Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 14, 203–238 (1970)

Der Wertebereich von Vektorintegralen*

RUDOLF WEGMANN

Summary. Let $(T, \mathfrak{K}, m)$ be a measure space and F a locally convex linear topological Hausdorff space. For set-valued functions S on T to F (the value $S(t)$ being a non-empty subset of F for each $t \in T$) we define the integral $\int S\,dm$ to be the set $\{\int f\,dm$: f: $T \to F$ integrable, vectorvalued, and $f(t) \in S(t)$ for each $t \in T\}$.

In §4 we prove a theorem, which shows that $\int S\,dm$ contains certain extreme points of its closed convex hull.

In §5 we give a generalization of a theorem of Ljapunoff on the convexity and compactness of the range of a non-atomic vector-measure.

In §6 we finally establish a result on the convexity and weak compactness of the set $\int S\,dm$.

§ 1. Einleitung

In Optimierungsproblemen, wie sie z.B. in der statistischen Testtheorie oder in der Kontrolltheorie vorkommen, kann folgende Situation auftreten:

Gegeben ist ein σ-finites Maß m auf einem σ-Körper $\mathfrak{K}$ von Teilmengen einer Grundmenge T. Weiter liegt für jedes $t \in T$ eine nichtleere Teilmenge $S(t)$ eines separierten lokalkonvexen Raumes F vor. (In dieser Einleitung wollen wir voraussetzen, daß F endlichdimensional ist. Die Vektoren $x \in F$ schreiben wir dabei als Zeilenvektoren $(x_1, \ldots, x_n)$.) Man interessiert sich nun für die Menge der Integrale $\int f\,dm$ der m-integrierbaren Vektorfunktionen f, die für jedes $t \in T$ der Bedingung $f(t) \in S(t)$ genügen. Diese Menge bezeichnen wir mit $\int S\,dm$. Die Untersuchung von Mengen dieser Gestalt ist Gegenstand dieser Arbeit.

In statistisch orientierten Arbeiten (z.B. in [2, 12] und [15]) wird eine etwas anders definierte Menge betrachtet. Es liegen dort n Maße $m_1, \ldots, m_n$ vor. Man bildet die Menge $W(S)$ der Integrale $(\int f_1\,dm_1, \ldots, \int f_n\,dm_n)$, wobei $f(t) := (f_1(t), \ldots, f_n(t))$[1] eine Vektorfunktion ist, die $f(t) \in S(t)$ für alle $t \in T$ erfüllt und deren i-te Komponente m_i-integrierbar ist.

Die Maße m_i sind totalstetig bezüglich des Maßes m, das definiert ist durch $m := (|m_1| + \cdots + |m_n|)/n$. Dabei ist $|m_i|$ die Totalvariation von m_i. Mit h_i bezeichnen wir die Dichte von m_i bezüglich m. Wenn wir nun $W(S)$ berechnen wollen, brauchen wir nur $\bar{S}(t) := \{(x_1 h_1(t), \ldots, x_n h_n(t)) : (x_1, \ldots, x_n) \in S(t)\}$ zu bilden und die Menge $\int \bar{S}\,dm$ zu bestimmen. Wie man unmittelbar sieht, ist $W(S) = \int \bar{S}\,dm$. Jede Menge von der Gestalt $W(S)$ läßt sich also als $\int \bar{S}\,dm$ schreiben. Umgekehrt kann $\int S\,dm$ als eine Menge $W(S)$ geschrieben werden. Man braucht dazu nur die Maße $m_1, \ldots, m_n$ alle gleich m zu setzen.

* Diese Arbeit ist eine Umarbeitung meiner Dissertation, die im Februar 1968 von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Ludwig-Maximilians-Universität München angenommen wurde. Den Referenten, Herrn Prof. Dr. H. Richter und Herrn Prof. Dr. W. Roelcke, danke ich für wertvolle Anregungen und fördernde Diskussionen.

[1] Die Notation $A := B$ deutet an, daß die linke Seite durch die rechte definiert wird.

Wir zitieren jetzt einige Ergebnisse, die für endlichdimensionale Vektorintegrale bereits vorliegen. Die vorstehende Bemerkung ermöglicht es uns, diese Sätze in einer für uns bequemen Formulierung zu geben, die etwas von der in den Originalarbeiten benützten abweicht.

Am einfachsten wird die Situation, wenn man mit einer integrierbaren Vektorfunktion f die Mengen $S(t) := \{0, f(t)\}$ bildet. Wenn das Maß m atomlos ist, ist in diesem Falle, wie Ljapunoff [14] zeigte, $\int S\,dm$ eine konvexe und kompakte Menge.

Richter [15] und Kellerer [12] untersuchten den Fall, daß die $S(t)$ beschränkte Mengen des R^n sind, die sämtliche Extremalpunkte ihrer abgeschlossenen konvexen Hülle enthalten. Wenn die Stützfunktion

$$g(p_1, \dots, p_n, t) := \inf\{(p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n) : (x_1, \dots, x_n) \in S(t)\}$$

für jedes feste $(p_1, \dots, p_n) \in R^n$ m-integrierbar ist, dann ist bei atomlosem Maße m die Menge $\int S\,dm$ konvex und kompakt.

Wenn man die Voraussetzungen weiter abschwächt, kann man nicht mehr damit rechnen, daß $\int S\,dm$ abgeschlossen ist. Wird aber in dem Satz von Richter statt der Integrierbarkeit von $g(p_1, \dots, p_n, t)$ nur die m-Meßbarkeit verlangt, kann man noch schließen, daß $\int S\,dm$ alle Extremalpunkte seiner abgeschlossenen konvexen Hülle enthält. Dieses Resultat, das von Borges [2] bewiesen wurde, gilt auch, wenn m nicht atomlos ist.

Das Hauptziel dieser Arbeit ist es, die zitierten drei Sätze auf unendlichdimensionale Räume F zu verallgemeinern. Als wesentliches Hilfsmittel werden wir die Theorie der Stützfunktionen und Ecken heranziehen. Darüber liegt bisher nur sehr wenig Literatur vor. Wir werden deshalb die Theorie in dem Umfang und in der Form, wie wir sie brauchen, in den nächsten beiden Paragraphen entwickeln.

§ 2. Stützfunktionen

Die Theorie der Stützfunktionen ist für endlichdimensionale Räume dargestellt bei Karlin [10] (in den Abschnitten 7.5 und 7.6) und für lokalkonvexe Räume bei Hörmander [9]. Wenn man den bei Karlin hervorgehobenen Zusammenhang mit den konjugierten konvexen Funktionen verwendet, kann man auch Arbeiten über konjugierte Funktionen mit heranziehen wie z. B. [6].

In den Begriffen über lineare topologische Räume halten wir uns an die Lehrbücher von Bourbaki [3] und Köthe [13].

Für das Weitere sei F ein separierter lokalkonvexer Raum über dem Körper R der reellen Zahlen. Der Raum der stetigen linearen Funktionen p' auf F heißt der (*topologisch*) *duale Raum* und wird mit F' bezeichnet. Für den Wert, den die Funktion $p' \in F'$ auf dem Punkt $x \in F$ annimmt, schreiben wir $p' x$. Mit der bilinearen Funktion $p' x$ bilden die Räume F und F' ein Dualsystem $\langle F, F' \rangle$. Auf F' sei eine bezüglich dieses Dualsystems zulässige Topologie gegeben. Die ersten Ergebnisse dieses Paragraphen beruhen, wie man bei näherer Analyse der Beweise sieht, nur auf dem Begriff der abgeschlossenen konvexen Menge und sind deshalb unabhängig von der speziellen Wahl der zulässigen Topologie.

Mit M^k bezeichnen wir die *konvexe Hülle*, mit M^a die *abgeschlossene Hülle* und mit M^i den *offenen Kern* einer Teilmenge M eines linearen topologischen Raumes. Die Menge $M^{ka} := (M^k)^a$ ist die kleinste abgeschlossene konvexe Menge, die M umfaßt. Sie heißt die *abgeschlossene konvexe Hülle.*

Der natürliche Wertevorrat der Stützfunktionen ist die nach unten abgeschlossene reelle Achse $R^- := R \cup \{-\infty\}$. Es ist klar, wie die Relationen $\alpha + \beta$, $\alpha < \beta$ und $\alpha \leqq \beta$ für Elemente $\alpha, \beta \in R^-$ zu verstehen sind. Zu den Multiplikationsregeln in R kommt noch $\alpha \cdot (-\infty) = -\infty$ für $\alpha > 0$ hinzu. Für $\alpha \leqq 0$ sind diese Produkte in R^- nicht erklärt.

Die Abbildung $\varphi(\alpha) := \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \alpha$, die durch $\varphi(-\infty) := -1$ ergänzt wird, bildet R^- auf das halboffene Intervall $[-1, +1)$ ab. Durch φ wird auf R^- eine Topologie induziert. Diese wollen wir für das Weitere auf R^- stets zugrunde legen.

Eine Funktion f, die auf einer konvexen Teilmenge K' von F' definiert ist und Werte aus R^- annimmt, heißt *konkav*, wenn

$$f(\vartheta p' + (1-\vartheta) q') \geqq \vartheta f(p') + (1-\vartheta) f(q')$$

gilt für alle $p', q' \in K'$ und $0 < \vartheta < 1$.

Nun wollen wir die Stützfunktionen erklären:

(2.1) Definition. Sei A eine nichtleere Teilmenge von F. Dann heißt die auf ganz F' definierte Funktion

$$g(p') := \inf_{x \in A} p' x$$

mit Werten aus R^- die Stützfunktion von A.

Die Stützfunktion ist konkav, vom 1. Grade positiv homogen, nach oben halbstetig und erfüllt $g(0) = 0$. Davon gilt nun auch die Umkehrung. Das fassen wir mit der eben erwähnten Eigenschaft zusammen zu folgendem Satz. Zum Beweis verweisen wir auf Hörmander [9].

(2.2) Satz. *Eine auf F' definierte Funktion g mit Werten in R^- ist genau dann Stützfunktion einer nichtleeren Menge, wenn sie konkav, vom* 1. *Grade positiv homogen und nach oben halbstetig ist und* $g(0) = 0$ *erfüllt. Es gibt dann genau eine nichtleere abgeschlossene konvexe Menge M mit der Stützfunktion g.*

Es besteht also eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den nichtleeren abgeschlossenen konvexen Mengen und ihren Stützfunktionen. Wenn eine nichtleere Menge A die Stützfunktion g hat, ist

$$A^{ka} = \{x \in F : p' x \geqq g(p') \text{ für alle } p' \in F'\}.$$

Die Menge $M_g := \{(p', \alpha) \in F' \times R : \alpha \leqq g(p')\}$ nennen wir den *Stützkegel* von A. Es ist

$$M_g = \bigcap_{x \in A} \{(p', \alpha) \in F' \times R : \alpha \leqq p' x\}$$

der Durchschnitt von abgeschlossenen Halbräumen. Daraus folgt, daß M_g ein abgeschlossener konvexer Kegel ist. Der Stützkegel bestimmt, wie man unmittelbar sieht, eindeutig die Stützfunktion g und damit A^{ka}.

Es kommt vor, daß eine Menge $K \subset F$ definiert wird durch Ungleichungen

$$K := \bigcap_{(p', \alpha) \in S} \{x \in F : p' x \geqq \alpha\}.$$

Die Menge S ist als Teilmenge von $F' \times R$ zu verstehen. Wir sagen dann, daß S die Menge K definiert. Wenn $f \colon F' \to R^-$ eine Funktion ist, können wir dazu die Menge $S := \{(p', f(p')) : p' \in \{p' \in F' : f(p') > -\infty\}\} \subset F' \times R$ bilden, die im vorstehenden Sinne eine Menge K definiert, die gleich $\{x \in F : p' x \geqq f(p')$ für alle $p' \in F'\}$ ist. Wir sagen dann: f definiert K.

Aus der Menge S kann leicht der Stützkegel der Menge K bestimmt werden, die durch S definiert wird:

(2.3) Hilfssatz. *Die Menge*

$$K := \bigcap_{(p', \alpha) \in S} \{x \in F : p' x \geqq \alpha\}$$

sei nicht leer. Dann ist der Stützkegel von K gleich dem abgeschlossenen konvexen Hüllkegel der Menge $S \cup \{(0, -1)\}$.

Beweis. Den abgeschlossenen konvexen Hüllkegel von $S \cup \{(0, -1)\}$ nennen wir zunächst L. Der Stützkegel von K

$$M_g := \{(p', \alpha) : \alpha \leqq p' x \ \text{ für alle } x \in K\}$$

ist ein abgeschlossener konvexer Kegel, der die Menge S und den Punkt $(0, -1)$ enthält. Er umfaßt also auch L.

Gäbe es einen Punkt $(q', \beta) \in M_g$, der nicht in L liegt, dann existierte dazu ein Trennfunktional, das ist ein Paar $(y, \gamma) \in F \times R$ mit

$$q' y + \beta \gamma < \inf_{(p', \alpha) \in L} (p' y + \alpha \gamma). \tag{$*$}$$

Wäre für ein $(p'_0, \alpha_0) \in L$ der Ausdruck $p'_0 y + \alpha_0 \gamma$ negativ, dann wäre

$$\inf_{(p', \alpha) \in L} (p' y + \alpha \gamma) \leqq \inf_{\lambda > 0} \lambda (p'_0 y + \alpha_0 \gamma) = -\infty,$$

da wegen der Kegeleigenschaft von L mit (p'_0, α_0) auch $\lambda(p'_0, \alpha_0)$ in L liegt für alle $\lambda > 0$. Das Infimum in $(*)$ kann also nicht negativ sein. Wegen $(0, 0) \in L$ ist dieses Infimum gleich Null. Dann ist aber $\gamma \leqq 0$, da $(0, -1)$ in L liegt.

Wenn nun $\gamma \neq 0$ ist, dann gilt $q' \left(-\frac{1}{\gamma} y\right) < \beta$. Wegen $(q', \beta) \in M_g$ ist $\beta \leqq g(q')$, wenn g die Stützfunktion von K ist. Mithin gilt $q' \left(-\frac{1}{\gamma} y\right) < g(q')$, woraus zu folgern ist, daß der Punkt $-\frac{1}{\gamma} y$ nicht in K liegt. Andererseits gilt aber $p' \left(-\frac{1}{\gamma} y\right) \geqq \alpha$ für alle $(p', \alpha) \in L$, was wegen $L \supset S$ zur Folge hat, daß $-\frac{1}{\gamma} y$ in K liegt. Damit ergibt sich ein Widerspruch. Es muß $M_g = L$ sein.

Um den Beweis zu vervollständigen haben wir noch zu zeigen, daß $\gamma \neq 0$ gewählt werden kann. Es genügt nachzuweisen, daß (y, γ) mit $\gamma = 0$ so zu einem Trennfunktional (y_0, γ_0) abgeändert werden kann, daß $\gamma_0 \neq 0$ ausfällt.

Bei $\gamma=0$ gilt nach $(*)$, daß $\delta := -q'y>0$ und $p'y \geqq 0$ ist für alle $(p', \alpha) \in L$. Für ein $x_1 \in K$ gilt $p'x_1 - \alpha \geqq 0$ für alle $(p', \alpha) \in S$ und damit auch für alle $(p', \alpha) \in L$. Sei $\lambda>0$ so gewählt, daß $\lambda(q'x_1-\beta) \leqq \delta/2$ ausfällt. Mit $y_0 := y+\lambda x_1$ und $\gamma_0 := -\lambda$ ist dann $q'y_0+\beta\gamma_0 = q'y+\lambda(q'x_1-\beta) \leqq -\delta+\delta/2 = -\delta/2<0$ und $p'y_0+\alpha\gamma_0 = p'y+\lambda(p'x_1-\alpha)$, was nach Konstruktion für alle $(p', \alpha)\in L$ nichtnegativ ist. Also ist (y_0, γ_0) ein Trennfunktional mit $\gamma_0 \neq 0$. Damit kann der oben angeführte Widerspruch hergestellt werden. $\lrcorner$

Diesen Satz wollen wir nun dazu verwenden, Formeln für die Stützfunktion des Durchschnittes abgeschlossener konvexer Mengen herzuleiten.

(2.4) Satz. *Es sei $(K_i)_{i\in I}$ eine Familie nichtleerer abgeschlossener konvexer Teilmengen von F mit den Stützfunktionen h_i und den Stützkegeln M_{h_i}. Wenn der Durchschnitt $K := \bigcap_{i\in I} K_i$ nicht leer ist, berechnet sich seine Stützfunktion h gemäß $h(p') = \overline{\lim\limits_{q'\to p'}}\, l(q')$, wobei l definiert ist durch*

$$l(q') := \sup\left\{\sum_{\nu=1}^{n} h_{i_\nu}(p'_\nu) : i_\nu \in I,\ n \text{ natürliche Zahl},\ p'_\nu \in F' \text{ mit } \sum_\nu p'_\nu = q'\right\}.$$

Beweis. Wegen

$$K = \bigcap_{i\in I} K_i = \bigcap_{i\in I}\ \bigcap_{(p',\alpha)\in M_{h_i}} \{x\in F:\ p'x \geqq \alpha\} = \bigcap_{(p',\alpha)\in \bigcup\limits_{i\in I} M_{h_i}} \{x\in F: p'x\geqq \alpha\}$$

definiert die Menge $M := \bigcup_{i\in I} M_{h_i}$ den Durchschnitt K. Wir berechnen den Stützkegel M_h von K nach Satz (2.3). Da $(0, -1)$ für jedes $i\in I$ bereits in M_{h_i} liegt, brauchen wir nur den abgeschlossenen konvexen Hüllkegel von M zu bilden. Dieser ist gleich M^{ka}, weil M eine Vereinigung von konvexen Kegeln ist und mit jedem Punkt (p', α) auch $\lambda(p', \alpha)$ enthält für jedes $\lambda>0$.

M^k besteht aus allen Punkten der Gestalt $\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu(p'_\nu, \alpha_\nu)$. Dabei ist n eine natürliche Zahl, die λ_ν sind nicht negativ mit $\sum_\nu \lambda_\nu = 1$ und die Punkte (p'_ν, α_ν) sind aus $M_{h_{i_\nu}}$ genommen mit $i_\nu\in I$. Da die M_{h_i} konvexe Kegel sind, liegt $\lambda_\nu(p'_\nu, \alpha_\nu)$ in $M_{h_{i_\nu}}$, so daß sich M^k einfach als Gesamtheit aller Punkte der Gestalt $\sum_\nu (p'_\nu, \alpha_\nu)$ ergibt mit $(p'_\nu, \alpha_\nu)\in M_{h_{i_\nu}}$ und $i_\nu\in I$.

Wir bilden

$$\begin{aligned} l(q') &:= \sup\left(\{\alpha\in R: (q', \alpha)\in M^k\} \cup \{-\infty\}\right) \\ &= \sup\left(\left\{\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu : (p'_\nu, \alpha_\nu)\in M_{h_{i_\nu}}, \sum_\nu p'_\nu = q', i_\nu \in I\right\} \cup \{-\infty\}\right) \\ &= \sup\left(\left\{\sum_{\nu=1}^{n} h_{i_\nu}(p'_\nu) : i_\nu\in I, \sum_\nu p'_\nu = q'\right\}\right) \end{aligned}$$

und sehen, daß das genau die Definition für l ist, die im Satz vorkommt. Es bezeichne M_l die Menge $\{(p', \alpha)\in F'\times R: \alpha \leqq l(p')\}$. Da $M^k \subset M_l \subset M^{ka}$ gilt und jede der Mengen M^k und M^{ka} den Durchschnitt K definiert, definiert auch l die Menge K.

Aus der Art, wie l aus dem konvexen Kegel M^k abgeleitet wurde, können wir schließen, daß l eine konkave, vom 1. Grade positiv homogene Funktion ist. Die Funktion $h(p') := \overline{\lim\limits_{q' \to p'}}\, l(q')$ ist ebenfalls konkav und homogen, aber auch nach oben halbstetig, also Stützfunktion einer abgeschlossenen konvexen Menge. Nach Konstruktion ist $M_h = (M_l)^a = M^{ka}$. Mithin definiert h die Menge K und ist damit die Stützfunktion von K. ⌟

Die Berechnung der Funktion l ist etwas kompliziert. In speziellen Fällen vereinfacht sich die Darstellung wesentlich, wie wir jetzt zeigen werden.

(2.5) Satz. *Es seien K_1 und K_2 abgeschlossene konvexe Mengen mit den Stützfunktionen h_1 und h_2. Wenn der Durchschnitt $K := K_1 \cap K_2$ nicht leer ist, berechnet sich die Funktion l aus Satz* (2.4) *gemäß*

$$l(p') = \sup_{q' \in F'} \left(h_1(p' - q') + h_2(q')\right).$$

Beweis. Die Indexmenge $I = \{1, 2\}$ besteht hier nur aus zwei Elementen. Nach (2.4) hat man Summen $\sum\limits_{\nu=1}^{n} h_{i_\nu}(p'_\nu)$ zu bilden mit $i_\nu \in I$, $p'_\nu \in F'$ und $\sum\limits_\nu p'_\nu = p'$. Wir setzen $q' := \sum\limits_{i_\nu = 2} p'_\nu$. Da h_2 eine konkave und vom 1. Grade positiv homogene Funktion ist, gilt

$$h_2(q') = h_2\Big(\sum_{i_\nu=2} p'_\nu\Big) \geqq \sum_{i_\nu=2} h_2(p'_\nu)$$

und analog

$$h_1(p' - q') = h_1\Big(\sum_{i_\nu=1} p'_\nu\Big) \geqq \sum_{i_\nu=1} h_1(p'_\nu).$$

Deshalb ist:

$$\begin{aligned} &\sup\left(\left\{\sum h_{i_\nu}(p'_\nu) : i_\nu \in I, p'_\nu \in F' \text{ mit } \sum p'_\nu = p'\right\}\right) \\ &\quad = \sup_{q' \in F'} \left(h_1(p' - q') + h_2(q')\right). \end{aligned}$$ ⌟

Durch eine weitere Spezialisierung erhalten wir eine Formel für Randmengen.

(2.6) Satz. *Sei K eine nichtleere, abgeschlossene konvexe Menge mit Stützfunktion g, und p'_0 ein Punkt aus F'. Wenn die Randmenge $K(p'_0) := \{x \in K : p'_0\, x = g(p'_0)\}$ nicht leer ist, ergibt sich die Funktion l aus* (2.4) *gemäß*

$$l(p') = \lim_{\substack{\nu \to \infty \\ \nu = 1, 2, \ldots}} \left(g(p' + \nu\, p'_0) - \nu\, g(p'_0)\right).$$

Beweis. $K(p'_0)$ ist der Durchschnitt von K mit der Hyperebene

$$H := \{x \in F : p'_0\, x = g(p'_0)\}.$$

Die Stützfunktion von H ist gleich

$$k(p') := \begin{cases} \lambda\, g(p'_0) & \text{für } p' = \lambda\, p'_0 \quad \text{und} \\ -\infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir wenden (2.5) an und erhalten die Funktion l durch den Ausdruck $l(p') = \sup_{q' \in F'} (g(p'-q') + k(q'))$. Man braucht dieses Supremum nur über die q' mit endlichem $k(q')$ zu bilden. Das sind die Punkte $\lambda p'_0$ mit reellem λ. Mithin ist

$$\begin{aligned} l(p') &= \sup_{\lambda \in R} (g(p' + \lambda p'_0) + k(-\lambda p'_0)) \\ &= \sup_{\lambda \in R} (g(p' + \lambda p'_0) - \lambda g(p'_0)). \end{aligned}$$

Für $\lambda_1 > \lambda_2$ ist, da g konkav und vom 1. Grad positiv homogen ist:

$$\begin{aligned} & g(p' + \lambda_1 p'_0) - \lambda_1 g(p'_0) = g(p' + \lambda_2 p'_0 + (\lambda_1 - \lambda_2) p'_0) \\ & \quad - \lambda_1 g(p'_0) \geqq g(p' + \lambda_2 p'_0) + (\lambda_1 - \lambda_2) g(p'_0) - \lambda_1 g(p'_0) = g(p' + \lambda_2 p'_0) - \lambda_2 g(p'_0). \end{aligned}$$

Das Supremum wird also über eine monoton nicht fallende Funktion gebildet und kann deshalb durch den Grenzwert $\lim_{v \to \infty} (g(p' + v p'_0) - v g(p'_0))$ ersetzt werden. ┘

Die Bildung

$$\lim_{v \to \infty} (g(p' + v p'_0) - v g(p'_0)) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{g(t p' + p'_0) - g(p'_0)}{t}$$

heißt *Richtungsableitung* von g. Wir symbolisieren sie mit $g'(p'; p'_0)$.

In der Literatur wird mitunter behauptet, die Richtungsableitung oder gar die in Satz (2.4) definierte Funktion l seien die Stützfunktion der Durchschnittmenge K (z.B. bei Borges [2] oder bei Karlin [10]). Das ist aber nicht allgemein richtig, wie folgendes Beispiel zeigen soll.

Die Menge $E := \{(x, y, z) \in R^3 : z y \leqq -x^2, y \geqq 0, z \leqq 0\}$ ist ein abgeschlossener konvexer Kegel. Die Funktion

$$g(x, y, z) := \begin{cases} 0 & \text{für } (x, y, z) \in E, \\ -\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

ist eine nach oben halbstetige konkave vom 1. Grade positiv homogene Funktion, also Stützfunktion einer Menge $K \subset R^3$, und zwar, wie ohne Beweis angemerkt sei, des Kegels $K := \{(x, y, z) : 4 y z \leqq -x^2, y \geqq 0, z \leqq 0\}$. Die Randmenge $K(0, 0, -1)$ ist dann die Halbgerade $\{(x, y, z) : x = z = 0, y \geqq 0\}$. Als Richtungsableitung ergibt sich:

$$g'(x, y, z; 0, 0, -1) = \begin{cases} 0 & \text{für } y > 0 \\ 0 & \text{für } x = y = 0 \\ -\infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das ist keine nach oben halbstetige Funktion, also keine Stützfunktion. Die Stützfunktion der Randmenge $K(0, 0, -1)$ ist gleich

$$h(x, y, z) := \begin{cases} 0 & \text{für } y \geqq 0 \\ -\infty & \text{für } y < 0. \end{cases}$$

Eine andere Vereinfachung der Darstellung von l ergibt sich für absteigende Mengensysteme.

(2.7) Satz. *Wenn in* (2.4) *die Indexmenge geordnet ist, und zwar so, daß je zwei Elemente durch die Relation $\leqq$ vergleichbar sind, und wenn für $i_1 \leqq i_2$ stets $K_{i_1} \supset K_{i_2}$ gilt, dann ist $l(p') = \sup\limits_{i \in I} h_i(p')$.*

Beweis. Es ist nach der Formel aus (2.4) klar, daß $l(p') \geqq \sup\limits_{i \in I} h_i(p')$ sein muß. Um die umgekehrte Ungleichung zu zeigen, genügt es zu beweisen, daß jede endliche Summe, die in (2.4) unter dem Supremum vorkommt, durch ein $h_i(p')$ abgeschätzt werden kann. Wegen der vorausgesetzten Beziehung $K_{i_1} \supset K_{i_2}$ für $i_1 \leqq i_2$ ist $h_{i_0}(p') \geqq h_{i_\nu}(p')$ für alle $p' \in F'$ und $\nu = 1, \ldots, n$, wenn man $i_0 := \max(i_1, \ldots, i_n)$ wählt. Es ist also

$$\sum_{\nu=1}^{n} h_{i_\nu}(p'_\nu) \leqq \sum_{\nu=1}^{n} h_{i_0}(p'_\nu) \leqq h_{i_0}\left(\sum_{\nu=1}^{n} p'_\nu\right) = h_{i_0}(p'),$$

wobei die Konkavität und Homogenität von h_{i_0} verwendet wurde. ⌟

Damit wir diese Sätze in den folgenden maßtheoretischen Überlegungen anwenden können, müssen wir dafür sorgen, daß nur abzählbare Grenzprozesse auftreten. Der nächste Satz zeigt, daß man unter geeigneten Voraussetzungen in (2.4) den oberen Limes durch einen gewöhnlichen Grenzwert ersetzen kann.

(2.8) Hilfssatz. *Die konkave, vom* 1. *Grade positiv homogene Funktion k definiere eine nichtleere Menge K. Der konvexe Kegel L, auf welchem sie endliche Werte annimmt, enthalte wenigstens einen inneren Punkt p'_0. In allen inneren Punkten von L sei $k(p') = g(p')$, wobei g die Stützfunktion von K ist. Dann berechnet sich g in einem beliebigen Punkt p'_1 aus F' gemäß:*

$$g(p'_1) = \lim_{\substack{r=1,2,\ldots \\ r \to \infty}} k\left(\frac{1}{r} p'_0 + \left(1 - \frac{1}{r}\right) p'_1\right).$$

Beweis. Unter den angegebenen Voraussetzungen ist

$$M_g = \{(p', \alpha) \in F' \times R : \alpha \leqq k(p')\}^a$$

und $g(p') = \varlimsup\limits_{q' \to p'} k(q')$. Wenn p'_1 ein innerer Punkt von L ist, dann ist $k(\beta p'_0 + (1-\beta) p'_1)$ konkav und stetig als Funktion von β für $0 \leqq \beta \leqq 1$, und die behauptete Limesbeziehung ist richtig, da $k(p'_1) = g(p'_1)$ nach Voraussetzung gilt.

Zu jedem äußeren Punkt p'_1 von L gibt es noch eine ganze Umgebung U', in welcher k gleich $-\infty$ ist. Dann ist auch $g(p'_1) = -\infty$ und $k\left(\frac{1}{r} p'_0 + \left(1 - \frac{1}{r}\right) p'_1\right) = -\infty$ für fast alle r. Auch in diesem Fall ist also die behauptete Formel richtig.

Es sei jetzt p'_1 ein Randpunkt von L. Dann sind alle Punkte

$$p'_r := \frac{1}{r} p'_0 + \left(1 - \frac{1}{r}\right) p'_1$$

innere Punkte von L. Mithin gilt $k(p'_r)=g(p'_r)$ für alle r. Der Grenzwert der Folge $k(p'_r)$ existiert in R^-, weil $k(\beta p'_0+(1-\beta)p'_1)$ eine in $0<\beta<1$ konkave und stetige Funktion ist. Da g nach oben halbstetig ist, muß $g(p'_1)\geqq\lim g(p'_r)$ gelten. Wegen der Konkavität von g ist aber auch $g(p'_1)\leqq\lim g(p'_r)$. ⌟

Um diesen Satz auf die Durchschnittformeln anwenden zu können, brauchen wir folgenden bekannten Satz über die Stetigkeit konkaver Funktionen (vgl. Bourbaki [3], Chap. II, § 5, Prop. 2).

(2.9) Satz. *Es sei H' eine offene konvexe nichtleere Teilmenge von F' und f eine auf H' definierte endlichwertige konkave Funktion. Ist f in einer nichtleeren offenen Teilmenge U' von H' nach unten beschränkt, dann ist f stetig in ganz H'.*

(2.10) Hilfssatz. *Es sei $(K_i)_{i\in I}$ eine Familie nichtleerer abgeschlossener konvexer Mengen mit Stützfunktionen h_i. Es gebe einen Index $i_0\in I$ und einen Punkt $p'_0\in F'$, so daß $h_{i_0}(p'_0)>-\infty$ und h_{i_0} im Punkte p'_0 stetig ist. Wir bilden die Funktion l formal wie in (2.4). Wenn $l(p'_0)<\infty$ ist, dann ist $K:=\bigcap_{i\in I}K_i\neq\emptyset$. Es sei g die Stützfunktion von K. In allen inneren Punkten von $L:=\{p'\in F':l(p')>-\infty\}$ ist dann $l(p')=g(p')$ und für einen beliebigen Punkt $p'_1\in F'$ erhält man den Wert von g durch die Beziehung* $g(p'_1)=\lim\limits_{r\to\infty} l\left(\frac{1}{r}p'_0+\left(1-\frac{1}{r}\right)p'_1\right)$.

Beweis. Da h_{i_0} in p'_0 stetig ist, gibt es zu $\varepsilon>0$ eine offene Umgebung U' von p'_0, so daß $h_{i_0}(p')>h_{i_0}(p'_0)-\varepsilon$ ist für alle $p'\in U'$. Die Mengen $M:=\bigcup_{i\in I}M_{h_i}$ und M^k definieren den Durchschnitt K. Der Punkt $(p'_0, l(p'_0))$ ist Randpunkt von M^k, wenn $l(p'_0)<\infty$ ist. $M_{h_{i_0}}$ umfaßt die offene Menge $U'\times(-\infty, h_{i_0}(p'_0)-\varepsilon)$. Da $M_{h_{i_0}}$ Teilmenge von M^k ist, enthält M^k innere Punkte. Es gibt also eine Tangentialhyperebene an M^k durch den Punkt $(p'_0, l(p'_0))$, d.h. ein $(x_0,\alpha_0)\in F\times R$, welches der Bedingung $p'_0x_0+\alpha_0 l(p'_0)=\inf\limits_{(p',\beta)\in M^k}(p'x_0+\beta\alpha_0)$ genügt. Auf der Tangentialhyperebene liegen sicher keine inneren Punkte von M^k. Mit $\beta<h_{i_0}(p'_0)-\varepsilon$ gilt also $p'_0x_0+\alpha_0 l(p'_0)<p'_0x_0+\beta\alpha_0$, woraus wegen $\beta<l(p'_0)$ folgt, daß $\alpha_0<0$ ist. Wie früher schließen wir aus der Kegeleigenschaft von M^k, daß $\inf\limits_{(p',\beta)\in M^k}(p'x_0+\beta\alpha_0)=0$ ist. Wir haben also $p'x_0+\beta\alpha_0\geqq 0$ für alle $(p',\beta)\in M^k$, mithin

$$p'\left(-\frac{1}{\alpha_0}x_0\right)-\beta\geqq 0.$$

Daraus folgt, daß $-\frac{1}{\alpha_0}x_0$ in K liegt, da K durch M^k definiert wird. Mithin ist K nicht leer.

Wegen $l(p')\leqq p'\left(-\frac{1}{\alpha_0}x_0\right)$ ist $l(p')$ überall kleiner als $+\infty$. Da andererseits $l(p')\geqq h_i(p')$ gilt für alle $p'\in F'$ und $i\in I$, und h_{i_0} in U' nach unten beschränkt ist, ist auch l nach unten beschränkt und deshalb stetig in p'_0. Da l eine konkave Funktion ist, ist l stetig in allen inneren Punkten von $L:=\{p'\in F':l(p')>-\infty\}$. In diesen Punkten ist $g(p')=\overline{\lim\limits_{q'\to p'}}\,l(q')=l(p')$. Wir können Hilfssatz (2.8) anwenden und erhalten den Rest der Behauptung. ⌟

§ 3. Randmengen und Ecken

Es sei $A := (a'_i)_{i \in I}$ eine Familie von Elementen aus F', dem Dualraum eines separierten lokalkonvexen Raumes F. Die Indexmenge I sei wohlgeordnet durch eine Relation $\leqq$. Wenn $i = j$ ausgeschlossen sein soll, schreiben wir $i < j$. Damit kann man auf F wie folgt eine Präordnung erklären.

Für zwei Punkte $x, y \in F$ wird $x \overset{A}{\leq} y$ gesetzt, wenn entweder $a'_i x = a'_i y$ für alle $i \in I$ gilt oder $a'_i x < a'_i y$ für den kleinsten Index i, für den $a'_i x \neq a'_i y$ ist.

Die Relation $\overset{A}{\leq}$ ist reflexiv und transitiv. Antisymmetrisch ist sie nur dann, wenn das Gleichungssystem $a'_i x = 0$, $i \in I$, in F nur die Lösung $x = 0$ besitzt. Wenn für eine Familie $A = (a'_i)_{i \in I}$ die Gleichungen $a'_i x = 0$ für alle $i \in I$ nur mit $x = 0$ erfüllt sind, dann heißt die Familie A total in F', oder kurz: total.

Sei K eine abgeschlossene konvexe Teilmenge von F. Die Menge $K_A := \{x \in K : x \overset{A}{\leq} y \textit{ für alle } y \in K\}$ nennen wir die *A-Randmenge* von K. Wenn nicht alle a'_i gleich 0 sind, gehört K_A zum topologischen Rand von K. Eine Teilmenge von K, die A-Randmenge von K ist mit einer geeigneten Familie A, heißt auch kurz eine *Randmenge* von K. Die Punkte einer A-Randmenge nennen wir *A-minimal*. Wenn eine Randmenge K_A nur aus einem Punkt besteht, dann nennt man diesen Punkt x_A eine *Ecke* von K, oder wenn man die zugehörige Familie A spezifizieren will, die *A-Ecke* von K. Unter den Randmengen und Ecken einer beliebigen Menge $M \subset F$ verstehen wir die Randmengen und Ecken von M^{ka}.

Eine Teilmenge M von F, die sämtliche Ecken ihrer abgeschlossenen konvexen Hülle enthält, heißt *eckenabgeschlossen.* Eine abgeschlossene konvexe Menge braucht keine Ecken zu besitzen. Der gesamte Raum F ist hierfür ein Beispiel.

Die Ecken x_A von K sind Extremalpunkte von K. Ist nämlich $x_A = \vartheta x + (1 - \vartheta) y$ mit $0 < \vartheta < 1$ und $x, y \in K$, dann kann man im Falle $x \neq y$ ohne Einschränkung annehmen $x \overset{A}{\leq} y$. Daraus folgt aber $x \overset{A}{\leq} x_A$ und $x \neq x_A$. Die A-Randmenge K_A von K enthielte also außer x_A noch einen weiteren Punkt, nämlich x. Damit wäre aber x_A keine Ecke von K. Es folgt also $x = y = x_A$. Mithin ist x_A ein Extremalpunkt von K.

Dagegen braucht nicht jeder Extremalpunkt eine Ecke zu sein. Es gibt nämlich Beispiele für kompakte konvexe Mengen in separierten lokalkonvexen Räumen, die Extremalpunkte besitzen, durch welche keine Stützhyperebene geht. Solche Extremalpunkte können dann nicht als A-Ecken mit einer passenden Familie A dargestellt werden. Für Teilmengen des R^n sind die Begriffe Ecke und Extremalpunkt aber gleichbedeutend.

Die Berechnung der Randmengen und ihrer Stützfunktionen kann durch transfinite Induktion geschehen, wie wir in den nächsten beiden Sätzen zeigen werden. Da für $I = \emptyset$ die Randmenge einer abgeschlossenen konvexen Menge K stets wieder gleich K ist, wollen wir diesen trivialen Fall ausschließen und für das Folgende voraussetzen, daß I nicht leer sei. Dann besitzt I ein kleinstes Element i_0.

Für $i \in I$ setzen wir $A_i := (a'_j)_{j \in I, j \leqq i}$. Weiter sei K_i die A_i-Randmenge von K und $M_i := K \cap \bigcap_{j < i} K_j$. Dabei haben wir die rechte Seite mit K zum Schnitt gebracht, damit die Definition von M_i auch für das kleinste Element von I sinnvoll ist.

Wenn die Mengen K_i und M_i nicht leer sind, haben sie Stützfunktionen, die wir mit g_i bzw. m_i bezeichnen. Die Stützfunktion der abgeschlossenen konvexen Menge K sei g.

(3.1) Hilfssatz. *Es ist* $K_i=\{x\in M_i: a_i' x=m_i(a_i')\}$ *und* $K_A=\bigcap_{i\in I} K_i$.

Beweis. Die Darstellung von K_i ist klar für den kleinsten Index i_0 von I. Sei sie nun für alle $j<i$ bewiesen. Ein A_i-minimaler Punkt von K muß auch A_j-minimal sein für alle $j<i$, d.h. er muß in K_j liegen für alle $j<i$ und deshalb in M_i. Wenn x in M_i liegt und y beliebig in K, dann ist für den kleinsten Index j mit $a_j' x \neq a_j' y$ nach Induktionsvoraussetzung $a_j' x<a_j' y$, wenn $j<i$ gilt. Ist aber $j=i$, dann gilt $a_l' x=a_l' y$ für alle $l<i$ und deshalb liegt y in M_i. In diesem Falle ist $x \overset{A}{<} y$ genau dann, wenn $a_i' x \leqq a_i' y$ ist. Da das aber für alle $y\in M_i$ gelten muß, besteht die Gleichung $a_i' x=\inf_{y\in M_i} a_i' y=m_i(a_i')$. Die behauptete Darstellung von K_i gilt also auch für i. Transfinite Induktion zeigt die allgemeine Richtigkeit.

Den zweiten Teil der Behauptung erhält man sofort, wenn man beachtet, daß $x \overset{A}{<} y$ genau dann für alle $y\in K$ gilt, wenn für alle $y\in K$ und $i\in I$ die Relation $x \overset{A_i}{<} y$ besteht, also x in $\bigcap_{i\in I} K_i$ liegt. ⌟

Daraus ergibt sich mit Hilfe der Sätze, die wir in §2 über die Stützfunktion von Durchschnitten hergeleitet haben, für die Stützfunktionen g_i von K_i und g_A von K_A der folgende Satz.

(3.2) Satz. *Es sei K eine abgeschlossene konvexe Menge. Die A-Randmenge K_A sei nicht leer. Dann ist*

$$g_i(p')=\varlimsup_{u'\to p'}\Big(\lim_{v\to\infty}\big(\varlimsup_{q'\to u'}(\sup_{j<i} g_j(q'+v\,a_i'))-v\varlimsup_{q'\to a_i'}(\sup_{j<i} g_j(q'))\big)\Big)$$

und

$$g_A(p')=\varlimsup_{q'\to p'}\big(\sup_{i\in I} g_i(q')\big).$$

Wenn $g(p')$ in einem Punkte p_0' mit $g(p_0')>-\infty$ stetig ist, ergeben sich folgende Formeln:

$$g_i(p')=\lim_{r\to\infty}\left(\lim_{v\to\infty}\left(\lim_{w\to\infty}\left(\sup_{j<i} g_j\left(\frac{1}{w}p_0'+\left(1-\frac{1}{w}\right)\left(\frac{1}{r}p_0'+\left(1-\frac{1}{r}\right)p'+v\,a_i'\right)\right)\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-v\sup_{j<i} g_j\left(\frac{1}{w}p_0'+\left(1-\frac{1}{w}\right)a_i'\right)\right)\right)\right)$$

und

$$g_A(p')=\lim_{r\to\infty}\left(\sup_{i\in I} g_i\left(\frac{1}{r}p_0'+\left(1-\frac{1}{r}\right)p'\right)\right).$$

Dabei ist $\sup_{j<i_0} g_j(p'):=g(p')$ *zu setzen.*

Beweis. Der erste Formelsatz ergibt sich einfach aus (3.1), wenn man für die Durchschnitte die Stützfunktionen gemäß (2.4) berechnet. Dabei ist die Funktion l einmal nach (2.7) und einmal nach (2.6) zu berechnen. Den zweiten Formelsatz erhält man aus dem ersten, indem man die oberen Limites gemäß (2.10) durch gewöhnliche Grenzwerte ersetzt. ⌟

Wir brauchen einen Satz, der eine hinreichende Bedingung dafür angibt, daß die Randmenge nicht leer ist.

(3.3) Satz. *Es sei i_0 das kleinste Element von I, der Indexmenge der Familie $A=(a'_i)_{i\in I}$. Die Stützfunktion g der abgeschlossenen konvexen Menge K sei im Punkte a'_{i_0} endlichwertig und stetig. Dann ist die A-Randmenge von K nicht leer.*

Beweis. a) Die Richtungsableitung $g'(p'; a'_{i_0})$ nimmt für $p'=a'_{i_0}$ den Wert $g(a'_{i_0})<\infty$ an. Nach (2.10) folgt, daß die a'_{i_0}-Randmenge von K, die durch diese Richtungsableitung definiert wird, nicht leer ist und eine im Punkte a'_{i_0} stetige Stützfunktion hat. Für jedes feste $p'\in F'$ ist $g(\lambda p'+a'_{i_0})$ eine in einer Umgebung von 0 stetige konkave Funktion der reellen Variablen λ. Mithin existiert die rechtsseitige Ableitung $\lim\limits_{\lambda\downarrow 0}(g(\lambda p'+a'_{i_0})-g(a'_{i_0}))/\lambda$. Das ist aber gerade die Richtungsableitung $g'(p'; a'_{i_0})$. Diese Richtungsableitung ist also für jedes $p'\in F'$ endlichwertig und stetig, da sie an der Stelle a'_{i_0} stetig ist. Sie stimmt also überein mit der Stützfunktion der a'_{i_0}-Randmenge von K.

b) Es sei jetzt bereits gezeigt, daß mit $A_j := (a'_k)_{k\leq j}$ die A_j-Randmengen von K, die wir K_j nennen, nicht leer sind für alle $j<i$. Der Durchschnitt $\bigcap\limits_{j<i} K_j$ wird definiert durch die Funktion $\sup\limits_{j<i} g_j(p')$, wobei g_j die Stützfunktion von K_j ist. Dieses Supremum nimmt für $p'=0$ den Wert 0 an. Da in 0 die Funktion g_{i_0} stetig ist, ist nach (2.10) der Durchschnitt nicht leer. Seine Stützfunktion ist auf ganz F' stetig. Durch Wiederholung des Schlusses, den wir in a) durchgeführt haben, ergibt sich, daß die a'_i-Randmenge von $\bigcap\limits_{j<i} K_j$ nicht leer ist. Das ist aber gerade K_i.

Schließlich folgt wie oben, daß $K_A=\bigcap\limits_{i\in I} K_i$ nicht leer ist. ⌟

Für die späteren maßtheoretischen Anwendungen ist der zweite Formelsatz von (3.2) deshalb bequem, weil er nur abzählbare Grenzprozesse enthält mit Ausnahme des Supremums, das über möglicherweise überabzählbar viele i zu bilden ist. Die nächsten Überlegungen zeigen, daß unter gewissen Separabilitätsvoraussetzungen I stets abzählbar gewählt werden kann.

Ein topologischer Raum heißt ein $(A2)$-*Raum*, wenn er eine abzählbare Basis seiner Topologie besitzt. Ein topologischer Raum X heißt *separabel*, wenn eine abzählbare Teilmenge von X existiert, die in X dicht liegt. Die linearen Teilräume eines separablen Raumes brauchen nicht wieder separabel zu sein. Gerade die Räume, deren sämtliche Teilräume separabel sind, spielen im folgenden eine wichtige Rolle. Es sind, wie wir gleich zeigen werden, die Räume, die dem Axiom (AW) in der folgenden Definition genügen.

(3.4) Definition. Ein lokalkonvexer Raum heiße ein (AW)-Raum, wenn er das Axiom (AW) erfüllt:

(AW) Für jede Familie $(L_i)_{i\in I}$ von abgeschlossenen linearen Teilräumen von F, deren Indexmenge I wohlgeordnet ist, und die für $i<j$ stets $L_i\subset L_j$, $L_i\neq L_j$ erfüllt, ist I abzählbar.

Das Axiom (AW) verlangt die Abzählbarkeit gewisser Wohlordnungen. Wir werden jetzt zeigen, wie sich die (AW)-Räume durch den Begriff „separabel" beschreiben lassen.

(3.5) Satz. *Ein lokalkonvexer Raum F ist genau dann ein* (AW)-*Raum, wenn sämtliche Teilräume von F separabel sind.*

Beweis. Sei zunächst F ein (AW)-Raum und F_1 ein Teilraum von F. Dann ist, wie leicht aus der Definition (3.4) zu sehen ist, F_1 mit der induzierten Topologie ein (AW)-Raum.

Wir versehen F_1 mit einer Wohlordnung $\leqq$. Unter L_x verstehen wir den kleinsten (relativ zu F_1) abgeschlossenen linearen Teilraum von F_1, der alle y mit $y<x$ enthält. Wir setzen $Q:=\{x\in F_1 : x\notin L_x\}$. Die Familie $(L_x)_{x\in Q}$ erfüllt dann die Voraussetzung, daß $L_x\subset L_y$, $L_x\neq L_y$ ist für $x<y$. Da F_1 ein (AW)-Raum ist, muß Q abzählbar sein.

Die Separabilität von F_1 ist gezeigt, wenn wir nachweisen können, daß der lineare Teilraum F_2 von F_1, der die abzählbare Hamelbasis Q besitzt, dicht in F_1 liegt. Wäre aber $(F_2)^a\neq F_1$, dann gäbe es ein kleinstes $y\in F_1$ mit $y\notin(F_2)^a$. Dann wäre aber $y\notin L_y$, also $y\in Q$ und damit $y\in F_2$ im Widerspruch zur Annahme $y\notin(F_2)^a$.

Sei jetzt jeder Teilraum von F separabel und $(L_i)_{i\in I}$ eine Familie von abgeschlossenen linearen Teilräumen von F, so daß für $i<j$ stets $L_i\subset L_j$, $L_i\neq L_j$ gilt. Wir nehmen an, I sei nicht abzählbar. Dann gibt es eine Teilmenge I_0 von I, die mit keiner abzählbaren Teilmenge von I konfinal ist. I_0 enthält dann insbesondere kein letztes Element. Mit i^+ bezeichnen wir den Nachfolger von i in I_0.

Es gibt für jedes $i\in I_0$ ein $x_i\in(L_{i^+}\setminus L_i)$[2]. Sei $Q:=\{x_i : i\in I_0\}$ und F_3 der Teilraum von F, der die Hamelbasis Q hat. F_3 ist nach Voraussetzung separabel, enthält also eine abzählbare dichte Punktmenge Y. Nach Definition der Hamelbasis läßt sich jedes $y\in Y$ als Linearkombination endlich vieler $x_i\in Q$ darstellen. Es sei Q_1 die Menge aller x_i, die in der Darstellung wenigstens eines $y\in Y$ mit nichtverschwindendem Koeffizienten vorkommen und F_4 der Teilraum von F mit der Hamelbasis Q_1. Die Menge Q_1 ist eine abzählbare Vereinigung endlicher Mengen, also abzählbar. Damit ist auch $I_1:=\{i\in I_0 : x_i\in Q_1\}$ abzählbar, kann also nicht mit I_0 konfinal sein. Es gibt folglich ein $i_1\in I_0$ mit $i_1>i$ für alle $i\in I_1$. Nach Konstruktion gelten jetzt die beiden Beziehungen $x_{i_1}\in F_3\subset(Y)^a\subset(F_4)^a\subset L_{i_1}$ und $x_{i_1}\notin L_{i_1}$, die nicht verträglich sind. Die Annahme, I sei überabzählbar, führt also zu einem Widerspruch. ┘

Aus diesem Satz sehen wir unmittelbar, daß jeder lokalkonvexe (A2)-Raum ein (AW)-Raum ist und jeder (AW)-Raum ein separabler Raum. Die Umkehrungen hiervon gelten nicht.

Wir kommen nun zur angekündigten Reduktion der Familien A.

(3.6) Hilfssatz. *F' sei ein* (AW)-*Raum, $A=(a_i')_{i\in I}$ eine Familie von Elementen aus F'. Die Indexmenge I sei wohlgeordnet. Dann gibt es eine abzählbare Teilmenge J von I (die mit der von I induzierten Ordnung wieder wohlgeordnet ist), so daß die Familie $(a_i')_{i\in J}$ auf F dieselbe Präordnung erzeugt wie A.*

Beweis. Wir nennen L_i den von $\{a_j' : j<i\}$ aufgespannten abgeschlossenen linearen Teilraum von F' und setzen $J:=\{i\in I : a_i'\notin L_i\}$. Für die Familie $(L_i)_{i\in J}$ gilt nach Konstruktion $L_i\subset L_j$, $L_i\neq L_j$ für $i<j$. Da F' ein (AW)-Raum ist, muß J eine abzählbare Menge sein.

[2] Mit $A\setminus B$ bezeichnen wir die Differenzmenge $\{x\in A:\ x\notin B\}$.

Wir zeigen jetzt, daß die Familie $B := (a_i')_{i \in J}$ zu derselben Präordnung auf F führt wie A.

Es sei zunächst $x_1 \overset{A}{<} x_2$. Der kleinste Index in I mit $a_i' x_1 \neq a_i' x_2$ sei i_1. (Wenn $a_i' x_1 = a_i' x_2$ für alle $i \in I$ gilt, dann ist $a_i' x_1 = a_i' x_2$ für alle $i \in J$ und damit $x_1 \overset{B}{<} x_2$ trivialerweise richtig.) Für alle $j < i_1$ gilt $a_j' x_1 = a_j' x_2$. Die Gleichung $a' x_1 = a' x_2$ gilt für alle a' aus dem abgeschlossenen linearen Teilraum $M' := \{a' \in F' : a' x_1 = a' x_2\}$ von F'. Wegen $L_{i_1} \subset M'$ kann also a_{i_1}' nicht in L_{i_1} liegen. Also ist $i_1 \in J$. Dann ist aber i_1 das kleinste Element i von J mit $a_i' x_1 \neq a_i' x_2$. Da aber $a_{i_1}' x_1 < a_{i_1}' x_2$ gilt, ist $x_1 \overset{B}{<} x_2$.

Es sei jetzt $x_1 \overset{B}{<} x_2$ vorausgesetzt. Wäre nun nicht $x_1 \overset{A}{<} x_2$, dann gäbe es einen kleinsten Index $i_2 \in I$ mit $a_{i_2}' x_1 \neq a_{i_2}' x_2$ und für diesen würde die Ungleichung $a_{i_2}' x_1 > a_{i_2}' x_2$ gelten. Dieses i_2 läge nach dem letzten Beweisteil auch in J und wäre dort das kleinste i mit $a_i' x_1 \neq a_i' x_2$. Wegen $a_{i_2}' x_1 > a_{i_2}' x_2$ würde dann aber nicht $x_1 \overset{B}{<} x_2$ gelten. Es ergibt sich ein Widerspruch. Also muß $x_1 \overset{A}{<} x_2$ sein. ┘

§ 4. Die Ecken des Wertebereiches von Vektorintegralen

Hauptziel dieses Teiles der Arbeit ist die Verallgemeinerung eines Satzes von Borges [2] über die Ecken des Wertebereiches von Vektorintegralen. Wir benötigen dazu folgende Begriffe und Voraussetzungen:

Wie früher sei F ein separierter lokalkonvexer Raum. Der Dualraum F' von F sei mit einer bezüglich des Dualsystems $\langle F, F' \rangle$ zulässigen Topologie versehen. Mit F'^* wird der zu F' algebraisch duale Raum bezeichnet, das ist die Menge aller linearen Funktionen auf F' ohne Rücksicht auf Stetigkeit. Den Wert, den die lineare Funktion $r \in F'^*$ auf dem Punkt $p' \in F'$ annimmt, bezeichnen wir mit $p' r$.

Die Topologie auf F' braucht nicht zulässig zu sein bezüglich des Dualsystems $\langle F', F'^* \rangle$. Man kann aber die Ausgangstopologie $\mathfrak{T}_1$ auf F' verfeinern zu einer Topologie $\mathfrak{T}_2$ auf F', die zulässig ist bezüglich $\langle F', F'^* \rangle$. Wir werden diese Topologie $\mathfrak{T}_2$ nicht explizit brauchen. Sie kommt aber implizit immer dann mit vor, wenn die Stützfunktionstheorie des § 2 auf Teilmengen von F'^* angewandt wird.

Weiter sei ein Maßraum $(T, \mathfrak{K}, m)$ gegeben, das ist ein Tripel bestehend aus einer Menge T, einem σ-Körper $\mathfrak{K}$ von Teilmengen aus T und einem Maße m auf $\mathfrak{K}$. Wir setzen voraus, das Maß m sei σ-finit und positiv.

Eine Funktion $f\colon T \to F$ heißt (*schwach*) *integrierbar*, wenn für jedes $p' \in F'$ die reellwertige Funktion $p' f(t)$ integrierbar ist. Dieser Integrabilitätsbegriff ist ausführlich diskutiert bei Bourbaki ([4], Chap. VI, § 1). Wenn f integrierbar ist, dann definiert die Zuordnung $p' \to \int p' f(t)\, dm$ eindeutig ein lineares Funktional r auf F', das aufgefaßt werden kann als Element aus F'^*. Man schreibt für dieses r dann $\int f\, dm$ und nennt es das (*schwache*) *Integral* von f. Das Integral $\int f\, dm$ ist also ein Element von F'^* und wird definiert durch die Beziehung $p' \int f\, dm = \int p' f\, dm$ für alle $p' \in F'$. Wie man an einfachen Beispielen sieht, braucht $\int f\, dm$ nicht in F zu liegen.

Für Banachräume wird gewöhnlich ein anderer Integralbegriff verwendet (s. etwa bei Dunford-Schwartz, [7], III.2). Das zugehörige Integral kann man zur Unterscheidung das „starke“ nennen. Eine stark integrierbare Funktion ist auch schwach integrierbar, und die Integralwerte stimmen überein. Dagegen braucht eine schwach integrierbare Funktion mit Werten aus einem Banachraum nicht auch stark integrierbar zu sein. Im endlichdimensionalen Raum sind aber starke und schwache Integrierbarkeit gleichbedeutend, und beide stimmen überein mit komponentenweiser Integrierbarkeit. Wir werden im folgenden nur schwache Integrale betrachten und lassen deshalb den Zusatz „schwach" weg.

Eine Abbildung S: $T \to \mathfrak{P}(F)$, die also jedem $t \in T$ eine Teilmenge $S(t)$ von F zuordnet, heißt eine *mengenwertige Funktion*. Eine Funktion f mit Werten aus F nennen wir eine *S-Funktion*, wenn sie für jedes $t \in T$ der Bedingung $f(t) \in S(t)$ genügt. Die Menge $\{\int f\,dm$: f integrierbare S-Funktion$\}$ heißt das Integral von S und wird mit $\int S\,dm$ bezeichnet. Mit der Untersuchung von Mengen der Gestalt $\int S\,dm$ werden wir uns im weiteren Verlauf dieser Arbeit beschäftigen. Da sich die Integrationsvariable t und das Maß m häufig von selbst verstehen, schreiben wir für die Integrale auch kürzer $\int f$ und $\int S$.

Um lästige Fallunterscheidungen zu vermeiden, führen wir Begriffe ein, die das Konzept der Meßbarkeit und Integrierbarkeit in einem für unsere Zwecke geeigneten Sinne verallgemeinern. Eine Funktion g: $T \to R^- := R \cup \{-\infty\}$ heiße *m-meßbar* (oder kurz: *meßbar*), wenn die Menge $M := \{t \in T: g(t) > -\infty\}$ und die Funktion g eingeschränkt auf M beide m-meßbar sind im üblichen Sinne. Eine m-meßbare Funktion g: $T \to R^-$ heiße *halbintegrierbar* bezüglich m, wenn der *positive Teil*

$$g^+(t) := \begin{cases} g(t) & \text{für } g(t) \geqq 0 \\ 0 & \text{für } g(t) < 0 \end{cases}$$

von g m-integrierbar im üblichen Sinne ist. Einer halbintegrierbaren Funktion g, die nicht integrierbar ist, wird der Integralwert $\int g\,dm = -\infty$ zugeschrieben.

Das folgende Kriterium ist unmittelbar klar: Eine m-meßbare Funktion g ist genau dann halbintegrierbar, wenn es eine integrierbare Funktion h gibt mit $g(t) \leqq h(t)$ für alle $t \in T$.

Wir werden stets vorauszusetzen haben, daß F' ein (AW)-Raum (s. Definition (3.4)) oder ein separabler Raum ist. Das bezieht sich auf die Topologie $\mathfrak{T}_1$. Bezüglich der Topologie $\mathfrak{T}_2$ braucht F' weder das Axiom (AW) zu erfüllen noch separabel zu sein.

Eine in F' dichte Folge P' ist total. Wären nämlich mit einem $x_0 \neq 0$ die Gleichungen $p' x_0 = 0$ für alle $p' \in P'$ erfüllt, dann wäre $p' x_0 = 0$ für alle $p' \in F'$ im Widerspruch dazu, daß $\langle F', F \rangle$ ein Dualsystem ist.

Wir streben eine Aussage über die Randmengen von $\int S\,dm$ an. Dazu ist es zunächst einmal notwendig, Kenntnis über die Stützfunktion von $\int S\,dm$ zu erlangen. Deswegen ist der folgende Satz für uns von fundamentaler Bedeutung.

(4.1) Satz. *F' sei separabel. Die mengenwertige Funktion S genüge den Voraussetzungen:*

a) *Für jedes $t \in T$ ist $S(t)$ eine nichtleere abgeschlossene konvexe Menge.*

b) *Die Stützfunktion $g(p', t) := \inf_{x \in S(t)} p' x$ ist für jedes feste $t \in T$ in mindestens einem Punkte $p'_0(t)$, der von t abhängen darf, endlichwertig und stetig.*

c) *Für jedes feste $p' \in F'$ ist $g(p', t)$ als Funktion von t m-meßbar.*

d) *Es gibt eine nichtleere offene Menge $U' \subset F'$, so daß $g(p', t)$ für jedes $p' \in U'$ eine integrierbare Funktion ist.*

Dann ist $\int S\,dm$ nicht leer. Für jedes p' ist $g(p',t)$ halbintegrierbar und $\int g(p',t)\,dm$ ist gleich dem Wert $h(p')$ der Stützfunktion von $\int S\,dm$.

Beweis. 1) Wir zeigen zunächst die Existenz einer Nullmenge N_0, so daß $g(p',t)$ bei $t\in T\setminus N_0$ für alle $p'\in U'$ endlich und stetig ist.

Sei P' eine in U' dichte abzählbare Menge. Für jedes feste $p'\in P'$ ist $g(p',t)$ integrierbar und deshalb endlichwertig für alle t mit Ausnahme einer von p' abhängigen Nullmenge $N(p')$. Wenn t nicht in $N_0 := \bigcup_{p'\in P'} N(p')$ liegt, ist $g(p',t)$ für alle $p'\in P'$ endlich. Die Menge $E'(t) := \{p'\in F' : g(p',t) > -\infty\}$ enthält nach Voraussetzung b) den Punkt $p_0'(t)$, und dieser ist wegen der Stetigkeit von g innerer Punkt von $E'(t)$. Da $g(p',t)$ eine konkave Funktion ist, ist $E'(t)$ eine konvexe Menge.

Konvexe Mengen mit inneren Punkten enthalten bereits alle inneren Punkte ihrer abgeschlossenen Hülle. Für $t\notin N_0$ ist $U'\subset(P')^a\subset(E'(t))^a$, also $U'\subset E'(t)$. Da g in einem inneren Punkt von $E'(t)$ stetig ist, ist g im ganzen offenen Kern von $E'(t)$ stetig (nach (2.9)), insbesondere also bei $t\notin N_0$ in ganz U'.

2) Es sei nun $p_2', p_3', \ldots$ eine in F' dichte Folge, p_1' ein Punkt aus U' und P die Familie $(p_i')_{i=1,2,\ldots}$. Da $g(p',t)$ in p_1' endlichwertig und stetig ist bei $t\notin N_0$, ist die P-Randmenge von $S(t)$ für alle t, die nicht in N_0 liegen, nicht leer nach (3.3). Sie besteht aus genau einem Punkt $s_0(t)$. Die Stützfunktion, die gleich $p'\,s_0(t)$ ist, erhält man aus $g(p',t)$ durch abzählbare Grenzoperationen (gemäß (3.2), zweiter Formelsatz). Mithin ist $p'\,s_0(t)$ für jedes $p'\in F'$ eine meßbare Funktion. Das gilt zunächst nur auf $T\setminus N_0$. Auf der Nullmenge N_0 können wir aber $s_0(t)$ beliebig aus $S(t)$ wählen, ohne daß die Meßbarkeit von s_0 dadurch beeinträchtigt wird.

Es gibt eine konvexe Umgebung V' von p_1', die noch ganz in U' liegt. Für $p'\in V'$ können wir die Funktion $f(p') := \int g(p',t)\,dm$ erklären nach Voraussetzung d). Das ist eine in V' endliche und konkave Funktion, da g eine Stützfunktion ist. Für festes p' ist $f(\lambda p' + p_1')$ eine in einer Umgebung von 0 definierte endlichwertige konkave Funktion der reellen Variablen λ. Mithin existiert die rechtsseitige Ableitung $\lim_{\lambda\downarrow 0}\left(f(\lambda p' + p_1') - f(p_1')\right)/\lambda$ und ist endlich.

Bei $t\notin N_0$ ist $g(p',t)$ für alle $p'\in V'$ endlichwertig und stetig. Derselbe Schluß, den wir eben für f durchführten, zeigt, daß die Ableitungen

$$k(p',t) := \lim_{\lambda\downarrow 0}\left(g(\lambda p' + p_1', t) - g(p_1', t)\right)/\lambda$$

als endliche Werte existieren. Bei festem p' ist die Folge $g(p' + l p_1', t) - l\, g(p_1', t)$ monoton nichtfallend und der Grenzwert

$$\lim_{l\to\infty}\int\left(g(p' + l p_1', t) - l\, g(p_1', t)\right)dm = \lim_{\lambda\downarrow 0}\left(f(\lambda p' + p_1') - f(p_1')\right)/\lambda$$

existiert. Mithin ist nach dem Satz von Lebesgue die Grenzfunktion $k(p',t)$ integrierbar für jedes $p'\in F'$. Da $s_0(t)$ nach Konstruktion in der p_1'-Randmenge von $S(t)$ liegt, die durch $k(p',t)$ definiert wird, ist $k(p',t) \leqq p'\,s_0(t) \leqq -k(-p',t)$ für alle $p'\in F'$ und $t\in T\setminus N_0$. Da k integrierbar ist für jedes p', ist $p'\,s_0(t)$ integrierbar und damit s_0.

Es gilt $p_1' s_0(t) = g(p_1', t)$ für $t \notin N_0$, also

$$h(p_1') := \inf_{y \in \int S} p_1' y \leqq p_1' \int s_0 \, dm = \int p_1' s_0 \, dm = \int g(p_1', t) \, dm.$$

3) Es gilt für alle $p' \in F'$ die Ungleichung $g(p', t) \leqq p' s_0(t)$ mit integrierbarem s_0. Daraus folgt, daß $g(p', t)$ für alle p' eine halbintegrierbare Funktion ist. Die Funktion $f(p') := \int g(p', t) \, dm$ ist somit für alle p' erklärbar und, wie man unmittelbar sieht, konkav. Folglich ist die Menge $C' := \{p' \in F' : \int g(p', t) \, dm > -\infty\}$ konvex. Sie enthält innere Punkte wegen $U' \subset C'$. Man kann ohne Einschränkung annehmen, U' sei der offene Kern von C'. Beweisteil (2) liefert $h(p') \leqq \int g(p', t) \, dm$ für alle $p' \in U'$, da dort der Punkt p_1' beliebig aus U' wählbar war. Für jede integrierbare S-Funktion s gilt aber $p' s(t) \geqq g(p', t)$ für alle p' und t, woraus durch Integration folgt $p' \int s \, dm \geqq \int g(p', t) \, dm$. Die Ungleichung $h(p') \geqq \int g(p', t) \, dm$ gilt also allgemein. Für die inneren Punkte von C' gilt mithin die Gleichheit.

4) Sei p_2' ein Randpunkt von C' und p_1' aus U'. Es ist dann

$$h(p_2') = \lim_{\lambda \downarrow 0} h\big(\lambda p_1' + (1-\lambda) p_2'\big) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \int g\big(\lambda p_1' + (1-\lambda) p_2', t\big) \, dm.$$

Wie wir in Beweisteil (2) gesehen haben, existiert eine integrierbare S-Funktion s_0. Damit gilt $g(p', t) \leqq p' s_0(t)$ für alle p' und

$$g\big(\lambda p_1' + (1-\lambda) p_2', t\big) \leqq \big(\lambda p_1' + (1-\lambda) p_2'\big) s_0(t) \leqq \max\big(p_1' s_0(t), p_2' s_0(t)\big)$$

für $0 \leqq \lambda \leqq 1$. Diese Majorante ist integrierbar. Nach dem Satz von Fatou ist folglich

$$\begin{aligned} \int g(p_2', t) \, dm &= \int \lim_{r \to \infty} g\left(\frac{1}{r} p_1' + \left(1 - \frac{1}{r}\right) p_2', t\right) dm \\ &\geqq \lim_{r \to \infty} h\left(\frac{1}{r} p_1' + \left(1 - \frac{1}{r}\right) p_2'\right) = h(p_2'). \end{aligned}$$

Das gibt zusammen mit der allgemeingültigen Relation $h(p_2') \geqq \int g(p_2', t) \, dm$ die Gleichheit für Randpunkte von C'.

5) Es sei jetzt p_3' ein äußerer Punkt von C' und s_0 eine integrierbare S-Funktion. Da $g(p_3', t)$ halbintegrierbar ist, aber nicht integrierbar, kann man zu jeder reellen Zahl γ eine integrierbare reelle Funktion $\beta(t)$ finden, welche den Ungleichungen $g(p_3', t) \leqq \beta(t) \leqq p_3' s_0(t)$ für alle $t \in T$ und $\int \beta \, dm \leqq \gamma$ genügt.

Wir wollen zeigen, daß die Funktion $S_1(t) := \{x \in S(t) : p_3' x \geqq \beta(t)\}$ wieder die Voraussetzungen a) bis d) des Satzes erfüllt.

Zu a). Für jedes $t \in T$ ist $S_1(t)$ sicher konvex und abgeschlossen und wegen $s_0(t) \in S_1(t)$ nicht leer.

Zu b). Die Stützfunktion von S_1 nennen wir g_1. Es ist $g(p', t) \leqq g_1(p', t)$ für alle p' und t. Deshalb ist g_1 für jedes $t \in T$ im Punkte $p_0'(t)$, in dem auch g stetig ist, endlichwertig und stetig (nach (2.9)).

Zu c). $S_1(t)$ ergibt sich als Durchschnitt von $S(t)$ mit einem Halbraum $H(t)$, der folgende Stützfunktion hat:

$$m(p',t):=\begin{cases}\lambda\beta(t) & \text{für } p'=\lambda p'_3,\ \lambda\geqq 0\\ -\infty & \text{sonst.}\end{cases}$$

Nach (2.5) wird $S_1(t)$ definiert durch die Funktion

$$l(p',t):=\sup_{q'\in F'}\bigl(g(p'-q',t)+m(q',t)\bigr).$$

Dieses Supremum braucht nur über die q' genommen zu werden, für welche $m(q',t)$ endlich ist. Das ergibt dann

$$l(p',t)=\sup_{\lambda\geqq 0}\bigl(g(p'-\lambda p'_3,t)+\lambda\beta(t)\bigr).$$

Es sei nun $t\in T$ fest,

$$E'(t):=\{p'\in F': g(p',t)>-\infty\},\qquad D'(t):=\{p'\in F': g_1(p',t)>-\infty\}$$

und

$$G'(t):=\{p'\in F': l(p',t)>-\infty\}.$$

Es ist $E'(t)\subset G'(t)$, und wegen $g_1(p',t)=\overline{\lim_{q'\to p'}}\, l(q',t)$ gilt:

$$G'(t)\subset D'(t)\subset\bigl(G'(t)\bigr)^a. \tag{$*$}$$

Nun ist $l(p',t)$ genau für die p' endlich, zu denen es ein $\lambda\geqq 0$ gibt mit $p'-\lambda p'_3\in E'(t)$. Mithin gilt $G'(t)=\{q'+\lambda p'_3: q'\in E'(t), \lambda\geqq 0\}$. Der offene Kern $E'^i(t)$ von $E'(t)$ ist nicht leer. Deshalb gilt $\bigl(E'^i(t)\bigr)^a\supset E'(t)$, da $E'(t)$ konvex ist, und

$$\begin{aligned}&\{q'+\lambda p'_3: q'\in E'^i(t), \lambda\geqq 0\}\subset G'(t)\\ &\subset\bigl\{q'+\lambda p'_3: q'\in\bigl(E'^i(t)\bigr)^a, \lambda\geqq 0\bigr\}\\ &\subset\bigl(\{q'+\lambda p'_3: q'\in E'^i(t), \lambda\geqq 0\}\bigr)^a.\end{aligned} \tag{$**$}$$

Dabei ist die erste Menge gleich $\bigcup_{\lambda\geqq 0}\bigl(E'^i(t)+\{\lambda p'_3\}\bigr)$ und damit offen. Wegen der Relation ($**$) ist sie gleich dem offenen Kern von $G'(t)$ und wegen ($*$) gleich $\bigl(D'(t)\bigr)^i$.

Für p' aus $\bigl(D'(t)\bigr)^i$ ist die Funktion $g(p'-\lambda p'_3,t)$ eine konkave Funktion der reellen Variablen λ, die in einem Intervall, das innere Punkte enthält, endliche Werte annimmt. Man braucht also das Supremum $\sup\bigl(g(p'-\lambda p'_3,t)+\lambda\beta(t)\bigr)$ nur über alle $\lambda\geqq 0$ aus der Menge Q der rationalen Zahlen zu bilden. Nach (2.10) ist $l(p',t)=g_1(p',t)$ für alle $p'\in\bigl(G'(t)\bigr)^i$. Es sei nun $t\notin N_0$. Dann ist U' Teilmenge von $\bigl(G'(t)\bigr)^i$. Wenn p'_1 ein fester Punkt aus U' ist, dann gilt nach (2.8) unter Verwendung der eben abgeleiteten Beziehung für l die Gleichung

$$g_1(p',t)=\lim_{r\to\infty}\left(\sup_{\substack{\lambda\in Q\\ \lambda\geqq 0}}\left(g\left(\frac{1}{r}p'_1+\left(1-\frac{1}{r}\right)p'-\lambda p'_3,t\right)+\lambda\beta(t)\right)\right).$$

Wir erhalten also g_1 durch abzählbare Grenzoperationen aus dem meßbaren g. Das zeigt, daß g_1 wieder meßbar ist, denn die Werte von g_1 für $t \in N_0$, die sich nicht auf diese Weise ergeben, stören die Meßbarkeit nicht mehr, da N_0 eine Nullmenge ist.

Zu d) Für $p' \in U'$ wird gemäß $g(p', t) \leqq g_1(p', t) \leqq p' s_0(t)$ zwischen zwei integrierbare Funktionen eingeschlossen, ist also integrierbar.

Damit genügt S_1 allen Voraussetzungen des Satzes. Nun wissen wir nach dem in den Beweisteilen (3) und (4) Gezeigten, daß $\int g_1(p', t)\, dm$ Stützfunktion von $\int S_1\, dm$ ist für alle p', für welche dieses Integral einen endlichen Wert annimmt. Für p'_3 ist nach Konstruktion $g_1(p'_3, t) = \beta(t)$, woraus folgt, daß $\inf_{y \in \int S_1} p'_3 y = \int \beta\, dm \leqq \gamma$ ist. Wegen $S_1(t) \subset S(t)$ für alle $t \in T$ gilt $\int S_1\, dm \subset \int S\, dm$. Damit gilt also auch $h(p'_3) \leqq \gamma$. Da γ eine beliebige reelle Zahl war, muß $h(p'_3) = -\infty$ sein. Das ist gleich $\int g(p'_3, t)\, dm$. ⌟

Damit können wir nun den folgenden Satz über die Randmengen von $\int S\, dm$ beweisen:

(4.2) Satz. *Der Raum F' sei ein* (AW)*-Raum* (*siehe* (3.4)). *Die mengenwertige Funktion S erfülle die Voraussetzungen* a) *bis* d) *von Satz* (4.1). $A := (a'_i)_{i \in I}$ *sei eine Familie von Elementen aus F' mit wohlgeordneter Indexmenge I.*

Wenn die A-Randmenge W_A von $W := \int S\, dm$ (die in F'^* zu bilden ist) nicht leer ist, dann sind die A-Randmengen $S_A(t)$ von $S(t)$ nicht leer bis auf die t aus einer m-Nullmenge N. Die Stützfunktion $g_A(p', t)$ von $S_A(t)$ ist für alle p' halb-integrierbar. (Dazu kann man für $t \in N$ die Funktion g_A beliebig festsetzen, etwa $g_A(p', t) := 0$ für $t \in N$). Für die Stützfunktion h_A von W_A gilt $h_A(p') = \int g_A(p', t)\, dm$ in allen Punkten p', für welche $h_A(p')$ endlich ist.

Beweis. 1) Es gibt nach Hilfssatz (3.6) eine abzählbare Teilmenge J von I, so daß die Familie $(a'_i)_{i \in J}$ dieselbe Präordnung auf F erzeugt wie A. Wir können deshalb ohne Einschränkung annehmen, daß I bereits eine abzählbare Menge ist.

Wir wenden transfinite Induktion an. Es sei der Satz richtig für die A_j-Randmengen ($j < i$), wobei die Familie A_j definiert ist durch $A_j := (a'_k)_{k \in I, k \leqq j}$. Für das kleinste Element i_0 von I ist das klar wegen des vorigen Satzes. Wir wollen jetzt die Richtigkeit für die A_i-Randmengen zeigen.

Sei h_j die Stützfunktion der A_j-Randmenge W_j von W. Die Menge N_j enthalte alle diejenigen $t \in T$, für welche die A_j-Randmenge $S_j(t)$ von $S(t)$ leer ist. Für alle $t \notin N_j$ sei $g_j(p', t)$ die Stützfunktion von $S_j(t)$.

Wir berechnen g_i und h_i nach (3.2). Die Funktionen g_j sind dabei für die t aus der Nullmenge N_j gar nicht definiert. Deshalb müssen wir uns bei den folgenden Überlegungen stets auf die t aus dem Komplement einer passenden Nullmenge beschränken. Doch werden wir das nicht immer ausdrücklich erwähnen, da es sich meistens von selbst versteht.

Zunächst haben wir $k_i(p', t) := \sup_{j<i} g_j(p', t)$ und $v_i(p') := \sup_{j<i} h_j(p')$ zu bilden. Wenn die Menge $I_i := \{j \in I : j < i\}$ kein letztes Element besitzt, dann gibt es eine in I_i konfinale Folge $i_1, i_2, \ldots$ von Elementen aus I_i, und es ist $\sup_{j<i} g_j = \lim_{\nu \to \infty} g_{i_\nu}$ da die Folge der g_i monoton nicht fällt. Ist für ein $p' \in F'$ der Wert $v_i(p') > -\infty$, dann ist für fast alle ν der Wert $h_{i_\nu}(p')$ endlich und nach Induktionsvoraussetzung gilt

$\int g_{i_\nu}(p',t)\,dm = h_{i_\nu}(p')$. Die Anwendung des Satzes von Lebesgue liefert die Integrierbarkeit der Grenzfunktion $k_i(p',t)$ und $\int k_i(p',t)\,dm = v_i(p')$. Das gilt für alle $p' \in F'$ mit $v_i(p') > -\infty$.

Wenn I_i ein letztes Element i_1 besitzt, dann ist diese Aussage wegen $k_i(p',t) = g_{i_1}(p',t)$ und $v_i(p') = h_{i_1}(p')$ nach Induktionsvoraussetzung klar.

2) Es sei nun N_0 die Nullmenge, außerhalb deren die Funktion $g(p',t)$ auf ganz U' stetig ist. Für ein $p'_1 \in U'$ ist $v_i(p'_1) \geqq h(p'_1) > -\infty$. Also ist $k_i(p'_1,t)$ integrierbar und deshalb endlich für die t außerhalb einer Nullmenge N^1. Für $t \notin N^1$ ist nach (2.10) die Menge $\bigcap_{j<i} S_j(t)$ nicht leer. Ihre Stützfunktion erhält man gemäß (2.10) durch $m_i(p',t) := \lim_{r\to\infty} k_i\left(\frac{1}{r}p'_1 + \left(1-\frac{1}{r}\right)p', t\right)$. Das ist für jedes p' der Grenzwert einer Folge meßbarer Funktionen, also eine meßbare Funktion. Außerdem ist m_i stetig und endlichwertig im Punkte $p'_0(t)$ wegen $g \leqq m_i$ und integrierbar für die $p' \in U'$, da sie in diesen Punkten mit $k_i(p',t)$ übereinstimmt und k_i integrierbar ist, da $v_i(p') \geqq h(p') > -\infty$ gilt für $p' \in U'$. Damit erfüllt die mengenwertige Funktion $\bigcap_{j<i} S_j(t)$ die Voraussetzungen von (4.1). Also ist $\int m_i(p',t)\,dm$ eine Stützfunktion. Diese stimmt in allen inneren Punkten der Menge, wo die Stützfunktion w_i von $\bigcap_{j<i} W_j$ endlich ist, mit w_i überein. Dann gilt aber $\int m_i(p',t)\,dm = w_i(p')$ für alle p' mit $w_i(p') > -\infty$.

3) Nun bilden wir die Richtungsableitungen. Da $W_A \neq \emptyset$ ist, muß $w_i(a'_i) > -\infty$ sein und damit $w_i(a'_i) = \int m_i(a'_i,t)\,dm$. Die Richtungsableitungen nach a'_i symbolisieren wir dadurch, daß wir die Stützfunktionen m_i und w_i mit einem $'$ versehen. Dann ist für ein p', in welchem $w'_i(p')$ endlich ist, auch $w_i(p' + l\,a'_i) - l\,w_i(a'_i)$ endlich für fast alle l. Das ergibt

$$\lim_{l\to\infty}\left(w_i(p' + l\,a'_i) - l\,w_i(a'_i)\right) = \lim_{l\to\infty}\int\left(m_i(p' + l\,a'_i, t) - l\,m_i(a'_i,t)\right)dm.$$

Die Folge der Integranden ist monoton nichtfallend, so daß der Satz von Lebesgue anwendbar ist. Das zeigt: $w'_i(p') = \int \lim_{l\to\infty}\left(m_i(p' + l\,a'_i, t) - l\,m_i(a'_i,t)\right)dm = \int m'_i(p',t)\,dm$. Das gilt für alle $p' \in F'$, für welche $w'_i(p')$ endlich ist.

Ganz analog wie in Teil (2) dieses Beweises schließt man daraus, daß es eine Nullmenge N^2 gibt, so daß die a'_i-Randmenge $S_i(t)$ von $\bigcap_{j<i} S_j(t)$ nicht leer ist, wenn t nicht in N^2 liegt. Und wie in (2) folgt für die Stützfunktionen die Beziehung $\int g_i(p',t)\,dm = h_i(p')$ für alle p', wo $h_i(p')$ endlich ist. Damit ist der Induktionsschritt geleistet.

4) Die A-Randmenge von W ist gleich $W_A = \bigcap_{i\in I} W_i$. Genau derselbe Schluß, den wir in (1) und (2) für Mengen des Typs $\bigcap_{j<i} W_j$ durchgeführt haben, ist auch hier anwendbar. Er beweist die Behauptung. $\lrcorner$

Durch eine einfache Spezialisierung erhalten wir daraus die angekündigte Verallgemeinerung eines Satzes von Borges.

(4.3) Satz. *Es sei F' ein* (AW)*-Raum. Für jedes $t \in T$ sei $S(t)$ eine nichtleere eckenabgeschlossene Teilmenge von F. Die Stützfunktion $g(p',t)$ von $S(t)$ erfülle die Voraussetzungen* b) *bis* d) *von* (4.1).

Wenn dann $\int g(p',t)\,dm$ die Stützfunktion von $W := \int S\,dm$ ist, dann ist W eckenabgeschlossen.

Beweis. Wenn $\int g(p',t)\,dm$ die Stützfunktion von W ist, dann ist $W^{ka} = (\int S^{ka}\,dm)^a$, und jede Ecke von W ist auch eine Ecke von $\int S^{ka}\,dm$. Es sei nun r eine Ecke von W, und zwar die A-Ecke. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß A total ist. Ist nämlich die Familie A nicht total, so können wir sie zu einer totalen Familie ergänzen, ohne daß sich die Randmenge, die ja bereits einpunktig ist, noch ändert.

Wir wissen aus Satz (4.2), daß für alle t außerhalb einer Nullmenge N die A-Ecke $s_A(t)$ von $S^{ka}(t)$ existiert und $\int_{T\setminus N} p'\,s_A(t)\,dm = p'\,r$ für alle $p' \in F'$ ist. Da $S(t)$ eckenabgeschlossen ist, nimmt $s_A(t)$ seinen Wert in $S(t)$ an. Also ist

$$r = \int s_A\,dm \in \int S\,dm = W.$$

Da das für alle Ecken von W gilt, ist W eckenabgeschlossen. ┘

Bei beliebigen eckenabgeschlossenen Mengen $S(t)$ braucht unter den Voraussetzungen von (4.3) keineswegs immer $\int g(p',t)\,dm$ die Stützfunktion von $\int S\,dm$ zu sein. Das muß deshalb zusätzlich gefordert werden. Es gibt aber einen wichtigen Spezialfall, in dem das überflüssig ist. Den wollen wir im nächsten Satz behandeln.

(4.4) Satz. *Der Dualraum F' von F sei ein* (AW)*-Raum. Für jedes $t \in T$ sei $S(t)$ eine nichtleere, beschränkte, eckenabgeschlossene Teilmenge von F. Die Stützfunktion $g(p',t)$ von $S(t)$ erfülle die Voraussetzungen* b) *bis* d) *von* (4.1). *Dann ist $W := \int S\,dm$ eckenabgeschlossen.*

Zum Beweis verwenden wir folgendes integrationstheoretische Lemma:

(4.5) Hilfssatz. *Es seien $f_1, f_2, \ldots$ endlichwertige halbintegrierbare Funktionen, h eine integrierbare Funktion und C, ε reelle Zahlen mit $\varepsilon > 0$ und $C > \int f_1\,dm$. Dann gibt es eine meßbare Menge $M \subset T$ derart, daß alle f_i über M integrierbar sind und die Ungleichungen $\int_M f_1\,dm \leqq C$ und $\int_{T\setminus M} h\,dm \leqq \varepsilon$ bestehen.*

Beweis. Es sei $e := \min(\varepsilon, C - \int f_1\,dm)$. Wir konstruieren eine absteigende Folge von Mengen $M_1 \supset M_2 \supset \cdots$ mit der Eigenschaft, daß für jedes n die Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ über M_n integrierbar sind und die Ungleichungen $\int_{M_n} f_1\,dm \leqq C - e \cdot 2^{-n}$ und $\int_{T\setminus M_n} h\,dm \leqq \varepsilon - e \cdot 2^{-n}$ gelten. Diese Mengen werden durch vollständige Induktion erhalten.

Die Mengenfunktion $\mu_1(K) := \int_K f_1\,dm$ ist ein allgemeines σ-finites Maß auf T. Es sei $T = \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i^1$ eine Zerlegung mit $|\mu_1(L_i^1)| < \infty$. Dann gibt es eine natürliche Zahl r_1 derart, daß mit $M_1 := \bigcup_{i=1}^{r_1} L_i^1$ gilt: $\mu_1(M_1) \leqq C - e/2$ und $\int_{T\setminus M_1} h\,dm \leqq \varepsilon - e/2$.

Es sei nun bereits M_{n-1} konstruiert. Dann ist die Mengenfunktion $\mu_n(K) := \int_{K \cap M_{n-1}} f_n\,dm$ ein allgemeines σ-finites Maß auf T. Sei $M_{n-1} = \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i^n$ eine Zerlegung mit endlichem $\mu_n(L_i^n)$. Dann gibt es eine natürliche Zahl r_n so, daß mit $M_n := \bigcup_{i=1}^{r_n} L_i^n$

die Ungleichungen $\mu_1(M_{n-1} \setminus M_n) \leqq e \cdot 2^{-n}$ und $\int_{M_{n-1} \setminus M_n} h\,dm \leqq e \cdot 2^{-n}$ erfüllt sind. Über dieses M_n sind dann $f_1, \ldots, f_n$ integrierbar und es gelten die oben behaupteten Ungleichungen $\mu_1(M_n) \leqq C - e \cdot 2^{-n}$ und $\int_{T \setminus M_n} h\,dm \leqq \varepsilon - e \cdot 2^{-n}$. Über $M := \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ sind dann alle f_i integrierbar und es ist $\int_M f_1\,dm \leqq C$ und $\int_{T \setminus M} h\,dm \leqq \varepsilon$. $\lrcorner$

Damit kommen wir zum Beweis von (4.4). Wir führen diesen Satz auf (4.3) zurück. Dazu haben wir nachzuweisen, daß $\int g(p', t)\,dm$ die Stützfunktion von $\int S\,dm$ ist.

Wie im Beweis zu (4.1) kann gezeigt werden, daß es eine integrierbare S-Funktion gibt. Die dort im Beweisteil (1) konstruierte Nullmenge N_0 ist unter der Voraussetzung, daß alle $S(t)$ beschränkte Mengen sind, die leere Menge, und die im Beweisteil (2) definierte Funktion $s_0(t)$ ist für jedes t genau die P-Ecke von $S(t)$. Da $S(t)$ eckenabgeschlossen ist, gilt also $s_0(t) \in S(t)$ für alle $t \in T$. Die integrierbare Funktion s_0 ist mithin eine S-Funktion.

Wegen $g(p', t) \leqq p' s_0(t)$ für alle p' und t ist die endlichwertige Funktion $g(p', t)$ für jedes $p' \in F'$ halbintegrierbar. Es sei nun p'_1 ein beliebiger Punkt aus F', die Folge $p'_2, p'_3, \ldots$ sei dicht in F' und ε, C seien reelle Zahlen mit $\varepsilon > 0$ und

$$C > \int g(p'_1, t)\,dm.$$

Wie in (4.5) gezeigt wurde, gibt es eine meßbare Teilmenge M von T derart, daß alle Funktionen $g(p'_i, t)$ über M integrierbar sind und die Ungleichungen $\int_M g(p'_1, t)\,dm \leqq C$ und $\int_{T \setminus M} p'_1 s_0(t)\,dm \leqq \varepsilon$ bestehen. Die Funktion

$$\bar{g}(p', t) := \begin{cases} g(p', t) & \text{für } t \in M \\ p' s_0(t) & \text{für } t \notin M \end{cases}$$

ist für jedes $p' \in F'$ halbintegrierbar und für die Punkte aus der offenen Menge U' sowie für die p'_i integrierbar. Die Funktion $\bar{h}(p') := \int_T \bar{g}(p', t)\,dm$ ist konkav. Also ist die Menge $V' := \{p' \in F' : \bar{h}(p') > -\infty\}$ konvex. Sie enthält innere Punkte, da sie U' umfaßt. Deshalb enthält sie alle inneren Punkte ihrer abgeschlossenen Hülle. Da die Folge $p'_1, p'_2, \ldots$ dicht in F' liegt, ist das ganz F'. Mithin ist $\bar{g}(p', t)$ für jedes $p' \in F'$ integrierbar.

Nach dem Verfahren von Teil (2) des Beweises von (4.1) können wir eine integrierbare Funktion $s_1(t)$ konstruieren mit $p'_1 s_1(t) = \bar{g}(p'_1, t)$ für alle $t \in T$, und zwar so, daß $s_1(t) = s_0(t)$ ist für alle t, die nicht in M liegen, und daß $s_1(t)$ eine Ecke von $S(t)$ ist für $t \in M$. Also ist s_1 eine S-Funktion. Nach Konstruktion ist $p'_1 \int s_1\,dm = \int_M g(p'_1, t)\,dm + \int_{T \setminus M} p'_1 s_0\,dm \leqq C + \varepsilon$. Da $C > \int g(p'_1, t)\,dm$ und $\varepsilon > 0$ beliebig wählbar waren, ist $\inf_{r \in \int S} p'_1 r \leqq \int g(p'_1, t)\,dm$. Da die umgekehrte Ungleichung trivial ist, gilt die Gleichheit. $\lrcorner$

Borges beweist in [2] den Satz (4.4) im Falle eines endlichdimensionalen Raumes F ohne die Voraussetzung d). Wenn aber im endlichdimensionalen Raum F die mengenwertige Funktion S allen Voraussetzungen von (4.4) genügt unter Verletzung von d), dann besitzt $\int S\,dm$ keine Ecken, ist also trivialerweise eckenabgeschlossen. Das kann daran liegen, daß $\int S\,dm$ leer ist. Im Falle $\int S\,dm \neq \emptyset$ hat, wie Borges zeigt, $\int S\,dm$ die Stützfunktion $\int g(p', t)\,dm$. Da die Menge $E' := \{p' \in F' : \int g(p', t)\,dm > -\infty\}$ bei Verletzung von d) keine inneren Punkte enthält, gibt es ein $x_0 \in F$, $x_0 \neq 0$, mit $p' x_0 = 0$ für alle $p' \in E'$. Man sieht leicht, daß dann mit jedem Punkt x auch die ganze Gerade $\{x + \lambda x_0 : \lambda \in R\}$ in $(\int S\,dm)^{ka}$ liegt. Kein Punkt x kann also Ecke von $\int S\,dm$ sein. Wir sehen mithin, daß im endlichdimensionalen Falle in (4.4) auf die Voraussetzung d) verzichtet werden kann. Damit ergibt sich der Satz von Borges als Spezialfall von (4.4).

§ 5. Verallgemeinerung eines Satzes von Ljapunoff

Ljapunoff [14] wies 1940 nach, daß der Wertebereich eines atomlosen, beschränkten Vektormaßes, das Werte im endlichdimensionalen euklidischen Raum R^n annimmt, konvex und kompakt ist. Seitdem sind von mehreren Autoren Beispiele dafür angegeben worden, daß dieser Satz nicht mehr richtig ist, wenn das Maß Werte in einem unendlichdimensionalen Vektorraum annimmt (ein einfaches Beispiel steht bei: H.G. Kellerer, Zur Existenz analoger Bereiche, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie **1**, 240–246 (1962/63)). Im ersten Satze dieses Paragraphen werden wir sehen, daß unter einer gewissen Voraussetzung der Wertebereich eines Vektormaßes auch im unendlichdimensionalen Falle konvex und kompakt ist.

Die folgenden Begriffe und Bezeichnungen halten sich im wesentlichen an das Lehrbuch von Dunford-Schwartz [7].

$(T, \mathfrak{K}, m)$ sei ein Maßraum mit σ-finitem positivem Maße m. Der Raum L^1 der m-integrierbaren reellen Funktionen h auf T, wobei m-fast gleiche Funktionen identifiziert werden, ist mit der Norm $\|h\| := \int_T |h|\,dm$ ein Banachraum. Der Raum L^∞ der m-wesentlich beschränkten Funktionen k auf T, wobei m-fast gleiche Funktionen identifiziert werden, ist mit der Norm $\|k\| := m\text{-}\operatorname{ess\,sup}_{t \in T} |k(t)|$ ein Banachraum, der norm-isomorph ist zum Dualraum $(L^1)'$ von L^1 (vgl. [7], IV, 8.5).

Es sei F ein separierter lokalkonvexer Raum. Wenn $f\colon T \to F$ eine schwach integrierbare vektorwertige Funktion ist, bezeichne $W(f)$ die Menge $\{\int_K f\,dm : K \in \mathfrak{K}\}$. Das ist eine Teilmenge von F'^*.

Die gröbste bezüglich eines Dualsystems $\langle X, Y \rangle$ zulässige Topologie auf X heißt die *schwache Topologie* auf X und wird mit $\sigma(X, Y)$ bezeichnet. Man versieht topologische Begriffe, die sich auf die schwache Topologie beziehen, mit dem Zusatz „*schwach*", also „*schwach stetig*", „*schwach kompakt*" etc.

Damit kommen wir zu dem angekündigten Satze[3]:

(5.1) Satz. *Wenn zu jeder Menge $M \in \mathfrak{K}$ mit $m(M) > 0$ ein $h \neq 0$ aus L^∞ existiert mit $h(t) = 0$ für $t \notin M$ und $\int_T h(t) f(t)\,dm = 0$, dann ist $W(f) := \{\int_K f\,dm : K \in \mathfrak{K}\}$ konvex und kompakt in der Topologie $\sigma(F'^*, F')$.*

[3] Inzwischen wurde mir bekannt, daß für endliches Maß m die Sätze (5.1) und (5.2) bereits von J. F. C. Kingman und A. P. Robertson [On a theorem of Lyapunov, J. London math. Soc. **43**, 347–351 (1968)] bewiesen worden sind.

Beweis. Die Kugel $C := \{k \in L^\infty : \|k - \frac{1}{2}\| \leqq \frac{1}{2}\}$ ist nach dem Satz von Alaoglu kompakt in der Topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$. Die Abbildung $J: k \to \int_T k(t) f(t)\, dm$ bildet L^∞ linear in F'^* ab und ist stetig, wenn L^∞ und F'^* mit den Topologien $\sigma(L^\infty, L^1)$ bzw. $\sigma(F'^*, F')$ versehen werden. Also ist $J(C)$ konvex und kompakt in F'^* bezüglich der Topologie $\sigma(F'^*, F')$. Der Satz ist mithin bewiesen, wenn $W(f) = J(C)$ gezeigt wird.

Für $x \in J(C)$ ist $J^{-1}(x) := \{k \in C : \int k(t) f(t)\, dm = x\}$ nicht leer und als Durchschnitt des schwach kompakten C mit den abgeschlossenen Hyperebenen $H(p') := \{k \in L^\infty : \int k(t)\, p' f(t)\, dm = p'\, x\}$ $(p' \in F')$ wieder schwach kompakt und konvex. Also besitzt $J^{-1}(x)$ nach dem Satz von Krein-Milman einen Extremalpunkt k_0.

Da k_0 in C liegt, gilt $0 \leqq k_0(t) \leqq 1$ für m-fast alle $t \in T$. Hätte für ein $\varepsilon > 0$ die Menge $M_\varepsilon := \{t \in T : \varepsilon \leqq k_0(t) \leqq 1 - \varepsilon\}$ positives Maß, dann gäbe es dazu nach Voraussetzung eine nichttriviale Funktion $h_0 \in L^\infty$, die außerhalb M_ε verschwindet und $\int_T h_0(t) f(t)\, dm = 0$ erfüllt. Ohne Einschränkung kann $\|h_0\| \leqq \varepsilon$ angenommen werden. Nach Konstruktion gilt dann $\|k_0 \pm h_0 - \frac{1}{2}\| \leqq \frac{1}{2}$ und $\int (k_0 \pm h_0) f\, dm = x$. Also liegen die Funktionen $k_0 \pm h_0$ in $J^{-1}(x)$. Wegen $k_0 = ((k_0 + h_0) + (k_0 - h_0))/2$ wäre dann aber k_0 kein Extremalpunkt von $J^{-1}(x)$.

Es muß also $m(M_\varepsilon) = 0$ sein für jedes $\varepsilon > 0$. Daraus folgt aber, daß $k_0(t)$ m-fast gleich einer charakteristischen Funktion χ_K ist. Dann gilt

$$x = \int_T k_0 f\, dm = \int_T \chi_K f\, dm = \int_K f\, dm \in W(f).$$

Wir haben damit gesehen, daß $J(C)$ Teilmenge von $W(f)$ ist. Trivial ist aber die Inklusion $W(f) \subset J(C)$. Mithin gilt die Gleichheit der beiden Mengen. ⌟

Unter den Voraussetzungen von (5.1) ist auch die Menge

$$W_N(f) := \{\int_K f\, dm : K \in \mathfrak{K} \text{ und } K \subset N\}$$

konvex und kompakt für jedes $N \in \mathfrak{K}$. Davon gilt nun folgende Umkehrung.

(5.2) Satz. *Wenn für jedes $N \in \mathfrak{K}$ die Menge $W_N(f) := \{\int_K f\, dm : K \in \mathfrak{K}$ und $K \subset N\}$ konvex ist, dann existiert zu jedem $M \in \mathfrak{K}$ mit $m(M) > 0$ eine Funktion $h \in L^\infty$, $h \neq 0$, mit $h(t) = 0$ für $t \notin M$ und $\int_T h(t) f(t)\, dm = 0$.*

Beweis. Es sei $M_0 \in \mathfrak{K}$ so, daß kein $h \neq 0$ aus L^∞ existiert, das außerhalb von M_0 verschwindet und $\int h f\, dm = 0$ erfüllt. Wir müssen zeigen, daß dann $m(M_0) = 0$ ist. Nach Voraussetzung ist $W_{M_0}(f)$ konvex. Es gibt also eine Teilmenge M_1 von M_0 mit $\int \chi_{M_1} f\, dm = \frac{1}{2} \int_{M_0} f\, dm$. Die Gleichung $\int_{M_0} h f\, dm = \frac{1}{2} \int_{M_0} f\, dm$ für h hat in $L^\infty_{M_0} := \{h \in L^\infty : h(t) = 0$ für $t \notin M_0\}$ die spezielle Lösung $h_0(t) := \frac{1}{2} \chi_{M_0}(t)$. Jede andere Lösung erhält man daraus durch Addition einer Lösung der homogenen Gleichung $\int_{M_0} h f\, dm = 0$. Da diese aber nach Annahme nur die Lösung $h = 0$ hat, gilt $\chi_{M_1}(t) = h_0(t) = \frac{1}{2} \chi_{M_0}(t)$ für m-fast alle $t \in T$. Diese Gleichheit kann aber nur bestehen, wenn $m(M_0) = 0$ ist. ⌟

Wir wollen jetzt noch zeigen, daß der Satz von Ljapunoff [14] leicht aus (5.1) abgeleitet werden kann.

(5.3) Satz. *Das Maß m sei atomlos und $f(t) := (f_1(t), \ldots, f_n(t))$ eine integrierbare Vektorfunktion mit Werten aus dem R^n. Dann ist $W(f)$ kompakt und konvex.*

Beweis. Es sei $M \in \mathfrak{K}$ mit $m(M) > 0$. Da m atomlos ist, gibt es meßbare Mengen $M_{n+1} \subset M_n \subset \cdots \subset M_1 \subset M$ mit $0 < m(M_{n+1}) < \cdots < m(M_1)$. Die n Gleichungen $\sum_{k=1}^{n+1} \beta_k \int f_i \chi_{M_k} dm = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ für die $n+1$ Unbekannten β_k haben eine nichttriviale Lösung $\beta_1^0, \ldots, \beta_{n+1}^0$. Nach Konstruktion sind die Funktionen $\chi_{M_1}, \ldots, \chi_{M_{n+1}}$, aufgefaßt als Elemente des Vektorraumes L^∞, linear unabhängig. Deshalb ist $h := \sum_{k=1}^{n+1} \beta_k^0 \chi_{M_k}$ nicht das Nullelement von L^∞. Außerdem verschwindet $h(t)$ außerhalb M und es ist $\int_T h f \, dm = 0$. Mithin ist die Voraussetzung von (5.1) erfüllt. Daraus folgt die Behauptung. ⌟

Die Voraussetzung von (5.1) ist für eine Funktion f sicher nur dann erfüllt, wenn für jedes $p' \in F'$ die Funktion $p' f(t)$ auf jedem Atom von m fast überall verschwindet. Wenn wir also T zerlegen in einen atomlosen Teil M_0 und einen atomaren Teil $T \setminus M_0$, dann ist $W(f) = W_{M_0}(f)$. Man kann also bei Gültigkeit der Voraussetzung von (5.1) ohne Einschränkung annehmen, daß das Maß m bereits atomlos ist.

Natürlich kann $W(f)$ auch konvex sein, wenn f auf dem atomaren Teil von m nicht fast überall verschwindet. Da dann aber der Satz (5.1) sicher nicht anwendbar ist, muß das Verhalten auf dem atomaren Teil gesondert studiert werden. Der folgende Satz führt die Konvexität der Integralmenge $W(f)$ einer Vektorfunktion f zurück auf die Konvexität der Integralmengen $W(\beta_i)$ gewisser skalarer Funktionen β_i. Kellerer hat in [11] hierzu untersucht, wie man die Konvexität von $W(\beta_i)$ bei reellwertigem β_i auf elementarere Eigenschaften von β_i zurückführen kann.

(5.4) Satz. *Der Dualraum F' von F sei ein* (AW)*-Raum (siehe Definition* (3.4)*). Die integrierbare Funktion f mit Werten aus F erfülle die Bedingung, daß $W(f) := \{\int_K f \, dm : K \in \mathfrak{K}\}$ konvex ist.*

Dann gibt es eine Zerlegung $T = M_0 \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ von T in abzählbar viele disjunkte meßbare Mengen mit folgenden Eigenschaften:

a) *Das Maß m ist auf M_0 atomlos.*

b) *Für $i \geqq 1$ ist $f(t)$ für alle $t \in M_i$ ein skalares Vielfaches $\beta_i(t) \cdot a_i$ eines festen Vektors $a_i \in F$.*

c) *Die Mengen $W(\beta_i) := \{\int_K \beta_i \, dm : K \in \mathfrak{K}$ und $K \subset M_i\}$ sind konvex.*

Beweis. 1) Wir zeigen zunächst, daß f auf jedem Atom A m-fast konstant ist.

Es sei P eine abzählbare in F' dichte Menge. Für jedes $p' \in P$ ist $p' f(t)$ auf ganz A konstant gleich einem Wert $c(p')$ mit Ausnahme der t aus einer Nullmenge $N(p')$. Wenn t nicht in der Nullmenge $N := \bigcup_{p' \in P} N(p')$ liegt, ist $f(t) = a$ konstant, wobei a durch die Gleichungen $p' a = c(p')$, $p' \in P$, eindeutig bestimmt ist.

2) Die Mengen M_i konstruieren wir rekursiv. Es gibt eine Zerlegung von T in einen atomlosen Anteil A_0 und abzählbar viele Atome A_k. Wir nehmen an, $M_1, \ldots, M_{i-1}$ seien bereits konstruiert ($i \geqq 1$). Wenn dann schon alle Atome A_k bis auf Nullmengen in einem M_l mit $l < i$ liegen, setzen wir $M_l := \emptyset$ für $l \geqq i$ und haben die gewünschte Zerlegung.

Wenn A_k ein Atom ist, das zwar noch in keinem der M_l mit $l < i$ liegt, auf dem aber f m-fast überall verschwindet, dann können wir M_i gleich $\{t \in A_k : f(t) = 0\}$ setzen.

Wenn f auf A_k nicht m-fast verschwindet, dann ist $f(t) = a_k \neq 0$ für fast alle $t \in A_k$. In der Hyperebene $\{p' \in F' : p'\, a_k = 0\}$ gibt es eine abzählbare dichte Folge $Q := (q'_i)_{i=1,2,\ldots}$. Die Q-Randmenge von $V := \int \{0, f(t)\}^{ka}\, dm$ ist eine Strecke, die parallel zu a_k ist und zwei Ecken von V verbindet. Diese Ecken liegen nach Satz (4.4) bereits in $W(f) = \int \{0, f(t)\}\, dm$. Diese Menge ist nach Voraussetzung konvex. Also liegt die Verbindungsstrecke dieser beiden Ecken, das ist die Q-Randmenge V_Q von V, ganz in $W(f)$.

Sei $x \in V_Q$. Dann gibt es eine Menge $L \in \mathfrak{R}$ mit $x = \int_L f(t)\, dm$. Die Q-Randmenge von $\{0, f(t)\}^{ka}$ ist gleich

$$S_Q(t) := \begin{cases} \{0, f(t)\}^{ka} & \text{für } t \in K_0 \\ \{0\} \text{ bzw. } \{f(t)\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei ist die Menge K_0 definiert durch $K_0 := \{t \in T : f(t)$ parallel zu a_k und $f(t) \neq 0\}$. Wenn $\chi_L \cdot f(t)$ integriert einen Punkt aus V_Q liefern soll, dann muß $\chi_L \cdot f(t)$ für m-fast alle $t \in T$ in $S_Q(t)$ liegen. Das folgt aus der Beziehung $h_Q(p') = \int g_Q(p', t)\, dm$, die nach (4.2) für die Stützfunktionen h_Q von V_Q und g_Q von S_Q gelten muß, und zwar für alle p', da V_Q eine beschränkte Menge und deshalb $h_Q(p')$ überall endlich ist.

Da $S_Q(t)$ außerhalb von K_0 nur aus einem Punkt besteht, ist dort $\chi_L \cdot f$ m-fast überall bereits bestimmt. Variationsmöglichkeit besteht nur noch auf K_0. Wir setzen $M_i := K_0$ und definieren β_i durch $f(t) = \beta_i(t)\, a_k$ auf M_i. Dann ist

$$\begin{aligned} V_Q &= \Big\{ \int_{T \setminus M_i} \chi_L \cdot f\, dm + \int_{K_1} f\, dm : K_1 \in \mathfrak{R} \text{ und } K_1 \subset M_i \Big\} \\ &= \Big\{ \int_{T \setminus M_i} \chi_L \cdot f\, dm + \lambda\, a_k : \lambda \in W(\beta_i) := \Big\{ \int_{K_1} \beta_i\, dm : K_1 \in \mathfrak{R} \text{ und } K_1 \subset M_i \Big\} \Big\}. \end{aligned}$$

Mithin zieht die Konvexität von V_Q die von $W(\beta_i)$ nach sich.

Diese Menge M_i enthält m-fast alle t von A_k. Durch Wiederholung dieser Konstruktion können wir schließlich alle Atome von m in die M_i aufnehmen. Es bleibt ein Rest übrig, den wir M_0 nennen und auf dem m atomlos ist. $\lrcorner$

§ 6. Die Kompaktheit der Integralmenge

In Satz (4.3) konnten wir nur schließen, daß $\int S\, dm$ eckenabgeschlossen ist. Man macht sich leicht an Beispielen klar, daß $\int S\, dm$ nicht abgeschlossen zu sein braucht, und zwar selbst dann nicht, wenn die $S(t)$ sämtlich kompakte und konvexe Teilmengen eines endlichdimensionalen euklidischen Raumes sind. Wir werden aber in diesem Paragraphen sehen, daß bei geeigneten Separabilitätsvoraussetzungen die Menge $\int S\,dm$ jedenfalls dann eine schwach kompakte Teilmenge des algebraischen Dualraumes F'^* von F' ist, wenn die $S(t)$ alle schwach kompakte und konvexe Teilmengen von F sind, und ihre Stützfunktion $g(p', t)$ für jedes $p' \in F'$ integrierbar ist.

Bei endlichdimensionalem F kann man das einfach daraus schließen, daß $\int S\,dm$ beschränkt, eckenabgeschlossen und konvex ist. Das zieht nämlich die Kompaktheit nach sich. Bei unendlichdimensionalem Raume F versagt diese Schlußweise. Wir müssen deshalb einen anderen Weg einschlagen.

Unser Beweis beruht auf einigen etwas tiefer liegenden Eigenschaften des Raumes L_F der schwach integrierbaren Vektorfunktionen. Da diese Eigenschaften auch für sich interessant sind, werden wir sie in Form von Hilfssätzen formulieren und beweisen.

Es sei $(T, \mathfrak{R}, m)$ ein Maßraum mit positivem σ-finitem Maße m. Der Dualraum F' des separierten lokalkonvexen Raumes F sei mit einer zulässigen Topologie versehen. Mit L_F bezeichnen wir den Raum der schwach integrierbaren Funktionen $f\colon T \to F$, wobei wir zwei Funktionen f_1 und f_2 identifizieren, wenn für jedes $p' \in F'$ eine Nullmenge $N(p')$ existiert, so daß $p' f_1(t) = p' f_2(t)$ gilt für alle t, die nicht in $N(p')$ liegen.

Für unsere Zwecke bequemer ist der Raum L_F^α, der aus allen schwach integrierbaren Vektorfunktionen $f\colon T \to F$ besteht, zu denen eine Zerlegung $T = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ von T in meßbare Mengen M_k so existiert, daß $f(M_k)$ eine gleichstetige Teilmenge von F ist. Dabei sind wieder zwei Funktionen f_1 und f_2 zu identifizieren, wenn für jedes $p' \in F'$ die reellen Funktionen $p' f_1(t)$ und $p' f_2(t)$ m-fast gleich sind. Wir werden die Funktion f und die Äquivalenzklasse aus L_F^α, in der f liegt, mit demselben Buchstaben f bezeichnen.

Außerdem brauchen wir den Banachraum L^∞ der m-wesentlich beschränkten Funktionen, den wir zu Beginn des vorigen Paragraphen erklärt haben.

Für $f \in L_F^\alpha$, $h \in L^\infty$ und $p' \in F'$ ist die Funktion $A(f, h, p') := \int_T h(t)\, p' f(t)\, dm$ erklärt. Diese Funktion ist in jeder der drei Variablen f, h und p' linear. Wenn wir das Tensorprodukt $D := L^\infty \otimes F'$ einführen, wird durch die Festsetzung $B(f, h \otimes p') := A(f, h, p')$ für $f \in L_F^\alpha$, $h \in L^\infty$ und $p' \in F'$ eindeutig ein bilineares Funktional auf $L_F^\alpha \times D$ definiert.

Das weitere Programm dieses Paragraphen ist kurz folgendes: Wir werden sehen, daß die Räume L_F^α und D mit der Bilinearform B ein Dualsystem bilden. Damit können wir die bekannte Dualitätstheorie anwenden (s. etwa Köthe, [13], § 20). Wir führen dazu eine Topologie auf D ein, zeigen, daß diese Topologie zulässig ist und schließen dann mit dem Satze von Alaoglu-Bourbaki auf die schwache Kompaktheit gewisser Teilmengen von L_F^α. Daraus folgt die angekündigte Aussage über die Integralmengen $\int S\,dm$.

Dieses Programm führen wir jetzt durch.

(6.1) Hilfssatz. *Die Bilinearform B setzt die Räume L_F^α und D in Dualität.*

Beweis. Wir haben zu zeigen:

(1) Zu jedem $f \neq 0$ aus L_F^α gibt es ein $d \in D$ mit $B(f, d) \neq 0$.

(2) Zu jedem $d \neq 0$ aus D gibt es ein $f \in L_F^\alpha$ mit $B(f, d) \neq 0$.

Zu (1). Sei $f \neq 0$. Dann gibt es ein $p' \in F'$ derart, daß $p' f(t)$ nicht m-fast überall verschwindet. Wenn man dann $h := \chi_{\{t: p' f(t) > 0\}} - \chi_{\{t: p' f(t) < 0\}}$ aus L^∞ nimmt, dann ist $B(f, h \otimes p') = \int |p' f(t)| \, dm \neq 0$.

Zu (2). Ein Element $d \in D$ hat die Form $d = \sum_{i=1}^{n} h_i \otimes p_i'$ mit $h_i \in L^\infty$ und $p_i' \in F'$. Wir nehmen an, diese Darstellung sei unverkürzbar, d.h. das n sei kleinstmöglich. Dann sind sowohl die h_i als auch die p_i' linear unabhängig. Wäre nämlich etwa $p_n' = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i p_i'$, dann wäre $d = \sum_{i=1}^{n-1} (h_i + \lambda_i h_n) \otimes p_i'$ eine kürzere Darstellung.

Da p_n' von $p_1', \ldots, p_{n-1}'$ linear unabhängig ist, gibt es einen Vektor $a \in F$ so, daß $p_i' a = 0$ ist für $i = 1, \ldots, n-1$, aber $p_n' a \neq 0$. Wegen $h_n \neq 0$ gibt es eine beschränkte integrierbare reelle Funktion $e(t)$ mit $\int e(t) h_n(t) \, dm \neq 0$. Wir setzen $f_0(t) := e(t) a$ und erhalten $B(f_0, d) = \sum_{i=1}^{n} \int h_i(t) p_i' e(t) a \, dm = p_n' a \int h_n(t) e(t) \, dm \neq 0$. $\lrcorner$

Jetzt wollen wir eine Topologie auf D erklären. Dazu betrachten wir mengenwertige Funktionen S: $T \to \mathfrak{P}(F)$ mit folgenden Eigenschaften:

a) *Für jedes $t \in T$ ist $S(t)$ eine abgeschlossene konvexe Teilmenge von F.*

b) *Es gibt eine Zerlegung $T = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ von T in meßbare Mengen M_k, so*

(6.2) *daß die Stützfunktionen $g(p', t)$ von $S(t)$ für $t \in M_k$ gleichgradig stetig auf F' sind.*

c) *Für jedes $p' \in F'$ ist $g(p', t)$ als Funktion von t über T integrierbar.*

d) *Für jedes $t \in T$ gilt $0 \in S(t)$.*

Sei S eine mengenwertige Funktion. Mit K_S bezeichnen wir die Menge aller integrierbaren vektorwertigen Funktionen f mit $f(t) \in S(t)$ für alle $t \in T$. Wenn S den Bedingungen (6.2) genügt, dann ist wegen (6.2b) jede Funktion $f \in K_S$ ein Element von L_F^α. Wir können also K_S als Teilmenge von L_F^α auffassen. Es sei $\mathfrak{S}$ die Menge aller $K_S \subset L_F^\alpha$, wobei S alle mengenwertigen Funktionen mit den Eigenschaften (6.2) durchlaufe.

Die Mengen K_S sind beschränkt. Denn sei

$$d = \sum_{i=1}^{n} h_i \otimes p_i' \in D.$$

Dann gilt für jedes $f \in K_S$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |B(f, d)| &\leqq \sum_{i=1}^{n} |B(f, h_i \otimes p_i')| \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left| \int h_i p_i' f \, dm \right| \leqq \sum_{i=1}^{n} \|h_i\| \int \max\big(|g(p', t)|, |g(-p', t)|\big) \, dm < \infty, \end{aligned}$$

da die Stützfunktion g integrierbar ist.

Wir führen auf D die Topologie $\mathfrak{T}$ der gleichmäßigen Konvergenz auf den Mengen $K_S \in \mathfrak{S}$ ein. Man weiß, daß bezüglich dieser Topologie die Polaren $K_S^0 := \{d \in D : B(f, d) \leqq 1$ für alle $f \in K_S\}$ Nullumgebungen sind. In der vorliegenden speziellen Situation kann man sogar noch etwas mehr schließen.

(6.3) Hilfssatz. *Das Mengensystem* $\mathfrak{U} := \{K_S^0 : K_S \in \mathfrak{S}\}$ *ist Basis des Nullumgebungsfilters einer separierten lokalkonvexen Topologie* $\mathfrak{T}$ *auf* D.

Beweis. Es genügt, folgende Eigenschaften zu zeigen:

1) $\bigcup_{K_S \in \mathfrak{S}} K_S = L_F^\alpha$.

2) Mit $K_S \in \mathfrak{S}$ liegt auch λK_S in $\mathfrak{S}$ für alle $\lambda > 0$.

3) Zu zwei Mengen $K_{S_1}, K_{S_2} \in \mathfrak{S}$ gibt es ein $K_{S_3} \in \mathfrak{S}$ mit $K_{S_1} \subset K_{S_3}$ und $K_{S_2} \subset K_{S_3}$.

Zu 1). Sei $f \in L_F^\alpha$. Wir fassen f als Punktfunktion $f: T \to F$ auf und bilden damit $S_f(t) := \{0, f(t)\}^{ka}$. Dieses S_f genügt den Bedingungen (6.2). Mithin liegt K_{S_f} in $\mathfrak{S}$ und damit f in $\bigcup_{K_S \in \mathfrak{S}} K_S$.

Zu 2). Sei $\lambda > 0$ und $K_S \in \mathfrak{S}$. Mit S erfüllt auch die durch $(\lambda S)(t) := \lambda S(t)$ definierte Funktion λS die Bedingungen (6.2). Deshalb liegt mit K_S auch $K_{(\lambda S)}$ in $\mathfrak{S}$. Wegen $\lambda K_S = K_{(\lambda S)}$ liegt damit auch λK_S in $\mathfrak{S}$.

Zu 3). Es seien S_1 und S_2 zwei mengenwertige Funktionen mit den Eigenschaften (6.2). Ihre Stützfunktionen seien g_1 bzw. g_2. Dann hat die Funktion S_3, die definiert ist durch $S_3(t) := (S_1(t) \cup S_2(t))^{ka}$ die Stützfunktion $g_3(p', t) = \min(g_1(p', t), g_2(p', t))$ und erfüllt, wie unmittelbar zu sehen ist, die Bedingungen (6.2). Nach Konstruktion ist $K_{S_1} \subset K_{S_3}$ und $K_{S_2} \subset K_{S_3}$. ⌟

Um möglichen Mißverständnissen vorzubeugen, muß erwähnt werden, daß die Topologie $\mathfrak{T}$ auf D im allgemeinen nicht übereinstimmt mit dem topologischen Tensorprodukt, wie es von Grothendieck (Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mem. Amer. Math. Soc. Nr. 16 (1955)) definiert wird.

(6.4) Satz. *Wenn F' separabel ist, dann ist die Topologie $\mathfrak{T}$ auf D zulässig bezüglich des Dualsystems* $\langle D, L_F^\alpha \rangle$.

Beweis. Es sei W ein stetiges lineares Funktional auf D. Wir müssen zeigen: Es gibt ein $f \in L_F^\alpha$, so daß $W(d) = B(f, d)$ für alle $d \in D$ gilt.

(1) Wegen der Stetigkeit von W gibt es eine mengenwertige Funktion S, die (6.2) erfüllt, so daß $|W(d)| \leqq 1$ gilt für alle $d \in K_S^0$. Die Stützfunktion von S sei $g(p', t)$. Für jedes $f \in K_S$ gilt $B(f, h \otimes p') = \int h p' f \, dm \leqq \|h\| \cdot (-\int g(-p', t) \, dm)$. Also liegt $h \otimes p'$ in $\|h\| \cdot (-\int g(-p', t) \, dm) \cdot K_S^0$. Daraus folgt $|W(h \otimes p')| \leqq -\|h\| \cdot \int g(-p', t) \, dm$ und wegen $W(h \otimes p') = -W(h \otimes (-p'))$ gilt

$$|W(h \otimes p')| \leqq -\|h\| \cdot \int g(p', t) \, dm. \tag{α}$$

Mit analogen Schlüssen folgt für die charakteristischen Funktionen χ_K, $K \in \mathfrak{K}$, die Ungleichung

$$|W(\chi_K \otimes p')| \leqq -\int_K g(p', t) \, dm. \tag{$\tilde{\alpha}$}$$

(2) Bei festem $p' \in F'$ ist $m_{p'}(K) := W(\chi_K \otimes p')$ eine additive endlichwertige Mengenfunktion auf $\mathfrak{K}$. Wir zeigen, daß $m_{p'}$ sogar σ-additiv ist. Sei dazu $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \cdots$ eine absteigende Folge von Mengen aus $\mathfrak{K}$ mit $\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i = \emptyset$. Wegen $(\tilde{\alpha})$ ist dann $|m_{p'}(M_i)| \leqq -\int_{M_i} g(p', t)\, dm$. Für $i \to \infty$ geht $\int_{M_i} g(p', t)\, dm$ gegen Null, also auch $m_{p'}(M_i)$. Daraus folgt die σ-Additivität von $m_{p'}$. Zudem ist wegen

$$|m_{p'}(K)| \leqq -\int_K g(p', t)\, dm$$

das Maß $m_{p'}$ totalstetig bezüglich m. Also besitzt $m_{p'}$ eine Dichte $w(p', t)$ bezüglich m. Die Abhängigkeit von p' schreiben wir dabei mit unter das Argument. Dann ist $W(\chi_M \otimes p') = \int \chi_M w(p', t)\, dm$. Da die Funktion $W(h \otimes p')$ linear in h ist, gilt damit $W(h \otimes p') = \int h(t)\, w(p', t)\, dm$ auch für alle $h \in L^\infty$, die endliche Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen sind, also für die h aus einem in L^∞ dichten Teilraum. Da wegen (α) die Abbildung $h \to W(h \otimes p')$ stetig ist, gilt $W(h \otimes p') = \int h(t)\, w(p', t)\, dm$ für alle $p' \in F'$ und $h \in L^\infty$.

(3) Nach $(\tilde{\alpha})$ gilt für alle $M \in \mathfrak{K}$ die Ungleichung

$$\left|\int_M w(p', t)\, dm\right| = |W(\chi_M \otimes p')| \leqq -\int_M g(p', t)\, dm.$$

Da $g(p', t) \leqq 0$ ist, folgt daraus, daß

$$w(p', t) \geqq g(p', t) \tag{β}$$

für jedes feste $p' \in F'$ m-fast überall gelten muß.

Die Dichten $w(p', t)$ sind bei festem p' eindeutig bis auf die t aus einer Nullmenge. Das werden wir jetzt benützen, $w(p', t)$ so umzudefinieren, daß $w(p', t)$ die Gestalt $p' f(t)$ mit einem $f \in L_F^\alpha$ bekommt.

(4) Es sei F_1' ein in F' dichter Teilraum mit abzählbarer Hamelbasis Q'. Die Menge F_2' aller endlichen Linearkombinationen von Elementen aus Q' mit rationalen Koeffizienten ist dann abzählbar. Die Dichte $w(p', t)$ mit $W(h \otimes p') = \int h(t)\, w(p', t)\, dm$ für alle $h \in L^\infty$ sei zunächst nur für $p' \in Q'$ fest gewählt. Da $W(h \otimes p')$ linear in p' ist, brauchen wir nur $w(p', t)$ bei festem t linear von Q' auf F_1' fortzusetzen, um $W(h \otimes p') = \int h(t)\, w(p', t)\, dm$ für alle $p' \in F_1'$ zu erhalten. Wegen (β) ist $N := \bigcup_{p' \in F_2'} \{t \in T : w(p', t) \leqq g(p', t)\}$ eine Nullmenge. Wenn wir $w(p', t) = 0$ setzen für $t \in N$, erhalten wir $W(h \otimes p') = \int h(t)\, w(p', t)\, dm$ für alle $p' \in F_2'$ und $w(p', t) \geqq g(p', t)$ für alle $p' \in F_2'$ und $t \in T$.

Es gilt nun bereits $w(p', t) \geqq g(p', t)$ für alle $p' \in F_1'$ und $t \in T$. Denn ist $p' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i'$ mit reellen α_i und $p_i' \in Q'$ ein Element aus F_1', dann kann man die α_i als Grenzwerte von Folgen β_{ik} rationaler Zahlen darstellen. Für jedes k gilt

$$w\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_{ik} p_i', t\right) \geqq g\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_{ik} p_i', t\right).$$

Da beide Seiten in den β_{ik} stetig sind, bleibt diese Ungleichung beim Grenzübergang $k\to\infty$ erhalten.

(5) Es sei nun $T=\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ eine Zerlegung nach (6.2b) derart, daß für jedes k die Funktionenfamilie $\big(g(p',t)\big)_{t\in M_k}$ gleichgradig stetig ist. Da das Maß m σ-finit ist, können wir $m(M_k)<\infty$ annehmen. Wegen der gleichgradigen Stetigkeit gibt es stetige Halbnormen H_k auf F', so daß $|g(p',t)|\leqq H_k(p')$ ist für $t\in M_k$ und $p'\in F'$. Wegen (β) ist dann auch $|w(p',t)|\leqq H_k(p')$ für $t\in M_k$ und $p'\in F_1'$. Nach dem Satz von Hahn-Banach kann $w(p',t)$ bei festem t stetig auf F' fortgesetzt werden zu einer linearen Funktion $\overline{w}(p',t)$. Diese Fortsetzung ist eindeutig bestimmt, da w schon auf einer in F' dichten Menge F_1' definiert ist. Wegen (β) und der Stetigkeit von g gilt dann $\overline{w}(p',t)\geqq g(p',t)$ für alle $p'\in F'$ und $t\in T$, sowie $|\overline{w}(p',t)|\leqq H_k(p')$ für $t\in M_k$ und $p'\in F'$.

(6) Für $p'\in U_k:=\{p'\in F': H_k(p')\leqq 1\}$ und $f\in K_S$ ist

$$B\big(f,(\chi_{M_k}\cdot h)\otimes p'\big)=\int_{M_k} h\,p' f\,dm\leqq \|h\|\cdot H_k(p')\,m(M_k).$$

Mithin liegt $(\chi_{M_k}\cdot h)\otimes p'$ in $\|h\|\cdot H_k(p')\cdot m(M_k)\cdot K_S^0$ und damit ist $\big|W\big((\chi_{M_k}\cdot h)\otimes p'\big)\big|\leqq \|h\|\cdot H_k(p')\cdot m(M_k)$. Daraus folgt, daß $W\big((\chi_{M_k} h)\otimes p'\big)$ bei festem h eine in p' stetige Funktion ist.

Andererseits ist wegen $|\int(\chi_{M_k} h)\,\overline{w}(p',t)\,dm|\leqq m(M_k)\cdot\|h\|\cdot H_k(p')$ die Funktion $p'\to\int \chi_{M_k} h\,\overline{w}(p',t)\,dm$ ebenfalls stetig in p' und stimmt mit $W\big((\chi_{M_k} h)\otimes p'\big)$ auf der in F' dichten Menge F_1' überein. Es ist also $W\big((\chi_{M_k} h)\otimes p'\big)=\int \chi_{M_k} h\,\overline{w}(p',t)\,dm$ für alle $p'\in F'$.

(7) Durch $m_{p',h}(M):=W\big((\chi_M h)\otimes p'\big)$ wird eine additive endlichwertige Mengenfunktion auf $\mathfrak{K}$ definiert. Wie in Beweisteil (2) zeigt man, daß $m_{p',h}$ σ-additiv ist. Wir können also

$$W(h\otimes p')=m_{p',h}(T)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} m_{p',h}(M_k)=\lim_{n\to\infty}\int\sum_{k=1}^{n}\chi_{M_k} h\,\overline{w}(p',t)\,dm$$

$$=\int\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\chi_{M_k} h\,\overline{w}(p',t)\,dm=\int h(t)\,\overline{w}(p',t)\,dm$$

schließen.

Die Darstellung $W(h\otimes p')=\int h(t)\,\overline{w}(p',t)\,dm$ gilt also für alle $p'\in F'$ und $h\in L^\infty$.

(8) Bei festem $t\in T$ ist $\overline{w}(p',t)$ eine stetige lineare Funktion auf F'. Also ist $\overline{w}(p',t)=p' f(t)$ mit einem Element $f(t)$ aus F. Da $\overline{w}(p',t)$ integrierbar ist, ist $f(t)$ eine integrierbare Vektorfunktion. Wegen $p' f(t)\geqq g(p',t)$ für alle p' und t ist $f(t)\in S(t)$ für alle t. Mit der Bedingung (6.2b) folgt $f\in L_F^\alpha$. Es ist also $W(h\otimes p')=\int h\,p' f\,dm=B(f,h\otimes p')$ mit einem $f\in L_F^\alpha$. Daraus folgt $W(d)=B(f,d)$ für alle $d\in D$. Damit ist die Behauptung bewiesen. ⌟

Die Zulässigkeit der Topologie $\mathfrak{T}$ können wir nun dazu verwenden zu zeigen, daß die Mengen $K_S\in\mathfrak{S}$ in L_F^α kompakt sind.

(6.5) Satz. *Wenn F' separabel ist, dann sind die Mengen $K_S\in\mathfrak{S}$ kompakt in L_F^α bezüglich der Topologie $\sigma(L_F^\alpha, D)$.*

Beweis. Sei $K_S \in \mathfrak{S}$. Die zugehörige mengenwertige Funktion habe die Stützfunktion g. Dann ist, wie wir im vorigen Satze gesehen haben, K_S^0 Nullumgebung in einer Topologie $\mathfrak{T}$ auf D, die zulässig ist bezüglich des Dualsystems $\langle L_F^\alpha, D\rangle$. Nach dem Satz von Alaoglu-Bourbaki (siehe hierzu bei Köthe [13], S. 250) ist die Polare einer Nullumgebung schwach kompakt. Um unsere Behauptung zu beweisen, genügt es also $K_S = (K_S^0)^0$ zu zeigen.

Sei $f_0 \in L_F^\alpha$ ein Element aus $(K_S^0)^0$. Dann ist $B(f_0, d) \leqq 1$ für alle $d \in K_S^0$. Es ist $p' f_0(t) \geqq g(p', t)$ bei festem $p' \in F'$ m-fast überall. Nehmen wir nämlich an, es sei $p' f_0(t) < g(p', t)$ für die t aus einer Menge M_0 positiven Maßes, dann gibt es wegen $g(p', t) \leqq 0$ eine reelle Zahl $\lambda < 0$, so daß

$$\lambda \int_{M_0} g(p', t)\, dm \leqq 1 < \lambda \int_{M_0} p' f_0(t)\, dm$$

ist. Dann besteht für alle $f \in K_S$ die Ungleichung $B(f, \lambda\chi_{M_0} \otimes p') = \lambda \int_{M_0} p' f\, dm \leqq \lambda \int_{M_0} g(p', t)\, dm \leqq 1$, woraus folgt, daß $\lambda\chi_{M_0} \otimes p'$ in K_S^0 liegt. Dann widerspricht aber $B(f_0, \lambda\chi_{M_0} \otimes p') = \lambda \int_{M_0} p' f_0(t)\, dm > 1$ der Voraussetzung, daß f_0 in $(K_S^0)^0$ liegt.

Es gibt eine Nullmenge N, so daß die Ungleichung $p' f_0(t) \geqq g(p', t)$ bei $t \notin N$ für alle p' aus einer abzählbaren in F' dichten Menge Q' gilt. Da $f_0(t)$ für jedes $t \in T$ ein Punkt von F ist, ist $p' f_0(t)$ stetig in p'. Da auch $g(p', t)$ stetig in p' ist, muß $p' f_0(t) \geqq g(p', t)$ für alle $p' \in F'$ gelten bei $t \notin N$. Wenn man f_0 auf N gleich 0 setzt, erhält man $f_0(t) \in S(t)$ für alle $t \in T$. Mithin liegt f_0 in K_S. Damit ist $(K_S^0)^0 \subset K_S$ gezeigt. Da die umgekehrte Inklusion stets gilt, besteht die Gleichheit. ⌟

Aus diesem Satz folgt nun leicht die angekündigte Aussage über die schwache Kompaktheit der Integralmenge.

(6.6) Satz. *Der Raum F' sei separabel und die mengenwertige Funktion S genüge den Voraussetzungen:*

a) *Für jedes $t \in T$ ist $S(t)$ eine nicht-leere abgeschlossene konvexe Teilmenge von F.*

b) *Es gibt eine Zerlegung $T = \sum_{k=1}^{\infty} M_k$ von T in meßbare Mengen M_k, so daß die Stützfunktionen $g(p', t)$ für $t \in M_k$ auf F' gleichgradig stetig sind.*

c) *Für jedes $p' \in F'$ ist $g(p', t)$ über T integrierbar.*

Dann ist $\int S\, dm$ eine nicht-leere, konvexe, und bezüglich der Topologie $\sigma(F'^*, F')$ kompakte Teilmenge von F'^*.

Beweis. Unter den angegebenen Voraussetzungen ist $\int S\, dm$ nicht leer nach (4.1). Es gibt also eine integrierbare S-Funktion s_0. Wir führen die Translation $S_0(t) := \{x - s_0(t) : x \in S(t)\}$ durch und erreichen damit, daß für jedes $t \in T$ der Nullpunkt in $S_0(t)$ liegt. Mithin erfüllt S_0 alle Bedingungen von (6.2). Es genügt zu zeigen, daß $\int S_0\, dm$ konvex und kompakt ist, da $\int S\, dm$ daraus durch eine Translation um den Vektor $\int s_0$ hervorgeht.

Die Menge K_{S_0} liegt in $\mathfrak{S}$ und ist damit nach (6.5) schwach kompakt. Die Abbildung $J: f \to \int f\, dm$, die L_F^α in F'^* abbildet, ist schwach stetig. Es ist nämlich für $\varepsilon > 0$ und $p' \in F'$ die Menge $\{f \in L_F^\alpha : p' \int f\, dm < \varepsilon\} = \{f \in L_F^\alpha : \int \chi_T p' f\, dm < \varepsilon\} = \{f \in L_F^\alpha : B(f, \chi_T \otimes p') < \varepsilon\}$ eine schwache Nullumgebung in L_F^α. Wegen $\int S_0\, dm =$

$J(K_{S_0})$ ist folglich $\int S_0\,dm$ schwach kompakt. Da K_{S_0} konvex ist und die Abbildung J linear, ist $\int S_0\,dm$ auch konvex. ┘

Von diesem Satz können wir zwei Varianten beweisen, die unter spezielleren Voraussetzungen schärfere Aussagen machen.

(6.7) Satz. *Der Raum F' sei ein* (A2)*-Raum und die mengenwertige Funktion S erfülle die Voraussetzungen:*

a) *Für jedes $t\in T$ ist $S(t)$ eine nicht-leere abgeschlossene konvexe Teilmenge von F.*

b) *Die Stützfunktion $g(p',t)$ von $S(t)$ ist für jedes feste $t\in T$ als Funktion von p' überall endlichwertig und stetig.*

c) *Für jedes $p'\in F'$ ist $g(p',t)$ über T integrierbar.*

Dann ist $\int S\,dm$ eine konvexe und bezüglich der Topologie $\sigma(F'^*, F')$ kompakte Teilmenge von F'^*.

Beweis. Wir führen (6.7) auf (6.6) zurück. Dazu zeigen wir, daß unter den gegebenen Voraussetzungen die Bedingung b) von (6.6) erfüllt ist.

Da F' ein (A2)-Raum ist, erfüllt F' auch das erste Abzählbarkeitsaxiom, d.h. es gibt eine abzählbare Nullumgebungsbasis $V_1, V_2, \ldots$. Diese Basis kann speziell so gewählt werden, daß $V_1\supset V_2\supset\cdots$ gilt. Es sei P' eine abzählbare in F' dichte Menge. Wir setzen $R_k := \bigcap_{p'\in V_k\cap P'} \{t\in T: |g(p',t)|<1\}$. Dieses R_k ergibt sich als Durchschnitt abzählbar vieler meßbarer Mengen, ist also selbst wieder meßbar. Da für jedes feste t die Funktion $g(p',t)$ stetig ist und die V_i eine Nullumgebungsbasis bilden, gibt es zu jedem t ein k, so daß $|g(p',t)|<1$ ist für alle $p'\in V_k$. Also ist $T=\bigcup_k R_k$. Aus $V_1\supset V_2\supset\cdots$ folgt $R_1\subset R_2\subset\cdots$. Nun definieren wir $M_1 := R_1$ und $M_k := R_k\setminus R_{k-1}$ für $k>1$. Bei beliebigem $\varepsilon>0$ gilt dann $|g(p',t)|<\varepsilon$ für alle p' aus εV_k und alle $t\in M_k$. Das zeigt die gleichgradige Stetigkeit. ┘

(6.8) Satz. *Wenn das Maß m keine nichtleeren Nullmengen besitzt, ist die Aussage von* (6.7) *auch ohne Separabilitätsvoraussetzungen an F' richtig.*

Beweis. Da m keine nichtleeren Nullmengen besitzt, ist $T=\bigcup_k M_k$ eindeutig zerlegbar in abzählbar viele Atome M_k, und auf jedem Atom ist $S(t)=S_k$ konstant. Die Bedingung b) von (6.2) ist also erfüllt.

In den vorstehenden Beweisen wurde Separabilität stets nur dazu verwendet nachzuweisen, daß sich die Ausnahmenullmengen nicht in unzulässiger Weise summieren. Wenn aber angenommen werden darf, daß diese Nullmengen alle leer sind, ist eine solche Vorsicht überflüssig. ┘

Das Ergebnis (6.6) können wir nun dazu benützen, einen Satz von Richter zu verallgemeinern. Dazu vereinbaren wir folgende Bezeichnung:

Es sei K eine abgeschlossene konvexe Teilmenge von F und n eine natürliche Zahl. Ein Punkt $x\in K$ heiße ein *n-Randpunkt* von K, wenn es einen n-dimensionalen affinen Unterraum L von F gibt, so daß x Extremalpunkt von $L\cap K$ ist. Eine Menge $M\subset F$ heiße *n-abgeschlossen*, wenn sie alle n-Randpunkte ihrer abgeschlossenen konvexen Hülle enthält. Da für $n_1<n_2$ ein n_2-Randpunkt stets auch ein n_1-Randpunkt ist, ist jede n_1-abgeschlossene Menge auch n_2-abgeschlossen. Die Umkehrung davon gilt nicht.

(6.9) Satz. *F' sei ein* (AW)*-Raum. Die mengenwertige Funktion $S(t)$ erfülle folgende Voraussetzungen:*

a) *Es gibt eine meßbare Funktion $n(t)$, die Werte in der Menge der natürlichen Zahlen annimmt, so daß $S(t)$ für $t \in T$ stets $n(t)$-abgeschlossen ist.*

b) *Es gibt eine Zerlegung $T = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ von T in meßbare Mengen Q_k, so daß die Stützfunktionen $g(p', t)$ für $t \in Q_k$ auf F' gleichgradig stetig sind.*

c) *Für jedes feste $p' \in F'$ ist $g(p', t)$ über T integrierbar.*

Wenn dann das Maß m atomlos ist, ist die Menge $\int S\,dm$ konvex und kompakt in der Topologie $\sigma(F'^*, F')$ von F'^*.

Beweis. Wir wissen nach (6.6), daß $\int (S(t))^{ka}\,dm$ konvex und schwach kompakt ist. Der Satz ist also bewiesen, wenn $\int S\,dm = \int S^{ka}\,dm$ gezeigt wird.

Zu $r \in S^{ka}\,dm$ gibt es eine integrierbare Funktion s_0, die für jedes $t \in T$ der Bedingung $s_0(t) \in (S(t))^{ka}$ genügt, mit $r = \int s_0\,dm$. Wir führen die Translation $S_0(t) := \{x - s_0(t) : x \in S(t)\}$ durch. Dann ist $\int S_0 = \{x - r : x \in \int S\}$. Um also zu zeigen, daß r in $\int S$ liegt, genügt es nachzuweisen, daß der Nullpunkt in $\int S_0$ enthalten ist.

Wir zerlegen T in die Mengen $M_k := \{t \in T : n(t) = k\}$ für $k = 1, 2, \ldots$. Für das Folgende sei k fest. L_k sei ein k-dimensionaler linearer Teilraum von F. Der zu L_k orthogonale Raum in F' ist $O_k := \{p' \in F' : p'x = 0$ für alle $x \in L_k\}$. Da F' ein (AW)-Raum ist, gibt es eine in O_k dichte Folge $q'_1, q'_2, \ldots$ von Elementen aus O_k. Damit ist $S_0(t) \cap L_k = S_0(t) \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} \{x \in F : q'_i x = 0\}$. Weil S_0 k-abgeschlossen ist, hat $S_0 \cap L_k$ dieselben Extremalpunkte wie $(S_0)^{ka} \cap L_k$ und deshalb auch dieselbe Stützfunktion $h_k(p', t)$. Mithin können wir diese Stützfunktion durch mehrfache Anwendung der Formel von (2.6) berechnen.

Wir zeigen durch Induktion, daß die Stützfunktion $g_l(p', t)$ von

$$S_0(t) \cap \bigcap_{i=1}^{l} \{x \in F : q'_i x = 0\}$$

für jedes feste $p' \in F'$ über M_k integrierbar ist und für jedes $t \in M_k$ stetig und endlichwertig auf ganz F'. Das ist für $l = 0$ klar nach Voraussetzungen b) und c). Sei das nun schon für $l-1$ bewiesen ($l \geqq 1$). Nach (2.6) und (2.10) ist, da g_{l-1} stetig ist, $g_l(p', t) = \sup_{\lambda \in R} g_{l-1}(p' + \lambda q'_l, t)$. Aus der Stetigkeit von g_{l-1} folgt wegen $g_l \geqq g_{l-1}$ und der Konkavität von g_l die Stetigkeit von g_l. Das Supremum wird über eine in λ stetige Funktion genommen. Man braucht also das Supremum nur über die rationalen λ zu bilden. Also kann g_l durch eine abzählbare Grenzoperation aus dem meßbaren g_{l-1} gewonnen werden. Folglich ist g_l wieder meßbar. Da gemäß $g_{l-1}(p', t) \leqq g_l(p', t) \leqq -g_{l-1}(-p', t)$ die Funktion g_l zwischen zwei über M_k integrierbare Funktionen eingeschlossen werden kann, ist $g_l(p', t)$ integrierbar über M_k.

Für $h_k(p', t) = \sup_{l=1,2,\ldots} (g_l(p', t))$ folgt mit analogen Schlüssen, daß $h_k(p', t)$ überall endlich und stetig in p' ist und über M_k integrierbar.

Für jedes $t \in M_k$ ist $S_0(t) \cap L_k$ eine eckenabgeschlossene Teilmenge des k-dimensionalen Raumes L_k. Dieser ist als separierter lokalkonvexer Raum topologisch isomorph zum k-dimensionalen euklidischen Raum R^k. Der Dualraum L'_k von L_k ist isomorph zu F'/O_k. Man kann L'_k mit F'/O_k identifizieren. Die Elemente von L'_k sind also gewisse Klassen $\bar{p}'$ von Elementen aus F'. Den Wert $\bar{p}' x$ des linearen Funktionals $\bar{p}'$ aus L'_k auf einem Element $x \in L_k$ erhält man, indem man ein beliebiges p' aus der Klasse $\bar{p}'$ nimmt und den Wert $p' x$ berechnet. Dieser Wert hängt nicht von der speziellen Wahl von p' aus $\bar{p}'$ ab. Für die Stützfunktion von $S_0 \cap L_k$ erhalten wir, wenn wir diese Mengen auffassen als Teilmengen des euklidischen Raumes L_k mit dem Dualraum L'_k, die Werte

$$\bar{h}_k(\bar{p}', t) := \inf_{x \in S_0 \cap L_k} \bar{p}' x = \inf_{x \in S_0 \cap L_k} p' x = h_k(p', t)$$

mit einem p' aus der Klasse $\bar{p}'$.

Aus dem, was wir über h_k abgeleitet haben, folgt, daß $\bar{h}_k$ überall endliche Werte annimmt und bei festem $\bar{p}' \in L'_k$ über M_k integrierbar ist.

Wenn das Maß m atomlos ist, kann man aus dem Satz von Richter ([15] und [12]) schließen, daß $\int_{M_k} (S_0 \cap L_k)\, dm$, aufgefaßt als Teilmenge von L_k, konvex und kompakt ist. Es gibt also insbesondere eine für $t \in M_k$ definierte und über M_k integrierbare Funktion $s_k(t)$, die Werte aus $S_0(t) \cap L_k$ annimmt, mit $\int_{M_k} s_k\, dm = 0$. Integrierbar bedeutet hier, daß für jedes $\bar{p}' \in L'_k$ die reelle Funktion $\bar{p}' s_k(t)$ integrierbar ist. Da aber jedes $p' \in F'$ in einer Klasse $\bar{p}'$ liegt und $p' s_k(t) = \bar{p}' s_k(t)$ gilt, ist auch $p' s_k(t)$ integrierbar über M_k, und es ist $\int_{M_k} p' s_k(t)\, dm = \int_{M_k} \bar{p}' s_k(t)\, dm = 0$. Also ist die Funktion $s_k(t)$, aufgefaßt als Funktion mit Werten in F, schwach integrierbar über M_k mit dem Integralwert 0.

Wir setzen nun $s(t) := s_k(t)$ für $t \in M_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Dann ist s eine S-Funktion. Für jedes p' ist $p' s(t)$ meßbar und majorisiert durch $g(p', t) - p' s_0(t) \leqq p' s(t) \leqq -g(-p', t) - p' s_0(t)$. Die Schranken sind integrierbar. Mithin ist auch $p' s(t)$ integrierbar. Folglich ist s eine integrierbare Funktion. Es gilt $\int_T s\, dm = 0$. Damit ist gezeigt, daß 0 in $\int S_0\, dm$ und r in $\int S\, dm$ liegt. Da r beliebig aus $\int S^{ka}\, dm$ gewählt war, ist $\int S\, dm = \int S^{ka}\, dm$ bewiesen. $\lrcorner$

Wenn F ein endlichdimensionaler Raum ist, dann ist jede eckenabgeschlossene Menge auch n-abgeschlossen, wobei n die Dimension des Raumes ist. Da eine konkave im R^n definierte und endlichwertige Funktion automatisch stetig ist, ergibt sich der Satz von Richter [15] als Spezialfall von (6.9).

Literatur

1. Blackwell, D.: The range of certain vector integrals. Proc. Amer. math. Soc. **2**, 390–395 (1951).
2. Borges, R.: Ecken des Wertebereiches von Vektorintegralen. Math. Ann. **173**, 53–58 (1967).
3. Bourbaki, N.: Espaces vectoriels topologiques. Paris: Hermann 1955.
4. – Intégration. Paris: Hermann 1959.
5. Castaing, Ch.: Sur une extension du théorème de Lyapounov. C. r. Acad. Sci. Paris **260**, 3838–3841 (1965).
6. Dieter, U.: Optimierungsaufgaben in topologischen Vektorräumen I: Dualitätstheorie. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **5**, 89–117 (1966).
7. Dunford, N., Schwartz, J.: Linear operators. New York: Interscience 1958.

8. Halmos, P.: The range of a vector measure. Bull. Amer. math. Soc. **54**, 416–421 (1948).
9. Hörmander, L.: Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans un espace localement convexe. Ark. Mat. **3**, 181–186 (1955).
10. Karlin, S.: Mathematical methods and theory in games, programming, and economics. London-Paris: Pergamon 1959.
11. Kellerer, H. G.: Zur Konvexität des Wertebereiches normaler Maße. Arch. der Math. **12**, 301–306 (1961).
12. – Bemerkung zu einem Satz von H. Richter. Arch. der Math. **15**, 204–207 (1964).
13. Köthe, G.: Topologische lineare Räume. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1960.
14. Ljapunoff, A.: Sur les fonctions-vecteurs complètement additives. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. **4**, 465–478 (1940).
15. Richter, H.: Verallgemeinerung eines in der Statistik benötigten Satzes der Maßtheorie. Math. Ann. **150**, 85–90, 440–441 (1963).

Dr. R. Wegmann
Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik
D–8000 München 23
Föhringer Ring 6

(Eingegangen am 15. Dezember 1968)