grandes déviations, on peut remplacer la topologie uniforme par la topologie induite par les normes hölderiennes d'exposant $< 1/2$ et que, pour une telle norme, par le lemme 1.5

$$\liminf_{\varphi \to 0} F(\varphi) = +\infty$$

pour mieux comprendre notre preuve.

Comme dans l'exemple traité dans [BA-L] où $p = 0$, on peut comprendre l'exemple précédent en montrant que, après une renormalisation du processus, il est équivalent à la décroissance exponentielle de la densité de transition pour un système dynamique perturbé. Le résultat est néanmoins nettement moins trivial car l'action minimale usuellement définie (cf. [Az_1]) est nulle entre les points qui nous intéressent. Nous reviendrons sur ce phénomène en détail au Sect. 3.

Précisément, soit sur $\mathbb{R}^2$ l'opérateur $L^\varepsilon = \varepsilon^2\left(\frac{1}{2}\partial^2_{x_1} + x_1^{2n}\partial^2_{x_2}\right) + x_1^p\partial_{x_2}$. Cet opérateur décrit donc le système dynamique associé au champ de vecteurs $x_1^p\partial_{x_2}$ perturbé par $\varepsilon^2\left(\frac{1}{2}\partial^2_{x_1} + x_1^{2n}\partial^2_{x_2}\right)$. Soit $q_t^\varepsilon(x, y)$ la densité de transition de la diffusion de générateur L^ε.

Le théorème 1.1 b) est alors équivalent au résultat suivant:

Théorème 1.6 *Avec les notations précédentes, si $n > p + 1$, si p est pair, on a:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \log q_1^\varepsilon(0, 0) = -C(p, n). \tag{1.48}$$

Preuve. On procède comme dans la preuve du théorème 1.7 de [BA-L]. Soit $z_1^\varepsilon(t)$ la diffusion du générateur L^ε issue de 0. On a:

$$\begin{cases} z_1^\varepsilon(t) & = \varepsilon w_t^1 \\ z_2^\varepsilon(t) & = \varepsilon^{n+1} \int_0^t (w_s^1)^n \, dw_s^2 + \varepsilon^p \int_0^t (w_s^1)^p \, ds. \end{cases} \tag{1.49}$$

Soit $x \in D$ et δ_ε^x le difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ donné par:

$$\delta_\varepsilon^x(u_1, u_2) = \left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{2}{n-p+1}}} u_1, \frac{1}{\varepsilon^{\frac{2(n+1)}{n-p+1}}}(u_2 - x_2)\right). \tag{1.50}$$

Si $y^\varepsilon(t)$ désigne, comme dans la preuve du théorème 1.1, la diffusion de générateur $\varepsilon^2 L$ issue de $x \in D$, on a:

$$\delta_\varepsilon^x(y^\varepsilon(t)) = z^{\varepsilon^{\frac{n-p-1}{n-p+1}}}(t). \tag{1.51}$$

D'où l'on tire évidemment:

$$p_{\varepsilon^2}(x,x) = \frac{1}{\varepsilon^{2\frac{n+2}{n-p+1}}} q_1^{\varepsilon^{\frac{n-p-1}{n-p+1}}}(0,0). \tag{1.52}$$

Il est alors clair que le résultat du théorème 1.6 est équivalent à celui du théorème 1.1 b).

Ce théorème est à première vue surprenant. En effet, nous allons vérifier que l'action minimale pour joindre 0 à 0 en temps 1 est nulle.

Soit ϕ_x l'application qui, à h, élément de $H^1([0,1],\mathbb{R}^2)$, nul en 0, associe valeur au temps 1 de la solution de l'équation:

$$\begin{cases} d\varphi_t &= \sum_{i=1}^{2} X_i(\varphi_t)h_t^i\,dt + X_0(\varphi_t)\,dt \\ \varphi_0 &= x \end{cases} \tag{1.53}$$

et $\bar{d}(x,y)$ l'action minimale pour joindre x à y, i.e.:

$$\bar{d}^2(x,y) = \inf_{h\in K_x^y}(|h|_1^2) \tag{1.54}$$

où $K_x^y = \{h \in H^1([0,1],\mathbb{R}^2),\ \phi_x(h) = y\}$.

Proposition 1.7 $\bar{d}^2(0,0) = 0$. *Ainsi*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log q_1^\varepsilon(0,0) \neq -\frac{1}{2}\bar{d}^2(0,0). \tag{1.55}$$

La proposition 1.7 est évidente puisque $h = 0 \in K_0^0$.

Le problème se pose alors d'interpréter la constante $C(p,n)$ comme une action entre 0 et 0 pour le système dynamique perturbé.

Pour cela, introduisons l'action "régulière":

$$\bar{d}_R^2(x,y) = \inf(|h|_1^2;\ h\in K_x^y;\ \phi^x \text{ est une submersion en } h).$$

On a alors

Théorème 1.7 *On a:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log q_1^\varepsilon(0,0) = -\frac{1}{2}\bar{d}_R^2(0,0). \tag{1.56}$$

Preuve: Il suffit de vérifier que: $C(p,n) = \frac{1}{2}d_R^2(0,0)$.

Rappelons la définition de $C(p,n)$:

$$C = \inf(F+I) = \frac{1}{2}\inf_{\varphi\in H}\left(\frac{\left(\int_0^1 \varphi^p(s)\,ds\right)^2}{\int_0^1 \varphi^{2n}(s)\,ds} + \int_0^1 \varphi_s^2\,ds\right) \tag{1.57}$$

où $H = H_0^1([0,1], \mathbb{R})$.

Commençons par caractériser les $h \neq 0 \in K_0^0$ qui sont réguliers, i.e. tels que ϕ_1^0 est une submersion en h. On a:

$$\phi_0(h) = \left(h^1(1), \int_0^1 (h^1(s))^n \, dh^2(s) + \int_0^1 (h^1(s)^p \, ds\right) \tag{1.58}$$

et donc, si $k \in H^1$:

$$d\phi_0(h).k = \left(k^1(1), \int_0^1 (h^1)^n \, dk^2 + n \int h_1^{n-1} k_1 \, dh_2 + p \int (h^1)^{p-1} k_1 \, ds\right). \tag{1.59}$$

Il est alors clair que $d\phi_0(h)$ est une submersion de H sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si h^1 n'est pas la fonction nulle.

Pour $h \neq 0 \in K_0^0$, tel que h^1 n'est pas la fonction nulle, on a:

$$\int_0^1 h^1(s)^p \, ds = \left|\int_0^1 h^1(s)^n \, dh^2(s)\right| \leqq \left(\int h^1(s)^{2n} \, ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int (\dot{h}^2(s))^2 \, ds\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.60}$$

d'où

$$\begin{aligned}\int (\dot{h}^1(s))^2 \, ds + \int (\dot{h}^2(s))^2 \, ds &\geqq \int (\dot{h}^1(s))^2 \, ds + \frac{(\int h^1(s)^p \, ds)^2}{\int h^1(s)^{2n} \, ds} \\ &\geqq 2(F+I)(h_1).\end{aligned} \tag{1.61}$$

Comme $h^1(1) = 0$, on a $h^1 \in H$ et donc:

$$\int (\dot{h}^1(s))^2 \, ds + \int (\dot{h}^2(s))^2 \, ds \geqq 2C(p,n) \tag{1.62}$$

ce qui montre que: $\frac{1}{2}\bar{d}_R^2(0,0) \geqq C(p,n)$.

Réciproquement, soit φ_0 un point de H où l'infimum $C(p,n)$ de $F+I$ est atteint; posons $h^1 = \varphi_0$ et $h^2(t) = -\dfrac{\int_0^1 h^1(s)^p \, ds}{\int_0^1 h^1(s)^{2n} \, ds} \int_0^1 h^1(s)^n \, ds$.

On a alors: $\int_0^1 h^1(s)^n \, dh^2(s) = -\int_0^1 h^1(s)^p \, ds$ et donc $h = (h^1, h^2) \in K_0^0$. De plus,

$$\int_0^1 (\dot{h}^1(s))^2 \, ds + \int_0^1 (\dot{h}^2(s))^2 \, ds = \int_0^1 (\dot{h}^1(s))^2 \, ds + \frac{\left(\int_0^1 h^1(s)^p \, ds\right)^2}{\int_0^1 h^1(s)^{2n} \, ds}$$

$$= 2(F+I)(h^1) = 2C(p,n). \tag{1.63}$$

Ce qui montre que $\frac{1}{2}\bar{d}_R^2(0,0) = C(p,n)$.

Remarque. On a ainsi vérifié sur cet exemple que l'action régulière de $\bar{d}_R$ décrit correctement le comportement asymptotique de la densité de transition du système dynamique perturbé. Nous allons revenir sur ce phénomène au Sect. 3, ce qui donnera une nouvelle preuve (dans un contexte plus général) du théorème 1.1 b).

2 Positivité de noyaux de la chaleur dégénérés

Le but de cette partie est de donner une condition nécessaire et suffisante d'annulation de la densité associée à une diffusion dégénérée, ceci sous une hypothèse faible.

Considérons des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^d$ $X_{i,t}(x)$, $i = 0, \ldots, m$, dépendant de façon C^1 du temps t appartenant à [0,1] et de façon C^∞ de x. Supposons que pour tout multi-indice (α) de $\mathbb{N}^d$:

$$\sup\{|\partial^{(\alpha)} X_{i,t}(x)| + |\partial_t \partial^{(\alpha)} X_{i,t}(x)|\} < \infty \tag{2.1}$$

$x \in \mathbb{R}^d$, $t \in [0,1]$.

Soit H^1 l'espace de Cameron-Martin, c'est-à-dire l'espace des fonctions continues de [0,1] dans $\mathbb{R}^m h^i(t)$, $i = 1, \ldots, m$, nulles en 0, d'énergie $\|h\|^2 = \sum \int |\partial_t h^i(t)|^2 \, dt$ finie.

Introduisons la solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} dy_t(x,h) &= \sum X_{i,t}(y_t(x,h)) \, dh^i(t) + X_{0,t}(y_t(x,h)) \, dt \\ y_0(x,h) &= x. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Notons comme dans la partie précédente $\phi_x(h) = y_1(x,h)$.

Soit $(w^1, \ldots, w^m)$ un mouvement brownien m-dimensionnel. Introduisons la solution de l'équation différentielle de Stratonovitch.

$$\begin{aligned} dy_t(x) &= \sum X_{i,t}(y_t(x)) \, dw^i(t) + X_{0,t}(y_t(x)) \, dt \\ y_0(x) &= x. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Rappelons rapidement les notations usuelles du calcul des variations stochastiques de Malliavin ([W]). Si F est une fonction mesurable de l'espace de Wiener, nous dirons que F appartient à l'espace $\mathbb{D}_{p,k}$ si l'expression définie par $\|F\|_{p,k} = \sum_{i \leqq k} E[|D^{(i)}F(w)|^p]^{1/p}$ est finie, $D^{(i)}$ désignant le i[ème] gradient itéré de Malliavin. Il est classique que $y_1(x)$ appartient à tous les espaces $\mathbb{D}_{p,k}$. Notons $\langle Dy_1(x), Dy_1(x)\rangle$ la matrice de Malliavin de $y_1(x)$. Lorsque l'hypothèse suivante est vérifiée:

$$E[|\langle Dy_1(x), Dy_1(x)\rangle^{-1}|^p] < C(p) < \infty \tag{2.4}$$

la loi de $y_1(x)$ possède une densité C^∞ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, densité que nous noterons $p_1(x, y)$.

Théorème II 1 *Sous les hypothèses* (2.1) *et* (2;4), *on a l'équivalence entre les deux propriétés suivantes:*

i) $p_1(x, y) > 0$
ii) *Il existe un élément de l'espace de Cameron-Martin h tel que $\phi_x(h)$ soit égal à y et tel que ϕ_x soit une submersion en h.*

Corollaire II.2 *Soit $p_t(x, y)$, $t > 0$ le noyau de la chaleur associé à un opérateur $\frac{1}{2}\sum X_i^2 + X_0$ sur $\mathbb{R}^d$, les champs de vecteurs X_i vérifiant les deux hypothèses suivantes:*

a) *Ils sont bornés ainsi que leurs dérivées de tous ordres.*
b) *La dimension de l'idéal engendré par les champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_m$ dans l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs $X_0, X_1, \ldots, X_m$ est égale au point de départ x à la dimension de l'espace ambiant.*
Pour que $p_t(x, y) > 0$, il faut et il suffit qu'il existe un élément h de l'espace de Cameron-Martin tel que $\phi_x = y$ et tel que ϕ_x soit une submersion en h.

Preuve du corollaire. Elle résulte du fait que b) implique (2.4).

Preuve du fait que i) implique ii). Nous allons utiliser l'approximation de la solution de l'équation différentielle stochastique en remplaçant le mouvement brownien par une interpolation dyadique et utiliser le fait que les densités convergent. De façon plus précise, introduisons un entier N, et pour tout entier k plus petit que $2^N - 1$, notons $t(k, N)$ la quantité $k2^{-N}$. On définit le processus w^N de la façon suivante: si t appartient à $[t(k, N), t\{k+1, N)[$, $w^N(t)$ est égal à $w(t(k, N)) + 2^N(t - k2^{-N})$ $(w(t(k+1, N)) - w(t(k, N)))$. Le processus w^N constitue ce que l'on appelle une approximation polygonale du mouvement brownien; ce qui est pour nous sa propriété la plus importante est que ses trajectoires appartiennent à l'espace de Cameron-Martin.

Considérons la fonctionnelle $\phi_x(w^N)$. Rappelons ([I.W], [B_2]) que $\phi_x(w^N)$ tend quand N tend vers l'infini vers $\phi_x(w)$ dans tous les espaces de Sobolev $\mathbb{D}_{p,k}$. (En fait [I.W] et [B_2] ne traitent que le cas où les champs de vecteurs inetervenant dans l'équation différentielle stochastique ne dépendent pas du temps, mais l'extension au cas présent sous l'hypothèse (2.1) est aisée).

Notre objectif sera de nous ramener au lemme suivant, qui nous permettra de trouver un élément de l'espace de Cameron-Martin affine par morceaux satisfaisant à ii).

Lemme II.3 *Supposons qu'il existe des entiers N, K, M tels que pour tout réel $\varepsilon > 0$:*

$$\begin{aligned} &P\{|\phi_x(w^N) - y| < \varepsilon\,;\ |w(t(k,N))| \leqq K \qquad \forall k, \\ &|\langle D\phi_x(w^N), D\phi_x(w^N)\rangle^{-1}| \leqq M\} > 0\,. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Alors il existe un w^N tel que $\phi_x(w^N) = y$ et tel que le module de l'inverse de la matrice de Malliavin $\langle D\phi_x(w^N), D\phi_x(w^N)\rangle^{-1}$ soit inférieur à M.

Preuve du lemme. En effet (2.5) nous dit qu'il existe un $w^N(\varepsilon)$ tel que $|\phi_x(w^N(\varepsilon)) - y| < \varepsilon$, tel que le module de $w^N(\varepsilon)$ soit inférieur à K en $t(k,N)$ et tel que le module de l'inverse de $\langle D\phi_x(w^N(\varepsilon)), D\phi_x(w^N(\varepsilon))\rangle$ soit inférieur à M. La conclusion découle de la compacité de l'ensemble des w^N tels que le module de $w^N(t(k,N))$ soit inférieur à K pour tout couple d'entiers (k, N).

Nous allons maintenant montrer que l'hypothèse i) implique (2.5).

Soit L un réel > 0. Soit ψ une fonction C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$, égale à 1 si $|u| < 1$ et nulle si $|u| > 2$. Notons $\psi_L(u)$ la quantité $\psi(u/L)$. Soit

$$\begin{aligned} G_{N;L}(w) = {} &\psi_L(|\langle D\{y_1(x) - \phi_x(w^N)\}, D\{y_1(x) - \phi_x(w^N)\}\rangle|^2) \\ &\psi_L(|\langle Dy_1(x), D\{\phi_x(w^N) - y_1(x)\}\rangle|^2) \end{aligned} \tag{2.6}$$

et posons

$$G_L(w) = \psi_L(|\langle Dy_1(x), Dy_1(x)\rangle^{-1}|^2)\,. \tag{2.7}$$

Les deux fonctionnelles ainsi introduites sont C^∞ au sens de Malliavin. De plus on peut majorer leurs normes $\|\ \|_{p,k}$ par une constante indépendante de N. Enfin la quantité $\|G_{N;L} - 1\|_{p,k}$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini. Introduisons la mesure $\mu_{N;L',L}$ sur $\mathbb{R}^d$ qui à toute fonction mesurable bornée f sur $\mathbb{R}^d$ associe:

$$\mu_{N;L',L}(f) = E[f(y_1(x))G_{N;L'}G_L(w)]\,. \tag{2.8}$$

Comme $G_{N;L'}(w)$ et $G_L(w)$ sont dans tous les $\mathbb{D}_{p,k}$ et comme $y_1(x)$ vérifie (2.4), $\mu_{N;L',L}$ possède une densité C^∞ notée $q_{N;L',L}(x,y)$. On peut alors trouver quatre réels L, L', M, $C > 0$ indépendants de N possédant les deux propriétées suivantes:

* Si $G_{N;L'}(w)\ G_L(w)$ est non nul,

$$\sup_{s\leqq 1} |\langle D\{sy_1(x) + (1-s)\phi_x(w^N)\}, D\{sy_1(x) + (1-s)\phi_x(w^N)\}\rangle^{-1}| \leqq M \tag{2.9}$$

** La densité de $\mu_{N;L',L}$ en y $q_{N;L',L}(x,y) > C > 0$ pour tout entier N assez grand supérieur à un entier bien choisi $N(L, L')$.

* est immédiat. La densité $q_L(x, .)$ de la mesure $f \to E[f(y_1(x))G_L(w)]$ tend vers $p(x, .)$ quand L tend vers l'infini. L étant choisi suffisamment grand pour que $q_L(x,y) > \frac{1}{2}p(x,y) > 0$, choisissons L' pour que $*$ soit vérifiée:

$q_{N;L'L}(x, y)$ tend alors vers $q_L(x, y)$ quand N tend vers l'infini, ce qui prouve $**$.

L, L' et M étant ainsi choisis, introduisons la mesure sur $\mathbb{R}^d$ $\mu'_{N;L',L}$:

$$\mu'_{N;L',L}(f) = E[f(\phi_x(w^N))G_{N;L'}(w)G_L(w)]. \tag{2.10}$$

Du fait de (2.9), $\mu'_{N;L',L}$ possède une densité C^∞ en la seconde variable y notée $q'_{N;L',L}(x, y)$. Comparons la à la densité $q_{N;L',L}(x, y)$. Soit (α) un multi-indice de $\mathbb{N}^d$ et f une fonction C^∞ bornée à support compact sur $\mathbb{R}^d$. On a:

$$\begin{aligned}\mu'_{N;L',L}(\partial^{(\alpha)}f) - \mu_{N;L',L}(\partial^{(\alpha)}f) = \int E[\langle \operatorname{grad} \partial^{(\alpha)} f\{y_1(x) +\\ s(\phi_x(w^N) - y_1(x))\}, \phi_x(w^N) - y_1(x)\rangle G_{N;L'}(w)G_L(w)\}\, ds.\end{aligned} \tag{2.11}$$

La formule d'intégration par parties du calcul des variations stochastiques appliquée à (2.11), le fait que $\phi_x(w^N)$ tende lorsque N tend vers l'infini vers $y_1(x)$ dans tous les $\mathbb{D}_{p,k}$ et le fait que les quantités $\|G_{N;L',L}\|_{p,k}$ et $\|G_L\|_{p,k}$ soient bornées indépendamment de N montrent en utilisant $*$ qui'il existe une constante $C((\alpha), N)$ qui tend vers 0 quand N vers l'infini et telle que:

$$\left|\mu'_{N;L',L}(\partial^{(\alpha)}f) - \mu_{N;L',L}(\partial^{(\alpha)}f)\right| \leqq C((\alpha), N) \sup_{z\in\mathbb{R}^d} |f(z)|. \tag{2.12}$$

On déduit de cette dernière inégalité que:

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{z\in\mathbb{R}^d} |q'_{N;L',L}(x, z) - q_{N;L',L}(x, z)| = 0. \tag{2.13}$$

De $**$, on tire que $q'_{N;L'L}(x, y) > 0$. Or par $*$, la mesure $v_{N;M}$ définie par

$$v_{N;M}(f) = E[f(\phi_x(w^N))\psi_{2M}(|\langle D\phi_x(w^N), D\phi_x(w^N)\rangle^{-1}|^2)] \tag{2.14}$$

est minorée par la mesure $\mu'_{N;L',L}$. Donc la densité (dont il est aisé de vérifier l'existence et la régularité), notée $r_{N;M}(x, z)$ est strictement positive en y. De plus la densité de la mesure $v_{N;K,M}$ définie par

$$\begin{aligned}v_{N;K;M}(f) = E[f(\phi_x(w^N))\psi_K(\textstyle\sum(w^N t(k, N))^2)]\\ \psi_{2M}(|\langle D\phi_x(w^N), D\phi_x(w^N)\rangle^{-1}|^2)\end{aligned} \tag{2.15}$$

tend uniformément sur $\mathbb{R}^d$ vers celle de $v_{N;M}$ quand K tend vers l'infini. Par suite sa valeur en y est non nulle pour K assez grand, ce qui prouve (2.5).

Preuve du fait que ii) implique i) dans un cas particulier. Nous allons commencer par donner une démonstration de ce fait dans un cas particulier, en se basant sur les résultats de [L2] deuxième partie, qui utilisent un argument de "temps petit", dans un contexte légèrement différent. Soit $F(w)$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Supposons que la $i^{\text{ème}}$ composante de F, $F_i(w)$, soit une somme d'intégrales itérées de Stratonovitch $\iiiint f(t_1, \ldots, t_k)\, dw^{i_1}(t_1) \ldots dw^{i_k}(t_k)$;

cette intégrale qui est prise sur le simplexe $t_1 < \cdots < t_k < 1$ contient exactement $n(i)$ termes $\mathrm{d}w_j$ distinctes de $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}w^0(t)$ désignant par convention $\mathrm{d}t$, de sorte que $F_i(\varepsilon w)$ est égal à $\varepsilon^{n(i)}\ F_i(w)$. Pour définir les intégrales de Stratonovitch, on supposera de plus que f est de classe C^1 en $(t_1, \ldots, t_k)$, bien qu'il soit possible d'alléger les hypothèses. On remarque que F appartient à $\mathbb{D}_{p,k}$ pour tout couple d'entiers (p, k). On suppose que pour tout entier $p > 1$.

$$E[|\langle DF, DF\rangle^{-1}|^p] < \infty. \tag{2.4)'$$

Si dans toutes les expressions algébriques constituant F, on remplace chaque $\mathrm{d}w^i$ $(i \neq 0)$ par $\mathrm{d}h^i$ (h appartenant à l'espace de Cameron-Martin), on obtient une fonctionnelle régulière sur l'espace de Cameron-Martin que nous noterons $\phi(h)$. Nous traiterons le cas de $y = 0$. ii) signifie que $\phi^{-1}(0)$ contient un point h où ϕ est une submersion. L'hypothèse d'homogénéïté faite sur F et (1.4)′ impliquent que la loi de $F(\varepsilon w)$ possède une densité $p_\varepsilon(y)$. Comme $F_i(\varepsilon w) = \varepsilon^{n(i)}$ $F(w)$, la densité de $F(\varepsilon w)$ vérifie en $y = 0$: $p_\varepsilon(0) = \varepsilon^{-\sum n(i)} p(0)$, $p(y)$ désignant la densité de F. Il suffit donc de montrer que $p_\varepsilon(0) > 0$ pour ε assez petit. Si on raisonne comme dans [L$_2$] deuxième partie, on montre sans difficulté que:

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} 2\varepsilon^2 \log p_\varepsilon(0) \geqq -\|h\|^2. \tag{2.16}$$

Par suite $p_\varepsilon(0) > 0$ pour ε assez petit.

Preuve du fait que ii) implique i) dans le cas général. Soit un élément de l'espace de Cameron-Martin tel que $\phi_x(h) = y$ et tel que l'application ϕ_x soit une submersion en h. Soit $z(p)$ la version C^∞ en la variable p appartenant à $\mathbb{R}^d$ de la solution de l'équation différentielle stochastique suivante:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}z(p)(t) &= X_{0,t}(z(p)(t))\,\mathrm{d}t + \sum X_{i,t}(z(p)(t))\{\mathrm{d}w^i(t) \\ &\qquad + \mathrm{d}h^i(t) + d({}^tD\phi(h)\cdot p)^i(t)\} \\ z(p)(0) &= 0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Rappelons, afin de mieux comprendre cette formule, que l'application tangente $D\phi_x$ de ϕ_x est une application linéaire de l'espace de Cameron-Martin dans $\mathbb{R}^d$ et que par conséquent sa transposée ${}^tD\phi$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^d$ dans l'espace de Cameron-Martin. Notons $z'(p)(t)$ la solution de l'équation obtenue a partir de (2.17) en supprimant $\mathrm{d}w$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}z'(p)(t) &= X_{0,t}(z'(p)(t))\,\mathrm{d}t + \sum X_{i,t}(z'(p)(t))\{\mathrm{d}h^i(t) + d({}^tD\phi(h)\cdot p)^i(t)\} \\ z'(p)(0) &= x. \end{aligned} \tag{2.17)'$$

Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et n un entier. On a pour tout multi-indice (α) de $\mathbb{N}^d$ une relation prouvée dans l'appendice sous le nom du théorème A.1:

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{k \in K} E[\sup_{t \leqq 1} |\partial^{(\alpha)} z(p)(t) - \partial^{(\alpha)} z'(p)(t)|^n\,;\ \sup_{t \leqq 1} |w(t)| < \delta] = 0 \tag{2.18}$$

les dérivées $\partial^{(\alpha)}$ intervenant dans cette formule étant des dérivées partielles par rapport à p. Par intégration par parties, on peut prolonger la différentiation de ϕ_x suivant les directions de l'espace de Cameron-Martin à toutes les directions de l'espace de Wiener. En effet, on a:

$$\begin{aligned} D\phi_x(h)\cdot w = \sum X_{i,1}(\phi_x(h))w^i(1) - \int \partial_x\phi_x(h)(\textstyle\sum w^i(t) \\ d\{(\partial_x y_t(x,h))^{-1}X_{i,t}(y_t(x,h))\}) \end{aligned} \tag{2.19}$$

$\partial_x y_t(x,h)$ désignant la différentielle par rapport à la variable x de $y_t(x,h)$; c'est donc une matrice sur $\mathbb{R}^d$ que l'on peut inverser grace au théorème des flots. (2.18) et (2.19) nous montrent que la quantité

$$\begin{aligned} &E[\sup_{s\leqq 1}|\partial^{(\alpha)}z(p - C(h)^{-1}D\phi_x(h)\cdot w)(1) - \partial^{(\alpha)}z'(p)(1)|^n\,; \\ &\sup_{s\leqq 1}|w(t)| < \delta] \end{aligned} \tag{2.20}$$

est finie et tend uniformément vers 0 sur tout compact K de $\mathbb{R}^d$ quand δ tend vers 0, $C(h)$ étant la matrice déterministe de Malliavin introduite par Bismut dans [B$_1$] et définie par:

$$C(h) = \sum \int \langle \partial_x\phi_x(h)(\partial_x y_t(x,h))^{-1}X_{i,t}(y_t(x,h)),\circ\rangle^2\,dt. \tag{2.21}$$

Les inégalités de Sobolev, le théorème des fonctions implicites et (2.20) montrent qu'il existe un ensemble **A** mesurable par rapport à la tribu engendrée par le processus w_1 défini par:

$$w_1(.) = w(.) - {}^tD\phi(h)\;C(h)^{-1}D\phi(h)\cdot w \tag{2.22}$$

et une application $\mathbf{p}$ w_1 mesurable définie sur **A** à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ telle que l'application qui à p associe $z(p - C(h)^{-1}D\phi(h)\cdot w)(1)$ soit un difféomorphisme local d'un voisinage **U** de $\mathbf{p}(w_1)$ sur un voisinage de y et soit égale à y en $\mathbf{p}(w_1)$.

Appliquons la méthode de décomposition de l'espace de Wiener en deux de [B$_1$] (ou celle de [L$_2$] deuxième partie); $\mathbf{P}_1$ désignant la mesure image sur l'espace de Wiener de la mesure de Wiener par l'application qui a une trajectoire du brownien w associe le processus w_1, nous obtenons:

$$\begin{aligned} E[f(z(0)(1))] = \int (2\pi)^{-d/2}\,dp \int \exp\left[-\frac{1}{2}\langle p, C(h)p\rangle\right] \\ f(z(p - C(h)^{-1}D\phi_x(h)\cdot w)(1))\,d\mathbf{P}_1(w_1) \end{aligned} \tag{2.23}$$

la première intégrale étant prise sur $\mathbb{R}^d$ et la deuxième sur l'espace de Wiener. Remarquons que $z(p - C(h)^{-1}D\phi_x(h)\cdot w)(1)$ est une fonctionnelle w_1 mesurable (comme limite dans l'approximation polygonale de fonctionnelles w_1 mesurables). En procédant comme dans [L$_2$] deuxième partie, on en déduit que la densité $p^h(x, .)$ de $z(0)(1)$ est strictement positive en y. Rappelons brièvement l'argument, basée sur la formule de Fubini, valide pour $f \geqq 0$:

$$E[f(z(0)(1)] \geqq \int_{\mathbf{A}} d\mathbf{P}_1(w_1) \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left[-\frac{1}{2}\langle p, C(h)p\rangle\right](2\pi)^{-\frac{d}{2}}$$

$$f(z(p - C(h)^{-1}D\phi(h) \cdot w)\, dp \geqq \int_{\mathbf{A}} d\mathbf{P}_1(w_1) \int_{\mathbf{U}} (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\, dp \tag{2.24}$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\langle p, C(h)p\rangle\right] f(z(p - C(h)^{-1}D\phi(h) \cdot w)$$

et il ne reste plus qu'à faire le changement de variable $z = z(p - C(h)^{-1}D\phi(h) \cdot w)(1)$ sur $\mathbf{U}$ pour obtenir un minorant strictement positif de la densité $p^h(x, y)$. La formule de Girsanov nous permet de montrer que $p(x, y) > 0$.

3 Application aux systèmes dynamiques perturbés

Soit un petit paramètre ε réel. Considérons le système dynamique perturbé:

$$\begin{aligned} dy_t(\varepsilon) &= \varepsilon \sum X_i(y_t(\varepsilon))\, dw^i(t) + X_0(y_t(\varepsilon))\, dt \\ y_0(\varepsilon) &= x. \end{aligned} \tag{3.1}$$

On suppose que les champs de vecteurs X_i $i = 0, \ldots, m$ ont leurs dérivées de tous ordres bornées, mais au lieu de se placer sous l'hypothèse de Hörmander, nous allons considérer le cas où, en x, l'espace engendré par les X_i $i \neq 0$, et par les crochets des champs X_i $i = 0, \ldots, m$ de longueur supérieure à 2 est égal à $\mathbb{R}^d$. Il est à noter que nous ne faisons cette hypothèse qu'au point de départ de la diffusion. On va voir apparaître l'importance du théorème précédent dans l'introduction d'une distance différente de celle qui intervient dans la théorie des grandes déviations ([Az_1], [Az_2]).

Soit un élément h de l'espace de Cameron-Martin. Considérons la solution de l'équation différentielle déterministe associée naturellement à (3.1):

$$\begin{aligned} dy_t(h) &= \sum X_i(y_t(h))\, dh^i(t) + X_0(y_t(h))\, dt \\ y_0(h) &= x. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Posons $\phi_x(h) = y_1(h)$. Définissons les distances $d(x, y)$ et $d_R(x, y)$ par les relations suivantes:

$$d^2(x, y) = \inf_{\phi_x(h) = y} \| h \|^2 \tag{3.3}$$

$$d_R^2(x, y) = \inf_{\phi_x(h)=y\,;\ \phi_x \text{ submersion en } h} \| h \|^2 . \tag{3.4}$$

On a vu dans la partie I qui la "distance régulière" d_R peut être différente de la "distance usuelle" dans le cas où l'hypothèse forte de Hörmander est vérifiée.

Par contre si $X_0 = 0$ sur un voisinage de x, les deux distances sont égales ([L_2] théorème I.1).

$C(h)$ désigne la matrice de Malliavin déterministe associée à $y_1(h) \cdot p_\varepsilon(x, y)$ est la densité en y de la loi de la variable aléatoire $y_1(\varepsilon)$. On a le théorème suivant:

Théorème III.1 *Lorsque ε tend vers 0*

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} 2\varepsilon^2 \log p_\varepsilon(x, y) \geqq -\mathrm{d}_R^2(x, y) \tag{3.5}$$

et

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} 2\varepsilon^2 \log p_\varepsilon(x, y) \leqq -\mathrm{d}^2(x, y). \tag{3.6}$$

De plus, si

$$\inf_{\phi_X(h)=y\,;\,\phi_X \text{ submersion en } h} \det C(h) > 0 \tag{3.7}$$

on a l'égalité:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} 2\varepsilon^2 \log p_\varepsilon(x, y) = -d_R^2(x, y) \tag{3.8}$$

Preuve. Si la "distance régulière" $\mathrm{d}_R(x, y)$ est infinie, la densité $p_\varepsilon(x, y)$ est nulle d'après le théorème II.1 et (3.5) et (3.6) sont trivialement vérifiées. Supposons que la "distance régulière" soit finie. Soit $\eta > 0$. Introduisons un élément h_η de l'espace de Cameron-Martin tel que $\phi_x(h_\eta) = y$ et tel que $\phi_x(h)$ soit une submersion en h_η; par définition de la "distance régulière, on peut supposer de plus que $\|h_\eta\|^2 \leqq \mathrm{d}_R^2(x, y) + \eta$. En effectuant la transformation de Girsanov ε $\mathrm{d}w \to \varepsilon\,\mathrm{d}w + \mathrm{d}h_\eta$, on montre comme dans [$L_2$] théorème II.1 l'inégalité (.3.5).

Montrons maintenant (3.8): à cette fin, introduisons une fonction g C^∞ de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle [0,1], égale à 1 si $|u| < \frac{1}{2} C_0$ et nulle si $|u| > C_0$, C_0 étant égal à la moitié de la borne inférieure qui intervient dans (3.7). Considérons la fontionnelle brownienne G_ε définie par:

$$G_\varepsilon = g(\det(\langle Dy_1(\varepsilon), Dy_1(\varepsilon)\rangle)). \tag{3.9}$$

Décomposons la mesure μ_ε définie pour toute fonction mesurable bornée f de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ par: $\mu_\varepsilon(f) = E[f(y_1(\varepsilon))]$ en la somme de deux mesures μ'_ε et μ''_ε telles que:

$$\mu'_\varepsilon(f) = E[G_\varepsilon f(y_1(\varepsilon))] \tag{3.10}$$

$$\mu''_\varepsilon(f) = E[(1 - G_\varepsilon) f(y_1(\varepsilon))]. \tag{3.11}$$

On obtient une décomposition de $p_\varepsilon(x, y)$ en $p'_\varepsilon(x, y) + p''_\varepsilon(x, y)$. La remarque essentielle est que $p'_\varepsilon(x, y)$ est nul d'après une simple adaptation de la preuve du théorème II.1. La matrice $\langle Dy_1(\varepsilon), Dy_1(\varepsilon)\rangle$ vérifie de plus les estimations de Kusuoka-Stroock ([K.S_2]): pour tout entier p, il existe un entier $N(p)$ tel que lorsque ε tend vers 0:

$$E[(\det\langle Dy_1(\varepsilon), Dy_1(\varepsilon)\rangle)^{-p}] \leqq \varepsilon^{-N(p)}. \tag{3.12}$$

La théorie des grandes déviations ([Az_1]), la formule d'intégration par parties du calcul de Malliavin et (3.12) permettent de démontrer en suivant de près [L.R], cinquième partie, que pour tout $q > 1$, tout $\eta > 0$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} 2\varepsilon^2 \log p_\varepsilon''(x, y) \leqq -q \inf_{|\phi_x(h) - y| < \eta\,;\, \det C(h) > 1/2C_0} \| h \|^2 . \tag{3.13}$$

Quand η tend vers 0, ce dernier infimum tend vers $\mathrm{d}_R^2(x, y)$ du fait de (3.7). Comme (3.13) est valide pour tout $q > 1$, on en déduit (3.8). La preuve de (3.6) est identique, mis-à-part que l'on a pas à découper la mesure μ_ε en deux.

Remarque Dés que $\mathrm{d}(x, y)$ est fini, $\mathrm{d}(x, y)$ est continue. Il n'en est malheureusement pas de même pour la "distance régulière", sauf si x et y vérifient (2.7).

4 Annexe

Commençons par rappeler quelques notations: si Z_t est un processus à valeurs dans un espace de Banach, $|Z|^*(t)$ désigne le processus $\sup_{s \leqq t} |Z_s|$. Si H est un processus prévisible à valeurs dans $\mathbb{R}$ et si X est une semi-martingale réelle, H.X désigne le processus intégrale stochastique d'Itô et $H * X$ le processus intégrale de Stratonovitch. Rappelons que le processus $z(p)(t)$ a été défini en (2.17). L'objectif de cette annexe est de démontrer le théorème suivant:

Théorème A.1 *Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et n un entier. On a pour tout multi-indice (α) de $\mathbb{N}^d$:*

$$\lim_{\delta \to 0} E[\sup_{p \in K} (|\partial^{(\alpha)} z(p) - \partial^{(\alpha)} z'(p)|^*(1))^n | \; |w|^*(1) < \delta] = 0 \tag{A.1}$$

Rappelons quelques résultats ([I.W], lemme 8.1 et corollaire du lemme 8.2):

- Il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que lorsque δ tend vers 0:

$$P\{|w|^*(1) < \delta\} \approx C_1 \exp[-C_2 \delta^{-2}] \tag{A.2}$$

- Si nous introduisons le processus $\xi_{i,j}(t) = w^i * w^j(t)$, il existe deux constantes C_1 et $C_2 > 0$ telles que si $\delta < 1$ et si $M_2 > C_2 \delta$:

$$P\{|\xi^{i,j}|^*(1) > M\delta | \; |w|^*(1) < \delta\} \leqq C_1 \exp[-C_1 M^2] . \tag{A.3}$$

Ceci implique que pour tout entier n,

$$\lim_{\delta \to 0} E[(|\xi^{i,j}|^*(1))^n | \; |w|^*(1) < \delta] = 0 . \tag{A.4}$$

La démonstration du lemme suivant est très similaire à celle du lemme 8.3 de [I.W].

Lemme A.2 *Considérons un processus H à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel qu'il existe des processus H_i, $H_{i,j}$, $i, j = 0, \ldots, m$ satisfaisant à:*

$$H(t) = H(0) + \sum H_i \cdot w^i(t) + H_0 \cdot t \tag{A.5}$$

$$H_i(t) = H_i(0) + \sum H_{i,j} \cdot w^j(t) + H_{i,0} \cdot t . \tag{A.6}$$

Supposons que les processus H, H_i, $H_{i,j}$ notés génériquement Z vérifient la condition suivante pour tout entier n:

$$\sup_{\delta \leqq 1} E[(|Z|^*(1))^n| \ |w|^*(1) < \delta] \leqq C(n) < \infty . \tag{A.7}$$

Alors pour tout entier n:

$$\lim_{\delta \to 0} \{(|H * \xi^{i,j}|^*(1))^n| \ |w|^*(1) < \delta\} = 0 . \tag{A.8}$$

De plus, la vitesse de convergence dans (A.8) *ne dépend que des constantes $C(n)$ dans* (A.6).

Preuve. En intégrant par parties, on obtient:

$$\begin{aligned} H * \xi^{i,j}(t) &= \xi^{i,j}(t)H(t) - \sum(\xi^{i,j}H_k) \cdot w^k(t) - (\xi^{i,j}H_0) \cdot t \\ -(w^iH_j) \cdot t &= I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + I_4(t) \end{aligned} \tag{A.9}$$

Il n'y a de problèmes que pour $I_2(t)$. Or:

$$I_2(t) = \sum(\xi^{i,j}H_k) \cdot w^k(t) = \sum I_{2,k}(t) . \tag{A.10}$$

En intégrant par parties, on a:

$$\begin{aligned} I_{2,k}(t) &= \xi^{i,j}(t)H_k(t)w^k(t) - \sum(w^k\xi^{i,j}H_{k,l}) \cdot w^l(t) - \sum(w^kw^iH_k) \cdot w^j(t) \\ &\quad - \sum(\xi^{i,j}w^kH_k) \cdot t - \delta(j,k)(H_kw^i) \cdot t - \frac{1}{2}\sum(\xi^{i,j}H_{k,l}) \cdot t \\ &= J_1(t) + J_2(t) + J_3(t) + J_4(t) + J_5(t) + J_6(t) . \end{aligned} \tag{A.11}$$

Il n'y a de problèmes que pour $J_2(t)$ et $J_3(t)$. $J_2(t)$ se décompose en $\sum J_{2,1}(t)$. De plus chaque $J_{2,1}(t) = B((a(t))$, B étant un mouvement brownien et $a(t)$ le processus défini par:

$$a(t) = (|\xi^{i,j}|^2|w^k|^2|H_{k,l}|^2) \cdot t . \tag{A.12}$$

Distinguons si $|\xi^{i,j}|^*(1) \geqq M^{1/8}\delta^{-1/4}\delta$ ou non et si $|H_{k,l}|^*(1) \geqq M^{1/8}\delta^{-1/4}$ ou non. On obtient:

$$\begin{aligned} &P\{|J_{2,l}(t)|^*(1) \geqq M| \ |w|^*(1) < \delta\} \leqq P\{|H_{k,l}|^*(1) \geqq M^{1/8}\delta^{-1/4}| \\ &|w|^*(1) < \delta\} + P\{|\xi^{i,j}|^*(1) \geqq M^{1/8}\delta^{-1/4}\delta| \ |w|^* < \delta\} \\ &+ P\{|B|^*(Cm^{1/2}\delta^3 \geqq M| \ |w|^*(1) < \delta\} . \end{aligned} \tag{A.14}$$

Le premier terme est inférieur quand $\delta < 1$ à $\frac{1}{M^n+1}C_n(\delta)$, $C_n(\delta)$ tendant vers 0 quand δ tend vers 0, le second à $\exp[-CM^{1/4}\delta^{-1}]$ d'après (A.3), et le dernier d'après (A.1) à $\exp[-CM\delta^{-3}]\exp[C\delta^{-2}]$. Ceci nous montre que si $M \geqq C\delta^{1/2}$:

$$P\{J_{2,1}|^*(1) > M| \ |w|^*(1) < \delta\} \leqq C_n(\delta)(M^n+1)^{-1} \tag{A.14}$$

et que $C_n(\delta)$ tend vers 0 quand δ tend vers 0. De plus la vitesse de convergence de $C_n(\delta)$ vers 0 ne dépend que de $C(n)$ dans (A.8).

Le fait que (A.14) soit aussi vérifiée pour $J_3(t)$ se démontrerait de façon analogue, mais la situation est plus simple dans ce cas.

Lemme A.3 *Supposons que les hypothèses du lemme* (A.1) *soient vérifiées, mis à part* (A.7). *Supposons qu'il existe une constante C_0 telle que tous les processus H, H_i, $H_{i,j}$ soient majorés en module par C_0. Alors il existe 3 constantes C_1, M_1, δ_1 ne dépendant que de C_0, strictement positives, ayant la propriété suivante:*
si $\delta < \delta_1$ et si $M > M_1$:

$$P\{|H * \xi^{i,j}|^*(1) > M|\ |w|^*(1) \leqq \delta\} \leqq \exp[-C_1 M\delta^{-2}] \tag{A.15}$$

Preuve. Il suffit de prouver (A.15) pour le processus $H \cdot \xi^{i,j}$. Or $H \cdot \xi^{i,j}(t)$ est égal à $B((a(t))$, B étant un mouvement brownien et $a(t)$ le processus croissant défini par:

$$a(t) = (H^2(w^i)^2) \cdot t. \tag{A.16}$$

Donc $a(t) \leqq (C_0)^2\delta^2$. Par suite, (A.1) implique que:

$$\begin{aligned} &P\{|H \cdot \xi^{i,j}|^*(1) \geqq M|\ |w|^*(1) < \delta\} \leqq P\{|B|^*((C_0\delta)^2) \geqq M\} \\ &\exp[C\delta^{-2}] \leqq \exp[-M\delta^{-2}]\exp[C\delta^{-2}] \end{aligned} \tag{A.17}$$

C dans (A.17) ne dépendant que de C_0.

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition suivante, dont l'idée principale nous a été donnée par A.S. Snitzman.

Proposition A.4 *Pour tout entier n, tout compact K de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$:*

$$\sup_{(x,p) \in K, \delta < \infty} E[|\partial_x z(p)|^*(1))^n|\ |w|^*(1) \leqq \delta] < \infty \tag{A.18}$$

$$\sup_{(x,p) \in K, \delta < \infty} E[(|(\partial_x z(p))^{-1}|^*(1))^n|\ |w|^*(1) \leqq \delta] < \infty \tag{A.19}$$

Preuve. Nous ne la ferons que pour (A.18), celle de (A.19) étant tout à fait semblable. $\partial_x z(p)$ est solution de l'équation différentielle de Stratonovitch:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}U_t &= \sum \partial_x X_{i,t}(z(p)(t))U_t\{\mathrm{d}w^i(t) + d({}^tD\phi(h) \cdot p)^i(t) + \mathrm{d}h^i(t)\} \\ &\quad + \partial_x X_{0,t}(z(p)(t))U_t\,\mathrm{d}t \\ U_0 &= I_d\,. \end{aligned} \tag{A.20}$$

Soit ψ une fonction C^∞ de l'ensemble des matrices U sur $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$, équivalente à $\log\|U\|$ quand $\|U\|$ tend vers l'infini et tel que pour tout multi-indice (α) la quantité $\|\partial^{(\alpha)}\psi(U)\|\ \ \|U\|^{|(\alpha)|}$ soit bornée. On peut prendre par exemple $\psi(U) = \frac{1}{2}\log(\|U\|^2 + 1)$. Pour montrer (A.19), il suffit de montrer qu'il existe trois constantes C_0, δ_0, M_0 ayant la propriété suivante:

Si $M > M_0$, $\delta < \delta_0$, si (x, p) appartient à K, on a:

$$P\{\psi(\partial_x(z(p))|^*(1) \geqq M|\ |w|^*(1) < \delta\} \leqq \exp[-MC_0\delta^{-2}]\,. \tag{A.21}$$

En appliquant la formule d'Itô-Stratonovitch, on obtient:

$$\begin{aligned} d\psi(\partial_x(z(p)(t))(t) &= \sum \partial_U \psi(\partial_x(z(p)(t)) \cdot \partial_x X_{i,t}(z(p(t)) \cdot \partial_x z(p)(t) \\ &\{\mathrm{d}w^i(t) + \mathrm{d}({}^t D\phi(h) \cdot p)^i(t) + \mathrm{d}h^i(t)\} + \partial_U \psi(\partial_x(z(p)(t)) . \\ &\partial_x X_{0,t}(z(p)(t)) \cdot \partial_x z(p)(t)\, \mathrm{d}t . \end{aligned} \tag{A.22}$$

Comme $\|\partial_U \psi(U)\|. \|U\|$ est borné, il suffit de montrer (A.21) pour:

$$A(t) = \sum \{\partial_U \psi(\partial_x(z(p)(t)) \cdot \partial_x X_{i,t}(z(p)(t)) \cdot \partial_x z(p)(t)\} * w^i(t) . \tag{A.23}$$

On intègre par partie dans $A(t)$ en suivant la procédure de [I.W], fin du théorème 8.2. Comme $\|\partial^{(2)}\psi(U)\| \ \|U\|^2$ est borné, ceci nous permet de nous ramener au lemme A.3 et d'appliquer (A.15). Avant de démontrer la proposition finale qui est l'objet de cette annexe, faisons une remarque préliminaire: soit (α) un multi-indice de $\mathbb{N}^d$: $\partial^{(\alpha)} z(p)(t)$, $\partial^{(\alpha)}$ désignant la $(\alpha)^{\text{ième}}$ dérivée partielle par rapport à p, est la solution de l'équation différentielle de Stratonovitch suivante:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}U_t &= \sum \partial_x X_{i,t}(z(p)(t)) U_t \{\mathrm{d}w^i(t) + d({}^t D\phi(h) \cdot p)^i(t) + \mathrm{d}h^i(t)\} \\ &\quad + \partial_x X_{0,t}(z(p)(t)) U_t\, \mathrm{d}t + \sum P^{(\alpha)}_{i,t}(w, p)\, \mathrm{d}w^i(t) + P^{(\alpha)}_{0,t}(w, p)\, \mathrm{d}t \\ U_0 &= 0 . \end{aligned} \tag{A.24}$$

$P^{(\alpha)}_{i,t}(w, p)$ est un polynôme universel en les dérivées en la variable x des champs de vecteurs $X_{j,t}$, celles en p de ${}^t D\phi(h) \cdot p$ et celles en p de $z(p)(t)$. Mais dans ces dernières, seules celles d'ordre strictement inférieur à $|(\alpha)|$ interviennent. On peut résoudre cette équation par la méthode de la variation de la constante. On obtient:

$$\begin{aligned} \partial^{(\alpha)} z(p)(t) &= \partial_x z(p)(t) (\sum \{(\partial_x z(p)(t))^{-1} P^{(\alpha)}_{i,t}(w, p)\} * w^i(t)) \\ &\quad + \{(\partial_x z(p)(t))^{-1} P^{(\alpha)}_{0,t}(w, p)\} \cdot t . \end{aligned} \tag{A.25}$$

Théorème A.5 *Pour tout entier n, tout compact K de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, on a:*

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{0(x,p) \in K} E[(|\partial^{(\alpha)} z(p) - \partial^{(\alpha)} z'(p)|^*(1))^n | \ |w|^*(1) < \delta] = 0 . \tag{A.26}$$

Preuve. En appliquant la méthode donnée dans [I.W] p 437, on montre d'abord grâce à la proposition A.4 et au lemme A.1 que:

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{(x,p) \in K} E[(|\partial_x z(p) - \partial_x z'(p)|^*(1))^n | \ |w|^*(1) < \delta] = 0 . \tag{A.27}$$

De plus, la preuve du théorème du support de Stroock-Varadhan ([I.W], fin de la démonstration de la preuve du théorème 8.2) montre que:

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{(x,p) \in K} E[(|z(p) - z'(p)|^*(1))^n | \ |w|^*(1) < \delta] = 0 . \tag{A.28}$$

Bibliographie

[Az_1] Azencott, R.: Grandes déviations et applications. Cours de probabilités de Saint-Flour. (Lect. Notes Math., vol. 774). Berlin Heidelberg New York: 1978

[Az_2] Azencott, R., Baldi, P., Bellaiche, A. et C., Bougerol, P., Chaleyat-Maurel, M., Elie, L., Granara, J.: Géodésiques et diffusions en temps petit. Société mathématique de France. Astérisque **84–85**, p 3–279 (1981)

[B_1] Bismut J.M.: Large deviations and the Malliavin-Calculus. Progress in Math., vol. 45. Basel Boston Stuttgart: Birkhäuser 1984

[B_2] Bismut, J.M.: Mécanique aléatoire. (Lect. Notes Math., vol. 866) Berlin Heidelberg New York: Springer 1981

[$B.A_1$] Ben-Arous, G.: Méthodes de laplace et de la phase stationnaire sur l'espace de Wiener. (Preprint)

[$B.A_2$] Ben-Arous, G.: Noyau de la chaleur hypoelliptique et géométrie sous-riemannienne. In: Métivier, M., Watanabe, S. (éd.) Stochastic analysis (Lect. Notes Math., vol. 1322 pp. 1–17). Berlin Heidelberg New York: Springer 1989

[B.A-L] Ben-Arous, G., Léandre, R.; Décroissance exponentielle du noyau de la chaleur sur la diagonale (I). (A paraître au Z.W.)

[F.E] Fernique, X.: Intégrabilité des vecteurs gaussiens. C.R. Acad. Sci., Sér. A **270**, 1698–1699 (1970)

[F.V] Freidlin, M.I., Ventcel, A.D.: Random perturbation of dynamical system. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften vol. 2. Berlin Heidelberg New York: Springer 1984

[I.W] Ikeda, N., Watanabe, S.: Stochastic differential equations and diffusion processes. Amsterdam: North-Holland 1981

[J.S] Jerison, D., Sanchez, A.: Subelliptic second order differential operator. In: Berenstein, E., ed. complex analysis III. (Lect. Notes Math., vol. 1227, pp. 46–78). Berlin Heidelberg New York: Springer 1987

[K] Kree, P.: La théorie des distributions en dimension quelconque et l'intégration stochastique. Stochastic analysis and related topics. In: Korezlioglu, H., Ustunel, S. (éd.) (Lect. Notes Math., vol. 1316, pp. 170–234). Berlin Heidelberg New York: Springer 1989

[$K.S_1$] Kusuoka, S., Stroock, D.W.: Applications of the Malliavin Calculus. Part I. In: Itô, K. (éd.) Stochastic analysis. Taniguchi symposium. pp. 271–306 Tokyo: Kinokuniya 1981

[$K.S_2$] Kusuoka, S., Stroock, D.W.: Applications of the Malliavin Calculus. Part II. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA **32**, 1–76 (1985)

[L_1] Léandre, R.: Applications quantitatives et géométrique du calcul de Malliavin. In: Métivier, M., Watanabe, S., (éd.) Stochastic analysis. (Lect. Notes Math., vol. 1322, pp. 109–134). Berlin Heidelberg New York: Springer 1989

[L_2] Léandre, R.: Intégration dans la fibre associée à une diffusion dégénérée. Probab. Théory Relat. Fields **76**, 341–358 (1987)

[L_3] Léandre, R.: Développement asymptotique de la densité d'une diffusion dégénérée. (A paraître dans Forum mahtematicum)

[L_4] Léandre, R.: Estimation en temps petit de la densité d'une diffusion hypoelliptique. C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I. **17**, 801–804 (1985)

[L.R] Léandre, R., Russo, F.: Estimation de Varadhan pour des diffusions à deux paramètres. Probab. Théory Relat. Fields **84**, 429–451 (1990)

[S.V] Stroock, D.W., Varadhan S.R.S.: On the support of diffusion processes with applications to the strong maximum principle. Sixth Berkeley Symposium, pp. 333–368

[W] Watanabe, S.: Analysis of Wiener functionals (Malliavin Calculus) and its applications to heat kernels. Ann. Probab. **15**, 1–39 (1987)