Probab. Th. Rel. Fields 88, 445–482 (1991)

Probability Theory and Related Fields

Une extension des théorèmes de Ray et Knight sur les temps locaux Browniens

P. Vallois

Laboratoire de Probabilités, Université Pierre et Marie Curie, Tour 56, 3ème étage, 4, Place Jussieu, F-75252 Paris Cédex 05, France

Reçu 12 février 1990; en forme revisée 8 octobre 1990

Summary. We introduce two classes of random variables V such that the Brownian local time process at time V is distributed as a 0 or 2 dimensional Bessel bridge. Moreover we obtain new decompositions of the Brownian path on the interval $[0, V]$, which generalize Williams' results.

Introduction

1) Les théorèmes, maintenant classiques, de Ray et Knight ([17], [19], [25], [27]) décrivent la loi des deux processus $(L^{a-x}_{\sigma(a)}; 0 \leqq x \leqq a)$ et $(L^x_{\tau_l}; x \geqq 0)$ où $(L^x_t; x \in \mathbb{R}, t \geqq 0)$ représente le processus des temps locaux d'un mouvement Brownien réel $(X_t; t \geqq 0)$ issu de 0, $\sigma(a)$ (resp. τ_l) désignant le premier instant où le processus X (resp. L^0) atteint le niveau $a > 0$ (resp. $l > 0$). Nous rappelons ces résultats: (RK1): Le processus $(L^{a-x}_{\sigma(a)}; 0 \leqq x \leqq a)$ a pour loi celle du carré d'un processus de Bessel de dimension 2 et issu de 0.

(RK2): Le processus $(L^x_{\tau_l}; x \geqq 0)$ a pour loi celle du carré d'un processus de Bessel de dimension 0 et issu de l.

2) Il existe différentes extensions de ce théorème.

a) Une première possibilité consiste à étudier les temps locaux d'autres processus que le mouvement Brownien. Pour les processus $(Y_t; t \geqq 0)$ considérés ici, il existe une «bonne» famille de temps locaux $(\lambda^x_t; x \in I; t \geqq 0)$, I désignant un intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel le processus Y est défini. On note T le premier instant où le processus Y atteint 1.

i) Lorsque Y est un processus fortement Markovien, Ray ([27]) a démontré que le processus $(\lambda^{1-u}_T; 0 \leqq u)$ est un processus de Markov et en a explicité les probabilités de transition. Une étude très proche, mais avec une technique différente reposant sur le calcul stochastique, a été menée par Jeulin et Yor, pour étudier le cas où Y est une diffusion réelle, continue, issue de 0 et associée à un opérateur elliptique régulier du second ordre. Ces auteurs ont montré que le processus $(\lambda^{1-u}_T; 0 \leqq u \leqq 1)$ a même loi qu'une diffusion inhomogène sur $[0, 1]$, issue de 0, dont le coefficient de diffusion est égal à $2\sqrt{x}$ et le terme de drift $b(u, x)$ est de la forme: $b(u, x) = \alpha(u)\, x$, α s'exprimant à l'aide des coefficients de diffusion et de drift de Y.

ii) Plus généralement, soient Y une diffusion non singulière sur I, x un élément de I, $\mathscr{E}_x$ la tribu engendrée par les excursions de Y au dessus du niveau x ([33], [34]) et ξ une v.a. positive $\mathscr{E}_x$ identifiable ([33], [34]). Alors, conditionellement à $\{X_\xi \geqq x\}$, le processus $(\lambda_\xi^y; y \leqq x)$ est un processus fortement Markovien, inhomogène, dont la probabilité de transition est indépendante de x et ξ.

iii) Soit f une fonction absolument continue sur $[0, +\infty[$, à dérivée localement bornée. Norris et al. ([22]) ont construit une semi-martingale Y pour laquelle le processus $(\lambda_T^{1-u}; 0 \leqq u \leqq 1)$ est une diffusion homogène de drift f (le coefficient de diffusion est encore égal à $2\sqrt{x}$).

iv) Soient $0 < d < 1$ et Z un processus de Bessel de dimension d, issu de 0. Z n'est pas une semi-martingale, c'est un processus de Dirichlet, de décomposition canonique: $Z = X + (d-1)\, Y$, où X est un mouvement Brownien standard, issu de 0 et Y un processus à variation quadratique nulle, nul en 0. Bertoin ([2], Theorem V.1) a montré que $(\lambda_T^a; 0 \leqq a)$ (resp. $(\lambda_T^{a-1}; 0 \leqq a \leqq 1)$) est le carré d'un processus de Bessel de dimension 0 (resp. $2-2d$ et issu de 0).

v) On peut également obtenir des carrés de processus de Bessel de toutes dimensions positives, en considérant le processus $Y_t = (2/\delta)\, L_t^0 + |X_t|$ où $\delta > 0$. En effet ([18]), le processus $(\lambda_\infty^a; a \geqq 0)$ a pour loi celle du carré d'un processus de Bessel de dimension δ et issu de 0.

vi) Soit Y une excursion normalisée du mouvement Brownien ([3]; [11] VI-4-b) p 124; [9]). Y à même loi que le pont de Bessel standard de dimension 3 ([37]) et est une semi-martingale ([11], idem). Alors ([3], Proposition 3.6; [11] p 264) le processus $((1/2)\, \lambda_1^{h(t)}; 0 \leqq t \leqq 1)$ a même loi que $(Y_t; 0 \leqq t \leqq 1)$, où $h(t) = \inf\left\{x \,\middle|\, \int_0^x \cdot \lambda_1^a \, \mathrm{d}a > t\right\}$.

Rappelons un résultat voisin de cet énoncé ([3], Théorème (5.3)), relatif à la valeur absolue Y du pont Brownien: le processus $((1/2\, \lambda_1^{k(t)}; 0 \leqq t \leqq 1)$ est un méandre Brownien, où $k(t) = \sup\left\{x \,\middle|\, \int_x^\infty \lambda_1^a \, \mathrm{d}a > t\right\}$.

b) Un second choix possible est l'étude du processus des temps locaux du mouvement Brownien, mais cette fois pris en d'autres temps que ceux envisagés par Ray et Knight. Le présent travail rentre dans ce cadre; signalons par ailleurs trois autres exemples d'études qui sont de ce type.

i) Une idée naturelle consiste à étudier le processus des temps locaux arrêté à un temps fixe. Perkins ([23]), a montré que le processus $(L_1^x; x \in \mathbb{R})$ est une semi-martingale et en a déterminé la décomposition canonique (voir également [12], théorème II.1.2).

Signalons que l'étude du processus des temps locaux pris en un temps fixe, est étroitement liée à celle du processus des temps locaux arrêté en un temps exponentiel indépendant du mouvement Brownien ([4], [12], [27]).

ii) Soient $S_t = \sup\limits_{0 \leqq u \leqq t} X_u$ et $\alpha = \inf\{t \geqq 0 \,|\, \sup\limits_{x \geqq 0} L_t^x \geqq 1\}$. Eisenbaum ([6]) a décrit explicitement la loi du processus $(L_\alpha^x; x \geqq 0)$:

conditionellement à $L_\alpha^0=l$, les deux processus $(L_\alpha^x; 0\leqq x\leqq X_\alpha)$ et $(L_\alpha^{S_\alpha-x}; 0\leqq x\leqq S_\alpha-X_\alpha)$ sont indépendants, le premier processus (resp. second) a pour loi celle du carré d'un processus de Bessel de dimension 2 (resp. 4), issu de l (resp. 0) et arrêté à son premier temps d'atteinte de 1.

iii) Jeulin ([12]) a défini une classe de v.a. ρ telles que X_ρ est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathscr{E}_x; x\in\mathbb{R})$ des excursions du mouvement Brownien au-dessus d'un niveau donné et ρ est un instant où X atteint son maximum. Le processus $(L_\rho^{S_\rho-x}; x\geqq 0)$ est alors une semi-martingale dont on peut expliciter la décomposition canonique.

3 a) Venons en maintenant à la classe de temps que nous considérons dans ce travail, toujours dans le but de donner une extension des théorèmes de Ray et Knight qui s'apparente à celle du second type. Remarquons que le temps d'arrêt $\sigma(a)$ (resp. τ_l), intervenant dans l'énoncé du théorème (RK1) (resp. (RK2)) est un instant où X atteint son maximum (resp. X s'annule). Il est alors naturel de chercher à définir une classe $\mathscr{C}_2$ (resp. $\mathscr{C}_0$) de v.a. positives σ (resp. τ) telles que σ est un instant où X atteint son maximum (resp. X s'annule) et pour laquelle on puisse décrire les lois des processus $(L_\sigma^x; x\geqq 0)$ (resp. $(L_\tau^x; x\geqq 0)$).

En s'inspirant des différentes constructions relatives à la solution au problème de Skorokhod pour le mouvement Brownien ([1], [24], [31]), on peut définir les classes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_2$ à l'aide de derniers temps de passage. Plus précisément, soient $L=L^0$ le temps local en 0 du mouvement Brownien X, $H=S$ (resp. $H=L$), K un processus croissant et à support disjoint de celui de H, φ une fonction définie sur $[0,+\infty[$, continue, strictement positive, croissante et $T(H,K,\varphi)=\sup\{t\geqq 0; H_t\leqq\varphi(K_t)\}$ (avec la convention $\sup(\phi)=0$). Alors:

(1) $T=T(H,K,\varphi)$ est une v.a. strictement positive, finie, qui appartient au support de dH et $H_T=\varphi(K_T)$.

Soient $s_t=\sup_{0\leqq u\leqq t}(-X_u)$ et a un réel positif. Les quatre processus S, s, L^a et L jouent un rôle privilégié dans les théorèmes de Ray et Knight et sont, en outre, deux à deux à supports disjoints. On obtient ainsi une famille de variables aléatoires σ (resp. τ) telle que σ soit un instant de maximum pour X (resp. $X_\tau=0$) en considérant $\sigma=T(S,K,\varphi)$ avec $K\in\{s,L,L^a\}$ (resp. $\tau=T(L,K,\varphi)$ avec $K\in\{S,s,L^a\}$).

Il suffit en fait de considérer:

$$U=\sup\{t\geqq 0\,|\,S_t\leqq\varphi(s_t)\},\qquad V=\sup\{t\geqq 0\,|\,S_t\leqq\varphi(L_t)\} \tag{2}$$

$$V'=\sup(t\geqq 0\,|\,L_t\leqq\varphi(s_t)\},\qquad W=\sup\{t\geqq 0\,|\,L_t\leqq\varphi(L_t^a)\}. \tag{3}$$

Par définition, l'ensemble $\mathscr{C}_2$ (resp. $\mathscr{C}_0$) est formé des v.a. U et V (resp. V' et W). On remarque que lorsque φ est constante et égale à $c>0$, $U=V=\sigma(c)$ et $V'=W=\tau_c$.

b) En général, les quatre v.a. U, V, V' et W ne sont pas des temps identifiables au sens de Walsh ([33], [34]) et les deux v.a. X_U et X_V ne sont pas des $(\mathscr{E}_x; x\in\mathbb{R})$ temps d'arrêt.

Rappelons qu'une v.a. appartient à $\mathscr{E}_x$ si elle ne dépend que des excursions de X situées au-dessus du niveau x. Or $\{U\leqq t\}=\{\forall r>t\,|\,S_r>\varphi(s_r)\}$. On en déduit que d'une manière intuitive, lorsque φ n'est pas constante, pour tout x, cet événement n'appartient pas à $\mathscr{E}_x$.

c) D'après la propriété *(1)* on a: $S_U = \varphi(s_U)$, ce qui nous conduit à décrire la loi du processus $(L_U^x; x \geqq 0)$, conditionnellement à s_U, et d'une manière analogue, celle du processus $(L_V^x; x \geqq 0)$, resp. $(L_{V'}^{-x}; x \geqq 0)$, resp. $(L_W^x; 0 \leqq x \leqq a)$ conditionnellement à L_V, resp. $s_{V'}$, resp. L_W^a.

4) Notre extension des théorèmes de Ray et Knight est la suivante:

Théorème (RK) *Soient φ une fonction continue, croissante, strictement positive, bornée, U et V*(resp. *V' et W) les deux v.a. définies par (2)* (resp. *(3)*).

Alors:

(I) Conditionnellement à $s_U = x$ et $L_U = l$ (resp. *$L_V = x$*), *le processus* $(L_U^{S_U - y}; 0 \leqq y \leqq S_U)$, (resp. $(L_V^{S_V - y}; 0 \leqq y \leqq S_V)$), *est le carré d'un pont de processus de Bessel de dimension* 2, *de longueur $\varphi(x)$, issu de* 0, *et conditionné à valoir* l (resp. x) *au temps $\varphi(x)$.*

(II) Conditionnellement à $s_{V'} = x$, resp. $L_W^a = x$, *le processus* $(L_{V'}^y; 0 \leqq y)$, resp. $(L_W^y; 0 \leqq y \leqq a)$, *est le carré d'un processus de Bessel de dimension* 0 *et issu de* $\varphi(x)$, resp. *est le carré d'un pont de processus de Bessel de dimension* 0, *de longueur a, issu de $\varphi(x)$ et conditionné à valoir x au temps a.*

Remarques 1) En particulier, lorsque φ est une fonction constante, on retrouve les théorèmes de Ray et Knight (RK1 et RK2).

2) En fait les quatre v.a. U, V, V' et W peuvent être définies lorsque φ est seulement continue à gauche et strictement positive. Lorsqu'il en est ainsi, U n'est pas nécessairement un instant de maximum et on peut avoir $P(0 < U < +\infty) < 1$. Toutefois dans ce cadre général, en renforçant le conditionnement, les assertions (I) et (II) restent vraies. Le lecteur trouvera au paragraphe 2–3 l'ensemble complet des résultats. Lorsque φ est une fonction continue à gauche, strictement positive, bornée et croissante, d'après (1) on a p.s.: $0 < U < +\infty$ et $X_U > 0$; $0 < V < +\infty$ et $X_V > 0$; $0 < V' < +\infty$ et $X_{V'} = 0$. Ce qui justifie la présentation adoptée.

3) La preuve repose, pour l'essentiel, sur la décomposition du processus des temps locaux (arrêté en U, resp. V, V' ou W) en une somme de carrés de ponts de processus de Bessel indépendants, de dimension 0 ou 2, et également sur la propriété d'additivité des ponts de carré de Bessel ([25]). Cette somme est obtenue d'une part en utilisant les théorèmes classiques de Ray et de Knight et d'autre part en décomposant la trajectoire Brownienne sur l'intervalle $[0, U]$, resp. $[0, V]$, resp. $[0, V']$.

Nous supposons à présent que φ est une fonction continue à gauche et strictement positive, dans ces conditions on a:

Théorème 1 *Soit $\rho = \sup\{0 \leqq t < U \mid X_t = -s_U\}$. Alors, conditionnellement à $s_U = x$ et à $\{X_U > 0, U < +\infty\}$:*

1°) *Les deux processus $(X_t; 0 \leqq t \leqq \rho)$ et $(X_{\rho+t}; 0 \leqq t \leqq U - \rho)$ sont indépendants.*

2°) *α) Le processus $(S_U - X_t; 0 \leqq t \leqq \rho)$ a pour loi celle d'un processus de Bessel de dimension 3, issu de $S_U = \varphi(x)$ et arrêté à son premier temps d'atteinte de $S_U + s_U = \varphi(x) + x$.*

β) Le processus $(s_U + X_{\rho+t}; 0 \leqq t \leqq U - \rho)$ a pour loi celle d'un processus de Bessel de dimension 3, issu de 0 *et arrêté au premier instant où il atteint $\varphi(x) + x$.*

Théorème 2 *Soit* $\rho=\sup\{0\leqq t<V\,|\,X_t=0\}$. *Alors, conditionnellement à* $L_V=l$ *et à* $\{X_V>0,\, V<+\infty\}$:

1°) *Les deux processus* $(X_u;0\leqq u\leqq\rho)$ *et* $(X_{\rho+u};0\leqq u\leqq V-\rho)$ *sont indépendants.*

2°) *La loi du processus* $(X_u;0\leqq u\leqq\rho)$ *est celle d'un mouvement Brownien issu de* 0, *arrêté au premier instant où son temps local en* 0 *atteint* l *et conditionné à ne pas dépasser* $\varphi(l)$.

3°) *La loi du processus* $(X_{\rho+u};0\leqq u\leqq V-\rho)$ *est celle d'un processus de Bessel de dimension 3, issu de* 0, *arrêté au premier instant où il atteint* $\varphi(l)$.

Théorème 3 *Soient* $\rho=\sup\{0\leqq t<V'\,|\,X_t=-s_{V'}\}$, $d=\inf\{t>\rho\,|\,X_t=0\}$ *et* $g=\sup\{t<\rho\,|\,X_t=0\}$. *Alors conditionnellement à* $L_\rho=l,\, s_{V'}=x$ *et* $\{0<V'<+\infty,\, X_{V'}=0\}$:

1°) *Les quatre processus* $(X_u;0\leqq u\leqq g)$, $(X_{u+g};0\leqq u\leqq\rho-g)$, $(X_{u+\rho};0\leqq u\leqq d-\rho)$ *et* $(X_{d+u};0\leqq u\leqq V'-d)$ *sont indépendants.*

2°) *La loi du processus* $(X_u;0\leqq u\leqq g)$, resp. $(X_{d+u};0\leqq u\leqq V-d)$, *est celle d'un mouvement Brownien issu de* 0, *arrêté au premier instant où son temps local en* 0 *atteint* l, resp. $\varphi(x)-l$, *et conditionné à ne pas dépasser* $-x$.

3°) *La loi des deux processus* $(-X_{u+g};0\leqq u\leqq\rho-g)$ *et* $(s_{V'}+X_{u+\rho};0\leqq u\leqq d-\rho)$ *est celle d'un processus de Bessel de dimension 3, issu de* 0 *et arrêté au premier instant où il atteint* x.

Remarque Le lecteur trouvera à la fin du paragraphe 3 (Figs. 3, 4 et 5) une représentation géométrique de la trajectoire du mouvement Brownien sur les intervalles $[0,U]$, $[0,V]$ et $[0,V']$.

5) Soit σ une v.a. appartenant à la classe $\mathscr{C}_2$. On déduit du théorème (RK) que la connaissance complète de la loi des processus $(L^x_\sigma;x\geqq 0)$; $(L^{-x}_{V'};x\geqq 0)$; $(L^x_W;0\leqq x\leqq a)$ se ramène à celle de la loi des v.a. s_U, L_V, $s_{V'}$ et L^a_W.

Soit φ une fonction continue, croissante et strictement positive. Alors:

a) (i) $P(s_U\in dx;0<U<+\infty)$

$$=\frac{\varphi(x)}{(x+\varphi(x))^2}\exp-\left(\int_{\varphi(x)}^{\infty}\frac{d\varphi(t)}{t+\varphi^{-1}(t)}\right)1_{\{x>0\}}\,dx.$$

(ii) $P(0<U<+\infty)=1$ *ssi* les conditions suivantes sont réalisées:

$$\lim_{+\infty}(\varphi(x)/x)=0,\qquad \int_1^\infty \varphi(t)\,t^{-2}\,dt<+\infty$$

$$\text{et}\quad \left(\varphi(0)>0 \text{ ou } \left\{\varphi(0)=0 \text{ et } \int_0^1 d\varphi(t)/(t+\varphi(t))=+\infty\right\}\right).$$

(b) (i) $P(s_{V'}\in dx;0<V'<+\infty)$

$$=\frac{\varphi(x)}{2x^2}\exp-\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi(x)}{x}+\int_x^\infty\frac{d\varphi(u)}{u}\right)1_{\{x>0\}}\,dx.$$

(ii) $P(0<V'<+\infty)=1$ *ssi* les conditions suivantes sont réalisées:

$$\lim_{+\infty}(\varphi(x)/x)=0,\ \int_1^\infty\varphi(t)\,t^{-2}\,dt<+\infty \text{ et } \int_0^1\varphi(t)\,t^{-2}\,dt=+\infty.$$

c) Lorsque $\varphi(x)=\alpha x+\beta$ avec $\alpha>0$ et $\beta\geqq 0$, on a:

(i) $P(L_W^a\in dx)$

$$=\left(\frac{1-\alpha}{2a}\right)\sqrt{\frac{\varphi(x)}{x}}\exp-\left(\frac{x+\varphi(x)}{2a}\right)I_1\left(\frac{\sqrt{x\varphi(x)}}{a}\right)1_{(x>0)},$$

$$+(1-\alpha)\exp-\frac{\beta}{2a}\delta_0(dx)\quad \text{quand } \alpha<1.$$

(ii) *Lorsque* $\alpha\geqq 1$ *on a*: $P(W=+\infty)=1$.

(iii) *Lorsque* $\alpha<1$, *on a*: $P(W<+\infty)=1$ et $P(0<W<+\infty)=1$ *si* $\beta>0$ (resp. $P(W=0)=1-\alpha$ *si* $\beta=0$).

d) Lorsque φ est une fonction étagée strictement positive, on peut calculer la loi de la v.a. L_V (voir le 2) de la remarque (3.1)). Dans le cas général, lorsque φ est croissante et continue à gauche, la formule obtenue est compliquée, c'est la raison pour laquelle nous avons préféré ne pas la faire figurer.

Rappelons que d'après la propriété *(1)*, on a $S_U=\varphi(s_U)$ sur $\{0<U<+\infty\}$; $L_{V'}=\varphi(s_{V'})$ sur $\{0<V'<+\infty\}$ et $L_W=\varphi(L_W^a)$ sur $\{0<W<+\infty\}$, ce qui permet de déterminer la loi des v.a. S_U, $L_{V'}$ et L_W.

6) Par définition, les variables U, V, V' et W peuvent se mettre sous la forme $T(H,K,\varphi)=\sup\{t\geqq 0;\ H_t\leqq\varphi(K_t)\}$ où H et K sont deux processus continus, croissants et à supports disjoints. Au paragraphe 1, on se place dans un cadre général qui va nous permettre de calculer la loi de toute fonctionnelle adaptée pour la filtration de X et arrêté au temps $T(H,K,\varphi)$. Il s'agit en fait de déterminer la projection duale prévisible ([5]) du processus croissant $1_{[0,\theta]}$ avec $\theta=T(H,K,\varphi)$.

Au second paragraphe, on commence par montrer les théorèmes 1, 2 et 3 lorsque $\varphi\equiv c$; lorsqu'il en est ainsi, $V=U=\sigma(c)$ et $V'=\tau_c$. En utilisant de plus les résultats de l'étude menée au paragraphe 1, on peut établir les théorèmes 1, 2 et 3. Des théorèmes (RK1) et (RK2), il est alors aisé d'en déduire le théorème (RK).

Dans une troisième partie, on calcule la loi des v.a.: s_U, L_V, $s_{V'}$ et L_W^a, lorsque φ est une fonction monotone et continue.

Je remercie T. Jeulin des remarques qu'il m'a données.

1 Résultats préliminaires

Notations 1°) Lorsque f est une fonction positive, continue à droite et croissante, on note f^{-1} son inverse continue à droite:

$$f^{-1}(t)=\inf\{u\,|\,f(u)>t\}.\qquad (\text{avec la convention } \inf\phi=+\infty).$$

2°) Soient $(\Omega,(\mathscr{F}_t)_{t\geqq 0},P)$ un espace de probabilité vérifiant les conditions habituelles, $(H_t;t\geqq 0)$ et $(K_t;t\geqq 0)$ deux processus définis sur Ω, adaptés à la filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\geqq 0}$ tels que:

(1.1) i) H et K sont croissants, continus,

$$H_0=K_0=0,\qquad H_\infty=K_\infty=+\infty,\qquad (H_t,K_t)\neq(0,0)\quad \text{pour tout } t>0.$$

ii) Il existe un processus X défini sur $\Omega,(\mathscr{F}_t)_{t\geqq 0}$ adapté et à valeurs réelles, tel que (H,K,X) soit un processus fortement Markovien, relativement à la filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\geqq 0}$.

iii) H et K sont à supports disjoints: presque sûrement, l'intersection du support de $dH_.$ et de $dK_.$ est vide ou égal à $\{0\}$.

3°) Soient H et K deux processus vérifiant (1.1) et $\tilde{K}$ le processus défini par $\tilde{K}_t = K_{H_t^{-1}}$ pour tout $t>0$. On associe à $\tilde{K}$ le processus ponctuel Y défini par $Y_t = \Delta\tilde{K}_t$ lorsque $\Delta\tilde{K}_t > 0$ et $Y_t = \delta$ sinon, et on note $\nu(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x)$ le système de Lévy du processus Y (voir [10], 3.21 p 75).

4°) $\mathscr{H}^+$ désigne l'ensemble des points de croissance stricte pour le processus croissant H, c'est-à-dire que $\mathscr{H}^+$ est formé des points appartenant au support de $dH_.$ non isolés à droite dans le support de $dH_.$.

Dans ces conditions, on a:

Proposition 1 *Soient H et K deux processus vérifiant* (1.1), *λ une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs positives, continue à gauche et $\theta = \sup\{t \mid H_t \leqq \lambda(K_t)\}$. Alors, il existe une fonction borélienne h_0 définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ à valeurs dans* $[0, 1]$ *telle que pour tout processus Z, $(\mathscr{F}_t)_{t \geqq 0}$ prévisible et positif on ait*:

$$E[Z_\theta 1_{\{\theta > 0, \theta \in \mathscr{H}^+\}}] = E\left[\int_0^\infty Z_{\eta_t} 1_{\{g_t \leqq \lambda(\tilde{K}_{t-}) < t\}} h_0(\tilde{K}_{t-}, X_{\eta_t}) \nu(\mathrm{d}t, \mathbb{R}_+)\right]$$

avec $\quad \eta_t = \inf\{s \mid H_s > \lambda(\tilde{K}_{t-})\}$ et $g_t = \sup\{s < t \mid \Delta\tilde{K}_s > 0\}$.

Remarques (1.2) 1) Sur l'ensemble $\{0 < \theta < +\infty)$, θ appartient au support de $dK_.$ ou de $dH_.$.

2) Si λ est de plus une fonction croissante, bornée et strictement positive, alors $0 < \theta < +\infty$, θ appartient au support de $dH_.$ et $H_\theta = \lambda(K_\theta)$.

3°) Une autre cas intéressant est celui où la fonction λ est continue et décroissante. En effet lorsqu'il en est ainsi:

a) $\theta = \inf\{t \mid H_t \geqq \lambda(K_t)\}$, $H_\theta = \lambda(K_\theta)$; en particulier θ est un $(\mathscr{F}_t)_{t \geqq 0}$ temps d'arrêt fini.

b) Lorsque λ est strictement décroissante on a: $\theta = \inf\{t \mid K_t \geqq \lambda^{-1}(H_t)\}$ où λ^{-1} désigne la bijection réciproque de λ.

Démonstration de la proposition 1

Soient $\varepsilon > 0$, $(Z_t; t \geqq 0)$ un processus, $(\mathscr{F}_t)_{t \geqq 0}$ prévisible et positif et $\Delta_\varepsilon = E[Z_\theta 1_{\{\theta > 0, \theta \in \mathscr{H}^+, H_\theta \geqq \varepsilon\}}]$.

On définit par récurrence la suite de temps d'arrêt $(\xi_n)_{n \geqq 1}$ de la manière suivante (voir la Fig. 1):

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \inf\{t \mid H_t > \varepsilon\}, \\ \xi_{2n+2} &= \inf\{t > \xi_{2n+1} \mid K_t > K_{\xi_{2n+1}}\}, \\ \xi_{2n+3} &= \inf\{t > \xi_{2n+2} \mid H_t > H_{\xi_{2n+2}}\} \qquad \text{pour tout } n \geqq 0. \end{aligned}$$

Pout tout $n \geqq 1$, on a:

a) ξ_{2n} (resp. ξ_{2n-1}) est un point de croissance stricte pour K (resp. H),

b) $H_{\xi_{2n}} > H_{\xi_{2n-1}}$ et $K_{\xi_{2n}} = K_{\xi_{2n-1}}$; $K_{\xi_{2n+1}} > K\xi_{2n}$ et $H_{\xi_{2n+1}} = H_{\xi_{2n}}$,

c) $\{\theta > 0, \theta \in \mathscr{H}^+, H_\theta \geqq \varepsilon\} = \bigcup_{n \geqq 0} \{\xi_{2n+1} \leqq \theta \leqq \xi_{2n+2}, \theta \in \mathscr{H}^+\}$,

d) $\{t \geqq \varepsilon, \Delta\tilde{K}_t > 0\} = \{H_{\xi_{2n+2}}; n \geqq 0\}$.

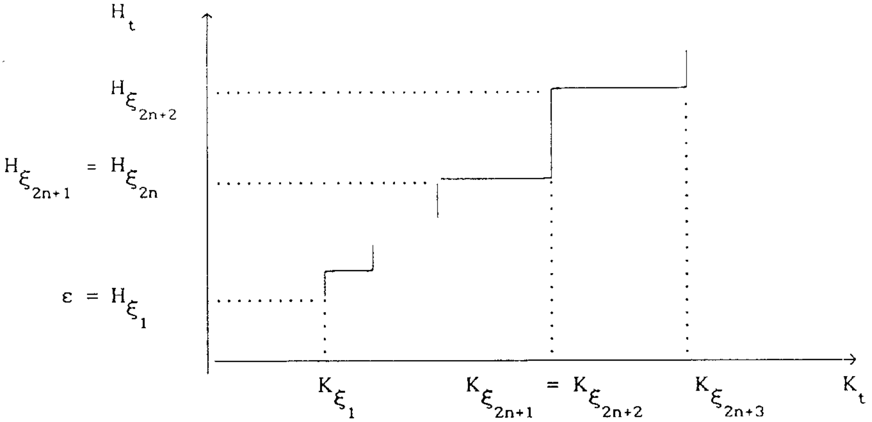

Fig. 1. Une trajectoire du processus (H, K)

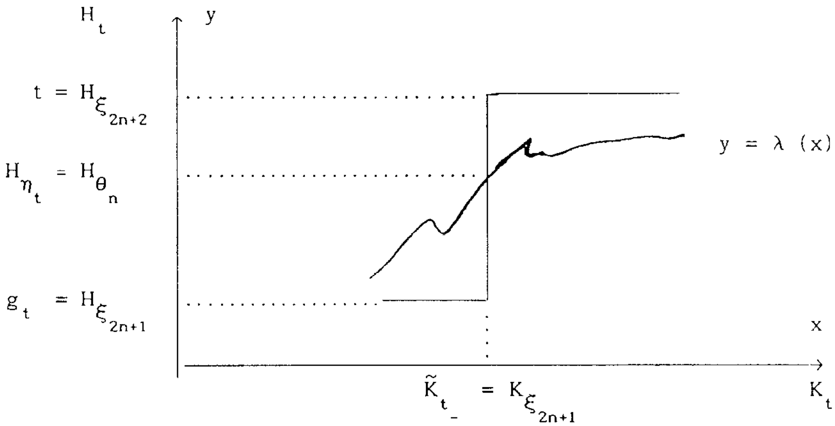

Fig. 2. Étude au temps θ

La fonction λ étant continue à gauche, on a: $H_\theta \leqq \lambda(K_\theta)$. De plus

$$\{\xi_{2n+1} \leqq \theta < \xi_{2n+2}, \theta \in \mathscr{H}^+\}$$
$$= \{H_{\xi_{2n+1}} \leqq \lambda(K_{\xi_{2n+1}}); \theta_n < \xi_{2n+2}; \forall u > \theta_n, H_u > \lambda(K_u)\}$$

avec $\theta_n = \inf\{u > \xi_{2n+1} \mid H_u > \lambda(K_{\xi_{2n+1}})\}$ (voir la Fig. 2).

Le processus (H, K, X) est fortement Markovien relativement à la filtration $(\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}$, d'où:

$$P(\forall u > \theta_n; H_u > \lambda(K_u) | \mathscr{F}_{\theta_n}) = h_1(H_{\theta_n}, K_{\theta_n}, X_{\theta_n}).$$

Mais

$$H_{\theta_n} = \lambda(K_{\xi_{2n+1}}) \quad \text{et} \quad \{H_{\xi_{2n+1}} \leqq \lambda(K_{\xi_{2n+1}}), \theta_n < \xi_{2n+2}\} \in \mathscr{F}_{\theta_n},$$

on en déduit:

$$\Delta_\varepsilon = \sum_{n \geqq 0} E(Z_{\theta_n} 1_{\{H_{\xi_{2n+1}} \leqq \lambda(K_{\xi_{2n+1}}) < H_{\xi_{2n+2}}\}} h_0(K_{\xi_{2n+1}}, X_{\theta_n}))$$

avec

$$h_0(x, y) = h_1(\lambda(x), x, y).$$

On note $g_t = \sup\{u<t \mid \Delta\tilde{K}_u>0\}$ et $\eta_t = \inf\{s \mid H_s > \lambda(\tilde{K}_{t-})\}$ pour tout $t>0$.

Soit $t = H_{\xi_{2n+2}}$, alors: $g_t = H_{\xi_{2n+1}}$, $\tilde{K}_{t-} = K_{\xi_{2n+1}}$, $\theta_n = \eta_t$ et

$$\Delta_\varepsilon = E\big(\sum_{t \geqq \varepsilon} Z_{\eta_t} 1_{\{g_t \leqq \lambda(\tilde{K}_{t-})<t,\, \Delta\tilde{K}_t>0\}} h_0(\tilde{K}_{t-}, X_{\eta_t})\big).$$

On remarque que $g_t<t$, donc pour tout s appartenant à $]g_t, t[$ on a:

$$g_s = g_t, \qquad \tilde{K}_{s-} = \tilde{K}_{t-}, \qquad \eta_s = \eta_t.$$

Les deux processus $(g_t; t>0)$ et $(\eta_t; t>0)$ sont continus à gauche.

Sur l'ensemble $\{\lambda(\tilde{K}_{t-})<t\}$, on a:

$$\eta_t = \hat{\eta}_t \quad \text{avec} \quad \hat{\eta}_t = \eta_t \wedge H_{t-}^{-1}.$$

Les deux processus $(H_{t-}^{-1}; t \geqq 0)$ et $(\eta_t; t \geqq 0)$ étant continus à gauche, le processus $(\hat{\eta}_t; t \geqq 0)$ est continu à gauche.

Pour tout $t>0$, H_{t-}^{-1} est $\mathscr{F}_{H_t^{-1}}$ mesurable, montrons qu'il en est de même pour $\hat{\eta}_t$.

Pour tout $a>0$ on a:

$$\hat{\eta}_t 1_{\{H_t^{-1} \leqq a\}} = ((\inf\{0<y \leqq a \mid H_y > \lambda(\tilde{K}_{t-})\}) \wedge H_{t-}^{-1})\, 1_{\{H_t^{-1} \leqq a\}}$$

donc $\hat{\eta}_t 1_{\{H_t^{-1} \leqq a\}}$ appartient à $\mathscr{F}_a$ et $\hat{\eta}_t$ est $\mathscr{F}_{H_t^{-1}}$ mesurable.

Les deux processus $(\hat{\eta}_t; t \geqq 0)$ et $(g_t; t \geqq 0)$ sont continus à gauche, et $(\mathscr{F}_{H_t^{-1}})_{t \geqq 0}$ adaptés, ils sont donc $(\mathscr{F}_{H_t^{-1}})_{t \geqq 0}$ prévisibles. Montrons:

Lemme 1 *Soit $(Z'_t; t \geqq 0)$ un processus prévisible pour la filtration $(\mathscr{F}_t)_{t \geqq 0}$. Alors le processus $(Z'_{\hat{\eta}_t}; t \geqq 0)$ est $(\mathscr{F}_{H_t^{-1}})_{t \geqq 0}$ prévisible, où $\hat{\eta}$ désigne le processus $\hat{\eta}_t = \eta_t \wedge H_{t-}^{-1}$, $t \geqq 0$.*

Démonstration du lemme 1

1) On montre que le processus $(Z'_{\hat{\eta}_t}; t \geqq 0)$ est $(\mathscr{F}_{H_t^{-1}})_{t \geqq 0}$ adapté. En raisonnant par classe monotone, il suffit de prendre Z' élémentaire de la forme: $Z'_t = 1_{]a,b]}(t)\,\bar{Z}$, avec $a<b$, et $\bar{Z}$ une v.a. $\mathscr{F}_a$ mesurable. Si $a<\hat{\eta}_t = \eta_t \wedge H_{t-}^{-1}$, alors $a<H_t^{-1}$. On a:

$$Z'_{\hat{\eta}_t} = 1_{\{a<\hat{\eta}_t \leqq b\}} (1_{\{a<H_t^{-1}\}} \bar{Z}).$$

Mais $\hat{\eta}_t$ et $(1_{\{a<H_t^{-1}\}} \bar{Z})$ sont $\mathscr{F}_{H_t^{-1}}$ mesurables. On en déduit que $Z'_{\hat{\eta}_t}$ l'est également.

2) On montre que $(Z'_{\hat{\eta}_t}; t \geqq 0)$ est $(\mathscr{F}_{H_t^{-1}})_{t \geqq 0}$ prévisible.

En raisonnant par classe monotone, on peut supposer $(Z'_t; t \geqq 0)$ continu. Le processus $(\hat{\eta}_t; t \geqq 0)$ est continu à gauche, donc $(Z'_{\hat{\eta}_t}; t \geqq 0)$ est continu à gauche; d'après le 1°) il est $(\mathscr{F}_{H_t^{-1}})_{t \geqq 0}$ adapté. $(Z'_{\hat{\eta}_t}; t \geqq 0)$ est alors $(\mathscr{F}_{H_t^{-1}})_{t \geqq 0}$ prévisible. Ceci termine la démonstration du lemme 1. □

On déduit du lemme 1 que le processus:

$$(Z_{\eta_t} 1_{\{g_t \leqq \lambda(\tilde{K}_{t-})<t\}} h_0(\tilde{K}_{t-}, X_{\eta_t}); t \geqq 0) \quad \text{est} \quad (\mathscr{F}_{H_t^{-1}})_{t \geqq 0}$$

prévisible. Il vient alors:

$$\Delta_\varepsilon = E\left[\int_\varepsilon^\infty Z_{\eta_t} 1_{\{g_t \leqq \lambda(\tilde{K}_{t-})<t\}} h_0(\tilde{K}_{t-}, X_{\eta_t})\, \nu(\mathrm{d}t, \mathbb{R}_+)\right].$$

Il suffit ensuite de faire tendre ε vers 0, ce qui termine la preuve de la proposition 1.

Remarques (1.3) 1°) Lorsque X est le mouvement Brownien réel, issu de 0 et $(\mathscr{F}_t)_{t\geqq 0}$ sa filtration naturelle, alors si H et K sont deux processus choisis parmi $\{s, S, L^a, L\}$, ils vérifient les conditions (1.1).

2°) Pour déterminer la loi des processus des temps locaux $(L^x_\sigma; x\geqq 0)$ (resp. $(L^x_\tau; x\geqq 0)$) lorsque $\sigma = U$ ou V (resp. $\tau = V'$ ou W) il n'est pas nécessaire de connaître la forme explicite de la fonction $h_0(x, y)$ intervenant dans l'énoncé de la proposition 1. En revanche, ce n'est plus le cas pour le calcul explicite de la loi des variables aléatoires s_U, L_V, $s_{V'}$ et L^a_W.

3°) Reprenons les notations de la proposition 1. Pour tout temps d'arrêt U appartenant au support de $dH_.$ et vérifiant $H_U = \lambda(K_U)$, on a $h_0(K_U, X_U) = P(\{\forall t > U \mid H_t > \lambda(K_t)\} \mid \mathscr{F}_U)$.

En particulier si λ est une fonction continue et strictement décroissante, alors $h_0 \equiv 1$.

Désormais le processus $(X_t; t\geqq 0)$ désigne un mouvement Brownien réel et issu de 0.

Nous déterminons à présent le système de Lévy des processus $(s_{\tau_t}; t\geqq 0)$, $(L^a_{\tau_t}; t\geqq 0)$, $(s_{\sigma(t)}; t\geqq 0)$ et $(L_{\sigma(t)}; t\geqq 0)$, où $(L_t; t\geqq 0)$ (resp. $L^a_t; t\geqq 0)$ représente le temps local en 0 (resp. $a>0$) de X, $S_t = \sup\limits_{0\leqq u\leqq t} X_u$, $s_t = \sup\limits_{0\leqq u\leqq t} (-X_u)$, τ_t (resp. $\sigma(t)$) désigne l'inverse continu à droite de L (resp. S).

Proposition 2 *Soit* $\nu_1(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x)$ *le système de Lévy* (resp. $\nu_2(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x)$ *la mesure de Lévy*) *du processus* $(s_{\tau_t}; t\geqq 0)$ (resp. $(L^a_{\tau_t}; t\geqq 0)$). *Alors*:

1°) $\nu_1(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x) = \dfrac{1}{2(x+s_{\tau_t})^2} 1_{\{t>0,\, x>0\}} \,\mathrm{d}t, \mathrm{d}x$, *en particulier*:

$$\nu_1(\mathrm{d}t, \mathbb{R}_+) = \frac{1}{2s_{\tau_t}} 1_{\{t>0\}} \,\mathrm{d}t.$$

2°) $\nu_2(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x) = \dfrac{1}{4a^2} \exp -\left(\dfrac{x}{2a}\right) 1_{\{x>0,\, t>0\}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$, *en particulier*:

$$\nu_2(\mathrm{d}t, \mathbb{R}_+) = \frac{\mathrm{d}t}{2a} 1_{\{t>0\}}.$$

Proposition 3 *Soit* $\nu_3(\mathrm{d}u, \mathrm{d}y)$ (resp. $\nu_4(\mathrm{d}u, \mathrm{d}y)$) *le système de Lévy du processus* $(L_{\sigma(t)}; t\geqq 0)$ (resp. $(s_{\sigma(t)}; t\geqq 0)$). *Alors*:

1°) $\nu_3(du, \mathrm{d}y) = \dfrac{1}{2u^2} \exp -\left(\dfrac{y}{2u}\right) 1_{\{y>0,\, u>0\}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}u$. *En particulier*:

$$\nu_3(\mathrm{d}u, \mathbb{R}_+) = \frac{1}{u} 1_{\{u>0\}} \,\mathrm{d}u.$$

2°) $\nu_4(\mathrm{d}u,\ \mathrm{d}y) = \dfrac{1}{(u+y+s_{\sigma(u)})^2} 1_{\{u>0,\, y>0\}} \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}y$. *En particulier*:

$$\nu_4(\mathrm{d}u, \mathbb{R}_+) = \frac{1}{u+s_{\sigma(u)}} 1_{\{u>0\}} \,\mathrm{d}u.$$

Démonstration des propositions 2 et 3

On commence par établir la proposition 3.

Soient f une fonction borélienne définie sur R_+, positive, vérifiant: $f(0)=0$, Z un processus $(\mathscr{F}_{\sigma(t)})_{t\geqq 0}$, prévisible, positif,

$$A_t^i=\sum_{u\leqq t} f(\Delta\,\xi^i_{\sigma(u)}),\qquad \Delta_i=E\left[\int_0^\infty Z_s\,\mathrm{d}A_s^i\right],\qquad i=1 \text{ ou } 2;$$
$$\xi^1=L \quad \text{et} \quad \xi^2=s.$$

Il suffit de choisir $Z_t=1_{]a,b]}(t)\,Z$, avec Z une v.a. positive et $\mathscr{F}_{\sigma(a)}$ mesurable. Mais toute variable $\mathscr{F}_{\sigma(a)}$ mesurable peut s'écrire sous la forme $Z'_{\sigma(a)}$, où Z' est un processus $(\mathscr{F}_t)_{t\geqq 0}$ optionnel. On peut donc se restreindre à:

$$Z'_t=1_{[\alpha,\beta[}(t)\,Z'_\alpha,\quad \text{avec } Z'_\alpha=g(X_{t_1},\dots,X_{t_n}),\qquad t_1<\dots<t_n\leqq\alpha.$$

En conclusion on peut prendre Z de la forme:

$$Z_t=1_{]a,b]}(t)\,1_{\{\alpha\leqq\sigma(a)<\beta\}}\,g(X_{t_1},\dots,X_{t_n})\quad \text{avec } t_1<\dots<t_n\leqq\alpha.$$

Lorsqu'il en est ainsi, on a:

$$\Delta_i=E\Big[\sum_{a\leqq u<b} 1_{\{\alpha\leqq\sigma(a)<\beta\}}\,g(X_{t_1},\dots,X_{t_n})\,f(\Delta\,\xi^i_{\sigma(u)})\Big].$$

Remarquons que

$$L_t=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t 1_{\{|X_u|<\varepsilon\}}\,\mathrm{d}u,\qquad s_t=\sup_{0\leqq u\leqq t}(-X_u)$$

et utilisons l'identité en loi de Paul Lévy:

$$(1.4)\qquad (S-X,S)\overset{(d)}{=}(|X|,L).$$

Il vient:

$$\Delta_i=E\Big[G\sum_{a\leqq u<b} f(\Delta\gamma^i_{\tau_u})\Big]$$

avec

$$G=g(L_{t_1}-|X_{t_1}|,\dots,L_{t_n}-|X_{t_n}|)\,1_{\{\alpha\leqq\tau_a<\beta\}},$$
$$\gamma_t^1=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t 1_{\{||X_s|-L_s|<\varepsilon\}}\,\mathrm{d}s\quad \text{et}\quad \gamma_t^2=\sup_{0\leqq s\leqq t}(|X_s|-L_s).$$

Soient $u>0$ tel que $\tau_{u-}<\tau_u$, e_u l'excursion:

$$e_u=(X_{\tau_{u-}+s};\,0\leqq s\leqq\tau_u-\tau_{u-})\quad \text{et}\quad m_u=\max_{0\leqq s\leqq\tau_{u-}-\tau_u}|e_u(s)|.$$

Pour tout x appartenant à $[\tau_{u-}, \tau_u]$, on a:

$$\gamma_x^1 - \gamma_{\tau_{u-}}^1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\tau_{u-}}^{x} 1_{\{u-\varepsilon \leqq |X_y| \leqq u+\varepsilon\}} \, dy$$

et

$$\gamma_x^2 = \gamma_{\tau_{u-}}^2 \vee \left(\max_{0 \leqq s \leqq x - \tau_{u-}} (|e_u(s)| - u) \right).$$

On en déduit:

$$\Delta_1 = E\left[G \sum_{s \leqq u < b} f\left(\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^{\tau_u - \tau_{u-}} 1_{\{u-\varepsilon \leqq |e_u(y)| \leqq u+\varepsilon\}} \, dy \right) 1_{\{m_u > u\}} \right]$$

et

$$\Delta_2 = E\left(G \sum_{a \leqq u < b} f(m_u - u - \gamma_{\tau_{u-}}^2) \, 1_{\{m_u > u + \gamma_{\tau_{u-}}^2\}}\right).$$

Mais G appartient à $\mathscr{F}_{\tau_a}$, d'après la description de Williams des excursions du mouvement Brownien ([30], [38]) on a:

1°) $\Delta_2 = E\left[G \int_a^b du \int_0^\infty 1_{\{x > u + \gamma_{\tau_{u-}}^2\}} f(x - u - \gamma_{\tau_{u-}}^2) \frac{dx}{x^2} \right]$,

en utilisant à nouveau (1.4) on obtient $\nu_4(dt, dx) = \dfrac{1}{(x+t+s_{\tau_t})^2} 1_{\{x>0, t>0\}} \, dx \, dt$.

2°) $\Delta_1 = E\left[G \int_a^b du \int_u^\infty \frac{dx}{x^2} f(l(u,x) + l'(u,x)) \right]$, où $l(u,x)$ et $l'(u,x)$

désignent deux variables aléatoires, de même loi, indépendantes, indépendantes du processus X, et $l(u,x) \stackrel{(d)}{=} L_\sigma^u(R)$, avec R un processus de Bessel de dimension 3, issu de 0, $\sigma = \inf\{t \mid R_t = x\}$ et $L_\sigma^u(R)$ la valeur au temps σ du temps local au niveau u de R.

D'après ([25]), la loi du processus $(L_\sigma^u(R);\ 0 \leqq u \leqq x)$ est celle du carré d'un pont de processus de Bessel de dimension 2, issu de 0, de longueur x, conditionné à valoir 0 au temps x.

Par scaling ([25]), on en déduit $l(u,x) \stackrel{(d)}{=} x R_1\left(\dfrac{u}{x}\right)$, R_1 désignant le carré du pont d'un processus de Bessel de dimension 2, issu de 0, de longueur 1, conditionné à valoir 0 au temps 1.

Mais d'après la proposition (5-1) de [25], $R_1(t) \stackrel{(d)}{=} (1-t)^2 R_2\left(\dfrac{t}{1-t}\right)$, $0 < t < 1$,

où R_2 est le carré d'un processus de Bessel de dimension 2 et issu de 0.

Soit $\gamma(\alpha, \beta)(dy) = \dfrac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \exp - \dfrac{y}{\beta} \, 1_{\{y>0\}} \, dy$.

On rappelle que:

$$P(R_2(t) \in dy) = \gamma(1, 2t)(dy).$$

On en déduit:

$$l(u,x)+l'(u,x) \overset{(d)}{=} \gamma\left(2, 2u\left(1-\frac{u}{x}\right)\right),$$

et:

$$\Delta = E[G] \int_a^b \mathrm{d}u \int_0^\infty y f(y) f_0(y)\,\mathrm{d}y$$

avec

$$f_0(y) = \int_u^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}\left[2u\left(1-\frac{u}{x}\right)\right]^{-2} \exp - y[2u(1-u/x)]^{-1}.$$

On fait le changement de variable $z=\frac{2u}{y}\left(1-\frac{u}{x}\right)$, il vient:

$$f_0(y) = \frac{1}{2u^2 y} \cdot \int_0^{2u/y} \frac{1}{z^2} \exp - \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2u^2 y} \exp - \frac{y}{2u}.$$

D'où $v_3(\mathrm{d}u, \mathrm{d}y) = \frac{1}{2u^2} \exp - \left(\frac{y}{2u}\right) 1_{\{u>0, y>0\}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}y.$

On montre le 1°) de la proposition 2, d'une manière analogue en utilisant la description de Williams des excursions du mouvement Brownien ([30], [38]). On remarque que le processus $(L^a_{\tau_t}; t \geqq 0)$ est un processus de Poisson composé ([7], VI), on en déduit aisément sa mesure de Lévy.

2 Application au calcul de lois de processus de temps locaux

Soit φ une fonction continue à gauche et strictement positive. Rappelons la définition des v.a. U, V, V' et W:

$$(2.1) \qquad \begin{cases} U = \sup\{t \geqq 0 \mid S_t \leqq \varphi(s_t)\}, & V = \sup\{t \geqq 0 \mid S_t \leqq \varphi(L_t)\} \\ V' = \sup\{t \geqq 0 \mid L_t \leqq \varphi(s_t)\}, & W = \sup\{t \geqq 0 \mid L_t \leqq \varphi(L^a_t)\}. \end{cases}$$

Le but de ce paragraphe est de déterminer la loi:

1°) du processus $(L^x_U; x \geqq 0)$ (resp. $L^x_V; x \geqq 0$), conditionnellement à $\{X_U > 0, U < +\infty\}$ (resp. $\{X_V > 0, V < +\infty\}$) et s_U (resp. L_V).

2°) du processus $(L^x_{V'}; x \geqq 0)$ (resp. $(L^x_W; 0 \leqq x \leqq a)$), conditionnellement à $\{0 < V' < +\infty, X_{V'} = 0\}$ (resp. $\{0 < W < +\infty, X_W = 0\}$) et $s_{V'}$ (resp. L_W). Ceci nous conduit naturellement à décrire la loi du processus X sur $[0, U]$, resp. $[0, V]$, resp. $[0, V']$), conditionnellement à $(X_U > 0, U < +\infty\}$ et s_U, resp. $\{X_V > 0, V < +\infty\}$ et L_V, resp. $\{0 < V' < +\infty, X_{V'} = 0\}$ et $s_{V'}$. La description de la trajectoire de X sur $[0, W]$, conditionnellement à $\{X_W = 0, 0 < W < +\infty)$ et L^a_W n'étant pas simple, nous étudierons directement le processus $(L^x_W; 0 \leqq x \leqq a)$, conditionnellement à $\{X_W = 0, 0 < W < +\infty\}$.

D'après (1.2) on a:

1°) i) Sur $\{X_U > 0, U < +\infty\}$ (resp. $\{X_V > 0, V < +\infty\}$) U (resp. V) est un instant où X atteint son maximum, $X_U = S_U = \varphi(s_U)$ (resp.

$X_V = S_V = \varphi(L_V)$).
ii) Sur $\{X_{V'} = 0, 0 < V' < +\infty\}$ (resp. $\{X_W = 0, 0 < W < +\infty\}$) on a: $L_{V'} = \varphi(s_{V'})$ (resp. $L_W = \varphi(L_W^a)$).

(2.2) 2°) Lorsque φ est une fonction croissante et bornée alors: U, V, V' et W sont finies et $X_U > 0$; $X_V > 0$; $X_{V'} = 0$ et $V' > 0$; $X_W = 0$ et $W > 0$.

3°) Lorsque φ est une fonction décroissante et continue alors U, V, V' et W sont des temps d'arrêt finis et $U = \inf\{t \geqq 0 \mid S_t \geqq \varphi(s_t)\}$ V, V' et W sont définies par des formules analogues.

2.1 Quelques décompositions de la trajectoire de X, sur les intervalles de temps $[0, \sigma(a)]$ et $[0, \tau_t]$

On montre en premier, un résultat de décomposition de la trajectoire de X, sur l'intervalle de temps $[0, \sigma(a)]$, conditionellement à $L_{\sigma(a)}$, où a est un réel strictement positif fixé.

Proposition 4 *Soit $\rho = \sup\{s < \sigma(a) \mid X_s = 0\}$. Alors:*

1) *Les deux processus $(X_u; 0 \leqq u \leqq \rho)$ et $(X_{\rho+u}; 0 \leqq u \leqq \sigma(a) - \rho)$ sont indépendants; en particulier la v.a. $L_{\sigma(a)}$ est indépendante du processus $(X_{\rho+u}; 0 \leqq u \leqq \sigma(a) - \rho)$.*
2) *Le processus $(X_{\rho+u}; 0 \leqq u \leqq \sigma(a) - \rho)$ a pour loi celle d'un processus de Bessel de dimension 3, issu de 0 et arrêté à son premier temps d'atteinte de a*
3) *Conditionellement à $L_{\sigma(a)} = l$, le processus $(X_u; 0 \leqq u \leqq \rho)$ a pour loi celle d'un mouvement Brownien, issu de 0, arrêté au premier instant où le temps local en 0 atteint l et conditionné à ne pas dépasser la valeur a.*
4) $P(S_\rho \in \mathrm{d}x, L_\rho \in \mathrm{d}t)$
$$= \frac{1}{2a} (1_{[0,a]} \times 1\mathbb{R}_+)(x, t) \frac{t}{2x^2} \exp - \left(\frac{t}{2x}\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t.$$

Démonstration. Williams ([37]), Jeulin ([11], p. 97) ont montré le 1) et 2); le 3) est une conséquence de la proposition (3.10) de l'article de Jeulin et Yor ([14]). Connaissant la projection duale prévisible de $1_{[0,\rho]}$ (proposition (3.2) de [14]), on obtient le 4. □

On s'intéresse à présent à la description de la trajectoire de X sur $[0, \sigma(a)]$, conditionnellement à $s_{\sigma(a)}$.

Proposition 5 *Soit $\rho = \sup\{u \leqq \sigma(a) \mid X_u = -s_{\sigma(a)}\}$. Alors:*

1°) α) *Conditionnellement à $s_{\sigma(a)}$, les deux processus $(X_u; 0 \leqq u \leqq \rho)$ et $(s_{\sigma(a)} + X_{\rho+u}; 0 \leqq u \leqq \sigma(a) - \rho)$ sont indépendants.*

β) *Conditionnellement à $s_{\sigma(a)} = x$, le processus $(a - X_u; 0 \leqq u \leqq \rho)$* (resp. $(s_{\sigma(a)} + X_{u+\rho}; 0 \leqq u \leqq \sigma(a) - \rho)$) *est un processus de Bessel de dimension* 3, *issu de a* (resp. 0) *et arrêté à son premier temps d'atteinte de $a + x$.*

2°) $P(s_{\sigma(a)} \in \mathrm{d}x, S_\rho \in \mathrm{d}y) = 1_{\{x>0, 0<y<a\}} \dfrac{x}{(a+x)(x+y)^2} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$

Preuve de la proposition 5

1) En utilisant le corollaire (55-10) de ([30]) et un argument de réflexion on obtient aisément le 1°).

2) Appliquons à nouveau le corollaire (55-10) de ([30]), il vient:

$$P(S_\rho<\gamma, \alpha<s_{\sigma(a)})=\int_\alpha^\infty \frac{a}{(a+x)^2} P\left(\min_{0\leqq u\leqq \eta(x+a)} R(u)>a-\gamma\right) \mathrm{d}x,$$

où $0<\gamma<a$, R est un processus de Bessel de dimension 3, issu de a, $\eta(x)=\inf\{u \geqq 0 \mid R(u)=x\}$.

Mais la fonction d'échelle d'un processus de Bessel de dimension 3 est égale à $1/x$, d'où:

$$P(S_\rho<\gamma, \alpha<s_{\sigma(a)}<\beta)=\int_\alpha^\infty \frac{\gamma}{(a+x)(x+\gamma)} \mathrm{d}x. \quad \square$$

Lemme 2 *Soient $c>0$, $(R_t;\ t\geqq 0)$ un processus de Bessel de dimension 3, issu de 0 et $\eta=\inf\{t\geqq 0 \mid R_t=c\}$. Alors:*

1°) *Le processus $(c+X_u; 0\leqq u\leqq \sigma(a))$ conditionné à ne pas atteindre le niveau 0 a même loi qu'un processus de Bessel de dimension 3, issu de c et arrêté à son premier temps d'atteinte de $a+c$.*

2°) *Les processus $(R_t; 0\leqq t\leqq \eta)$ et $(c-R_{\eta-t}, 0\leqq t\leqq \eta)$ ont même loi.*

Démonstration du lemme 2

Le mouvement Brownien arrêté en $\sigma(a)$ et conditionné à ne pas atteindre le niveau $-c$ est un «taboo process» ([16]). Le 1°) résulte alors du theorem (3.1) de l'article de Knight ([16]).

Rappelons le résultat de Williams ([37]):

Les deux processus

$$(c-X(\sigma(c)-t); \quad 0\leqq t\leqq \sigma(c)) \quad \text{et} \quad (R_t; 0\leqq t\leqq \xi), \quad \text{où } \xi=\sup\{t \mid R_t=c\}.$$

ont même loi.

En utilisant de plus le 2°) de la proposition 4, on en déduit le 2°) du lemme 2. $\square$

Remarque. On déduit du 1°) du lemme 2 que conditionnellement à $s_{\sigma(a)}=x$:

(2.3) Le processus $(X_u, 0\leqq u\leqq \rho)$ a pour loi celle d'un mouvement Brownien, issu de 0, arrêté à son premier temps d'atteinte de $-x$ et conditionné à ne pas dépasser le niveau a.

Rappelons que d'après ([32], théorème 1), on a:

Proposition 6 *Soient*

$$\delta>0, \rho=\sup\{t<\tau_\delta \mid X_t=-s_{\tau_\delta}\}, \qquad \mathrm{d}=\inf\{t>\rho \mid X_t=0\}$$
$$\textit{et} \qquad g=\sup\{t<\rho \mid X_t=0\}.$$

Alors:

1) a) *Conditionnellement à $(L_\rho, s_{\tau_\delta})$, les quatre processus $(X_u, 0\leqq u\leqq g)$, $(X_{g+u}, 0\leqq u\leqq \rho-g)$, $(X_{\rho+u}, 0\leqq u\leqq d-\rho)$ et $(X_{d+u}, 0\leqq u\leqq \tau_\delta-d)$ sont indépendants.*

b) *Conditionnellement à $L_\rho=l$, $s_{\tau_\delta}=x$; le processus $(X_u; 0\leqq u\leqq g)$ (resp. $(X_{d+u}; 0\leqq u\leqq \tau_\delta-d)$) a pour loi celle d'un mouvement Brownien issu de 0, arrêté* *au premier instant où son temps local en 0 atteint l* (resp. $\delta - l$) *et conditionné à ne pas atteindre $-x$.*

c) *Conditionnellement à $s_{\tau_\delta} = x$, les processus $(-X_{g+u}, 0 \leqq u \leqq \rho - g)$ et $(s_{\tau_\delta} + X_{\rho+u}, 0 \leqq u \leqq d - \rho)$ ont pour loi celle d'un processus de Bessel de dimension 3, issu de 0 et arrêté au premier temps d'atteinte de x.*

2) *Les deux variables aléatoires s_{τ_δ} et L_ρ sont indépendantes, L_ρ suit une loi uniforme sur $[0, \delta]$ et $P(s_{\tau_\delta} < x) = \exp(-\delta/2x), x > 0$.*

2.2 Etude du processus X sur les intervalles de temps $[0, U]$, $[0, V]$ et $[0, V']$

Par définition les v.a. U, V, V' et W sont des derniers temps de passage. Prenons l'exemple de la v.a. U. On a:

i) $\rho = \sup\{t \mid X_t = -s_t \text{ et } S_t \leqq \varphi(s_t)\}$ (rappelons que ρ est définie par: $\rho = \sup\{t < U \mid X_t = -s_U\}$).

ii) Le processus (X, S, s) est fortement Markovien.

D'après ([20], [21], [26]), conditionnellement à (X_ρ, S_ρ, s_ρ), les deux processus

$$((X_t, S_t, s_t); 0 \leqq t \leqq \rho) \quad \text{et} \quad ((X_{\rho+t}, S_{\rho+t}, s_{\rho+t}); t \geqq 0)$$

sont indépendants et les semi-groupes de ces deux processus s'expriment à l'aide du semi-groupe de (X, S, s). Mais $X_\rho = -s_\rho$, par conséquent, conditionnellement à (s_ρ, S_ρ), les deux processus $(X_t; 0 \leqq t \leqq \rho)$ et $(X_{\rho+t}; 0 \leqq t)$ sont indépendants.

L'identification de ces deux processus n'est pas aisée car les formules ne sont pas faciles à manipuler, c'est pourquoi nous avons préféré utiliser la proposition 1; ce qui permet de plus d'établir, par une même méthode, les théorèmes 1, 2 et 3.

Nous adoptons pour la preuve de chacun des théorèmes 1, 2 et 3 les notations suivantes:

1) $F_i; i = 1, 2, 3, 4$ désignent des fonctionnelles positives définies sur $\mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
2) f, g sont des fonctions boréliennes positives.
3) Pour tout $y > 0$, on note $\sigma(y) = \inf\{t \geqq 0 \mid X_t > y\}$.
4) Soient $(Z_t; t \geqq 0)$ un processus, et $0 \leqq \alpha \leqq \beta$, $Z(\alpha, \beta)$ désigne le processus $(Z_{t+\alpha}; 0 \leqq t \leqq \beta - \alpha)$.

1°) Preuve du théorème 2

Soit

$$\Delta = E[F_1(X(0, \rho)) \, F_2(X(\rho, V)) \, f(L_V) \, 1_{\{X_V > 0, V < +\infty\}}].$$

On note $\alpha_t = \sup\{u < t \mid X_u = 0\}$ et $(Z_t, t \geqq 0)$ le processus:

$$Z_t = F_1(X(0, \alpha_t)) \, F_2(X(\alpha_t, t)) \, f(L_t).$$

On a:

$$\Delta = E[Z_V \, 1_{\{X_V > 0, \, V < +\infty\}}].$$

On applique la proposition 1 avec $H=S$, $K=L$ et la proposition 3; pour tout $t>0$, on a p.s.:

$$g_t=S_{\rho_t} \quad \text{avec} \quad \rho_t=\sup\{u<\sigma(t)|\, X_u=0\},\ \tilde{K}_{t-}=L_{\rho_t}=L_{\sigma(t)}$$

et

$$\eta_t=\inf\{u\geqq\rho_t|\, X_u>\varphi(L_{\sigma(t)})\} \qquad \text{sur}\ \{S_{\rho_t}\leqq\varphi(L_{\sigma(t)})<t\}.$$

Il vient:

$$\Delta=E\left[\int_0^\infty F_1(X(0,\rho_t))\, F_2(X(\rho_t,\eta_t))\, f(L_{\sigma(t)})\, 1_{\{S_{\rho_t}\leqq\varphi(L_{\sigma(t)})<t\}}\right.$$
$$\left.\times\, h_0(L_{\sigma(t)},\varphi(L_{\sigma(t)}))\frac{\mathrm{d}t}{t}\right].$$

Il suffit alors d'appliquer la proposition 4. En particulier:

(2.4)
$$E[f(L_V)\, 1_{\{X_V>0,\, V<+\infty\}}]$$
$$=E\left[\int_0^\infty f(L_{\sigma(t)})\, h_0(L_{\sigma(t)},\varphi(L_{\sigma(t)}))\, 1_{\{S_{\rho_t}\leqq\varphi(L_{\sigma(t)})<t\}}\frac{\mathrm{d}t}{t}\right].$$

2°) Preuve du théorème 1

Soit

$$\Delta=E[F_1(X_y\,;0\leqq y\leqq\rho)\, F_2(s_U+X_{\rho+y}\,;0\leqq y\leqq U-\rho)\, f(s_U)\, 1_{\{X_U>0,\, U<+\infty\}}].$$

On note

$$\alpha_t=\sup\{u<t\,|\, X_u=-s_t\} \quad \text{et} \quad (Z_t\,;t>0)$$

le processus

$$Z_t=F_1(X_y\,;0\leqq y\leqq\alpha_t)\, F_2(s_t+X_{\alpha_t+y}\,;0\leqq y\leqq t-\alpha_t)\, f(s_t).$$

On a:

$$\Delta=E(Z_U\, 1_{\{X_U>0,\, U<+\infty\}}).$$

Appliquons la proposition 1 avec $H=S$, $K=s$ et la proposition 3:

$$\Delta=\int_0^\infty\left\{E\left[Z_{\eta_t} f(s_{\eta_t})\frac{1}{t+s_{\sigma(t)}}\, h_0(s_{\sigma(t)},X_{\eta_t})\, 1_{(g_t\leqq\varphi(s_{\sigma(t-)})<t\}}\right]\right\}\mathrm{d}t.$$

De plus, pour tout $t>0$, on a p.s.:

$$\sigma(t-)=\sigma(t),\ g_t=S_{\rho_t} \quad \text{où} \quad \rho_t=\sup\{u<\sigma(t)|\, X_u=-s_{\sigma(t)}\}$$

et

$$\eta_t=\inf\{u>\rho_t\,|\, X_u>\varphi(s_{\sigma(t)})\} \qquad \text{sur}\ \{S_{\rho_t}\leqq\varphi(s_{\sigma(t)})<t\}.$$

On en déduit

$$s_{\eta_t}=s_{\rho_t}=s_{\sigma(t)} \quad \text{et} \quad \alpha_{\eta_t}=\sup\{x<\eta_t\,|\, X_x=-s_{\eta_t}\}=\rho_t.$$

Il vient:

$$\Delta = \int_0^\infty \left\{ E\left[F_1(X_y; 0 \leqq y \leqq \rho_t)\, F_2(s_{\sigma(t)} + X_{\rho_t + y}; 0 \leqq y \leqq \eta_t - \rho_t)\, f(s_{\sigma(t)}) \frac{1}{t + s_{\sigma(t)}} \right.\right.$$

$$\left.\left. \times h_0(s_{\sigma(t)}, \varphi(s_{\sigma(t)}))\, 1_{\{S_{\rho_t} \leqq \varphi(s_{\sigma(t)}) < t\}} \right] \right\} \mathrm{d}t.$$

On conditionne par $s_{\sigma(t)}$, et on applique la proposition 5, la remarque (2.3) et le 1°) du lemme 2, on en déduit le théorème 1.

En particulier, si $F_1 = F_2 \equiv 1$, on a:

$$(2.5) \qquad E[f(s_U)\, 1_{\{X_U > 0,\, U < +\infty\}}]$$

$$= \int_0^\infty E\left[f(s_{\sigma(t)}) \frac{1}{t + s_{\sigma(t)}} h_0(s_{\sigma(t)}, \varphi(s_{\sigma(t)})) \times 1_{\{S_{\rho_t} \leqq \varphi(s_{\sigma(t)}) < t\}} \right] \mathrm{d}t.$$

3°) Preuve du théorème 3

Soit:

$$\Delta = E[F_1(X(0,g))\, F_2(-X(g,\rho))\, F_3(s_\rho + X(\rho,d))\, F_4(X(d,V'))\, f(S_{V'})\, g(L_\rho)$$
$$\times 1_{\{0 < V' < +\infty,\, X_{V'} = 0\}}].$$

On note

$$\beta_t = \sup\{u < t \mid X_u = -s_t\}, \qquad \alpha_t = \inf\{u \leqq \beta_t \mid X_u = 0\},$$
$$\gamma_t = \inf\{u > \beta_t \mid X_u = 0\} \quad \text{et} \quad \{Z_t, t \geqq 0)$$

le processus:

$$Z_t = F_1(X(0,\alpha_t))\, F_2(-X(\alpha_t, \beta_t))\, F_3(s_t + X(\beta_t, \gamma_t))\, F_4(X(\gamma_t, t)) f(S_t)\, g(L_{\beta_t}).$$

On a:

$$\Delta = E[Z_{V'}\, 1_{\{0 < V' < +\infty,\, X_{V'} = 0\}}].$$

On applique la proposition 1 avec

$$H = L \quad \text{et} \quad K = s,$$

et la proposition 2, il vient:

$$g_t = L_{\rho_t} \quad \text{avec} \quad \rho_t = \sup\{u < \tau_t \mid X_u = -s_{\tau_t}\},\ \tilde{K}_{t-} = s_{\rho_t} = s_{\tau_t}.$$

Sur

$$\{L_{\rho_t} \leqq \varphi(s_{\tau_t}) < t\}$$

on a:

$$\eta_t = inf\{u \geqq \rho_t \mid L_u = \varphi(s_{\rho_t})\}, \qquad \beta_{\eta_t} = \rho_t, \qquad \alpha_{\eta_t} = g'_t$$

avec

$$g'_t = \sup\{u < \rho_t \mid X_u = 0\}, \qquad \gamma_{\eta_t} = d_t, \qquad d_t = \inf\{u > \rho_t \mid X_u = 0\}$$

et

$$\Delta = E\left[\int_0^\infty F_1(X(0,g_t'))\,F_2(-X(g_t',\rho_t))\,F_3(s_{\tau_t}+X(\rho_t,\mathrm{d}_t))\,F_4(X(\mathrm{d}_t,\eta_t))\right.$$
$$\left.\times f(s_{\tau_t})\,g(L_{\rho_t})\,h_0(s_{\tau_t},0)\,1_{\{L_{\rho_t}\leqq\varphi(s_{\tau_t})<t\}}\frac{1}{2s_{\tau_t}}\,\mathrm{d}t\right].$$

Il suffit alors d'appliquer la proposition 6 pour conclure: en particulier:

$$E(f(s_{V'})\,1_{\{0<V'<+\infty, X_{V'}=0\}}) = E\left[\int_0^\infty f(s_{\tau_t})\,h_0(s_{\tau_t},0)\,1_{\{L_{\rho_t}\leqq\varphi(s_{\tau_t})<t\}}\frac{1}{2s_{\tau_t}}\,\mathrm{d}t\right]. \tag{2.6}$$

2.3 *Application à l'extension des théorèmes de Ray et Knight*

En utilisant les théorèmes de Ray et Knight (RK1 et RK2) et l'étude précédente, il est aisé de décrire la loi des processus

$$(L_U^x\,; x\in\mathbb{R}),\quad (L_V^x\,; x\in\mathbb{R})\quad \text{et}\quad (L_{V'}^x\,; x\in\mathbb{R}).$$

Les processus des temps locaux que nous obtenons sont des carrés de ponts de processus de Bessel; on peut se reporter par exemple à [25], quant à la définition de ces processus.

Dans ce paragraphe, φ désigne une fonction continue à gauche et strictement positive.

Soit $\gamma(v)$ la loi Gamma de paramètre $v>0$:

$$\gamma(v)(\mathrm{d}x) = \frac{x^{v-1}}{\Gamma(v)}\,\mathrm{e}^{-x}\,1_{\{x>0\}}\,\mathrm{d}x.$$

Théorème (RK1)′ *Conditionnellement à* $\{X_U>0, U<+\infty\}$, $s_U=x$ *et* $L_U=l$:

a) Les deux processus $(L_U^y\,; y\geqq 0)$ et $(L_U^y\,; y\leqq 0)$ *sont indépendants.*

b) Le processus $(L_U^{S_u-y}\,; 0\leqq y\leqq S_U)$ (resp. $(L_U^{-y}\,; 0\leqq y\leqq s_U)$) *a pour loi celle du carré d'un pont de processus de Bessel de dimension* 2 (resp. 4) *issu de* 0 (resp. l), *de longueur* $\varphi(x)$ (resp. x) *et conditionné à valoir* l (resp. 0) *au temps* $\varphi(x)$ (resp. x).

c) Conditionnellement à $(X_U>0,\ U<+\infty)$, $s_U=x$, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\varphi(x)}\right)L_U$ *a pour loi* $\gamma(2)$.

Théorème (RK1)″ *Conditionnellement à* $(X_V>0, V<+\infty\}$ *et* $L_V=l$,

1°) *Les deux processus* $(L_V^y, y\geqq 0)$ *et* $(L_V^y, y\leqq 0)$ *sont indépendants.*

$$L_V^{S_v-y}$$

2°) *Le processus*

$$(L_V^{S_v-y}\,; 0\leqq y\leqq S_V)$$

a pour loi celle du carré d'un pont de processus de Bessel de dimension 2, *de longueur* $\varphi(l)$, *issu de* 0 *et conditionné à valoir* l *au temps* $\varphi(l)$.

3°) *Le processus* $(L_V^{-y}; y \geqq 0)$ a pour loi celle du carré d'un processus de Bessel de dimension 0 *et issu de* l.

Théorème (RK2)′ *Conditionnellement à* $\{0 < V' < +\infty, X_{V'} = 0\}$ *et* $s_{V'} = x$,

1°) *Les deux processus* $(L_{V'}^y, y > 0)$ *et* $(L_{V'}^y, y \leqq 0)$ *sont indépendants.*

2°) *Le processus* $(L_{V'}^{-y}; 0 \leqq y \leqq s_{V'})$ *a pour loi celle du carré d'un pont de processus de Bessel de dimension* 4, *de longueur* x, *issu de* $\varphi(x)$ *et conditionné à valoir* 0 *au tempx* x.

3°) *Le processus* $(L_{V'}^y; 0 \leqq y)$ *a pour loi celle du carré d'un processus de Bessel de dimension* 0 *et issu de* $\varphi(x)$.

Remarques. 1°) Lorsque φ est constante et égale à a, alors $V = U = \sigma(a)$. On retrouve le théorème (RK1).

2°) On rappelle le résultat suivant ([25]), paragraphe 5): soient $(Z_t; t \geqq 0)$ le carré d'un processus de Bessel de dimension 0, issu de δ et $\xi_0 = \inf\{t \mid Z_t = 0\}$. Alors, conditionnellement à $\xi_0 = t$, le processus $(Z_u; 0 \leqq u \leqq t)$ a pour loi celle du carré d'un pont d'un processus de Bessel de dimension 4, issu de δ et conditionné à valoir 0 au temps t. On remarque que $s_{V'} = \inf\{y > 0 \mid L_{V'}^{-y} = 0\}$. Ainsi, lorsque φ est constante on retrouve le théorème de Ray et Knight relatif au processus $(L_{\tau_\delta}^{-y}; y \geqq 0)$.

Soient $V_0 = \sup\{t \mid s_t \leqq \varphi(L_t)\}$ et $\rho_0 = \sup\{t < V_0 \mid X_t = 0)$, alors $X_{\rho_0} = 0$ et sur l'ensemble $\{X_{V_0} < 0, V_0 < +\infty\}$ on a: $L_{V_0}^y = L_{\rho_0}^y$ pour tout $y \geqq 0$.

On déduit alors du théorème (RK1″) une extension du théorème de Ray et Knight (RK2):

Corollaire 1 *Conditionnellement à* $\{X_{V_0} < 0, V_0 < +\infty\}$, *le processus* $(L_{\rho_0}^y; y \geqq 0)$ *a pour loi celle du carré d'un processus de Bessel de dimension* 0.

Théorème (RK2)″ *Soient* $\rho = \sup\{t < W \mid X_t = a\}$ *et* $d = \inf\{t \rangle \rho \mid X_t = 0\}$. *Alors:*

1°) *Conditionnellement à* $\{0 < W < +\infty, \rho > 0, X_W = 0\}$,

i) *Le processus* $(L_d^x - L_\rho^x; 0 \leqq x \leqq a)$ *est indépendant des deux processus* $(L_\rho^x; 0 \leqq x \leqq a)$ *et* $(L_W^x - L_d^x; 0 \leqq x \leqq a)$ *et a pour loi celle du carré d'un pont de processus de Bessel de dimension* 2, *issu de* 0, *de longueur a et conditionné à valoir* 0 *au temps a.*

ii) *Conditionnellement à* $L_\rho = l'$ *et* $L_W^a = l$, *les deux processus* $(L_\rho^x; 0 \leqq x \leqq a)$ *et* $(L_W^x - L_d^x; 0 \leqq x \leqq a)$ *sont indépendants et* $(L_\rho^x; 0 \leqq x \leqq a)$ (resp. $(L_W^x - L_d^x; 0 \leqq x \leqq a)$ *a pour loi celle du carré d'un pont de processus de Bessel de dimension* 2 (resp. 0), *issu de* l' (resp. $\varphi(l) - l'$), *de longueur a et conditionné à valoir* l (resp. 0) *au temps a.*

2°) *Conditionnellement à* $L_W^a = l$ *et* $\{0 < W < +\infty\}$, *le processus* $(L_W^x; 0 \leqq x \leqq a)$ *a pour loi celle du carré d'un pont de processus de Bessel de dimension* 0, *issu de* $\varphi(l)$, *de longueur a et conditionné à valoir* l *au temps a.*

2.4 Démonstration des théorèmes de Ray et Knight

On note $Q_{a,b}^{d,x}$ la loi du carré d'un pont de processus de Bessel de dimension $d \geqq 0$, de longueur $x > 0$, issu de $a \geqq 0$ et conditionné à valoir $b \geqq 0$ au temps

x. Q_a^d désigne la loi du carré d'un processus de Bessel de dimension $d \geqq 0$, issu de $a \geqq 0$.

Rappelons ([25], (5-4)) que si Y et Y' sont deux processus indépendants, Y (resp. Y') de loi $Q_{a,0}^{d,x}$ (resp. $Q_{b,0}^{c,x}$) alors:

$$(2.7) \qquad Y + Y' \quad \text{a pour loi } Q_{a+b,0}^{d+c,x}.$$

Lorsque Z est un processus on note $\mathscr{L}(Z)$ sa loi.

Preuve du théorème (RK1)′

1°) Les notations sont celles du théorème 1.

On introduit $d = \inf\{t > \rho \mid X_t = 0\}$. On déduit théorème 1 et du lemme 2, que conditionnellement à $\{X_U > 0, U < +\infty\}$ et $s_U = x$:

i) Les processus $(s_U + X_t; 0 \leqq t \leqq d - \rho)$ et $(X_{d+t}; 0 \leqq t \leqq U - \rho)$ sont indépendants.

ii) Le processus $(s_U + X_t; 0 \leqq t \leqq d - \rho)$ (resp. $(X_{d+t}; 0 \leqq t \leqq U - \rho)$) a pour loi celle d'un processus de Bessel de dimension 3, issu de 0 et arrêté à son premier temps d'atteinte de x (resp. un mouvement Brownien arrêté à son premier temps d'atteinte de $\varphi(x)$ et conditionné à ne pas atteindre le niveau $-x$).

2°) Rappelons de plus que si $a > 0$, $\sigma(-a) = \inf\{t \geqq 0 \mid X_t = -a\}$, le processus $(L_{\sigma(-a)}^{x-a}; x \geqq 0)$ est une diffusion de générateur:

$$2\sqrt{x}\,\frac{d^2}{dx^2} + 1_{(0 \leqq x \leqq a)}\,\frac{d}{dx}.$$

En particulier, conditionnellement à $L_{\sigma(-a)} = y$ les deux processus

$$(L_{\sigma(-a)}^{x-a}; 0 \leqq x \leqq a) \quad \text{et} \quad (L_{\sigma(-a)}^{x}; x \geqq 0)$$

sont indépendants. De plus

$$P(L_{\sigma(-a)} \in \mathrm{d}t) | S_{\sigma(-a)} < b) = \frac{1}{c} \exp(-t/c)\, 1_{\{t > 0\}}\, \mathrm{d}t,$$

où

$$b > 0 \quad \text{et} \quad c = 2ab/(a+b).$$

3°) Conditionnellement à

$$\{X_U > 0, U < +\infty, L_\rho = y, L_U - L_d = y', s_U = x\}$$

on a:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(L_\rho^{-z}; 0 \leqq z \leqq x) &= Q_{y,0}^{2,x},\\
\mathscr{L}(L_\rho^{-z} - L_d^{-z}; 0 \leqq z \leqq x) &= Q_{0,0}^{2,x}\\
\mathscr{L}(L_U^{-z} - L_d^{-z}; 0 \leqq z \leqq x) &= Q_{y',0}^{0,x},\\
\mathscr{L}(L_\rho^{z}; 0 \leqq z \leqq \varphi(x)) &= Q_{y,0}^{0,\varphi(x)},\\
\mathscr{L}(L_U^{z} - L_d^{z}; 0 \leqq z \leqq \varphi(x)) &= Q_{y',0}^{2,\varphi(x)}.
\end{aligned}$$

Il suffit alors d'appliquer (2.7), l'étape 2 et le théorème 1.

Preuve du théorème (RK1)″

On déduit directement du théorème 2 que l'on a conditionnellement à $\{0<V<+\infty; X_V>0; L_V=x\}$:

$$\mathscr{L}(L_\rho^z; 0 \leqq z \leqq \varphi(x)) = Q_{x,0}^{0,\varphi(x)},$$
$$\mathscr{L}(L_V^z - L_\rho^z; 0 \leqq z \leqq \varphi(x)) = Q_{0,0}^{2,\varphi(x)},$$
$$\mathscr{L}(L_V^{-z}; z \geqq 0) = Q_x^0.$$

Preuve du théorème (RK2)′

Nous conservons les notations du théorème 3. Alors conditionnellement à

$$\{0<V'<+\infty, X_{V'}=0, s_{V'}=x, L_\rho=y\}$$

on a:

$$\mathscr{L}(L_g^{-z}; 0 \leqq z \leqq x) = Q_{y,0}^{0,x}, \qquad \mathscr{L}(L_\rho^{-z} - L_g^{-z}; 0 \leqq z \leqq x) = Q_{0,0}^{2,x},$$
$$\mathscr{L}(L_d^{-z} - L_\rho^{-z}; 0 \leqq z \leqq x) = Q_{0,0}^{2,x}, \qquad \mathscr{L}(L_{V'}^{-z} - L_d^{-z}; 0 \leqq z \leqq x) = Q_{y',0}^{0,x},$$
$$\mathscr{L}(L_g^z; z \geqq 0) = Q_y^0 \quad \text{et} \quad \mathscr{L}(L_{V'}^z - L_d^z; z \geqq 0) = Q_{y'}^0 \qquad \text{où } y' = \varphi(x) - y.$$

Il suffit à nouveau d'appliquer (2.7) et le théorème 3.

Preuve du théorème (RK2)″

1) Soient

$$s>0, \qquad \tau_s^a = \inf\{t \geqq 0 \mid L_t^a > s\}, \qquad \rho_s = \sup\{u < \tau_s \mid X_u = a\}$$

et

$$d_s = \inf\{t > \rho_s \mid X_t = 0\}.$$

Alors:

i) la loi du couple $(L_{\rho_s}^a, L_{\rho_s})$, est donnée par:

$$P(L_{\rho_s}^a \in dt, L_{\rho_s} \in dx, \rho_s > 0) = \frac{1}{4a^2} \exp -\left(\frac{s+t}{2a}\right) I_0\left(\frac{\sqrt{tx}}{a}\right) 1_{\{t>0, 0<x<s\}} \, dt \, dx, \tag{2.8}$$

I_λ désignant la fonction de Bessel, modifiée, du premier ordre et d'indice λ ([36]).

ii) a) le processus $(a - X_{u+\rho_s}, 0 \leqq u \leqq d_s - \rho_s)$ est indépendant des deux processus $(X_u; 0 \leqq u \leqq \rho_s)$ et $(X_{u+d_s}; 0 \leqq u \leqq \tau_s - d_s)$, et conditionnellement à $\{\rho_s > 0\}$, il a pour loi celle d'un processus de Bessel de dimension 3, issu de 0 et arrêté au premier instant où il atteint a.

b) Conditionnellement à L_{ρ_s}, les deux processus $(X_u; 0 \leqq u \leqq \rho_s)$ et $(X_{u+d_s}; 0 \leqq u \leqq \tau_s - d_s)$ sont indépendants.

iii) pour toute fonctionnelle F définie sur $\mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, borélienne et bornée et f fonction borélienne bornée on a:

$$E[F(X_u;0\leqq u\leqq \rho_s)f(L^a_{\rho_s},L_{\rho_s})\,1_{\{\rho_s>0\}}]$$
$$=E\left[\int_0^\infty 1_{\{L_{\tau^a_t}<s\}}\,F(X_u;0\leqq u\leqq \tau^a_t)\times f(t,L_{\tau^a_t})\frac{1}{2a}\exp-\frac{1}{2a}(s-L_{\tau^a_t})\,\mathrm{d}t\right].$$

iv) Conditionnellement à $\{\rho_s>0\}$ et à $L_{\rho_s}=l$, le processus $(X_{d_s+u};0\leqq u\leqq \tau_s-d_s)$ a pour loi celle d'un mouvement Brownien issu de 0, arrêté au premier instant où son temps local en 0 atteint $s-l$ et conditionné à ne pas dépasser a.

Pour démontrer les points ii) et iv), on introduit la suite de temps d'arrêt $(\sigma_n)_{n\geqq 0}$, définie par $\sigma_0=0$ et pour tout $n\geqq 0$:

$$\sigma_{2n+1}=\inf\{t>\sigma_{2n}\,|\,X_t=a\},\qquad \sigma_{2n+2}=\inf\{t>\sigma_{2n+1}\,|\,X_t=0\}$$

et on utilise la description de Williams ([30], [38]) des excursions du mouvement Brownien. (La preuve est analogue à celle de la proposition 6).

Soit $l=L^a_{\rho_s}$. On remarque que $\rho_s=\tau^a_{l-}$ et $l=\inf\{t\,|\,L_{\tau^a_t}>s\}$. De plus, le processus $(L_{\tau^a_t};t\geqq 0)$ est un processus à accroissements indépendants et de sauts purs dont la mesure de Lévy est égale à:

$$\frac{1}{4a^2}\exp-\left(\frac{x}{2a}\right)1_{\{x>0,t>0\}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit iii).

Le processus $(L^{a-x}_{\tau^a_t};0\leqq x\leqq a)$ a pour loi celle du carré d'un processus de Bessel de dimension 2, issu de t ([16]). En particulier:

$$P(L_{\tau^a_t}\in \mathrm{d}x)=\frac{1}{2a}\exp-\left(\frac{t+x}{2a}\right)I_0\left(\frac{\sqrt{tx}}{a}\right)1_{\{x>0\}}\,\mathrm{d}x. \tag{2.9}$$

2) Soient F (resp. f) une fonction définie sur $\mathscr{C}([0,a],\mathbb{R}_+)$, (resp. $\mathbb{R}_+$), borélienne et $((R^{(2)}_i(s,t));(s,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+)_{i=1,2}$, $(R^{(0)}(s,t);(s,t)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}_+)$ trois familles indépendantes de processus, indépendantes du mouvement Brownien X, telles que, pour tout (s,t) de $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ (resp. $]0,+\infty[\times\mathbb{R}_+$): $R^{(2)}_i(s,t)$ (resp. $R^{(0)}(s,t)$) a pour loi celle du carré d'un pont de processus de Bessel de dimension 2 (resp. 0), de longueur a, issu de s et valant t au temps a.

Si ξ est une variable aléatoire, $L^{\cdot}_\xi$ désigne le processus $(L^x_\xi;0\leqq x\leqq a)$. On note

$$\Delta_0=E[F(L^{\cdot}_{\tau_s})f(L^a_{\tau_s})\,1_{\{\rho_s>0\}}].$$

Sur $\{\rho_s>0\}$ on a:

$$L^{\cdot}_{\tau_s}=L^{\cdot}_{\rho_s}+L^{\cdot}_{d_s}-L^{\cdot}_{\rho_s}+L^{\cdot}_{\tau_s}-L^{\cdot}_{d_s}.$$

On applique successivement les ii), iv) et iii) de l'étape précédente, il vient:

$$\Delta_0=\frac{1}{2a}\int_0^\infty E\left[F(L^{\cdot}_{\tau^a_t}+R^{(2)}_1(0,0)+R^{(0)}(s-L_{\tau^a_t},0))\,1_{\{L_{\tau^a_t}<s\}}\right.$$
$$\left.\times\exp\frac{-1}{2a}(s-L_{\tau^a_t})f(t)\right]\mathrm{d}t.$$

Or

$$P(L^a_{\tau_s} \in \mathrm{d}t, L^a_{\tau_s} > 0) = \frac{1}{2a} \sqrt{s/t} \exp - \left(\frac{s+t}{2a}\right) I_1 \left(\frac{\sqrt{st}}{a}\right) 1_{\{t>0\}} \, \mathrm{d}t.$$

Utilisons de plus (2.9), il vient:

(2.10) $E[F(R^{(0)}(s,t))]$

$$= \left(2a \sqrt{\frac{s}{t}} I_1\left(\frac{\sqrt{st}}{a}\right)\right)^{-1} \int_0^s E[F(R_2^{(2)}(y,t) + R_1^{(2)}(0,0) + R^{(0)}(s-y,0))]$$

$$\times I_0\left(\frac{\sqrt{ty}}{a}\right) \mathrm{d}y.$$

3) Soient $\rho = \sup\{s < W \mid X_s = a\}$, $d = \inf\{s > \rho \mid X_s = 0\}$,

$$\Gamma = E[F_1(L_\rho)\, F_2(L_d - L_\rho)\, F_3(L_W - L_d)\, f(L^a_W)\, g(L_\rho)\, I_{\{0<W<+\infty, \rho>0, X_W=0\}}]$$

et

$$\Gamma_0 = E[F(L_W)\, f(L^a_W)\, 1_{\{0<W<+\infty, \rho>0, X_W=0\}}].$$

On note:

$$\alpha_t = \sup\{u < t \mid X_u = a\}, \qquad \beta_t = \inf\{u > \alpha_t \mid X_u = 0\} \quad \text{et} \quad (Z_t; t \geqq 0)$$

le processus:

$$Z_t = F_1(L_{\alpha_t})\; F_2(L_{\beta_t} - L_{\alpha_t})\; F_3(L_t - L_{\beta_t})\; f(L^a_t)\; g(L_{\alpha_t})\; 1_{\{\alpha_t > 0\}}.$$

On a:

$$\Gamma = E[Z_W\, 1_{\{0<W<+\infty, X_W=0\}}].$$

On applique la proposition 1 avec $H = L$, $K = L^a$ et la proposition 2, sur l'ensemble $\{L_{\rho_x} \leqq \varphi(L^a_{\tau_x}) < x\}$ on a:

$$g_x = L_{\rho_x} \quad \text{avec} \quad \tilde{K}_{x-} = L^a_{\tau_x} = L^a_{\rho_x}, \qquad \eta_x = \inf\{u > d_x \mid L_u > \varphi(L^a_{\tau_x})\}$$

et

$$\Gamma = \int_0^\infty \left[E(F_1(L_{\rho_x})\, F_2(L_{d_x} - L_{\rho_x})\, F_3(L_{\eta_x} - L_{d_x})\, f(L^a_{\tau_x})\, g(L_{\rho_x}) \right.$$

$$\left. \times 1_{\{L_{\rho_x} \leqq \varphi(L^a_{\tau_x}) < x\}}\, h_0(L^a_{\tau_x}, 0)\, 1_{(\rho_x > 0\}}) \right] \frac{\mathrm{d}x}{2a}.$$

On applique à nouveau ii), iii) et iv), on obtient:

$$\Gamma = \frac{1}{4a^2} \int_0^\infty \int_0^\infty E[F_1(L_{\tau^a_t})\, F_2(R_1^2(0,0))\, F_3(R^0(\varphi(t) - L_{\tau^a_t}, 0))\, f(t)\, h_0(t,0)$$

$$\times g(L_{\tau^a_t})\, 1_{\{L_{\tau^a_t} \leqq \varphi(t) < s\}} \exp - [(s - L_{\tau^a_t})/(2a)]\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}s.$$

On déduit de la formule précédente, le 1°) du théorème (RK2)''.

D'après (2.9) et l'expression précédente, on a:

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2a} \int_0^\infty f(t)\, h_0(t,0)\, A(t) \exp - [(t+\varphi(t))/2a]\, \mathrm{d}t,$$

avec:

$$A(t) = \frac{1}{2a} \int_0^{\varphi(t)} E(F[R_2^2(y,t) + R_1^2(0,0) + R^0(\varphi(t)-y,0)])\, I_0(\sqrt{t y}/a)\, \mathrm{d}y.$$

Il suffit alors d'utiliser (2.10), pour établir le 2°) du théorème (RK2)″. Remarquons que l'on a en particulier:

$$\begin{aligned}(2.11)\quad & E(f(L_W^a)\, 1_{\{X_W=0,\rho>0,0<W<+\infty\}}) \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^\infty f(t)\, h_0(t,0) \exp[-(t+\varphi(t))/2a] \sqrt{\varphi(t)/t}\, I_1(\sqrt{t\varphi(t)}/a)\, \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

3 Calcul de la loi des variables s_U, L_V, $S_{V'}$, et L_W^a

Nous avons déjà remarqué (voir (2.2)) que deux cas sont intéressants: φ est une fonction croissante ou φ est décroissante.

Nous commençons par étudier le cas où φ est une fonction décroissante; lorsqu'il en est ainsi, les résultats sont très faciles à obtenir (voir la remarque (1.3)).

3.1 Etude du cas où φ est une fonction décroissante

Dans ce paragraphe, φ désigne une fonction continue et décroissante. Rappelons que d'après (2.2) on a:

$$U = \inf\{t \geqq 0 \mid S_t \geqq \varphi(s_t)\},$$

$$V = \inf\{t \geqq 0 \mid S_t \geqq \varphi(L_t)\}$$

et

$$V' = \inf\{t \geqq 0 \mid L_t \geqq \varphi(s_t)\}.$$

Proposition 7 1°) $P(s_U \in \mathrm{d}x, X_U > 0) = \dfrac{\varphi(x)}{(x+\varphi(x))^2}\, 1_{\{x>0\}}\, \mathrm{d}x$ *et* $S_U = \varphi(s_U)$.

2°) $P(L_V \in \mathrm{d}x, X_V > 0) = \dfrac{1}{2\varphi(x)} \exp -\left(\dfrac{x}{2\varphi(x)}\right) 1_{\{x>0\}}\, \mathrm{d}x$ *et* $S_V = \varphi(L_V)$.

3°) $P(s_{V'} \in \mathrm{d}x, X_{V'} = 0) = \dfrac{\varphi(x)}{2x^2} \exp -\left(\dfrac{\varphi(x)}{2x}\right) 1_{\{x>0\}}\, \mathrm{d}x$ *et* $L_{V'} = \varphi(s_{V'})$.

Démonstration La fonction φ étant continue et décroissante d'après la remarque (1.3) on a $h_0 \equiv 1$. La loi de $s_U\, 1_{\{X_U > 0\}}$ (resp. $L_V\, 1_{\{X_V > 0\}}$; $s_{V'}\, 1_{\{X_{V'}=0, V'>0\}}$) est obtenue en utilisant la relation (2.5) (resp. (2.4); (2.6)) et la proposition 5, 2°) (resp. proposition 4, 4°); proposition 6, 2°)).

Remarques. Lorsque φ est une fonction continue strictement décroissante, on note φ^{-1} la bijection réciproque de φ.

1°) D'après (1.2) on a $U = \inf\{t \geqq 0 \mid s_t \geqq \varphi^{-1}(S_t)\}$, d'où par symétrie:

$$P(S_U \in \mathrm{d}x, X_U < 0) = \frac{\varphi^{-1}(x)}{(x + \varphi^{-1}(x))^2}\, 1_{\{x>0\}}\, \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad s_U = \varphi^{-1}(S_U).$$

Cette relation permet alors de déterminer la loi de S_U.

2°) D'une manière analogue, on a: $V = \inf\{t \geqq 0 \mid L_t \geqq \varphi^{-1}(S_t)\}$ (resp. $V' = \inf\{t \geqq 0 \mid s_t \geqq \varphi^{-1}(L_t)\}$); ce qui permet de ramener l'étude au temps V' à celle réalisée au temps V et en particulier de déterminer la loi de L_V (resp. $s_{V'}$).

On note $\mu(\lambda, a, b)$ la loi Gaussienne inverse généralisée ([8], [15]) de paramètres λ, $a > 0$ et $b > 0$. Rappelons que $\mu(\lambda, a, b)$ est la loi sur $\mathbb{R}_+$ définie par:

$$\mu(\lambda, a, b)(\mathrm{d}x) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\lambda/2} \frac{1}{2K_\lambda(\sqrt{ab})}\, x^{\lambda-1} \exp -\frac{1}{2}\left(ax + \frac{b}{x}\right) 1_{\{x>0\}}\, \mathrm{d}x.$$

Proposition 8 1) a)

$$P(L^a_W \in \mathrm{d}x, X_W = 0) = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\varphi(x)}{x}}\, I_1\left(\frac{1}{a}\sqrt{x\varphi(x)}\right) \exp -\frac{1}{2a}(\varphi(x) + x)\, 1_{\{x>0\}}\, \mathrm{d}x$$
$$+ \exp -\left(\frac{\varphi(0)}{2a}\right) \delta_0(\mathrm{d}x).$$

b) $L_W = \varphi(L^a_W)$

c) *Lorsque φ est strictement décroissante, on a:*

$$P(L_W \in \mathrm{d}x, X_W = a) = \frac{1}{2a}\, I_0\left(\frac{1}{a}\sqrt{x\varphi(x)}\right) \exp -\frac{1}{2a}(x + \varphi(x))\, 1_{\{x>0\}}\, \mathrm{d}x$$

2°) *En particulier lorsque $\varphi(x) = k^2/x$ avec $k > 0$, on a:*

$$W = \inf\{t \geqq 0 \mid L^a_t\, L_t = k^2\}, \qquad L^a_W\, L_W = k^2$$

et la loi de L^a_W (resp. L_W), *conditionnellement à* $\{X_W = 0\}$ (resp. $\{X_W = a\}$) *est la loi Gaussienne inverse généralisée* $\mu(0, 1/a, k^2/a)$ (resp. $\mu(1, 1/a, k^2/a)$).

Démonstration On obtient la loi de L^a_W, conditionnellement à $\{X_W = 0\}$, en utilisant la formule (2.11). Lorsque $\{X_W = a\}$, alors $W = \sigma_1 + W'$ avec $\sigma_1 = \inf\{t \geqq 0 \mid X_t = a\}$ et $W' = \inf\{t \geqq 0 \mid L_{t+\sigma_1} - L_{\sigma_1} \geqq \varphi(L^a_{t+\sigma_1})\}$.

Cette remarque permet de se ramener au cas où $\{X_W = 0\}$.

Remarque Lorsque Y est une v.a. de loi $\mu(\lambda, a, b)$, alors k^2/Y suit la loi Gaussienne inverse généralisée $\mu(-\lambda, b/k^2, ak^2)$. On en déduit que la loi de L_W (resp. L^a_W) conditionnellement à $\{X_W = 0\}$ (resp. $\{X_W = a\}$) est la loi Gaussienne inverse généralisée $\mu(0, 1/a, k^2/a)$ (resp. $\mu(-1, 1/a, 1/a)$).

3.2 Etude du cas où φ est une fonction croissante

Nous supposons cette fois que φ est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, croissante, strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue à gauche. On note φ^{-1} son inverse continue à gauche.

Proposition 9 1°) *sur $\{0<U<+\infty\}$ on a $S_U=\varphi(s_U)$ et U est un instant de maximum pour X.*

2°) $P(s_U\in \mathrm{d}x, 0<U<+\infty)=\dfrac{\varphi(x)}{(x+\varphi(x))^2}\exp-\left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\infty}\dfrac{\mathrm{d}t}{t+\varphi^{-1}(t)}\right)1_{\{x>0\}}\,\mathrm{d}x.$

3°) *Si de plus φ est continue, on a:*

$$P(0<U<+\infty)=\lim_{+\infty}\frac{x}{x+\varphi(x)}-\lim_{0}\left[\frac{x}{x+\varphi(x)}\exp-\left(\int\limits_{x}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\varphi(s)}{s+\varphi(s)}\right)\right];$$

en particulier $P(0<U<+\infty)=1$ si et seulement si:

$$\lim_{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}=0,\ \int\limits_{1}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t<+\infty\ et\left(\varphi(0)>0\ ou\left(\varphi(0)=0\ et\int\limits_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{t+\varphi(t)}=+\infty\right)\right).$$

Proposition 10 1°) *Sur $\{0<V'<+\infty\}$ on a $L_{V'}=\varphi(s_{V'})$ et $X_{V'}=0$.*

2°) $P(s_{V'}\in\mathrm{d}x, 0<V'<+\infty)=\dfrac{\varphi(x)}{2x^2}\exp-\dfrac{1}{2}\left(\int\limits_{x}^{\infty}\dfrac{\mathrm{d}\varphi(u)}{u}+\dfrac{\varphi(x)}{x}\right)1_{\{x>0\}}\,\mathrm{d}x.$

3°) *Si de plus φ est continue on a:*

$$P(0<V'<+\infty)=\left[1-\exp-\frac{1}{2}\left(\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\varphi(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u\right)\right]\exp-\frac{1}{2}\left(\lim_{+\infty}\frac{\varphi(y)}{y}\right).$$

En particulier $P(0<V'<+\infty)=1$ si et seulement si:

$$\lim_{+\infty}\frac{\varphi(y)}{y}=0,\qquad \int\limits_{1}^{\infty}\frac{\varphi(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u<+\infty\quad et\quad \int\limits_{0}^{1}\frac{\varphi(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u=+\infty.$$

Proposition 11 *Soient $\alpha>0$, $\beta\geqq 0$, $\varphi(x)=\alpha x+\beta$ et $W=\sup\{t\geqq 0\,|\,L_t\leqq\alpha L_t^a+\beta\}$. Alors*:

1°) i) *Lorsque $\alpha\geqq 1$ on a $W=+\infty$.*
ii) *Quand $\alpha<1$ on a: $P(W<+\infty)=1$ et $P(0<W<+\infty)=1$ si $\beta>0$* (resp. $P(W=0)=1-\alpha$ *si* $\beta=0$).

2°) i) *sur $\{0<W<+\infty\}$, on a $X_W=0$ et $L_W=\alpha L_W^a+\beta$.*

ii) $$P(L_W^a\in\mathrm{d}x)=\frac{(1-\alpha)^+}{2a}\sqrt{\frac{\varphi(x)}{x}}\exp-\left(\frac{x+\varphi(x)}{2a}\right)I_1\left(\frac{\sqrt{x\varphi(x)}}{a}\right)1_{\{x>0\}}\,dx$$
$$+(1-\alpha)^+\exp-\frac{\beta}{2a}\,\delta_0(\mathrm{d}x).$$

Remarques (3.1) 1) Lorsque φ est une fonction positive et continue à gauche, la loi de L_W^a (resp. L_V), conditionnellement à $\{\rho>0, W<+\infty, X_W=a\}$ (resp. $\{0<V<+\infty, X_V=S_V\}$) est donnée par:

$$P(L_W^a\in \mathrm{d}x, \rho>0, X_W=a, W<+\infty)$$
$$=\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\varphi(x)}{x}}\exp-\left(\frac{x+\varphi(x)}{2a}\right)I_1\left(\frac{\sqrt{x\varphi(x)}}{a}\right)h_0(x,0)\,1_{\{x>0\}}\,\mathrm{d}x,$$

avec

$$h_0(x,0)=P(\{\forall u>\tau\,|\,L_u>\varphi(L_u^a\}\,|(L_\tau^a=x)$$

où τ désigne un temps d'arrêt tel que

$$X_\tau=0 \quad \text{et} \quad L_\tau=\varphi(L_\tau^a),$$

$$\Bigg(\text{resp. } P(L_V\in \mathrm{d}x, 0<V<+\infty, X_V=S_V)$$
$$=\frac{1}{2\varphi(x)}\exp-\left(\frac{x}{2\varphi(x)}\right)h_0(x,\varphi(x))\,1_{\{x>0\}}\,\mathrm{d}x, \text{ avec}$$
$$h_0(x,\varphi(x))=\mathrm{P}(\{\forall u>\sigma, S_u>\varphi(L_u\}|\,L_\sigma=x)$$

où σ désigne un temps d'arrêt tel que σ appartienne au support de $dS_.$ et $S_\sigma=\varphi(L_\sigma))$.$\Bigg)$

Si de plus φ est croissante il est possible d'obtenir la loi des v.a. L_W^a et L_V. Toutefois les expressions obtenues sont compliquées.

2) Lorsque φ est une fonction croissante et étagée, on peut calculer directement la loi de la v.a. L_W^a (resp. L_V) à l'aide de la probabilité de transition du processus de Markov $(L_{\tau_t}^a; t\geqq 0)$ (resp. du processus de Watanabe $(S_{\tau_t}; t\geqq 0)$, ([35])). En effet, soit

$$\varphi=\varphi_0\,1_{[0,\alpha_0]}+\sum_1^n\varphi_i\,1_{]\alpha_i,\alpha_{i+1}]} \qquad \text{avec } 0<\varphi_0<\varphi_1<\ldots<\varphi_n \quad \text{et}$$
$$0<\alpha_0<\alpha_1<\ldots<\alpha_n<\alpha_{n+1}=+\infty,$$

alors:

$$\{L_W^a=\varphi_i\}=\{\alpha_i<L_{\tau_{\varphi_i}}^a\leqq\alpha_{i+1}\,;\forall j>i L_{\tau_{\varphi_j}}^a<\alpha_j\}$$

(resp. $\{S_V=\varphi_i\}=\{S_{\tau_{\alpha_i}}<\varphi_i\,;\forall j>i S_{\tau_{\alpha_j}}>\varphi_j\}$).

Preuve des propositions 9, 10 *et* 11

Le lemme suivant joue un rôle essentiel:

Lemme 3 *Soient h^+ et h^- deux fonctions strictement positives,*

$$\beta=\sup\left\{t>0\,\middle|\,\int_0^t\left(\frac{1}{h^+(s)}+\frac{1}{h^-(s)}\right)\mathrm{d}s<+\infty\right\}$$

et T le temps d'arrêt:

$$T=\inf\{t\geqq 0 \mid X_t \geqq h^+(L_t) \text{ où } X_t \leqq -h^-(L_t)\}.$$

Alors

$$T\leqq \tau_\beta \quad \textit{et} \quad P(T=+\infty)=\exp -\frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{1}{h^+(s)}+\frac{1}{h^-(s)}\right) ds.$$

Démonstration Ce résultat est une extension de l'étude faite par Jeulin et Yor ([14]). On reprend la démonstration de Rogers ([28]). Soit

$$e_u=(X_{\tau_{u-}+s}\,;\, 0\leqq s\leqq \tau_u-\tau_{u-}),$$

l'excursion du mouvement Brownien au temps u.

On a:

$$1_{\{L_T\leqq u\}}=\sum_{s\leqq u} 1_{\{s\leqq L_T,\, \max e_s\geqq h^+(s) \text{ où } \max(-e_s)\geqq h^-(s)\}}.$$

D'après la description de Williams des excursions Browniennes ([30], [38]), en prenant l'espérance des deux côtés de l'égalité précédente il vient:

$$P(L_T\leqq u)=\frac{1}{2}\int_0^u \left(\frac{1}{h^+(s)}+\frac{1}{h^-(s)}\right) P(L_T\geqq s)\, ds\leqq 1.$$

On en déduit $T\leqq \tau_\beta$.

Supposons $\beta=+\infty$, on déduit de la relation précédente:

$$P(L_T\geqq u)=\exp -\frac{1}{2}\int_0^u \left(\frac{1}{h^+(s)}+\frac{1}{h^-(s)}\right) ds,$$

d'où:

$$P(T=+\infty)=\exp -\frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{1}{h^+(s)}+\frac{1}{h^-(s)}\right) ds.$$

1°) *Preuve de la proposition* 9

Soit σ un temps d'arrêt appartenant au support de $dS_.$ et vérifiant $S_\sigma=\varphi(s_\sigma)$. Alors:

$$P(\{\forall u>\sigma, S_u>\varphi(s_u)\}\mid \mathscr{F}_\sigma)=P(\{\forall u>\sigma, s_u<\varphi^{-1}(S_u)\}\mid \mathscr{F}_\sigma)=g(s_\sigma)$$

avec

$$g(x)=P(T(x)=+\infty) \quad \text{et} \quad T(x)=\inf\{u>0 \mid s_u\geqq \varphi^{-1}(S_u+\varphi(x))+\varphi(x)\}.$$

D'après la remarque (1.3) 2°) on a:

$$h_0(s_\sigma, X_\sigma)=g(s_\sigma).$$

Soient x fixé et

$$\psi(y)=\varphi(x)+\varphi^{-1}(y+\varphi(x)), \qquad y\geqq 0.$$

ψ étant une fonction croissante et positive, alors:

$$T(x)=\inf\{u>0 \mid -X_u \geqq \psi(S_u)\}.$$

Utilisons l'identité en loi:

$$(S-X, S)=(|X|, L),$$

il vient:

$$T(x) \overset{(d)}{=} \inf\{u>0 \mid |X_u| \geqq L_u+\psi(L_u)\}.$$

On applique à présent le lemme 3:

$$P(T(x)=+\infty)=\exp-\left(\int_0^\infty \frac{ds}{\psi(s)+s}\right)=\exp-\left(\int_{\varphi(x)}^\infty \frac{dt}{t+\varphi^{-1}(t)}\right).$$

On obtient la loi de s_U, conditionnellement à $\{U<+\infty, X_U>0\}$, en utilisant la relation (2.5) et la proposition 5, 2°).

En particulier, lorsque φ est une fonction continue on a:

$$P(0<U<+\infty)=\left[\frac{x}{x+\varphi(x)} \exp-\int_x^\infty \frac{d\varphi(t)}{t+\varphi(t)}\right]_0^\infty.$$

On en déduit: $P(0<U+\infty)=1$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont réalisées:

(a.1) $$\lim_{+\infty} \frac{x}{x+\varphi(x)}=1,$$

(a.2) $$\lim_0 \left[\frac{x}{x+\varphi(x)} \exp-\int_0^\infty \frac{d\varphi(t)}{t+\varphi(t)}\right]=0$$

et

(a.3) $$\int_1^\infty \frac{d\varphi(t)}{t+\varphi(t)}<+\infty.$$

On remarque:

$$(a.1) \Leftrightarrow \lim_{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}=0.$$

On en déduit:

$$\{(a.1) \text{ et } (a.3)\} \Leftrightarrow \left\{\lim_{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}=0 \text{ et } \int_1^\infty \frac{d\varphi(t)}{t}<+\infty\right\}.$$

Mais

$$\int_1^\infty \frac{d\varphi(t)}{t}=\lim_{+\infty}\left(\frac{\varphi(t)}{t}\right)-\varphi(1)+\int_1^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2} dt,$$

d'où:

$$\{(\text{a.1}) \text{ et } (\text{a.2})\} \Leftrightarrow \left\{\lim_{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = 0 \text{ et } \int_1^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t < +\infty\right\}$$

Si

$$\varphi(0) > 0 \left(\text{resp. } \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{t+\varphi(t)} = +\infty\right)$$

alors (a.2) est réalisée.

On étudie alors le cas où

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{t+\varphi(t)} < +\infty.$$

Lorsqu'il en est ainsi,

$$(\text{a.2}) \Leftrightarrow \lim_0 \frac{x}{x+\varphi(x)} = 0 \Leftrightarrow \lim_0 \frac{x}{\varphi(x)} = 0.$$

Mais alors,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{t+\varphi(t)} \text{ est de même nature que } \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\varphi(t)} = +\infty \text{ car } \varphi(0) = 0.$$

2°) Preuve de la proposition 10

Soit σ un temps d'arrêt tel que $X_\sigma = 0$ et $L_\sigma = \varphi(s_\sigma)$. Alors:

$$P(\{\forall u > \sigma, L_u > \varphi(s_u)\} | \mathscr{F}_\sigma) = P(\{\forall u > \sigma, s_u < \varphi^{-1}(L_u)\} | \mathscr{F}_\sigma) = g(s_\sigma),$$

avec

$$g(x) = P(T(x) = +\infty) \text{ et } T(x) = \inf\{u > 0 \,|\, s_u \geqq \varphi^{-1}(L_u + \varphi(x))\}.$$

Mais $\varphi^{-1}(y + \varphi(\cdot))$ est croissante, donc

$$T(x) = \inf\{u > 0 \,|\, X_u^- \geqq \varphi^{-1}(L_u + \varphi(x))\}.$$

D'après le lemme 3, on a:

$$g(x) = \exp -\frac{1}{2}\left(\int_x^\infty \frac{\mathrm{d}\phi(s)}{s}\right).$$

On obtient alors la loi de $s_{V'}$, conditionnellement à $\{0 < V' < +\infty\}$ en utilisant la relation (2.6) et la proposition 6, 2°).

En particulier, lorsque φ est continue, on a:

$$P(0 < V' < +\infty) = \left[\exp -\frac{1}{2}\left(\int_x^\infty \frac{\mathrm{d}\varphi(u)}{u} + \frac{\varphi(x)}{x}\right)\right]_0^\infty.$$

Soient $0<x<y$, alors:

$$\int_x^y \frac{\mathrm{d}\varphi(u)}{u}+\frac{\varphi(x)}{x}=\frac{\varphi(y)}{y}+\int_x^y \frac{\varphi(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u. \tag{3.2}$$

Il est clair que $P(0<V'<+\infty)>0$ implique

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\varphi(u)}{u}<+\infty. \tag{a}$$

On déduit de (3.2) l'inégalité:

$$\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u \leqq \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\varphi(u)}{u}+\frac{\varphi(x)}{x},$$

par conséquent:

$$\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u<+\infty. \tag{b}$$

En revenant à nouveau à (3.2) on obtient:

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{\varphi(y)}{y}=\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R} \tag{c}$$

et

$$\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u+\lambda=\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\varphi(u)}{u}+\frac{\varphi(x)}{x}.$$

D'où:

$$P(0<V'<+\infty)=\left[1-\exp-\frac{1}{2}\left(\int_0^{\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u\right)\right]\exp-\frac{1}{2}\left(\lim_{y\to+\infty} \frac{\varphi(y)}{y}\right).$$

Il est clair que $P(0<V'<+\infty)=1$ ssi (a), (b), $\lambda=0$ et (d) sont réalisées, où:

$$\int_0^1 \frac{\varphi(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u=+\infty. \tag{d}$$

Remarquons que d'après (3.2), les conditions (a) et (c) sont équivalentes à (b) et (c).

3°) Preuve de la proposition 11

a) Soit σ un temps d'arrêt tel que $L_\sigma=\varphi(L^a_\sigma)$ et $X_\sigma=0$. D'après la remarque (1.3) 2°), on a:

$$h_0(L^a_\sigma,0)=P(\{\forall u>\sigma, L_u>\varphi(L^a_u)\}|\mathscr{F}_\sigma)=g(0)$$

avec

$$g(t)=P(\forall u>0, \alpha L_u^a - L_u < t), \qquad t \geqq 0.$$

On remarque que g est une fonction croissante.

Soient

$$T_1=\inf\{t\geqq 0 \mid X_t=a\}, \qquad T_2=\inf\{t\geqq T_1 \mid X_t=0\} \quad \text{et} \quad t>0.$$

Alors:

$$\{\forall u>0 \mid \alpha L_u^a - L_u<t\}=\{\alpha L_{T_2}^a - L_{T_1}<t; \forall u>0, \alpha L_{u+T_2}^a - L_{u+T_2}<t\}.$$

On en déduit:

$$g(t)=\frac{1}{4a^2}\int_0^\infty \int_0^\infty \exp-\left(\frac{x+y}{2a}\right) 1_{\{\alpha y - x<t\}}\, g(t-\alpha y+x)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

On fait le changement de variables: $Y=t-\alpha y+x$, il vient:

$$g(t)=\frac{1}{2a(1+\alpha)} \times\left[\int_0^t g(Y)\exp-\frac{1}{2a\alpha}(t-Y)\,\mathrm{d}Y+\int_t^\infty g(Y)\exp-\frac{1}{2a}(Y-t)\,\mathrm{d}Y\right].$$

On en déduit:

$$g'(t)=\frac{1}{4a^2(1+\alpha)} \times\left[-\frac{1}{\alpha}\int_0^t g(Y)\exp-\frac{1}{2a\alpha}(t-Y)\,\mathrm{d}Y+\int_t^\infty g(Y)\exp-\frac{1}{2a}(Y-t)\,\mathrm{d}Y\right],$$

$$g''(t)=\frac{1}{4a^2(1+\alpha)} \times\left[\frac{1}{2a\alpha^2}\int_0^t g(Y)\exp-\frac{1}{2a\alpha}(t-Y)\,\mathrm{d}Y-\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)g(t) +\frac{1}{2a}\int_t^\infty g(Y)\exp-\frac{1}{2a}(Y-t)\,\mathrm{d}Y\right]$$

et

$$g''(t)=\frac{(\alpha-1)}{2a\alpha}g'(t).$$

Mais

$$g'(0)=\frac{1}{2a}g(0)=\frac{1}{4a^2(1+\alpha)}\int_0^\infty g(Y)\exp-\frac{Y}{2a}\,\mathrm{d}Y,$$

d'où:

$$g(t)=\frac{g(0)}{1-\alpha}\left[1-\alpha\exp\frac{1}{2a\alpha}(\alpha-1)\,t\right] \quad \text{si} \quad \alpha\neq 1$$

et

$$g(t)=g(0)(1+t/2a) \quad \text{si } \alpha=1.$$

Mais $g(t)\leqq 1$, la condition $\alpha\geqq 1$ implique $g(t)=0$, pour tout $t\geqq 0$. Dans la suite de la démonstration, nous supposons $0<\alpha<1$.

On a:

$$\lim_{t\to+\infty} g(t)=\lim_{t\to+\infty} P(\forall u>0, \alpha L_u^a - L_u < t) = P(\sup_u (\alpha L_u^a - L_u) < +\infty).$$

Soit $(\sigma_n)_{n\geqq 0}$ la suite de temps d'arrêt définie par récurrence de la manière suivante:

(3.3) $\sigma_0=0, \quad \sigma_{2n+1}=\inf\{u>\sigma_{2n} | X_u=a\}, \quad \sigma_{2n+2}=\inf\{u>\sigma_{2n+1} | X_u=0\}$; $n\geqq 0$.

On a:

$$\{\sup_u (\alpha L_u^a - L_u) < +\infty\} = \{\sup_n (\alpha L_{\sigma_{2n}}^a - L_{\sigma_{2n}}) < +\infty\}.$$

Mais

$$\alpha L_{\sigma_{2n}}^a - L_{\sigma_{2n}} = \sum_{i=1}^n \xi_i \quad \text{avec } \xi_1 = \alpha(L_{\sigma_{2i}}^a - L_{\sigma_{2i-2}}^a) + L_{\sigma_{2i}} - L_{\sigma_{2i-2}}.$$

Les variables aléatoires $(\xi_i)_{i\geqq 1}$ sont indépendantes, de carré intégrable, de même loi et $E(\xi_1)=\alpha 2a - 2a = 2a(\alpha-1)<0$.

D'après la loi faible des grands nombres

$$\lim_{n\to+\infty} (\alpha L_{\sigma_{2n}}^a - L_{\sigma_{2n}}) = -\infty,$$

on en déduit

$$\lim_{t\to+\infty} g(t)=1,$$

d'où:

$$g(t)=1-\alpha \exp-\left(\frac{(1-\alpha)\,t}{2a\alpha}\right);$$

en particulier $g(0)=1-\alpha$. Par conséquent:

$$h_0(x,0)=1-\alpha. \tag{3.4}$$

b) Remarquons que l'on a:

$$\{W<+\infty\}=\bigcup_{n\geqq 1}\bigcap_{p\geqq n}\{L_{\sigma_{2p-1}}>\alpha L^a_{\sigma_{2p}}+\beta\},\qquad \text{où } (\sigma_n;n\geqq 1)$$

est la suite définie par (3.3).

On note:

$$\xi_i'=L_{\sigma_{2i}}-L_{\sigma_{2i-2}}-\alpha(L^a_{\sigma_{2i}}-L^a_{\sigma_{2i-2}}),\qquad \text{pour tout } i\geqq 1.$$

On a:

$$\sum_{1\leqq i\leqq p}\xi_i'=L_{\sigma_{2p-1}}-\alpha L^a_{\sigma_{2p}}.$$

Les v.a. $(\xi_i'; i\geqq 1)$ sont indépendantes, de carré intégrable, de même loi et $E(\xi_i')=2a(1-\alpha)>0$. D'après la loi faible des grands nombres, on en déduit:

$$\lim_{p\to+\infty}(L_{\sigma_{2p-1}}-\alpha L^a_{\sigma_{2p}})=+\infty,\qquad \text{d'où: } P(W<+\infty)=1.$$

c) i) Supposons $\beta>0$. On remarque que:

$$P(W>0)=1$$

et

$$\{\rho=0, W<+\infty\}=\{L^a_{\tau_\beta}=0; \forall u\geqq\tau_\beta, L_u>\varphi(L^a_u)\}$$

d'où

$$P(\rho=0, W<+\infty)=\exp-\left(\frac{\beta}{2a}\right)g(0)=(1-\alpha)\exp-\frac{\beta}{2a}.$$

En utilisant de plus (2.11) et (3.4) on obtient:

$$\text{(3.5)}\quad P(L^a_W\in dx)=\frac{(1-\alpha)^+}{2a}\sqrt{\frac{\varphi(x)}{x}}\exp-\left(\frac{x+\varphi(x)}{2a}\right)I_1\left(\frac{\sqrt{x\varphi(x)}}{a}\right)1_{\{x>0\}}\,dx$$
$$+(1-\alpha)^+\exp-\frac{\beta}{2a}\,\delta_0(dx).$$

ii) Lorsque $\beta=0$ on a:

$$P(\rho=0, 0<W<+\infty)=0 \quad \text{et} \quad \{W=0\}=\{\forall u>0, L_u>\alpha L^a_u\},$$

d'où

$$P(W=0)=g(0)=1-\alpha.$$

On applique à nouveau (2.11) et (3.4), la formule (3.5) est vérifiée.

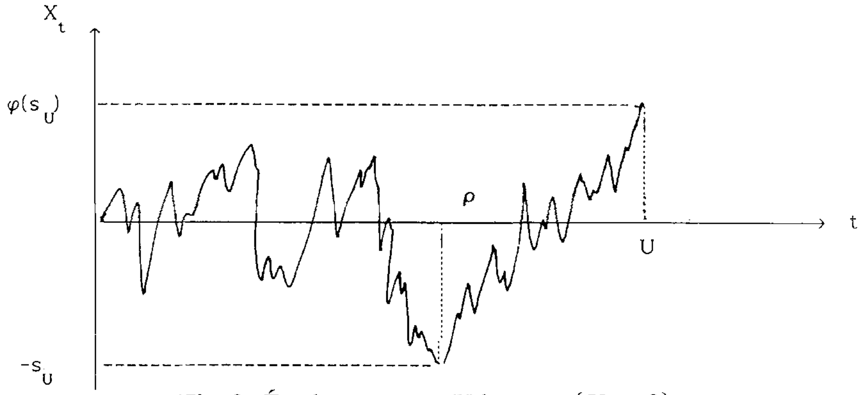

Fig. 3. Étude au temps U lorsque $\{X_U>0\}$

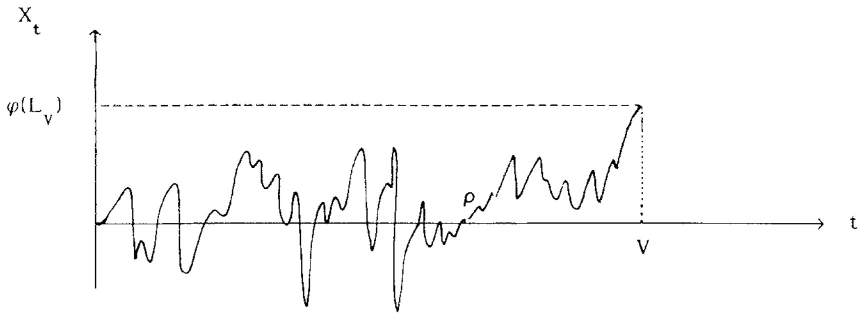

Fig. 4. Étude au temps V, quand $\{X_V>0\}$

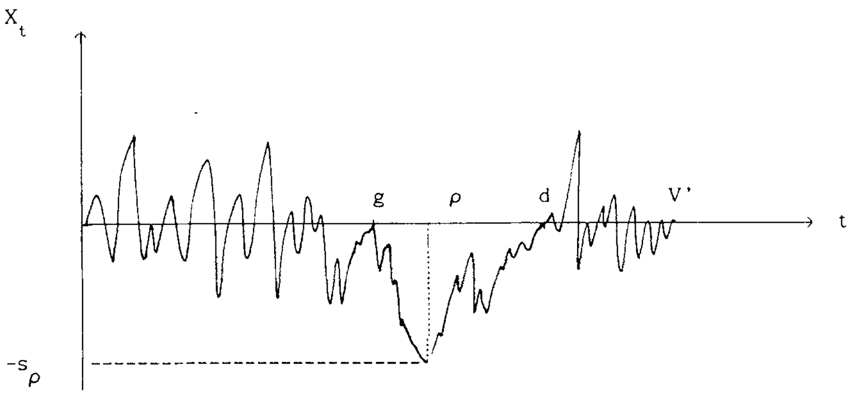

Fig. 5. Étude au temps V' quand $\{X_{V'}=0, V'>0\}$

Bibliographie

1. Azéma, J., Yor, M.: Une solution simple au problème de Skorokhod. Séminaire de probabilités XIII. (Lect. Notes Math., vol. 721) Berlin Heidelberg New York: Springer 1979
2. Bertoin, J.: Complements on the Hilbert transform and the fractional derivative of Brownian local times. J. Math. Kyoto Univ. (à paraître)
3. Biane, P., Yor, M.: Valeurs principales associées aux temps locaux browniens. Bull. Sci. Math., II Sér. **111**, 23–101 (1987)
4. Biane, P., Yor, M.: Sur la loi des temps locaux browniens pris en un temps exponentiel. Séminaire de probabilités XXII. (Lect. Notes Math., vol. 1321) Berlin Heidelberg New York: Springer 1988
5. Dellacherie, C.: Capacités et processus stochastiques. Berlin Heidelberg New York: Springer 1972
6. Eisenbaum, N.: Un théorème de Ray-Knight relatif au supremum des temps locaux browniens. C.R. Acad. Sci. Paris 308, Série I, 579–581 (1989)
7. Feller, W.: An introduction to probability theory and its applications, Vol. II. New York: Wiley 1966
8. Good, I.J.: The population frequencies of species and the estimation population parameters. Biometrika **40**, 237–260 (1953)
9. Ito, K., McKean, H.: Diffusion processes and their sample paths. Berlin Heidelberg New York: Springer 1974
10. Jacod, J.: Calcul stochastique et problèmes de martingales. (Lect. Notes Math., vol. 714) Berlin Heidelberg New York: Springer 1979
11. Jeulin, T.: Semi-martingales et grossissement d'une filtration. (Lect. Notes Math., vol. 833) Berlin Heidelberg New York: Springer 1980
12. Jeulin, T.: Temps local et théorie du grossissement. Application de la théorie du grossissement à l'étude des temps locaux Browniens. In: Grossissements de filtrations: exemples et applications. Séminaire de calcul stochastique, Paris 1982/1983. (Lect. Notes Math., vol. 1118, p. 197) Berlin Heidelberg New York: Springer 1983
13. Jeulin, T., Yor, M.: Autour d'un théorème de Ray. Astérisque **52–53**, 145–148 (1978)
14. Jeulin, T., Yor, M.: Sur les distributions de certaines fonctionnelles du mouvement Brownien. Séminaire de Probabilités XV. (Lect. Notes Math., vol. 850) Berlin Heidelberg New York: Springer 1979/1980
15. Jorgensen, B.: Statistical properties of the generalized inverse Gaussian distribution. (Lect. Notes Statist., vol. 9) Berlin Heidelberg New York: Springer 1982
16. Knight, F.B.: Brownian local times and taboo processes. T.A.M.S. **143**, 173–185, 1969
17. Knight, F.B.: Essentials of Brownian motion and diffusion. Mathematical surveys, vol. 18, Am. Math. Soc. (1981), Providence, RI
18. Le Gall, J.F., Yor, M.: Excursions browniennes et carrés de processus de Bessel. Note C.R. Acad. Sci. Paris 303, Série I, n° 3 (1986)
19. Mc Gill, P.: A direct proof of the Ray-Knight theorem. Séminaire de Probabilités XV. (Lect. Notes Math., vol. 850, pp. 206–209) Berlin Heidelberg New York: Springer 1979
20. Meyer, P.A., Smythe, R.T., Walsh, J.W.: Birth and death of Markov Processes. Proc. 6th. Berkeley Symposium Math. Stat. Prob. Univ. Calif. Vol. III, pp. 295–305, 1972
21. Millar, P.W.: Random times and decomposition theorems. Proc. Symp. Pure Math, **31**, 91–103 (1977)
22. Norris, J.R., Rogers, L.C.G., Williams, D.: Self-Avoiding Random Walk: A Brownian motion model with local time drift. Probab. Th. Rel. Fields **74**, 271–287 (1987)
23. Perkins, E.: Local time is a semi-martingale. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. **60**, 79–118 (1982)
24. Perkins, E.: The Cereteli-Davis Solution to the H^1 Embedding Problem and a Optimal Embedding in Brownian Motion. Seminar on Stochastic Processes 1985. Boston: Birkhäuser 1986
25. Pitman, J., Yor, M.: A decomposition of Bessel Bridges. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. **59**, 425–457 (1982)
26. Pittenger, A.O., Shih, C.T.: Coterminal families and the strong Markov property. TAMS **182**, 1–42 (1973)
27. Ray, D.B.: Sojourn times of diffusion processes. Ill. J. Math. **7**, 615–630 (1963)

28. Rogers, L.C.G.: Williams' characterisation of the Brownian excursion law: proof and applications. Séminaire de Probabilités XV. (Lect. Notes Math., vol. 850, pp. 225–250) Berlin Heidelberg New York: Springer 1979/80
29. Rogers, L.C.G., Walsh, J.: Local time and stochastic area integrals. (preprint)
30. Rogers, L.C.G., Williams, D.: Diffusions, Markov processes, and martingales, vol. 2: Itô calculus. New York: J. Wiley 1987
31. Vallois, P.: Le problème de Skorokhod sur $\mathbb{R}$: une approche avec le temps local. Séminaire de Probabilités XVII. (Lect. Notes Math., vol. 986, pp. 227–239) Berlin Heidelberg New York: Springer 1982
32. Vallois, P.: Sur la conjointe du maximum et de l'inverse du temps local du mouvement Brownien. A paraître à Stochastics 1991
33. Walsh, J.: Excursions and local time. Temps locaux. Astérisque **52–53**, 159–192 (1978)
34. Walsh, J.: Stochastic integration with respect to local time. Seminar on stochastic processes 1982, pp. 237–302. Boston: Birkhäuser 1982
35. Watanabe, S.: A limit theorem of sums of I.I.D. random variables with slowly varying tail probability. In: Kushnarah, P.R. (ed.) Multivariate analysis. I, pp. 249–261. Amsterdam: North-Holland 1980
36. Watson, G.N.: Theory of Bessel functions. Cambridge: Cambridge University Press 1962
37. Williams, D.: Decomposing the Brownian path. Bull. Am. Math. Soc. **76**, 871–873 (1970)
38. Williams, D.: Diffusions, Markov processes, and martingales. Vol. 1: Foundations. New York: J. Wiley 1979