Math. Z. 115, 392 (1970)

Berichtigung zu „Über die Existenz wohlgeordneter, konfinaler Teilmengen in Ketten und das Auswahlaxiom“

Math. Zeitschr. **111**, 221 – 232 (1969)

ULRICH FELGNER

Herr Douglass B. Morris hat mich auf den folgenden Irrtum in meiner oben genannten Arbeit aufmerksam gemacht. Auf S. 227 wird am Ende des Beweises von $(Konf.) \Rightarrow (W.T.)$ behauptet, daß $m = \bigcup_{\alpha<\lambda} s_\alpha$ gelte. Dies folgt jedoch nicht notwendig, da nicht ausgeschlossen ist, daß von einer Stelle $\beta, \beta < \lambda$, an $t_\beta = t_\gamma$ für alle γ mit $\beta \leqq \gamma < \lambda$ gilt. Um auf $m = \bigcup_{\alpha<\lambda} s_\alpha$ schließen zu können, muß der Beweis wie folgt abgeändert werden.

Sei q eine Totalordnung von $\mathscr{P}(m)$, der Potenzmenge von m, die die Inklusionsrelation $\subseteq$ erweitert (d.h. $a \subseteq b \Rightarrow \langle a, b\rangle \in q$ für alle $a, b \in \mathscr{P}(m)$). Definiere im Anschluß an $\bar{r}_2$ (S. 226) noch die folgende Relation

$$\begin{aligned}\bar{r}_3 = \{\langle x, y\rangle;\ &(\mathrm{pr}_1(x) = \mathrm{pr}_1(y) \wedge \langle x, y\rangle \in \bar{r}_2)\\ &\vee (\mathrm{pr}_1(x) \neq \mathrm{pr}_1(y) \wedge \langle \mathrm{pr}_1(x), \mathrm{pr}_1(y)\rangle \in q)\}\end{aligned}$$

und wähle eine konfinale, wohlgeordnete Kette $\bar{t}$ in $\langle \bar{m}, \bar{r}_3\rangle$, $\bar{t} = \{\langle t_\alpha, w_\alpha\rangle; \alpha < \lambda\}$. Definiere s_α, $\hat{w}_\alpha$ und v_α wie angegeben (S. 227). Nun folgt $m = \bigcup_{\alpha<\lambda} s_\alpha$ und $\bigcup_{\alpha<\lambda} v_\alpha$ ist eine Wohlordnung von m.

In diesem Beweis haben wir den Ordnungserweiterungssatz (OE) „*Jede Teilordnung kann zu einer linearen Ordnung erweitert werden*“ (Szpilrajn-Marczewski [11]) verwendet. Die Sätze (3.1) und (4.3) sind daher wie folgt abzuändern:

(3.1) **Satz.** *Im System $\Sigma^0 + (OE)$ sind $(Konf.)$ und $(W.T.)$ äquivalent.*

(4.3) **Satz.** *Im System Σ^0 ist (AC) von $(Konf.)$ unabhängig. Im System $\Sigma + (OE)$ ist $(Konf.)$ mit (AC) äquivalent. Daher ist (in Σ) (AC) mit $(Konf.) \wedge (OE)$ äquivalent.*

Herr Morris hat inzwischen die Frage beantworten können, ob $(Konf.)$ im System Σ das Auswahlaxiom impliziert oder nicht. Er hat gezeigt, daß dies nicht der Fall ist.

Ulrich Felgner
Mathematisch Instituut
Rijksuniversiteit Utrecht, Holland

(Eingegangen am 8. Dezember 1969)