Le spectre de certaines mosaïques poissonniennes du plan et l'enveloppe convexe du pont brownien

André Goldman

Université Claude Bernard Lyon 1, Laboratoire de Probabilités, Bât. 101,
43, bd. du 11 novembre 1918, F-69622 Villeurbanne Cedex, France
(e-mail: goldman@jonas.univ-lyon1.fr)

Reçu le 27 mars 1995 / Version corrigée le 16 octobre 1995

Résumé. The spectral empirical function of a homogeneous, isotropic, Poisson mosaic process is a functional of the perimeter of the convex hull of planar Brownian bridge. Some geometrical identities follow.

Mathematics Subject Classification (1991): 35P15, 35P20, 52A22, 60D05, 60J65

Introduction

Soit $\mathcal{P} = \{x_n, n \geq 1\}$ une mesure de Poisson aléatoire dans le plan R^2 , de mesure d'intensité

$$\mu(A) = E \text{ card}(A \cap \mathcal{P}) = (1/2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} 1_A(\sigma, r) d\sigma dr, \quad A \in \mathcal{B}(R^2),$$

et soit $\mathcal{H} = \{H(x), x \in \mathcal{P}\}$ l'ensemble des droites polaires associées. L'ensemble $\mathcal{H}$ partitionne l'espace R^2 en domaines polygonaux convexes (aléatoires). La première publication sur la structure géométrique de ces domaines date de 1945. Elle est due au physicien S.A. Goudsmit [7] qui par une ingénieuse approche heuristique (la structure poissonnienne des droites étant approchée par des demi-cercles uniformément distribués sur une demi-sphère de R^3) a pu calculer les deux premiers moments empiriques de la mesure d'aire de ces domaines. En 1964, R.E. Miles [16, 17] a conduit une étude systématique de leurs propriétés statistiques par des arguments de nature ergodique, en exploitant le fait que l'ensemble $\mathcal{H}$ est invariant, en loi, par rotation et par translation (c'est-à-dire la mosaïque est homogène et isotrope). Ces résultats sont exposés dans [17] et [19]; on y trouvera notamment les valeurs exactes des deux (et parfois des trois) premiers moments empiriques de certaines caractéristiques géométriques. Ainsi par exemple, en désignant respectivement par

EV , EL et ES les moyennes empiriques de la mesure d'aire, du périmètre et du nombre de sommets des domaines polygonaux on a $EV=1/\pi$, $EL=2$ et $ES=4$. Cela étant, les distributions empiriques exactes ne sont pas connues (ni même d'ailleurs leurs comportements asymptotiques) et de nombreuses questions restent ouvertes.

Dans le présent travail nous nous intéressons au spectre du Laplacien pour le problème de Dirichlet sur ces domaines polygonaux. A cet effet nous établissons l'existence de la fonction spectrale empirique $\Phi(t)$, $t > 0$, et nous démontrons que cette dernière s'exprime simplement à l'aide de la transformée de Laplace de la loi du périmètre Y de l'enveloppe convexe de la trajectoire du pont brownien plan (relatif à l'intervalle de temps $T=1$) sous la forme

$$(*) \quad \Phi(t) = (1/4\pi^2 t) E \exp(-\sqrt{2t}Y), \quad t > 0,$$

ce qui permet, à son tour, d'expliciter la fonction de répartition empirique des valeurs propres du Laplacien. Ce résultat fait apparaître, en particulier, une correspondance entre les propriétés géométriques des domaines polygonaux et celles de l'enveloppe convexe du pont brownien. Plus précisément, on montre que le périmètre empirique moyen des domaines de la mosaïque et la moyenne harmonique empirique des angles de leurs sommets sont reliés aux deux premiers moments du périmètre de l'enveloppe convexe du pont brownien (dont nous explicitons les valeurs exactes). Comme autre conséquence, nous en déduisons, en faisant appel à des inégalités universelles satisfaites par les valeurs propres du Laplacien, des majorations des espérances $EY^{-2\alpha}$, $\alpha > 0$, en fonction des moments empiriques de la mesure d'aire des domaines (l'espérance EY^{-2} admettant, plus particulièrement, une interprétation (au niveau de la mosaïque) faisant intervenir la fonction de Green du domaine D_0 contenant l'origine). Dans une direction inverse, la connaissance précise de la fonction spectrale empirique pourrait être un moyen de tester la validité de certaines conjectures concernant les valeurs propres λ_n , $n \geq 2$, du Laplacien pour le problème de Dirichlet sur un domaine borné D . Ainsi par exemple, la conjecture classique de G. Polya [18] selon laquelle on aurait $\lambda_n \geq 4n\pi/V(D)$, $n \geq 2$, (en désignant par $V(D)$ l'aire du domaine D) se traduit par des majorations des moments $EY^{-2\alpha}$, $\alpha > 0$. Nous connaissons, malheureusement, trop peu de choses sur la loi de Y pour pouvoir conclure.

Cet article s'articule de la manière suivante. Nous réunissons dans les deux premiers paragraphes des informations connues concernant les mosaïques poissonniennes du plan que nous complétons par quelques résultats inédits. La preuve de la relation fondamentale (*) constitue l'objet du troisième paragraphe. Les conséquences de cette formule sont examinées au paragraphe suivant. Finalement la dernière partie de ce travail est consacrée au calcul du second moment du périmètre de l'enveloppe convexe du pont brownien, soit: $EY^2 = (\pi^2/3)(\pi \int_0^\pi (1/u) \sin(u) du - 1)$.

Signalons encore que certains résultats obtenus ici s'étendent sans difficulté au cas des mosaïques poissonniennes homogènes et isotropes de l'espace euclidien R^d , $d \geq 3$. C'est notamment le cas des théorèmes 1 à 4, 8 et 11.

Les résultats principaux de ce travail ont été annoncés dans la Note [6].

I. Préliminaires

Dans ce paragraphe nous rappelons le procédé de construction des mosaïques poissonniennes de l'espace euclidien R^d , $d \geq 2$, nous regroupons des résultats connus les concernant puis nous établissons quelques résultats complémentaires (lemme 4(iii), lemmes 7–9) qui vont nous être utiles par la suite.

1. Construction de la mosaïque et sa structure ergodique

Soit $\mathcal{P} = \{x_n, n \geq 1\}$ une mesure de Poisson aléatoire (définie sur un espace de probabilités (Ω, Σ, P)) dans l'espace euclidien R^d , $d \geq 2$, de mesure d'intensité

$$(1) \quad \mu(A) = E \text{ card}(A \cap \mathcal{P}) = \left(\frac{1}{2}\right) \int_R \left\{ \int_{s(d)} 1_A(\sigma, r) d\sigma \right\} dr, \quad A \in \mathcal{B}(R^d),$$

où on a désigné par $s(d)$ la sphère unité de l'espace euclidien R^d , par $d\sigma$ sa mesure d'aire (non-normalisée) et par $1_A(\sigma, r)$ la fonction indicatrice de l'ensemble borélien A . Pour tout point $x \in R^d$, soit $H(x) = \{y \in R^d; \langle y - x, x \rangle = 0\}$ l'hyperplan polaire associé (en notant par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire de l'espace euclidien R^d). Considérons l'ensemble $\mathcal{H} = \{H(x), x \in \mathcal{P}\}$. L'ensemble $\mathcal{H}$ partitionne l'espace R^d en polyèdres convexes (aléatoires). Pour toute translation $x \rightarrow x + a$, de vecteur a fixé, on a trivialement:

$$(2) \quad a + H(x_n) = H(y_n) \quad \text{avec} \quad y_n = x_n + (x_n / \|x_n\|^2) \langle x_n, a \rangle, \quad n \geq 1.$$

On vérifie facilement que $\mathcal{P}_a = \{y_n, n \geq 1\}$ est une mesure de Poisson aléatoire coïncidant, en loi, avec $\mathcal{P}$. Ainsi, la correspondance

$$(3) \quad \{x_n, n \geq 1\} \rightarrow \{y_n, n \geq 1\}, \quad a \in R^d \text{ étant fixé,}$$

induit, classiquement (voir [3] par exemple), une application $T^a : \Omega \rightarrow \Omega$ vérifiant:

$$(4) \quad a + H(x_n(\omega)) = H(x_n(T^a \omega)), \quad \omega \in \Omega, \quad n \geq 1,$$

et d'après [4] et [16] on a:

Lemme 1. *Pour tout $a \in R^d$ les applications T^a préservent la mesure et sont ergodiques.*

Considérons maintenant la boule ouverte $B(R) = \{x \in R^d, \|x\| < R\}$ centrée à l'origine et de rayon $R > 0$. Soient D_i , $i = 1, \dots, N_R$, les polyèdres convexes inclus dans $B(R)$ et $V(D_i) = \int_{D_i} dx$ leurs mesures (de Lebesgue). Par ailleurs, pour tout $x \in R^d$ et pour tout $\omega \in \Omega$, désignons par $D(x, \omega)$ le polyèdre contenant le point x ; on notera encore $D(0, \omega) = D_0(\omega)$. En fait, $x \in R^d$ et $\omega \in \Omega$ étant fixés, l'ensemble $D(x, \omega)$ n'est bien défini que si x n'appartient pas à la réunion des hyperplans de l'ensemble $\mathcal{H}(\omega)$. Cela étant, le point x étant fixé la probabilité pour qu'il appartienne à l'un des hyperplan de $\mathcal{H}$ est évidemment nulle et, de ce fait, $D(x, \omega)$ est bien défini pour tout $\omega \in \Omega \setminus N_x$, $P(N_x) = 0$. Par ailleurs, $\omega \in \Omega$ étant fixé l'ensemble des points x pour lesquels $D(x, \omega)$ n'est pas défini coïncide avec la réunion des hyperplans $H(x_n(\omega)) \in \mathcal{H}(\omega)$; il est

donc négligeable pour la mesure de Lebesgue de l'espace euclidien R^d . Soit $D_0(\omega), \omega \in \Omega \setminus N_0$, le polyèdre contenant l'origine. Notons $V(a, \omega) = \int_{D(a, \omega)} dx$ et $V_0(\omega) = \int_{D_0(\omega)} dx$. En vertu de (4) on a:

$$(5) \quad D_0(T^{-a}\omega) = -a + D(a, \omega).$$

Ainsi si X est une fonctionnelle opérant sur les polyèdres convexes de l'espace R^d et invariante par translation, on a:

$$(6) \quad X(D_0(T^{-a}\omega)) = X(-a + D(a, \omega)) = X(D(a, \omega)), \quad \omega \in \Omega \setminus N_a.$$

Moyennant des hypothèses raisonnables de mesurabilité, on en déduit l'identité suivante (en notant par $v(R)$ la mesure de Lebesgue de la boule $B(R)$):

$$(7) \quad (1/v(R)) \int_{B(R)} \{X(D_0(T^{-x}\omega))/V_0(T^{-x}\omega)\} dx = (1/v(R)) \sum_{i=1}^{N_R} X(D_i(\omega)) + \varepsilon(R, \omega)$$

le reste $\varepsilon(R, \omega)$ ne faisant intervenir que les polyèdres convexes dont l'intersection avec le bord du disque $B(R)$ est non-vide. L'ergodicité des applications T^{-x} , $x \in R^d$, permet d'appliquer, sous des hypothèses convenables, le théorème ergodique de N. Wiener [23]; il en résulte que la moyenne spatiale figurant dans la formule (7) converge presque-sûrement vers l'espérance $E\{X(D_0)/V_0\}$. Par ailleurs, il est possible de démontrer que sous certaines conditions la contribution $\varepsilon(R, \omega)$, due aux polyèdres convexes coupant le bord de la boule, est asymptotiquement négligeable (lorsque $R \rightarrow +\infty$). Tout ceci permet de voir que la moyenne empirique de X , c'est-à-dire la limite presque-sûre:

$$(8) \quad \tilde{E}X = \lim_{R \rightarrow +\infty} (1/N_R) \sum_{i=1}^{N_R} X(D_i)$$

existe et que l'on a:

$$(9) \quad \tilde{E}X = \{E(1/V_0)\}^{-1} E\{X(D_0)/V_0\}.$$

Cette approche a été systématiquement développée par R.E. Miles [16, 17] qui l'a utilisée pour étudier la structure empirique de la mosaïque poissonnienne. Certains points particuliers, concernant notamment la contribution du "reste" $\varepsilon(R, \omega)$, ont été rigoureusement justifiés par la suite, en dimension $d=2$, par R. Cowan [4].

Le lemme qui suit (voir [4, 8, 19]) explicite le volume moyen empirique EV des domaines polygonaux:

Lemme 2. *On a presque-sûrement:*

$$(10) \quad \tilde{E}V = \lim_{R \rightarrow +\infty} (1/N_R) \sum_{i=1}^{N_R} V(D_i) = \lim_{R \rightarrow +\infty} (v(R)/N_R) = \{E(1/V_0)\}^{-1} \\ = \left\{ \pi^{1/2} \Gamma(d+1) / \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \right\} \\ \times \left\{ 2\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) / 2\pi\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \right\}^d$$

et en particulier, en dimension $d = 2$:

$$(11) \quad \tilde{E}V = 1/\pi .$$

II. Le cas des mosaïques poissonniennes du plan R^2

Dans ce cas particulier on dispose de nombreux résultats explicites sur la structure géométrique "empirique" des polygones convexes. Ces résultats, dûs à R.E. Miles [16, 17] (voir également [19]) concernent notamment l'aire, le périmètre, le nombre de sommets des polygones convexes, le diamètre du plus grand disque qu'ils contiennent, la fonction de répartition empirique de l'angle constitué par l'intersection de deux droites polaires etc. Par ailleurs, on doit à R. Cowan [4] une étude précise sur la contribution des polygones convexes coupant le bord du disque $B(R)$ et plus particulièrement le résultat suivant:

Lemme 3. Soit N'_R le nombre de polyèdres convexes dont l'intersection avec la sphère $\partial B(R)$ est non-vide. On a alors, presque-sûrement:

$$(12) \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} (N'_R/v(R)) = 0 .$$

Dans le cas d'une fonctionnelle X opérant sur les domaines polygonaux convexes de R^2 et invariante par translation, les résultats de [4] permettent de voir facilement que l'on a:

Lemme 4. (i) Supposons que l'application $\omega \rightarrow \{1/V_0(\omega)\}X(D_0(\omega))$ soit une variable aléatoire. On a alors, presque-sûrement, pour tout $t \geq 0$ fixé:

$$(13) \quad \begin{aligned} \tilde{P}\{X \leq t\} &= \lim_{R \rightarrow +\infty} (1/N_R) \sum_{i=1}^{N_R} 1_{[0,t]}(X(D_i)) \\ &= \{E(1_{[0,t]}(X(D_0))/V_0)\}\{E(1/V_0)\}^{-1} ; \end{aligned}$$

(ii) Supposons de plus que l'on ait $E(|X(D_0)|/V_0) < +\infty$. On a alors pour presque-tout $\omega \in \Omega$:

$$(14) \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} (1/N_R) \int_{B(R)} \{X(D(x, \omega))/V(x, \omega)\} dx = \{E(X(D_0)/V_0)\}\{E(1/V_0)\}^{-1} ;$$

(iii) Supposons qu'il existe $p > 1$ vérifiant $E(|X(D_0)|^p/V_0) < +\infty$. On a alors presque-sûrement:

$$(15) \quad \tilde{E}X = \lim_{R \rightarrow +\infty} (1/N_R) \sum_{i=1}^{N_R} X(D_i) = \{E(X(D_0)/V_0)\}\{E(1/V_0)\}^{-1} .$$

Preuve. Les formules (13) et (14) résultent du théorème ergodique de Wiener associé aux lemmes 2 et 3 (voir [4]), quant à la formule (15), pour la démontrer

il suffit de remarquer que le reste $\varepsilon(R, \omega)$ intervenant dans l'égalité (7) se majore selon:

$$\begin{aligned}
 (16) \quad |\varepsilon(R, \omega)| &= \left| (1/v(R)) \sum_{i=1}^{N'_R} \{V(D'_i(\omega) \cap B(R))/V(D'_i(\omega))\} X(D'_i(\omega)) \right| \\
 &\leq (1/v(R)) \sum_{i=1}^{N'_R} \{V(D'_i(\omega) \cap B(R))/V(D'_i(\omega))\} |X(D'_i(\omega))| \\
 &\leq \left[(1/v(R)) \int_{B(R)} \{|X(D(x, \omega))|^p / V(x, \omega)\} dx \right]^{1/p} [N'_R/v(R)]^{1/q}
 \end{aligned}$$

avec $1/p + 1/q = 1$ et où D'_i , $1 \leq i \leq N'_R$, désignent les polygônes convexes dont l'intersection avec la sphère $\partial B(R)$ est non-vide. Le reste $\varepsilon(R, \omega)$ converge donc vers zero, lorsque $R \rightarrow +\infty$, en vertu du lemme 3 et du point (ii) ci-dessus. $\square$

Sous les conditions d'application du lemme 4(i), la fonction de répartition empirique $P\{|X| \leq t\}$, $t \geq 0$, est bien définie, les moments empiriques de $|X|$ d'ordre $n \geq 1$, s'exprimant sous la forme:

$$(17) \quad \tilde{E}|X|^n \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} P\{|X| \geq t\} n t^{n-1} dt = [E\{|X(D_0)|^n / V_0\}] \{E(1/V_0)\}^{-1}.$$

En prenant, en particulier, pour X la mesure d'aire du polyèdre convexe, il vient (voir [4]):

$$(18) \quad \tilde{E}V^n = \{EV_0^{n-1}\} \{E(1/V_0)\}^{-1} < +\infty, \quad n \geq 1.$$

Le lemme 5 qui suit donne les valeurs des moyennes empiriques de l'aire, du périmètre et du nombre de sommets des polyèdres convexes [4, 19].

Lemme 5. *En désignant respectivement par $V(D_i)$, $L(D_i)$ et $S(D_i)$, l'aire, le périmètre et le nombre de sommets du polyèdre convexe $D_i \subset B(R) \subset \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, N_R$, ($S_0 = S(D_0)$, $L_0 = L(D_0)$) il vient (presque-sûrement):*

$$\begin{aligned}
 (19) \quad \tilde{E}V^p &= \lim_{R \rightarrow +\infty} (1/N_R) \sum_{i=1}^{N_R} V(D_i)^p \\
 &= \lim_{R \rightarrow +\infty} (1/N_R) \int_{B(R)} V(D(x, \omega))^{p-1} dx \\
 &= (1/\pi) E\{V_0^{p-1}\} = \tau_p, \quad p = 1, 2, 3;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (20) \quad \tilde{E}L^p &= \lim_{R \rightarrow +\infty} (1/N_R) \sum_{i=1}^{N_R} L(D_i)^p \\
 &= \lim_{R \rightarrow +\infty} (1/N_R) \int_{B(R)} \{L(D(x, \omega))/V(x, \omega)\} dx \\
 &= (1/\pi) E\{L_0^p\} = v_p, \quad p = 1, 2;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(21) \quad \tilde{E}S^p &= \lim_{R \rightarrow +\infty} (1/N_R) \sum_{i=1}^{N_R} S(D_i)^p \\
&= \lim_{R \rightarrow +\infty} (1/N_R) \int_{B(R)} \{S(D(x, \omega))^p / V(x, \omega)\} dx \\
&= (1/\pi) E(S_0^p / V_0) = \sigma_p, \quad p = 1, 2
\end{aligned}$$

avec: $\tau_1 = 1/\pi$, $\tau_2 = 1/2$, $\tau_3 = 4\pi/7$, $v_1 = 2$, $v_2 = (\pi^2 - 4)/2$, $\sigma_1 = 4$ et $\sigma_2 = (\pi^2 - 8)/2$.

Lemme 6. Fixons une droite H dans le plan puis considérons l'ensemble s_j , $j=1, \dots, n_R$, des sommets (de la mosaïque) appartenant au disque ouvert $B(R)$. Désignons par β_j , $j=1, \dots, n_R$, l'angle formé par les deux demi-droites polaires issues de s_j et coupant H . On a alors presque-sûrement (N_R designant le nombre de polyèdres convexes inclus dans $B(R)$):

$$(22) \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \{n_R/N_R\} = (1/4)\tilde{E}S = 1;$$

$$(23) \quad \forall t \in [0, \pi], \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} (1/n_R) \sum_{i=1}^{n_R} 1_{[0,t]}(\beta_i) = (1/2) \int_0^t \sin(u) du.$$

La relation (22) est démontrée par R. Cowan [4], la formule (23) étant de R.E. Miles [17]. En combinant ces deux résultats avec les lemmes qui précèdent nous allons établir le:

Lemme 7. Pour tout polyèdre $D_i \subset B(R) \subset R^2$, $i = 1, \dots, N_R$, désignons par $\alpha_{n,i}$ $1 \leq n \leq S(D_i)$ les angles de ses sommets puis soit $\alpha^{-1}(D_i) = \sum_{n=1}^{S(D_i)} \alpha_{n,i}^{-1}$ leur moyenne harmonique. On a alors presque-sûrement:

$$\begin{aligned}
(24) \quad \tilde{E}\alpha^{-1} &= \lim_{R \rightarrow +\infty} (1/N_R) \sum_{i=1}^{N_R} \alpha^{-1}(D_i) \\
&= \lim_{R \rightarrow +\infty} (1/N_R) \int_{B(R)} \{1/V(x, \omega)\} \alpha^{-1}(D(x, \omega)) dx \\
&= 2 \int_0^\pi (1/u) \sin(u) du.
\end{aligned}$$

Preuve. Fixons $t > 0$, puis considérons la fonctionnelle X opérant sur l'ensemble des polyèdres convexes du plan selon:

$$(25) \quad X(D) = \sum_{j=1}^{S(D)} 1_{[0,t]}(\alpha_j)$$

$\alpha_j = \alpha_j(D)$, $1 \leq j \leq S(D)$, désignant les angles des sommets du polyèdre D . La majoration triviale

$$(26) \quad X(D_0) \leq \pi S_0$$

assure, avec le lemme 5, que $|X(D_0)|^2/V_0$ est intégrable. Ainsi, il résulte du lemme 4 que l'on a:

$$(27) \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} (1/N_R) \sum_{i=1}^{N_R} X(D_i) = \lim_{R \rightarrow +\infty} (1/N_R) \int_{B(R)} X(D(x, \omega)) dx \\ = (1/\pi) E \left\{ (1/V_0) \sum_{j=1}^{S(D_0)} 1_{[0, t]}(\alpha_j) \right\} < +\infty.$$

Notons par ailleurs, qu'un sommet $s \in B(R)$ (c'est-à-dire l'intersection de deux droites polaires) appartient à quatre polyèdres convexes distincts. Il en résulte que les angles $\alpha(s)$ et $\pi - \alpha(s)$, que font entre elles les deux droites polaires issues de s , interviennent, chacun, au plus deux fois dans le décompte $\sum X(D_i)$, ainsi en désignant par $\mathcal{S}(R)$ l'ensemble de tous les sommets appartenant au disque ouvert $B(R)$, on a trivialement l'égalité:

$$(28) \quad \sum_{i=1}^{N_R} X(D_i) = 2 \sum_{s \in \mathcal{S}(R)} 1_{[0, t]}(\alpha(s)) + 2 \sum_{s \in \mathcal{S}(R)} 1_{[0, t]}(\pi - \alpha(s)) - \mathcal{E}_0(R)$$

la quantité $(1/4)|\mathcal{E}_0(R)|$ étant majorée par le nombre de sommets situés dans le disque ouvert $B(R)$ et appartenant aux polyèdres convexes dont l'intersection avec le bord $\partial B(R)$ est non-vide. Désignons par $\mathcal{S}_0(R)$ ce nombre. On a alors:

Lemme 8. *On a presque-sûrement:*

$$(29) \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \{\mathcal{S}_0(R)/n(R)\} = 0.$$

Preuve du lemme 8. En effet, il résulte de (21) et (22) que l'on a presque-sûrement:

$$(30) \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \left\{ 4n_R / \sum_{i=1}^{N_R} S(D_i) \right\} = 1.$$

Or, par un argument géométrique évident on a

$$(31) \quad \mathcal{S}_0(R) \leq 4n_R - \sum_{i=1}^{N_R} S(D_i),$$

ce qui, avec (30), fournit le résultat souhaité. $\square$

Reprenons la preuve de lemme 7. Il résulte de (22), (23), (27)–(29) que l'on a:

$$(32) \quad E \left\{ (1/V_0) \sum_{j=1}^{S(D_0)} 1_{[0, t]}(\alpha_j) \right\} = 2\pi \int_0^t \sin(u) du.$$

En multipliant les deux membres de l'égalité (32) par t^{-2-a} , $0 < a < 1$, puis en intégrant, par rapport à t , entre 0 et π , les expressions obtenues on en déduit

(avec (21)) l'identité suivante:

$$\begin{aligned}
 (33) \quad E \left\{ (1/V_0) \sum_{j=1}^{S(D_0)} (1/\alpha_j)^{1+a} \right\} &= (1/\pi^{1+a}) E(S_0/V_0) \\
 &\quad + 2\pi \int_0^\pi [u^{-1-a} - \pi^{-1-a}] \sin(u) du . \\
 &= 2\pi \int_0^\pi (1/u^{1+a}) \sin(u) du < +\infty .
 \end{aligned}$$

Fixons par ailleurs $0 < \varepsilon < a < 1$, on a trivialement

$$(34) \quad \left\{ \sum_{n=1}^{S(D_0)} \alpha_n^{-1} \right\}^{1+\varepsilon} \leq \{S_0^{a(1+\varepsilon)/(1+a)}\} \left\{ \sum_{n=1}^{S(D_0)} \alpha_n^{-(1+a)} \right\}^{(1+\varepsilon)/(1+a)} .$$

On en déduit la majoration

$$\begin{aligned}
 (35) \quad E\{(\alpha^{-1}(D_0))^{(1+\varepsilon)}/V_0\} &\leq \left[E(1/V_0) \left\{ \sum_{n=1}^{S(D_0)} \alpha_n^{-(1+a)} \right\} \right]^{(1+\varepsilon)/(1+a)} \\
 &\quad \times [E(S_0^{a(1+\varepsilon)/(a-\varepsilon)}/V_0)]^{(a-\varepsilon)/(1+a)} .
 \end{aligned}$$

Avec le choix $a = 3\varepsilon = \frac{3}{4}$ on déduit de (21), (33) et (35) que

$$(36) \quad E\{(\alpha^{-1}(D_0))^{(1+\varepsilon)}/V_0\} < +\infty .$$

Finalement les formules (24) se déduisent de (33) et (36), qui permettent d'appliquer les identités (14) et (15) à la fonctionnelle $X(D) = \alpha^{-1}(D)$. $\square$

Comme nous l'avons vu avec l'énoncé du lemme 5, seuls les trois premiers moments empiriques de la mesure d'aire des polyèdres convexes sont connus. Cela étant, il est facile de montrer que tous les moments $EV_0^n = \pi \tilde{E}V^{n+1}$, $n \geq 1$, sont finis et plus précisément le:

Lemme 9. *On a la majoration:*

$$(37) \quad EV_0^n \leq \frac{n\pi^n \Gamma(2n)}{2^{2n-1}}, \quad n \geq 1 .$$

Preuve du lemme 9. Désignons par $B(0, x)$ le disque ouvert admettant pour diamètre le segment reliant l'origine au point x . Remarquons que en vertu du procédé même de construction de la mosaïque, $x \in R^2$ et $\omega \in \Omega$ étant fixés, on a

$$(38) \quad x \in D_0(\omega) \Leftrightarrow \mathcal{P} \cap B(0, x) = \emptyset ,$$

et que

$$(39) \quad \mu\{B(0, x)\} = 2\|x\| .$$

Notons encore

$$(40) \quad p((\theta_1, \rho_1), \dots, (\theta_n, \rho_n)) = \rho_1 \dots \rho_n P\{(\theta_1, \rho_1) \in D_0, \dots, (\theta_n, \rho_n) \in D_0\},$$

$$d\bar{\rho} = d\rho_1 \dots d\rho_n, \quad d\bar{\theta} = d\theta_1 \dots d\theta_n.$$

Il résulte de (38) que:

$$(41) \quad \begin{aligned} EV_0^n &= n! \int_{0 \dots}^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{0 < \rho_1 < \dots < \rho_n < +\infty} p((\theta_1, \rho_1), \dots, (\theta_n, \rho_n)) d\bar{\rho} \right\} d\bar{\theta} \\ &= n! \int_{0 \dots}^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{0 < \rho_1 < \dots < \rho_n < +\infty} \rho_1 \dots \rho_n \exp \left\{ -\mu \left[\bigcup_{i=1}^n B(0, (\theta_i, \rho_i)) \right] \right\} d\bar{\rho} \right\} d\bar{\theta} \\ &\leq n! \int_{0 \dots}^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{0 < \rho_1 < \dots < \rho_n < +\infty} \rho_1 \dots \rho_n \exp\{-2\rho_n\} d\bar{\rho} \right\} d\bar{\theta} \\ &= \frac{n\pi^n \Gamma(2n)}{2^{2n-1}}, \quad n \geq 1. \quad \square \end{aligned}$$

Terminons ce paragraphe avec le résultat suivant de R.E. Miles [17].

Lemme 10. *Pour tout polyèdre convexe D désignons par $d(D)$ le diamètre du plus grand disque inclus dans D . On a alors:*

$$(42) \quad \begin{aligned} \tilde{P}\{d \leq t\} &= \lim_{R \rightarrow +\infty} (1/N_R) \sum_{i=1}^{N_R} 1_{[0,t]}(d(D_i)) \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} (1/N_R) \int_{B(R)} \{1_{[0,t]}(d(D(x, \omega)))/V(x, \omega)\} dx \\ &= \{E(1_{[0,t]}(d(D_0)))/V_0\} \{E(1/V_0)\}^{-1} \\ &= 1 - \exp(-\pi t). \end{aligned}$$

II. Le résultat principal

Soient D_i , $i = 1 \dots N_R$, les domaines polygonaux convexes, associés à la mesure de Poisson aléatoire $\mathcal{P} = \{x_n, n \geq 1\}$ définie dans l'espace euclidien R^2 , inclus dans le disque ouvert $B(R)$. Désignons par

$$(43) \quad \phi_i(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-t\lambda_{n,i}), \quad t > 0, \text{ la fonction spectrale [11]}$$

associée aux valeurs propres $\lambda_{n,i}$, $n \geq 1$, du laplacien $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, pour le problème de Dirichlet sur le domaine D_i , puis posons:

$$(44) \quad \Phi_R(t) = (1/N_R) \sum_{i=1}^{N_R} \phi_i(t).$$

Considérons par ailleurs les ponts browniens

$$(45) \quad (\bar{B}_{0,t}(s))_{0 \leq s \leq t}, \quad \bar{B}_{0,t}(0) \equiv \bar{B}_{0,t}(t) \equiv 0, \quad t > 0,$$

du plan, démarrant de l'origine, (c'est-à-dire le mouvement brownien plan, démarrant de l'origine et conditionné pour y repasser à l'instant $t > 0$). Soient

$$(46) \quad \mathcal{B}_{0,t} = \{\bar{B}_{0,t}(s), \quad 0 \leq s \leq t\}, \quad t > 0,$$

les trajectoires associées puis Y le périmètre de l'enveloppe convexe de $\mathcal{B}_{0,1}$.

Remarque. L'identité en loi

$$(47) \quad (\bar{B}_{0,2t}(s))_{0 \leq s \leq 2t} = (\sqrt{2t}\bar{B}_{0,1}(s/2t))_{0 \leq s \leq 2t}$$

implique que le périmètre de l'enveloppe convexe de $\mathcal{B}_{0,2t}$ coïncide en loi avec $\sqrt{2t}Y$.

Dans toute la suite on désignera par P la probabilité associée au processus ponctuel $\mathcal{P}$ et par $\bar{P}$ celle associée au pont brownien. De même, les notations E et $\bar{E}$ de l'espérance mathématique se référeront à ces deux probabilités respectives. Notre résultat principal est le suivant:

Théorème 1. (i) *Presque-sûrement, pour tout $t > 0$ la suite $\Phi_R(t)$ admet, lorsque $R \rightarrow +\infty$, une limite finie $\Phi(t)$;*
(ii) *La fonction spectrale empirique $\Phi(t)$ s'exprime sous la forme:*

$$(48) \quad \Phi(t) = (1/4\pi^2 t) \bar{E} \exp(-\sqrt{2t}Y), \quad t > 0.$$

Preuve. Pour tout $\omega \in \Omega$ et $x \notin \bigcup_{H \in \mathcal{H}(\omega)} H$, posons

$$(49) \quad h(x, \omega) = \bar{P}\{x + \mathcal{B}_{0,2t} \subset D(x, \omega)\}.$$

En vertu de (5) on a l'identité:

$$(50) \quad h(x, \omega) = h(0, T^{-x}\omega)$$

et en appliquant le théorème ergodique de Wiener on obtient:

$$(51) \quad \begin{aligned} \forall \omega \notin N, P(N)=0, \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} (1/v(R)) \int_{B(R)} h(x, \omega) dx &= \lim_{R \rightarrow +\infty} (1/v(R)) \int_{B(R)} h(0, T^{-x}\omega) dx \\ &= Eh(0) \\ &= \bar{E}P\{\mathcal{B}_{0,2t} \subset D_0\}. \end{aligned}$$

Rappelons maintenant la caractérisation classique de la fonction spectrale en terme du pont brownien [11].

Lemme 11. *Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine borné. La fonction spectrale du domaine, pour le problème de Dirichlet, s'exprime sous la forme suivante:*

$$(52) \quad \phi(t) = \sum_{n \geq 1} \exp(-t\lambda_n) = (1/4\pi t) \int_D \bar{P}\{x + \mathcal{B}_{0,2t} \subset D\} dx, \quad t > 0.$$

Les formules (43), (44) et le lemme 11 impliquent trivialement l'identité

$$(53) \quad \Phi_R(t) = (1/N_R) \sum_{i=1}^{N_R} \phi_i(t) = (1/N_R) \int_{\bigcup D_i} h(x) dx .$$

Par ailleurs on a de manière évidente

$$(54) \quad 0 \leq \int_{B(R)} h(x) dx - \int_{\bigcup D_i} h(x) dx \leq v(R) - \sum_{i=1}^{N_R} V(D_i) ,$$

et donc avec (51) et le lemme 3 nous en déduisons que l'on a presque-sûrement ($t > 0$ étant fixé):

$$(55) \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \Phi_R(t) = (1/4\pi^2 t) \bar{E}P\{\mathcal{B}_{0,2t} \subset D_0\} .$$

Il nous faut expliciter maintenant l'espérance figurant dans la formule ci-dessus. Pour cela nous allons montrer que:

Théorème 2. *Soit C une courbe continue, fixée, passant par l'origine et soit $L(C)$ le périmètre de son enveloppe convexe. On a alors:*

$$(56) \quad P\{C \subset D_0\} = \exp\{-L(C)\} .$$

Preuve du théorème 2. Dans le cas particulier où C coïncide avec le bord de son enveloppe convexe ce résultat est énoncé par R.E. Miles ([16] th. 3). Pour l'établir considérons l'ensemble

$$(57) \quad \mathcal{A} = \{x \in R^2; H(x) \cap C \neq \emptyset\} .$$

Le procédé de construction de la mosaïque poissonnienne implique que l'on a:

$$(58) \quad C \subset D_0 \Leftrightarrow \mathcal{P} \cap \mathcal{A} = \emptyset$$

et donc

$$(59) \quad P\{C \subset D_0\} = P\{\mathcal{P} \cap \mathcal{A} = \emptyset\} = \exp\{-\mu(\mathcal{A})\}$$

où $\mu = 1_{[0,\pi[} 1_R d\theta dr$ est la mesure d'intensité associée à la mesure de Poisson aléatoire $\mathcal{P}$. Par ailleurs un célèbre théorème de Cauchy [1] assure que le périmètre $L(C_0)$ d'une courbe C_0 rectifiable s'exprime par la formule

$$(60) \quad L(C_0) = (1/2) \int \text{card}\{H(\theta, r) \cap C_0\} d\mu(\theta, r)$$

où $H(\theta, r)$ désigne l'hyperplan polaire associé au point $x = (\theta, r)$. Notons par C_0 le bord de l'enveloppe convexe de la courbe C . Par construction de l'ensemble $\mathcal{A}$, on a pour presque-tout $x \in R^2$ (pour la mesure de Lebesgue de R^2):

$$(61) \quad x \in \mathcal{A} \Leftrightarrow H(x) \cap C \neq \emptyset \Leftrightarrow H(x) \cap C_0 \neq \emptyset \Leftrightarrow \text{card}\{H(x) \cap C_0\} = 2$$

et donc, avec (60), $\mu(\mathcal{A}) = L(C_0)$. $\square$

Revenons vers la preuve du théorème 1. En appliquant (55) et (56) et en tenant compte de l'identité en loi décrite par la remarque découlant de (47) nous avons montré que pour tout $t > 0$, fixé, on a presque-sûrement:

$$(62) \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \Phi_R(t) = (1/4\pi^2 t) \bar{E} \exp(-\sqrt{2t}Y).$$

Notons maintenant que l'application $t \rightarrow (1/4\pi^2 t) \bar{E} \exp(-\sqrt{2t}Y)$ est continue sur R^{+*} et que pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $R > 0$, fixés, l'application $t \rightarrow \Phi_R(t, \omega)$ est monotone décroissante sur R^{+*} . Il est facile de voir, à partir de là, avec (62), que l'on a en fait:

$$(63) \quad P\{\forall t > 0, \lim_{R \rightarrow +\infty} \Phi_R(t) = (1/4\pi^2 t) \bar{E} \exp(-\sqrt{2t}Y)\} = 1. \quad \square$$

Nous déduisons facilement du théorème 1 l'écriture de la fonction de répartition empirique des valeurs propres. Ainsi en notant:

$$(64) \quad F_R(t) = (1/N_R) \sum_{i=1}^{N_R} \text{card}\{n; \lambda_{n,i} \leq t\}$$

il vient:

Théorème 3. (i) *Presque-sûrement, pour tout $t > 0$ la suite $F_R(t)$ admet, lorsque $R \rightarrow +\infty$, une limite finie $F(t)$;*
(ii) *La fonction de répartition empirique $F(t)$ s'exprime sous la forme:*

$$(65) \quad F(t) = 2(\pi)^{-5/2} \int_0^t \left\{ \int_0^s u^{-3/2} \bar{E} \left[Y \exp\left(-\frac{Y^2}{2u}\right) \right] du \right\} ds, \quad t \geq 0.$$

Preuve. L'identité numérique

$$(66) \quad \exp(-\sqrt{t}x) = \int_0^{+\infty} \left\{ x/\sqrt{4\pi s^3} \right\} \exp\left(-ts - \frac{x^2}{4s}\right) ds$$

implique que

$$(67) \quad (1/4\pi^2 t) \exp(-\sqrt{2t}Y) \\ = (2\pi)^{-5/2} \int_0^{+\infty} \exp(-st) \left\{ \int_0^s u^{-3/2} Y \exp\left(-\frac{Y^2}{2u}\right) du \right\} ds$$

Le théorème 1 et la formule (67) traduisent le fait qu'en fixant $\omega \notin N(P(N)=0)$ la transformée de Laplace $\Phi_R(t, \omega)$ de la mesure

$$\mu_R = (1/N_R) \sum_{i=1}^{N_R} \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_{\lambda_{n,i}}(\omega) \right\}$$

converge pour tout $t > 0$, lorsque $R \rightarrow +\infty$, vers la transformée de Laplace de la mesure sur R^+ admettant la fonction F , pour fonction de répartition. Le théorème de convergence en loi de P. Levy permet alors de conclure. $\square$

La fonction spectrale empirique $\Phi(t)$, $t > 0$, est associée également aux valeurs propres du Laplacien pour le problème de Dirichlet sur le domaine D_0 . Plus précisément, en notant λ_n , $n \geq 1$, les valeurs propres et ψ_n les fonctions propres correspondantes (normalisées en norme L^2) pour le problème de Dirichlet sur D_0 , on a:

Théorème 4. *L'identité suivante est satisfaite:*

$$(68) \quad \Phi(t) = (1/\pi)E \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n^2(0) \exp(-t\lambda_n) \right\}, \quad t > 0.$$

Preuve. L'identité résulte directement de la formule classique [11]:

$$(69) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n^2(0) \exp(-t\lambda_n) = (1/4\pi t) \bar{P}\{\mathcal{B}_{0,2t} \subset D_0\}, \quad t > 0.$$

associée aux relations (55) et (62). $\square$

III. Quelques conséquences

On sait [11, 15, 21] que la fonction spectrale d'un domaine polygonal convexe D admet, au voisinage de l'origine, le développement asymptotique suivant:

$$(70) \quad \phi(t) = \frac{V(D)}{4\pi t} - \frac{L(D)}{4\sqrt{4\pi t}} + \frac{1}{24} \sum_{i=1}^N \frac{\pi^2 - \alpha_i^2}{\pi \alpha_i} + O(e^{-c/t})$$

où $c = c(D) > 0$ est une constante, $V(D)$ est la mesure d'aire de D , $L(D)$ son périmètre, N le nombre de sommets et où α_i , $i = 1 \dots, N$, désignent les angles des sommets. Ainsi il apparaît plausible que l'on ait un développement analogue pour la fonction spectrale empirique, sous la forme:

$$(71) \quad \Phi(t) = \frac{\tilde{E}V}{4\pi t} - \frac{\tilde{E}L}{4\sqrt{4\pi t}} + \frac{1}{24}(\pi \tilde{E}\alpha^{-1} - \tilde{E}S + 2) + O(\sqrt{t})$$

où

$$\tilde{E}\alpha^{-1} = \lim_{R \rightarrow +\infty} (1/N_R) \sum_{i=1}^{N_R} \alpha^{-1}(D_i)$$

désigne la moyenne harmonique empirique des angles des domaines polygonaux. Par ailleurs le développement, sous forme de série entière, de la fonction spectrale empirique s'explique complètement avec le théorème 1. Plus précisément on a:

Théorème 5. *Pour tout $0 < t < +\infty$, on a:*

$$(72) \quad \begin{aligned} \Phi(t) &= (1/4\pi^2 t) \bar{E} \exp(-\sqrt{2t}Y) \\ &= (1/4\pi^2 t) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\sqrt{2t})^n}{n!} \bar{E}\{Y^n\}. \end{aligned}$$

Preuve. Ce résultat découle directement du théorème 1 et du lemme suivant dont nous détaillons la démonstration au paragraphe IV. $\square$

Lemme 12. (i) *Pour tout $1 < \beta < +\infty$ fixé, il existe une constante, $0 < c(\beta) < +\infty$, vérifiant:*

$$(73) \quad \bar{E}Y^n \leq c(\beta)^n \Gamma\left(\frac{n\beta}{2}\right) \quad \text{pour tout entier } n \geq 1;$$

(ii) *Pour tout $t \in R$ on a:*

$$(74) \quad \bar{E} \exp(tY) < +\infty.$$

Ainsi, pour établir (71), compte-tenu du fait que $\tilde{E}S = 4$, on est ramené à démontrer les identités suivantes:

Théorème 6. *Les identités suivantes sont satisfaites:*

$$(75) \quad \tilde{E}V = 1/\pi;$$

$$(76) \quad \tilde{E}L = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \bar{E}Y;$$

$$(77) \quad \tilde{E}\alpha^{-1} = \frac{2}{\pi} + \frac{6}{\pi^3} \bar{E}Y^2.$$

On sait, avec (11), (20) et (24), que $\tilde{E}V = 1/\pi$, $\tilde{E}L = 2$ et $\tilde{E}\alpha^{-1} = 2 \int_0^\pi (1/u) \sin(u) du$. Ainsi le théorème 6 découle du suivant:

Théorème 7. *Les deux premiers moments du périmètre de l'enveloppe convexe de la trajectoire du pont brownien ont pour valeurs:*

$$(78) \quad \bar{E}Y = \frac{\pi\sqrt{2\pi}}{2} \sim 3,9374$$

$$(79) \quad \bar{E}Y^2 = (\pi^2/3) \left(\pi \int_0^\pi (1/u) \sin(u) du - 1 \right) \sim 15,8506.$$

Le calcul de $\bar{E}Y$ est classique. Il suffit de reprendre la méthode utilisée par L. Takacs [20] (et reposant sur la formule de Cauchy (60)) pour calculer le périmètre moyen de l'enveloppe convexe d'une portion de trajectoire du mouvement brownien (voir également les travaux de G. Letac et la thèse de M.El Bachir [5]). La formule (79) est plus difficile à obtenir. Pour la démontrer, nous avons fait appel à l'écriture explicite, en terme de série de fonctions de Bessel, de la probabilité pour que la trajectoire du pont brownien soit incluse dans un cône fixé. Cette méthode, que nous détaillons à la fin de ce travail, ne permet pas de calculer les autres moments de la variable aléatoire Y , sans parler, bien évidemment, de l'expression exacte de sa loi. Cela étant, certaines inégalités universelles, satisfaites par les valeurs propres du Laplacien, associées à la formule (48) du théorème 1 vont nous permettre d'obtenir des estimations concernant Y . Ainsi par exemple P. Li et S.T. Yau ont démontré en 1983 [13] que les valeurs propres du Laplacien, pour le problème de Dirichlet

sur un domaine suffisamment régulier et borné D du plan satisfaisaient les majorations universelles suivantes:

$$(80) \quad \lambda_n \geq 2n\pi/V(D), \quad n \geq 2,$$

une conjecture de G. Polya ([18], 1961) stipulant, par ailleurs, que les majorations plus fortes suivantes sont satisfaites:

$$(81) \quad \lambda_n \geq 4n\pi/V(D), \quad n \geq 2.$$

Pour minorer la première valeur propre λ_1 nous disposons de l'inégalité classique de Faber-Krahn

$$(82) \quad \lambda_1 \geq \pi j_0^2/V(D)$$

où $j_0 \sim 2,405$ désigne la plus petite racine positive non-nulle de la fonction de Bessel J_0 . La fonction de répartition empirique du rayon du plus grand disque contenu dans les éléments de la mosaïque poissonnienne étant connue (voir (42)), on peut également faire appel à l'inégalité de Hersch [9] valable pour les domaines convexes du plan et s'exprimant sous la forme:

$$(83) \quad \lambda_1 \geq \pi^2/(4R_D^2)$$

où R_D désigne le rayon du plus grand disque inclus dans le domaine convexe D . Cela étant, les résultats numériques que nous développons plus loin, semblent indiquer que (83) ne fournit pas de meilleures estimations que (82).

Dans un sens opposé, les propriétés classiques de monotonie des valeurs propres du Laplacien (vis-à-vis de l'inclusion des domaines) impliquent que l'on a:

$$(84) \quad \lambda_n \leq \lambda_{0,n}/R_D^2, \quad n \geq 1,$$

où on a noté par $\lambda_{0,n}$, $n \geq 1$, les valeurs propres du Laplacien pour le disque de rayon $R_0 = 1$.

Les inégalités (80) et (82) permettent de relier le périmètre Y de l'enveloppe convexe du pont brownien plan au volume V_0 du polyèdre convexe D_0 . Ainsi on obtient:

Théorème 8. *Les inégalités suivantes sont satisfaites:*

$$(85) \quad E \left[\frac{\exp(-t\lambda_1)}{V_0} + \frac{\exp(-4\pi t/V_0)}{V_0(1 - \exp(-2\pi t/V_0))} \right] \\ \geq (1/4\pi t) \bar{E} \exp(-\sqrt{2t}Y), \quad t > 0;$$

$$(86) \quad \bar{E} Y^{-2\alpha} \leq \frac{2^{1+\alpha} \Gamma(1+\alpha) E\{V_0^\alpha\}}{\pi^\alpha \Gamma(2\alpha)} \left[\frac{1}{j_0^{2(1+\alpha)}} + \frac{Z(1+\alpha) - 1}{2^{1+\alpha}} \right], \quad \alpha > 0,$$

où λ_1 désigne la première valeur propre du domaine D_0 et où $Z(1+\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-(1+\alpha)}$ est la fonction Zeta de Riemann.

Preuve. Les inégalités (80) impliquent que l'on a :

$$\begin{aligned}
 (87) \quad \Phi_R(t) &= (1/N_R) \sum_{n=1}^{N_R} \phi_i(t) \\
 &\leq (1/N_R) \sum_{i=1}^{NR} \exp(-\lambda_{1,i}) + (1/N_R) \sum_{i=1}^{NR} \sum_{n=2}^{+\infty} \exp\{-2\pi n t/V(D_i)\} \\
 &= (1/N_R) \sum_{i=1}^{NR} \exp(-\lambda_{1,i}) + (1/N_R) \sum_{i=1}^{NR} \frac{\exp(-4\pi t/V(D_i))}{1 - \exp(-2\pi t/V(D_i))}.
 \end{aligned}$$

Par ailleurs on a trivialement (avec (19) et (37)):

$$(88) \quad E \left\{ \frac{\exp(-t\lambda_1)}{V_0} \right\} < +\infty ;$$

et

$$(89) \quad E \left\{ (1/V_0) \left[\frac{\exp(-4\pi t/V_0)}{1 - \exp(-2\pi t/V_0)} \right]^p \right\} < +\infty, \quad p \geq 1.$$

On peut donc appliquer le lemme 4, ce qui donne:

$$(90) \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} (1/N_R) \sum_{i=1}^{NR} \exp(-\lambda_{1,i}) = E \left\{ \frac{\exp(-t\lambda_1)}{\pi V_0} \right\}$$

et

$$(91) \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} (1/N_R) \sum_{i=1}^{NR} \frac{\exp(-4\pi t/V(D_i))}{1 - \exp(-2\pi t/V(D_i))} = E \left\{ \frac{\exp(-4\pi t/V_0)}{\pi V_0(1 - \exp(-2\pi t/V_0))} \right\}$$

avec (87) et le théorème 1 on en déduit la majoration (85).

L'inégalité (86) se déduit de (85) en majorant tout d'abord, à l'aide de

$$(82), E \left\{ \frac{\exp(-t\lambda_1)}{V_0} \right\} \text{ par } E \left\{ \frac{\exp(-t\pi j_0^2/V_0)}{V_0} \right\}, \text{ ce qui donne}$$

$$(92) \quad E \left[\frac{\exp(-t\pi j_0^2/V_0)}{V_0} + \frac{\exp(-4\pi t/V_0)}{V_0(1 - \exp(-2\pi t/V_0))} \right] \geq (1/4\pi t) \bar{E} \exp(-\sqrt{2t}Y)$$

puis en multipliant les deux membres de (92) par t^α et en intégrant, par rapport à $t > 0$, l'expression obtenue. $\square$

Remarque 1. En faisant appel à la conjecture de Polya (81), en lieu et place de (80), lors de la preuve du théorème 8, on obtient bien évidemment des inégalités analogues plus "précises" notamment:

$$\begin{aligned}
 (93) \quad E \left[\frac{\exp(-t\lambda_1)}{V_0} + \frac{\exp(-8\pi t/V_0)}{V_0(1 - \exp(-4\pi t/V_0))} \right] \\
 \geq (1/4\pi t) \bar{E} \exp(-\sqrt{2t}Y), \quad t > 0 ;
 \end{aligned}$$

$$(94) \quad \bar{E} Y^{-2\alpha} \leq \frac{2^{1+\alpha} \Gamma(1+\alpha) E\{V_0^\alpha\}}{\pi^\alpha \Gamma(2\alpha)} \left[\frac{1}{j_0^{2(1+\alpha)}} + \frac{Z(1+\alpha) - 1}{2^{2(1+\alpha)}} \right], \quad \alpha > 0.$$

La formule (86) donne, en particulier, $\bar{E}Y^{-2} \leq 0,7047$ alors que avec la conjecture de Polya on obtient $\bar{E}Y^{-2} \leq 0,14$. Il serait intéressant de pouvoir calculer avec suffisamment de précision $\bar{E}Y^{-2}$ et plus généralement $\bar{E}Y^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, puis confronter ces valeurs exactes avec les majorations découlant de la conjecture de Polya. $\square$

En partant de l'inégalité de Hersch (83) et en exploitant (84) on obtient les majorations suivantes:

Théorème 9. *On a l'encadrement:*

$$(95) \quad \int_0^{+\infty} \exp\left(-x - \frac{t4\pi^2 j_0^2}{x^2}\right) dx \leq E\left\{\frac{\exp(-t\lambda_1)}{\pi V_0}\right\} \leq \int_0^{+\infty} \exp\left(-x - \frac{t\pi^4}{x^2}\right) dx.$$

Preuve. On a déjà vu, au cours de la preuve du théorème 8, que:

$$E\left\{\frac{\exp(-t\lambda_1)}{\pi V_0}\right\} = \lim_{R \rightarrow +\infty} (1/N_R) \sum_{i=1}^{NR} \exp(-t\lambda_{1,i}).$$

Par ailleurs, d'après (83) et (84) on a:

$$(96) \quad \sum_{i=1}^{NR} \exp\{-t\lambda_{0,1}/R_{D_i}^2\} \leq \sum_{i=1}^{NR} \exp(-t\lambda_{1,i}) \leq \sum_{i=1}^{NR} \exp\{-t\pi^2/(4R_{D_i}^2)\}.$$

On termine par le procédé habituel en appliquant les lemmes 4 et 10. $\square$

Le théorème 9 a pour conséquence le

Corollaire. *Il existe deux constantes $0 < c_1 < +\infty$, $0 < c_2 < +\infty$, vérifiant:*

$$(97) \quad -c_1 \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf t^{-1/3} \log E[e^{-t\lambda_1}] \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup t^{-1/3} \log E[e^{-t\lambda_1}] \leq -c_2.$$

Preuve. Soit $a > 0$ fixé. On a trivialement

$$(98) \quad \int_0^{+\infty} \exp\left(-x - \frac{ta}{x^2}\right) dx = t^{1/3} \int_0^{+\infty} \exp\left[-t^{1/3}\left(x + \frac{a}{x^2}\right)\right] dx,$$

la méthode classique de Laplace fournissant, par ailleurs, l'équivalent, (lorsque $t \rightarrow +\infty$) suivant:

$$(99) \quad \int_0^{+\infty} \exp\left[-t^{1/3}\left(x + \frac{a}{x^2}\right)\right] dx \sim \sqrt{\frac{6\pi}{(2at)^{1/3}}} \exp\left\{-\left(\frac{21at}{4}\right)^{1/3}\right\}.$$

Il en résulte qu'il existe une constante, $0 < c(a) < +\infty$, vérifiant

$$(100) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1/3} \log \left\{ \int_0^{+\infty} \exp\left[-t^{1/3}\left(x + \frac{a}{x^2}\right)\right] dx \right\} = -c(a).$$

D'autre part on a également:

(101)

$$E[e^{-t\lambda_1}] \leq \left\{ E \left[\frac{\exp(-2t\lambda_1)}{V_0} \right] \right\}^{1/2} \{EV_0\}^{1/2}, \text{ avec } EV_0 = \pi/2 \text{ (voir (19))},$$

et en appliquant l'inégalité de Faber-Krahn:

$$(102) \quad E \left\{ \frac{\exp(-t\lambda_1)}{V_0} \right\} \leq (1/\pi j_0^2) E\{\lambda_1 e^{-t\lambda_1}\} \leq (1/\pi e j_0^2) E\{e^{-(t-1)\lambda_1}\},$$

pour $t > 1$.

Les propriétés (95), (100)–(102) impliquent alors trivialement le résultat souhaité. $\square$

Remarque 2. Il est fortement probable que l'on puisse avoir mieux que (97) et, qu'en fait, il existe une constante $0 < c < +\infty$ vérifiant $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1/3} \log E[e^{-t\lambda_1}] = -c$.

Remarque 3. L'inégalité de Hersch donne, avec (95), la majoration:

$$(103) \quad \int_0^{+\infty} E \left\{ \frac{\exp(-t\lambda_1)}{\pi V_0} \right\} t^\alpha dt \leq \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(3+2\alpha)}{\pi^4(1+\alpha)}$$

alors que avec l'inégalité de Faber-Krahn (79) on obtient

$$(104) \quad \int_0^{+\infty} E \left\{ \frac{\exp(-t\lambda_1)}{\pi V_0} \right\} t^\alpha dt \leq \int_0^{+\infty} E \left\{ \frac{\exp(-t\pi j_0^2/V_0)}{\pi V_0} \right\} t^\alpha dt$$

$$= \frac{\Gamma(1+\alpha)E\{V_0^\alpha\}}{j_0^{2(1+\alpha)}\pi^{2+\alpha}}$$

On vérifie alors directement par le calcul (avec le lemme 5) que pour $\alpha \in \{0, 1, 2\}$ l'inégalité de Faber-Krahn fournit une meilleure estimation.

l'expression analytique exacte (65) de la fonction de répartition empirique $F(t)$, $t \geq 0$, des valeurs propres, est également intéressante à analyser. Ainsi, H. Weyl a conjecturé (voir par exemple [12]) que pour un domaine borné D de R^2 , à frontière "suffisamment" régulière, la fonction de répartition des valeurs propres du Laplacien pour le problème de Dirichlet sur D admettait le développement asymptotique suivant:

$$(105) \quad \text{card}\{n; \lambda_n \leq t\} = \frac{V(D)t}{4\pi} - \frac{L(D)t^{1/2}}{4\pi} + o(t^{1/2}), \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty,$$

(le premier terme du développement étant établi par H. Weyl). Dans le cas de domaines polygonaux, la formule (105) a été démontrée par D.G. Vassiliev [22] en 1986. Cela étant, pour un domaine polygonal, la meilleure estimation possible de l'ordre de grandeur du reste n'est pas connue. Ainsi par exemple, lorsque D est un carré, le meilleur résultat dont on dispose actuellement s'obtient (voir [10]) en remplaçant, dans la formule (105), $o(t^{1/2})$

par $O(t^{(23/73)+\varepsilon})$, $0 < \varepsilon < +\infty$. A cet égard, il est intéressant d'examiner le développement asymptotique de la fonction de répartition empirique $F(t)$. On voit notamment que:

Théorème 10. *La fonction de répartition empirique $F(t)$, $t \geq 0$, admet le développement asymptotique suivant, lorsque $t \rightarrow +\infty$:*

$$(106) \quad F(t) = \frac{\tilde{E}(V)t}{4\pi} - \frac{\tilde{E}(L)t^{1/2}}{4\pi} + \frac{\pi}{24} \left(\tilde{E}\alpha^{-1} - \frac{2}{\pi} \right) + O(t^{-1/2}).$$

Preuve. Avec la formule (65) nous obtenons:

$$(107) \quad \begin{aligned} F(t) &= (2\pi)^{-5/2} \int_0^t (t-u) u^{-3/2} \bar{E} \left[Y \exp\left(-\frac{Y^2}{2u}\right) \right] du \\ &= t(2\pi)^{-5/2} \int_0^t u^{-3/2} \bar{E} \left[Y \exp\left(-\frac{Y^2}{2u}\right) \right] du \\ &\quad - (2\pi)^{-5/2} \int_0^t u^{-1/2} \bar{E} \left[Y \exp\left(-\frac{Y^2}{2u}\right) \right] du \\ &= I_1 - I_2 - I_3 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} I_1 &= t(2\pi)^{-5/2} \int_0^{+\infty} u^{-3/2} \bar{E} \left\{ Y \exp\left(-\frac{Y^2}{2u}\right) \right\} du \\ I_2 &= t(2\pi)^{-5/2} \int_t^{+\infty} u^{-3/2} \bar{E} \left\{ Y \exp\left(-\frac{Y^2}{2u}\right) \right\} du \\ I_3 &= (2\pi)^{-5/2} \int_0^t u^{-1/2} \bar{E} \left[Y \exp\left(-\frac{Y^2}{2u}\right) \right] du \end{aligned}$$

Un changement de variable élémentaire fournit (avec (75)):

$$(108) \quad I_1 = t(2\pi)^{-5/2} \int_0^{+\infty} u^{-3/2} \exp\left(-\frac{1}{2u}\right) du = \frac{t}{4\pi^2} = \frac{\tilde{E}(V)t}{4\pi}.$$

Par ailleurs on a, avec (76):

$$(109) \quad \begin{aligned} I_2 &= t^{1/2} \bar{E}(Y) (2\pi)^{-5/2} \int_1^{+\infty} u^{-3/2} du \\ &\quad - t^{1/2} (2\pi)^{-5/2} \int_1^{+\infty} u^{-3/2} \bar{E} \left\{ Y \left(1 - \exp\left(-\frac{Y^2}{2ut}\right) \right) \right\} du \\ &= \frac{\tilde{E}(L)t^{1/2}}{8\pi} + J_2, \end{aligned}$$

où:

$$(110) \quad |J_2| \leq t^{-1/2} (2\pi)^{-5/2} \int_1^{+\infty} u^{-5/2} \bar{E}(Y^3/2) du = t^{-1/2} (2\pi)^{-5/2} \bar{E}(Y^3/3).$$

Finalement, avec (76), il vient:

$$\begin{aligned}
 (111) \quad I_3 &= t^{1/2} (2\pi)^{-5/2} \int_0^1 u^{-1/2} \bar{E}(Y) du \\
 &\quad - (2\pi)^{-5/2} \int_0^t u^{-1/2} \bar{E} \left[Y \left(1 - \exp\left(-\frac{Y^2}{2u}\right) \right) \right] du \\
 &= \frac{\tilde{E}(L)t^{1/2}}{8\pi} - (2\pi)^{-5/2} \int_0^{+\infty} u^{-1/2} \bar{E} \left[Y \left(1 - \exp\left(-\frac{Y^2}{2u}\right) \right) \right] du + J_3 \\
 &= \frac{\tilde{E}(L)t^{1/2}}{8\pi} - (2\pi)^{-5/2} \bar{E} Y^2 \int_0^{+\infty} u^{-1/2} \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2u}\right) \right) du + J_3,
 \end{aligned}$$

le reste J_3 se majorant selon:

$$\begin{aligned}
 (112) \quad |J_3| &= (2\pi)^{-5/2} \int_t^{+\infty} u^{-1/2} \bar{E} \left[Y \left(1 - \exp\left(-\frac{Y^2}{2u}\right) \right) \right] du \\
 &\leq (2\pi)^{-5/2} \int_t^{+\infty} u^{-3/2} \bar{E}(Y^3/2) du \\
 &= t^{-1/2} (2\pi)^{-5/2} \bar{E}(Y^3).
 \end{aligned}$$

L'expression asymptotique (106) résulte alors directement des formules (73), (76) et de (107) à (112). $\square$

Nous terminons ce paragraphe en signalant l'interprétation suivante:

Théorème 11. *L'identité suivante est satisfaite:*

$$(113) \quad \bar{E} Y^{-2} = \int_{D_0} G(0, x)^2 dx, \text{ où } G(x, y), \ x \in D_0, \ y \in D_0,$$

est la fonction de Green du domaine D_0 .

Preuve. En effet, d'une part on a

$$\begin{aligned}
 \int_{D_0} G(0, x)^2 dx &= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{-2} \psi_n^2(0) \\
 &= \int_0^{+\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n^2(0) \exp(-t\lambda_n) \right\} t dt
 \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} \Phi(t) t dt &= (1/4\pi^2) \bar{E} \int_0^{+\infty} \exp(-\sqrt{2t}Y) dt \\
 &= (1/4\pi^2) \bar{E} Y^{-2}.
 \end{aligned}$$

d'où le résultat, avec le théorème 4. $\square$

IV. Preuves du lemme 12 et du théorème 7

Notons par C_0 le "bord" de l'enveloppe convexe de la trajectoire $\mathcal{B}_{0,1}$. Au cours de la preuve du théorème 2 nous avons rappelé la formule de Cauchy

$$\begin{aligned} Y &= (1/2) \int \text{card}\{H(\theta, r) \cap C_0\} d\mu(\theta, r) \\ &= (1/2) \int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \text{card}\{H(\theta, r) \cap C_0\} dp d\theta \\ &= (1/2) \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \text{card}\{H(\theta, \rho) \cap C_0\} d\rho d\theta \end{aligned}$$

donnant le périmètre de C_0 .

On en déduit l'expression suivante du moment d'ordre $n \geq 1$ du périmètre:

$$(114) \quad \bar{E}Y^n = 2^{-n} \bar{E} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \text{card}\{H(\theta, \rho) \cap C_0\} d\rho d\theta \right\}^n,$$

puis la majoration:

$$\begin{aligned} (115) \quad \bar{E}Y^n &\leq (\pi^{n-1}/2) \int_0^{2\pi} \bar{E} \left\{ \int_0^{+\infty} \text{card}\{H(\theta, \rho) \cap C_0\} d\rho \right\}^n d\theta \\ &\leq \frac{(a(\beta)\pi)^{n-1}}{2} \int_0^{2\pi} \bar{E} \left\{ \int_0^{+\infty} [(1 + \rho^\beta) \text{card}\{H(\theta, \rho) \cap C_0\}]^n \frac{d\rho}{1 + \rho^\beta} \right\} d\theta, \end{aligned}$$

en notant

$$(116) \quad a(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{1 + \rho^\beta}, \quad \beta > 1 \text{ étant fixé.}$$

La projection du pont brownien plan sur une droite fixée passant par l'origine coïncidant, en loi, avec le pont brownien linéaire $(B_{0,1}(s))_{0 \leq s \leq 1}$, $B_{0,1}(0) \equiv B_{0,1}(1) \equiv 0$, il en résulte que:

$$\begin{aligned} (117) \quad \bar{E}[\text{card}\{H(\theta, \rho) \cap C_0\}]^n &= 2^n \bar{P}\{H(\theta, \rho) \cap C_0 \neq \emptyset\} \\ &= 2^n \bar{P}\{\sup\{B_{0,1}(s), 0 \leq s \leq 1\} \geq \rho\}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, la distribution du maximum du pont brownien linéaire est bien connue, soit:

$$(118) \quad \bar{P}\{\sup\{B_{0,1}(s), 0 \leq s \leq 1\} \geq \rho\} = \exp(-2\rho^2), \quad \rho > 0.$$

Il résulte de (115), (117) et (118) qu'il existe une constante $0 < b(\beta) < +\infty$, vérifiant:

$$(119) \quad \bar{E}Y^n \leq (b(\beta))^n \int_0^{+\infty} (1 + \rho^\beta)^{n-1} \exp(-2\rho^2) d\rho.$$

La majoration (73) du lemme 12 en découle trivialement. D'autre part il est clair que (73) implique (74). $\square$

Démontrons maintenant le théorème 7. La formule (114) donne:

$$(120) \quad \bar{E}Y = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \bar{P}\{H(\theta, \rho) \cap C_0 \neq \emptyset\} d\rho d\theta$$

et avec (117) et (118):

$$(121) \quad \begin{aligned} \bar{E}Y &= 2\pi \int_0^{+\infty} \bar{P}\{\sup\{B_{0,1}(s), 0 \leq s \leq 1\} \geq \rho\} d\rho \\ &= 2\pi \bar{E} \sup\{B_{0,1}(s), 0 \leq s \leq 1\} \\ &= \frac{\pi\sqrt{2\pi}}{2}, \end{aligned}$$

ce qui prouve la formule (78).

La seconde formule du théorème 7 est plus difficile à démontrer. Désignons par B_0^θ le pont brownien linéaire obtenu en projetant $B_{0,1}$ sur la droite polaire du hyperplan $H(\theta, \rho)$, $\rho > 0$, puis notons

$$(122) \quad M(\theta) = \sup\{B_0^\theta(s), 0 \leq s \leq 1\}$$

et

$$(123) \quad c(\theta, \phi) = \bar{E}\{M(\theta)M(\phi)\}.$$

On a trivialement

$$(124) \quad \begin{aligned} c(\theta, \phi) &= c(\theta - \phi, 0) \\ c(\pi + \theta, 0) &= c(\pi - \theta, 0), \quad \theta, \phi \in [0, \pi] \end{aligned}$$

ces égalités découlant de l'invariance du pont brownien $B_{0,1}$ par rotation et par symétrie. Ces points étant précisés, il vient:

$$(125) \quad \begin{aligned} \bar{E}Y^2 &= \bar{E} \left[(1/2) \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \text{card}\{H(\theta, \rho) \cap C_0\} d\rho d\theta \right]^2 \\ &= 2 \int_{0 < \phi < \theta < 2\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \bar{P}\{H(\theta, \rho) \cap C_0 \neq \emptyset \text{ et} \\ &\quad H(\phi, \rho') \cap C_0 \neq \emptyset\} d\phi d\theta d\rho d\rho' \\ &= 2 \int_{0 < \phi < \theta < 2\pi} c(\theta, \phi) d\theta d\phi = 2 \int_{0 < \phi < \theta < 2\pi} c(\theta - \phi, 0) d\theta d\phi \\ &= 2 \int_0^{2\pi} (2\pi - \theta) c(\theta, 0) d\theta \\ &= 8\pi \int_0^\pi c(\theta, 0) d\theta - 2 \int_0^\pi \theta c(\theta, 0) d\theta - 2 \int_0^\pi (\pi + \theta) c(\pi + \theta, 0) d\theta \\ &= 4\pi \int_0^\pi c(\theta, 0) d\theta. \end{aligned}$$

On est donc ramené à calculer $c(\theta, 0) = \bar{E}\{M(\theta)M(0)\}$, $\theta \in [0, \pi]$. A cet effet, nous allons exploiter l'écriture explicite, analytique, de la probabilité pour que la trajectoire du pont brownien soit tout entière à l'intérieur d'un cône fixé.

Lemme 13. (voir [2]) *Soit $\xi \subset R^2$ un cône contenant l'origine, de sommet s , $\|s\| = r > 0$, et d'ouverture $0 < \beta < \pi$. Désignons par ρ, ρ' les distances à l'origine des deux cotés du cône et soit $0 < \alpha < \beta$ l'angle que fait le segment reliant l'origine au sommet s avec l'un de ces deux cotés. On a alors:*

$$(126) \quad \bar{P}\{\mathcal{B}_{0,1} \subset \xi\} = \frac{4\pi e^{-r^2}}{\beta} \sum_{k=1}^{+\infty} I_k(r^2) \left(\sin \frac{k\pi\alpha}{\beta} \right)^2, \quad \text{avec } v = \frac{k\pi}{\beta}.$$

Fixons maintenant deux hyperplans $H(0, \rho), H(\theta, \rho')$ puis désignons par $\xi_{\theta, \rho, \rho'}$ le cône obtenu en prenant l'intersection des deux demi-espaces contenant l'origine et admettant $H(0, \rho)$ et $H(\theta, \rho')$ pour frontières respectives. On a alors

$$(127) \quad \bar{P}\{M(0) \leq \rho \text{ et } M(\theta) \leq \rho'\} = \bar{P}\{\mathcal{B}_{0,1} \subset \xi_{\theta, \rho, \rho'}\}$$

et de ce fait

$$(128) \quad \begin{aligned} \bar{P}\{M(0) \geq \rho \text{ et } M(\theta) \geq \rho'\} \\ = \bar{P}\{\mathcal{B}_{0,1} \subset \xi_{\theta, \rho, \rho'}\} - \bar{P}\{M(0) < \rho\} - \bar{P}\{M(\theta) < \rho'\} + 1. \end{aligned}$$

Procédons au changement de variables ($\beta = \pi - \theta \in]0, \pi[$ étant fixé) $\rho = r \sin \alpha$, $\rho' = r \sin(\beta - \alpha)$, $r \geq 0$, $\beta \geq \alpha \geq 0$ et remarquons que:

$$(129) \quad \begin{aligned} \bar{P}\{M(0) < \rho\} &= 1 - \exp(-2\rho^2) \\ &= 4e^{-r^2} \sum_{k=1}^{+\infty} I_k(r^2) (\sin k\alpha)^2 \\ \bar{P}\{M(0) < \rho'\} &= 1 - \exp(-2\rho'^2) \\ &= 4e^{-r^2} \sum_{k=1}^{+\infty} I_k(r^2) \{\sin k(\pi - \beta + \alpha)\}^2 \end{aligned}$$

ces deux formules pouvant d'ailleurs se déduire du lemme 13 (en prenant $\beta = \pi$). De (126), (128) et (129) nous déduisons que

$$(130) \quad \begin{aligned} \bar{P}\{M(0) \geq \rho \text{ et } M(\theta) \geq \rho'\} &= \frac{4\pi e^{-r^2}}{\beta} \sum_{k=1}^{+\infty} I_k(r^2) \left(\sin \frac{k\pi\alpha}{\beta} \right)^2 \\ &\quad - 4e^{-r^2} \sum_{k=1}^{+\infty} I_k(r^2) (\sin k\alpha)^2 \\ &\quad - 4e^{-r^2} \sum_{k=1}^{+\infty} I_k(r^2) \{\sin k(\pi - \beta + \alpha)\}^2 + 1. \end{aligned}$$

Notons par $h(r, \alpha, \beta)$ cette dernière expression. On a alors:

$$(131) \quad \bar{E}\{M(\theta)M(0)\} = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \bar{P}\{M(0) \geq \rho \text{ et } M(\theta) \geq \rho'\} d\rho d\rho' \\ = \int_0^{+\infty} \left\{ \int_0^\beta h(r, \alpha, \beta) d\alpha \right\} r(\sin \beta) dr.$$

Un calcul élémentaire donne (avec l'identité $2\sum_{k=1}^{+\infty} I_k(t) = e^t - I_0(t)$):

$$(132) \quad \int_0^\beta h(r, \alpha, \beta) d\alpha = e^{-r^2} \left[2\pi \sum_{k=1}^{+\infty} I_v(r^2) + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2k\beta)}{k} I_k(r^2) \right. \\ \left. - 2\beta \sum_{k=1}^{+\infty} I_k(r^2) + \beta I_0(r^2) \right], \quad v = \frac{k\pi}{\beta}.$$

Il en résulte que:

$$(133) \quad \bar{E}\{M(\theta)M(0)\} = \int_0^{+\infty} \left\{ \int_0^\beta h(r, \alpha, \beta) d\alpha \right\} r(\sin \beta) dr \\ = \int_0^{+\infty} e^{-t} \left[\pi \sum_{k=1}^{+\infty} I_v(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2k\beta)}{k} I_k(t) \right. \\ \left. - \beta \sum_{k=1}^{+\infty} I_k(t) + \frac{\beta}{2} I_0(t) \right] (\sin \beta) dt.$$

Notons maintenant

$$(134) \quad L(a) = \int_0^{+\infty} e^{-at} \left[\pi \sum_{k=1}^{+\infty} I_v(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2k\beta)}{k} I_k(t) \right. \\ \left. - \beta \sum_{k=1}^{+\infty} I_k(t) + \frac{\beta}{2} I_0(t) \right] dt, \quad a \geq 1.$$

Moyennant quelques calculs élémentaires, la formule classique [14]

$$(135) \quad \int_0^{+\infty} e^{-at} I_v(t) dt = (a^2 - 1)^{-1/2} (a + \sqrt{a^2 - 1})^{-v}, \quad a > 1, \quad v > -1,$$

permet d'écrire $L(a)$, $a > 1$, sous la forme:

$$(136) \quad L(a) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}} \left[\frac{\pi}{(a + \sqrt{a^2 - 1})^{\pi/\beta} - 1} + \frac{\beta}{2} - \frac{\beta}{a + \sqrt{a^2 - 1} - 1} \right. \\ \left. + \int_0^\gamma \frac{\sin 2\beta}{1 + x^2 - 2x \cos 2\beta} dx \right] \quad \text{avec } \gamma = \frac{1}{a + \sqrt{a^2 - 1}}.$$

Finalement, en notant que l'intégrand figurant dans l'intégrale (134) est positif, on en déduit, par un passage à la limite élémentaire, que:

$$\begin{aligned}
 (137) \quad \bar{E}\{M(\theta)M(0)\} &= (\sin \beta)L(1) = (\sin \beta) \lim_{a \downarrow 1} L(a) \\
 &= \frac{\sin \beta}{2} \left[\frac{\pi^2 - \beta^2}{6\beta} - \operatorname{ctg} \beta \right] \\
 &= \frac{\sin \theta}{2} \left[\frac{\theta(2\pi - \theta)}{6(\pi - \theta)} + \operatorname{ctg} \theta \right].
 \end{aligned}$$

Une intégration élémentaire fournit alors, avec (125), le résultat annoncé.

Remerciements. L'auteur remercie le rapporteur pour ses utiles suggestions et commentaires (notamment sur la conjecture de H. Weyl) ainsi que pour les références dont il lui a fait part.

Bibliographie

1. T. Bonnesen, W. Fenchel: *Theorie der Konvexer Körper*. 1971, Chelsea
2. S. Brassesco: A note on planar Brownian motion. *Ann. Probab.* 3, **20**, 1498–1503 (1992)
3. R. Cowan: The use of the ergodic theorems in random geometry. *Suppl. Adv. Appl. Prob.* 10, 47–57 (1978)
4. R. Cowan: Properties of ergodic random mosaic processes. *Math. Nachr.* **97**, 89–102 (1980)
5. M. El Bachir: Thèse Univ. Paul Sabatier, Toulouse, 1983
6. A. Goldman: Le spectre de certaines mosaïques poissonniennes du plan et l'enveloppe convexe du pont brownien. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **320**, 463–468 (1995)
7. S.A. Goudsmit: Random distributions of lines in a plane. *Rev. Mod. Phys.* **17**, 321–322 (1945)
8. P. Hall: *Introduction to the theory of coverage processes*. New York: Wiley 1988
9. J. Hersch: Sur la fréquence fondamentale d'une membrane vibrante: évaluation par défaut et principe de maximum. *Z. Angew. Math. Mech.* **11**, 387–413 (1960)
10. M.N. Huxley: *Exponential Sums and Lattice Points*. *Proc. Lond. Math. Soc.* (à paraître)
11. M. Kac: Can one hear the shape of a drum? *Amer. Math. Monthly* **73**, 1–23 (1966)
12. J.R. Kuttler, V.G. Sigilitto: Eigenvalues of the Laplacian in two dimension. *SIAM Rev.* **26**, 163–193 (1984)
13. P. Li, S.T. Yau: On the Schrödinger equation and the eigenvalue problem. *Commun. Math. Phys.* **88**, 309–318 (1983)
14. W. Magnus, F. Oberhettinger, F.G. Tricomi: *Tables of integral transforms*. New York: McGraw-Hill 1954
15. H.P. McKean, I.M. Singer: Curvature and the eigenvalues of the Laplacian. *J. Diff. Geom.* **1**, 43–69 (1967)
16. R.E. Miles: Random polygons determined by random lines in a plane I. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* **52**, 901–907 (1964)
17. R.E. Miles: Random polygons determined by random lines in a plane II. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* **52**, 1157–1160 (1964)
18. G. Polya: On the eigenvalues of vibrating membranes. *Proc. London Math. Soc.* **3**, 419–433 (1961)
19. H. Solomon: *Geometric Probability*, 1978, SIAM

20. L. Takacs: Expected perimeter length. Amer. Math. Monthly **87**, (1980)
21. M. Van den Berg, S. Srisatkunarah: Heat Equation for a region in $\mathbf{R}^2$ with polygonal boundary. J. Lond. Math. Soc. **3**, 119–127 (1988)
22. D.G. Vassiliev: Two term asymptotics of the spectrum of a boundary value problem in the case of a piecewise smooth boundary: Soviet. Math. Dokl. **33**, 227–230 (1986)
23. N. Wiener: The ergodic theorem. Duke Math. J. **5**, 1–18 (1939)