daß $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|$ konvergent und $c_n = o\left(\frac{1}{n \log n}\right)$ ist, was nach Herrn Hadamard für die Beschränktheit der Abweichung hinreicht. Eine solche Potenzreihe ist

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{\sqrt{n^5}}.$$

Denn nehmen wir an, daß $f(e^{i\theta})$ von beschränkter Schwankung st, so ist es auch sein Realteil

$$\Re f(e^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^2\theta}{\sqrt{n^5}},$$

also besitzt er nach Herrn Lebesgue fast überall eine Ableitung. Nach Herrn de la Vallée-Poussin[4]) wäre daher die formal abgeleitete Reihe

$$s(\theta) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2\theta}{\sqrt{n}}$$

fast überall $(C, 2)$-summierbar, was jedoch nicht der Fall ist, da die Reihe $s(\theta)$ nach den Herren Hardy und Littlewood[5]) in keiner Ordnung mit Cesàroschen Mitteln summierbar ist, ausgenommen die Punkte einer Nullmenge. Damit ist gezeigt, daß $f(z)$ zwar von beschränkter Abweichung, jedoch $f(e^{i\theta})$ nicht von beschränkter Schwankung ist.

Es ist mir aus der Literatur nicht einmal eine stetige Potenzreihe mit $c_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ bekannt, die nicht beschränkter Variation wäre. Dieses Beispiel vertieft daher auch zwei Sätze über die Fourierkoeffizienten stetiger Funktionen, die ich vor kurzem bewiesen habe[6]).

(Eingegangen am 20. Januar 1927.)

Zusatz bei der Korrektur.

(25. XII. 1927.)

Herr Wintner hat mich freundlicherweise darauf aufmerksam gemacht, daß man das obige Beispiel durch ein schärferes ersetzen kann, indem man die Potenzreihe

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\theta}$$

---

[4]) Ch.-J. de la Vallée Poussin, Belg. Ac. Bull. (1908), S. 193—254.

[5]) G. H. Hardy und J. E. Littlewood, Acta Math. 37 (1914), S. 193—238.

[6]) G. v. Alexits, Math. Zeitschr. 27 (1927), S. 65—67.

mit

$$c_n = \frac{\cos\frac{2n\pi\log n}{\log 2} + i\sin\frac{2n\pi\log n}{\log 2}}{\sqrt{n^3}}$$

betrachtet. Die formale Ableitung des Realteils ist nämlich folgende trigonometrische Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{2n\pi\log n}{\log 2}}{\sqrt{n}}\sin nx - \frac{\cos\frac{2n\pi\log n}{\log 2}}{\sqrt{n}}\cos nx\right)$$
$$= -\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{2n\pi\log n}{\log 2} + nx\right).$$

Die Herren Hardy und Littlewood[5]) zeigten nun, daß die Reihe rechterhand nirgends C-summabel ist, woraus — wie vorher — folgt, daß die Funktion $f(e^{i\theta})$ wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n| < +\infty; \qquad c_n = o\left(\frac{1}{n\log n}\right)$$

von beschränkter Abweichung ist, ohne von beschränkter Variation zu sein.

Bemerkenswert ist bei diesem Beispiel die rasche Abnahme der Koeffizienten, denn es ist

$$c_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right),$$

und diese Ordnung kann nicht mehr wesentlich verschärft werden. Denn ist bei einer Reihe $c_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}+\varepsilon}}\right)$ mit $\varepsilon > 0$, so konvergiert die Quadratsumme der Koeffizienten c_n' der formal abgeleiteten Reihe absolut, wegen $|c_n'|^2 = O\left(\frac{1}{n^{1+2\varepsilon}}\right)$. Nach dem Riesz-Fischerschen Satze ist dann die formal abgeleitete Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n' z^n$ die Summe von zwei konjugierten Fourierreihen, also die durch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ dargestellte Funktion totalstetig, um so mehr von beschränkter Variation, w. z. b. w.

Aus diesen Beispielen entsteht auch eine tiefer liegende Frage. In beiden Beispielen wird nämlich der Einheitskreis auf eine Fläche von

---

[5]) G. H. Hardy and Littlewood, Proc. Nat. Acad. U. S. A. 2 (1916), S. 583–586.

endlichem Flächenmaß abgebildet, da die Hadamardsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|c_n|^2 = \lim_{r \to 1} \iint\limits_{x^2+y^2 \leqq r^2} |f'(z)|^2\,dx\,dy$$

konvergiert. Fraglich ist es nun, ob eine Funktion $f(z)$, welche am Rande des Einheitskreises von beschränkter Abweichung ist, den Einheitskreis notwendigerweise auf eine Fläche von endlichem Flächenmaß abbildet, wenn auch das Bild der Kreislinie $|z| = 1$ — wie wir gesehen haben — nicht rektifizierbar sein muß.

(Eingegangen am 29. Dezember 1927.)