manuscripta math. 20, 99 - 100 (1977)

ADDENDUM ZU: QUASI-FROBENIUS-ALGEBREN UND LOKAL VOLLSTÄNDIGE DURCHSCHNITTE

Günter Scheja und Uwe Storch

Die Definitionen und Bezeichnungen seien aus der oben angeführten Arbeit (manuscripta math. 19, 75 - 104 (1976)) übernommen. Sei B eine endliche kommutative projektive Algebra über dem noetherschen kommutativen Ring A. Ergänzend zu den verschiedenen in § 4 - § 7 besprochenen Begriffen des vollständigen Durchschnitts sei bemerkt, daß B genau dann ein vollständiger Durchschnitt über A ist, wenn B sogar eine Darstellung als <u>strikter</u> vollständiger Durchschnitt über A besitzt. Genauer gilt:

<u>LEMMA.</u> <u>Sei</u> $\rho : A[X_1,\ldots,X_n] \to B$ <u>eine Darstellung von</u> B <u>als vollständiger Durchschnitt über</u> A. <u>Dann gibt es eine</u> ρ <u>fortsetzende Darstellung</u> $\tilde{\rho} : A[X_1,\ldots,X_n,Y] \to B$ <u>von</u> B <u>als strikter vollständiger Durchschnitt über</u> A.

<u>Beweis.</u> Sei $\mathfrak{a} :=$ Kern ρ. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ ein freier B-Modul vom Rang n. Seien $t_1,\ldots,t_n$ Elemente aus $\mathfrak{a}$, deren Restklassen in $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ eine Basis bilden, $\mathfrak{a}'$ das von $t_1,\ldots,t_n$ in $A[X_1,\ldots,X_n]$ erzeugte Ideal und $B' := A[X_1,\ldots,X_n]/\mathfrak{a}'$. Von ρ wird ein surjektiver A-Algebra-Homomorphismus $B' \to B$ induziert, dessen Kern $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}'$ wegen $\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$ idempotent ist und deswegen von einem idempotenten Element e' erzeugt wird. Der induzierte Homomorphismus $B'_{1-e'} \to B$ ist bijektiv. Sei $f \in A[X_1,\ldots,X_n]$ ein Polynom mit der Restklasse 1-e' in B'. Der Kern der Komposition $A[X_1,\ldots,X_n,Y] \to B'_{1-e'} \xrightarrow{\sim} B$ mit $Y \mapsto 1/(1-e') \in B'_{1-e'}$ wird dann von $t_1,\ldots,t_n, 1-fY$ erzeugt. Damit ist die ge-

suchte Darstellung $\tilde{\rho}$ gewonnen.-

Für affine Algebren über einem Körper k sei noch folgendes hinzugefügt: Sei B eine rein-r-dimensionale endlich erzeugte k-Algebra, deren sämtliche Lokalisierungen Macaulay-Ringe sind. Für jede noethersche Normalisation $A := k[T_1,\dots,T_r] \to B$ ist B projektiv über A, und der B-Modul $E := \mathrm{Hom}_A(B,A)$ ist unabhängig von der gewählten Normalisation, vgl. (5.5). B heißt Frobenius- (bzw. Quasi-Frobenius-)Algebra über k, wenn E freier (bzw. projektiver) B-Modul ist. B heißt lokal vollständiger Durchschnitt, wenn alle Lokalisierungen von B vollständige Durchschnitte sind. Das ist genau dann der Fall, wenn für eine (und dann für jede) Normalisation $A \to B$ die A-Algebra B lokal vollständiger Durchschnitt ist. Für lokal vollständige Durchschnitte ist die Klasse $c(B|A) \in \tilde{K}_0(B)$ ebenfalls unabhängig von A. Wir bezeichnen sie mit

$$c(B|k).$$

Man berechnet sie als die Klasse $\langle \mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2\rangle \in \tilde{K}_0(B)$, wobei $\mathfrak{b}$ der Kern einer beliebigen Darstellung $k[Y_1,\dots,Y_n] \to B$ von B als Restklassenalgebra einer Polynomalgebra über k ist. Bei $c(B|k) = 0$ heißt B vollständiger Durchschnitt über k. Dieses ist nach dem Lemma und nach (4.5) genau dann der Fall, wenn es einen surjektiven k-Algebra-Homomorphismus $k[Y_1,\dots,Y_n] \to B$ gibt, dessen Kern von n-r Elementen erzeugt wird.

BEMERKUNG. Das Lemma ist eine geringfügig geänderte Version eines Lemmas von N. Mohan Kumar aus dem Manuskript "Complete Intersections", in dem Sätze über k-affine strikte vollständige Durchschnitte bewiesen werden. Diese lassen sich nun größtenteils mittels noetherscher Normalisation aus der Titel-Arbeit ableiten.

G. Scheja
Ruhr-Universität Bochum
Mathematisches Institut
Universitätsstr. 150
D-4630 Bochum

U. Storch
Universität Osnabrück
Fachber.6 Mathematik/Philosophie
Albrechtstr. 28
D-450 Osnabrück

(Eingegangen am 17. August 1976)