Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
57, 481–494 (1981)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Points multiples des trajectoires de processus Gaussiens

André Goldman

Section d'Analyse Fonctionnelle et Probabilités, Département de Mathématiques,
Université Lyon I, 43, bd du 11 novembre 1918, F-69622 Villeurbanne Cedex

Introduction

Soit $H=(X_t)$, $t\in T$, un processus stochastique séparable et séparé, les variables aléatoires étant à valeurs dans un espace euclidien $\mathbb{R}^p$. Pour tout cardinal k désignons par $M_k^p=\{x\in\mathbb{R}^p; \exists t_1, \dots, t_k$, deux à deux distincts tels que $X_{t_i}=x\}$ l'ensemble des points de multiplicité k.

Les premières investigations sur la probabilité de l'événement $M_k^p \neq \emptyset$, c'est-à-dire sur la probabilité pour que les trajectoires du processus admettent des points de multiplicité k, furent entreprises dans le cadre du mouvement brownien (à valeurs dans $\mathbb{R}^p$) indexé sur un intervalle de la droite numérique par A. Dvoretzky, P. Erdös, S. Kakutani, P. Lévy, S.J. Taylor, [3–6] et [12], l'essentiel du phénomène se résumant comme suit:

a) Pour $p \geqq 4$, $k \geqq 2$, les ensembles M_k^p sont presque-sûrement vides;

b) Dans le cas $p=3$, presque-toutes les trajectoires ont des points doubles ($P(M_2^3 \neq \emptyset)=1$) et sont exemptes de points triples ($P(M_3^3 \neq \emptyset)=0$);

c) Presque toutes les trajectoires du mouvement brownien plan ($p=2$) ont des points de multiplicité égale à $2^{\aleph_0}$ (la puissance du continu).

Les techniques mises en oeuvre s'appuient essentiellement sur deux propriétés fondamentales du mouvement brownien: l'indépendance des accroissements et le caractère markovien, cette dernière rendant possible la mesure de la «dimension» d'une portion de trajectoire.

Dès lors l'essentiel des recherches s'est orienté vers diverses adaptations de cette méthode à d'autres types de processus non nécessairement gaussiens, mais présentant des caractéristiques analogues à celles que nous venons de mentionner. Citons par exemple les travaux, J. Hawkes [9] et W.J. Hendricks [10] constituant par ailleurs une excellente source bibliographique.

Le travail de N. Kôno [11] paru en 1978 fait exception à cette règle; en effet, il concerne les processus gaussiens (X_t^p), $t\in\mathbb{R}^N$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, constitués de p copies indépendantes du processus gaussien réel (X_t), $t\in\mathbb{R}^N$, caractérisé par la relation $E(X_t-X_s)^2=\|t-s\|^{2\alpha}$, $0<\alpha<1$, la norme envisagée étant euclidienne. Le résultat obtenu par N. Kôno s'énonce sous la forme suivante:

0044-3719/81/0057/0481/$02.80

a) Avec le choix $\alpha p > 2N$, les trajectoires du processus n'admettent pas de points doubles;

b) Avec le choix $\alpha p < 2N$, presque toutes les trajectoires admettent des points doubles.

Ce théorème a constitué le point de départ de notre propre recherche; partant d'un principe de démonstration différent nous montrons que:

a′) Avec le choix $\alpha p > kN/k-1$, les trajectoires du processus n'admettent pas de points de multiplicité k;

b′) Avec le choix $\alpha p < kN/k-1$ presque toutes les trajectoires admettent des points de multiplicité k.

Ces résultats suggèrent fortement que les propriétés d'entropie du processus ne doivent pas être entièrement étrangères au problème. Plus précisément, si $(X_t) = H \hookrightarrow L^2(\Omega, \Sigma, P)$ est un processus gaussien réel, séparé et compact (pour la topologie hilbertienne), si H^p est le processus à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ constitué de p copies indépendantes de H et si $N(H, \varepsilon)$ désigne le nombre minimal de boules de rayon ε nécessaire pour recouvrir H, alors les énoncés a′) et b′) ont comme «équivalents» naturels:

a″) Dans le cas $\limsup_{n\to+\infty} (\log_2 N(H, 2^{-n})/n) < (k-1)p/k$, on a $P(M_k^p \neq \emptyset) = 0$;

b″) Dans le cas $\limsup_{n\to+\infty} (\log_2 (N(H, 2^{-n})/n) > (k-1)p/k$, on a $P(M_k^p \neq \emptyset) > 0$.

Seul le point a″), dans le cas $k=2$, est démontré pour l'instant (au paragraphe 3, les deux premiers paragraphes étant consacrés à la preuve des théorèmes a′) et b′)); néanmoins, nous conjecturons la validité de toutes ces relations.

Les cas $\alpha p = kN/k-1$ (resp. $\limsup_{n\to+\infty} (\log_2 N(H, 2^{-n})/n) = (k-1)p/k$) n'a pas été abordé dans ce travail; nous ignorons entièrement (sauf dans le cas du mouvement brownien indexé sur un intervalle) s'il permet de conclure quant à la probabilité de l'événement $M_k^p \neq \emptyset$.

1. Conditions assurant l'absence de points de multiplicité égale à $k \geqq 2$, $k \in \mathbb{N}$

Dans tout ce paragraphe $H = (X_t)$ est un processus gaussien réel indexé sur $\mathbb{R}^N$, caractérisé par les relations $E(X_t - X_s)^2 = \|t-s\|^{2\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $s, t \in \mathbb{R}^N$. Comme nous l'avons déjà indiqué, on désigne par (X_t^p), $p \geqq 2$, $t \in \mathbb{R}^N$ le processus gaussien constitué de p copies indépendantes de H.

Considérons k pavés fermés (bornés) $P_1, \ldots, P_k$ de $\mathbb{R}^N$, deux à deux disjoints. Pour simplifier l'écriture nous noterons

$$f_k(\varepsilon, \omega) = \mu_0 \{(t_1, \ldots, t_k) \in \prod_{i=1}^k P_i;\ \|X_{t_1}^p(\omega) - X_{t_i}^p(\omega)\| \leqq \varepsilon,\ 2 \leqq i \leqq k\},$$

puis $p(\varepsilon, \delta) = P\{\omega \in \Omega; f_k(\varepsilon, \omega) \geqq \delta\}$; nous avons désigné par μ_0 la mesure de Lebesgue de l'espace $(\mathbb{R}^N)^k$.

La variable aléatoire $f_k(\varepsilon, \omega)$ mesure la fraction (de temps) du pavé $P = \prod_{i=1}^k P_i$ durant laquelle le vecteur $(X_{t_1}^p(\omega) - X_{t_i}^p(\omega))$, $2 \leqq i \leqq k$, «séjourne» dans la pavé $[B(0, \varepsilon)]^{k-1}$.

Lorsque une trajectoire $\omega \in \Omega$ admet un point de multiplicité k correspondant à des instants (t_i), $1 \leqq i \leqq k$, appartenant respectivement aux pavés (P_i), $1 \leqq i \leqq k$, il est possible, grâce à la connaissance du module de continuité uniforme de la trajectoire ω, d'estimer (pour ε suffisamment petit) la quantité $f(\varepsilon, \omega)$; toute notre démonstration repose sur cette remarque.

Commençons par évaluer $p(\varepsilon, \delta)$.

(1.1) **Lemme.** *Il existe une constante $c>0$ telle que l'on ait*

$$p(\varepsilon, \delta) \leqq c\,\varepsilon^{(k-1)p}/\delta \text{ pout tout } \varepsilon>0, \delta>0.$$

Preuve. Le déterminant $D(t_1, t_2, \ldots, t_k) = |(E(X_{t_1} - X_{t_i})(X_{t_1} - X_{t_j}))|$, $2 \leqq i, j \leqq k$ (en abrégé $D(t)$, $t=(t_i)$, $1 \leqq i \leqq k$) est une fonction continue sur l'espace $(\mathbb{R}^N)^k$ ne s'annulant pas sur le pavé $P = \prod_{i=1}^{k} P_i$; ce dernier point est bien connu depuis le travail (13) de I.J. Schoenberg. Le théorème de Fubini permet alors d'écrire

$$\int f(\varepsilon, \omega)\, dP(\omega) = \int_P (1/(2\pi D(t))^{(k-1)p/2}) \left(\int_{\|x_i\| \leqq \varepsilon} \exp\left(-\frac{\langle x, Dx \rangle}{2}\right) dx_1 \ldots dx_{k-1}\right) d\mu_0(t) \leqq c\,\varepsilon^{(k-1)p},$$

et l'inégalité de Čebyšev donne immédiatement le résultat annoncé.

(1.2) **Lemme.** *Pour tout nombre $0<\delta<1$ la relation suivante est satisfaite:*

$$P\left(\bigcup_{M \geqq 1} \bigcap_{m \geqq M} (\omega; f(2^{-m}, \omega) \leqq 2^{-mp(k-1)\delta})\right) = 1.$$

Preuve. Ce résultat découle du précédent. En effet, d'après (1.1) nous avons $P(\omega; f(\varepsilon, \omega) \geqq \varepsilon^{p\delta(k-1)}) \leqq c\,\varepsilon^{(k-1)p(1-\delta)}$, il suffit donc d'appliquer la partie triviale du lemme de Borel-Cantelli.

Abordons maintenant la preuve du point a').

(1.3) **Théorème.** *Sous la condition $\alpha p > kN/k-1$, les trajectoires du processus H^p n'admettent pas (presque-sûrement) de points de multiplicité k.*

Preuve. Fixons un nombre réel $c>0$ satisfaisant la relation $\alpha p > (1+2c)kN/k-1$; en vertu du lemma (1.2), l'ensemble $\Omega_0 = \bigcup_{M \geqq 1} \bigcap_{m \geqq M} (\omega; f(2^{-m}, \omega) \leqq 2^{-m(k-1)p(1+c)/(1+2c)})$ est de mesure égale à un.

Par ailleurs, pour tout entier $n \geqq 1$, il existe une constante c_n telle que l'on ait $E(\|X_t^p - X_s^p\|^{2n}) = c_n \|t-s\|^{2n\alpha}$; il en résulte classiquement (théorème de Kolmogoroff) que pour tout $\varepsilon>0$, les trajectoires du processus H^p sont (presque-sûrement) lipschitziennes d'ordre $\alpha - \varepsilon$. Plus précisément pour (presque) toute trajectoire $\omega \in \Omega$, il existe des constantes $\eta(\omega)$, $c_\varepsilon > 0$ telles que la condition $t, s \in \bigcup_{i=1}^{k} P_i$, $\|t-s\| \leqq \eta(\omega)$ implique

$$\|X_t^p(\omega) - X_s^p(\omega)\| \leqq c_\varepsilon \|t-s\|^{\alpha-\varepsilon}.$$

Supposons maintenant qu'une trajectoire ω admette un point de multiplicité k à des instants $t_1^0, \ldots, t_k^0$ situés respectivement dans les intérieurs des pavés $P_1, \ldots, P_k$; on a donc $X^p_{t_1^0}(\omega) = \ldots = X^p_{t_k^0}(\omega)$.

Ainsi si $B(t_i^0, 2^{-m(1+c)/\alpha})$, $1 \leqq i \leqq k$ désignent les boules euclidiennes de l'espace $\mathbb{R}^N$, centrées aux points (t_i^0), il existe deux constantes $\eta(\omega)$ et $c > 0$ telles que l'on ait $\|X^p_{t_1}(\omega) - X^p_{t_i}(\omega)\| \leqq c 2^{-m}$, pour tout choix $(t_1, \ldots, t_k) \in \prod_{i=1}^{k} B(t_i^0, 2^{-m(1+c)/\alpha})$ et tout $m \geqq 1$ vérifiant l'inégalité $2^{-m(1+c)/\alpha} \leqq \eta(\omega)$.

Finalement, le volume de la boule $B(t_i^0, 2^{-m(1+c)/\alpha})$ étant égal à $V(N) 2^{-m(1+c)N/\alpha}$, ($V(N)$-volume de la boule unité de $\mathbb{R}^N$) nous en déduisons qu'il existe deux constantes $M \geqq 1$, $c > 0$ telles que l'on ait:

$$f(c 2^{-m}, \omega) \geqq 2^{-m(1+c)Nk/\alpha} > 2^{-mp(k-1)(1+c)/1+2c},$$

pour tout entier $m \geqq M$.

Il résulte de tout ceci que l'ensemble des trajectoires admettant des points de multiplicité k correspondant à des instants situés respectivement dans les intérieurs des pavés $P_1, \ldots, P_k$ est inclus dans l'ensemble $\Omega \setminus \Omega_0$. Il est donc de mesure nulle. En conclusion l'événement $M_k^p \neq \emptyset$ (s'écrivant comme réunion dénombrable d'événements du type précédent) est de probabilité nulle également, le théorème est donc complètement démontré.

On notera que l'estimation donnée par le lemme (1.2) est peu précise et cesse d'ailleurs d'être efficace dans le cas $\alpha p = kN/k-1$. Ainsi, par exemple, dans le cas du mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^4$, $N=1$, $p=4$, $\alpha=1/2$ et $k=2$, nous ne retrouvons pas le résultat de [3] (même en améliorant la précision des calculs intervenant dans (1.3) compte tenu de la relation

$$P(\limsup_{\substack{|t-s| \to 0 \\ t, s \in [0,1)}} (\|X_t^4 - X_s^4\| / (2\|t-s\| \log(1/\|t-s\|))^{1/2}) = 1) = 1).$$

En principe, pour évaluer avec exactitude $p(\varepsilon, \delta)$, *il suffirait de calculer tout d'abord l'intégrale* $\int \exp(-f(\varepsilon, \omega)/\delta)^m \, dP(\omega)$, $m \in \mathbb{N}$, en développant l'exponentielle en série puis passer à la limite en faisant tendre m vers l'infini. Pratiquement, on se trouve rapidement confronté à de sérieuses difficultés de calculs.

2. Conditions assurant l'existence de points de multiplicité k, $k \in \mathbb{N}$

Contrairement aux conventions du paragraphe précédent, nous envisagerons tout d'abord le cas général d'un processus de Gauss séparable et séparé à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, soit $(X_t^p) = H^p \hookrightarrow L^2(\Omega, \Sigma, P; \mathbb{R}^p)$ en explicitant de larges conditions assurant l'existence de points multiples.

Nous supposerons que H^p est compact (pour la topologie induite par celle de $L^2(\Omega, \Sigma, P; \mathbb{R}^p)$), que les trajectoires du processus sont continues et qu'il existe sur H^p une probabilité borélienne (donc de Radon) notée μ.

Fixons k sous-ensembles $P_1, \ldots, P_k$ de H^p deux à deux disjoints et fermés; on conviendra des notations suivantes:

1) $f_k(\varepsilon,\omega)=\left(\bigotimes_1^k \mu\right)\Big\{(t_1,\dots,t_k)\in\prod_{i=1}^k P_i,$ vérifiant $\|X^p_{t_1}(\omega)-X^p_{t_i}(\omega)\|\leqq\varepsilon$ pour tout i, $2\leqq i\leqq k\Big\}$;

2) $\Omega^k_\varepsilon=(\omega\in\Omega; f_k(\varepsilon,\omega)>0)$;

3) $\Omega^k_0=\bigcap_{\varepsilon>0}\Omega^k_\varepsilon$;

4) $D^p(t_1,\dots,t_k)=D^p(t)=|E(X^{(l)}_{t_1}-X^{(l)}_{t_i})(X^{(r)}_{t_1}-X^{(r)}_{t_j})|$, $2\leqq i,j\leqq k$, $1\leqq l,r\leqq p$, $t=(t_1,\dots,t_k)\in(H^p)^k$ désigne le déterminant canoniquement associé au vecteur aléatoire $(X^p_{t_1}-X^p_{t_i})=(X^{(1)}_{t_1}-X^{(1)}_{t_i},\dots,X^{(p)}_{t_i}-X^{(p)}_{t_i})$, $2\leqq i\leqq k$;

5) $D^p(t_1,\dots,t_k;\ t'_1,\dots,t'_k)=D^p(t,t')=|E(X^{(l)}_{t^u_1}-X^{(l)}_{t^u_i})(X^{(r)}_{t^v_1}-X^{(r)}_{t^v_j})|$, $2\leqq i,\ j\leqq k$, $u,v=1,2$, $t^1_i=t_i$, $t^2_i=t'_i$, $1\leqq l,r\leqq p$, $t=(t_1,\dots,t_k)$, $t'=(t'_1,\dots,t'_k)$ désigne le déterminant associé au vecteur aléatoire $((X^p_{t_1}-X^p_{t_i}),(X^p_{t'_1}-X^p_{t'_j}))$, $2\leqq i,j\leqq k$.

De même, si $H=(X_t)$, $t\in\mathbb{R}^N$ est un processus gaussien réel, nous noterons par:

6) $D(t_1,\dots,t_k)=D(t)=|E(X_{t_1}-X_{t_i})(X_{t_1}-X_{t_j})|$, $2\leqq i,j\leqq k$, le déterminant associé au vecteur $(X_{t_1}-X_{t_i})$, $2\leqq i\leqq k$, et $D(t_1,\dots,t_k;\ t'_1,\dots,t'_k)=|E(X_{t^u_1}-X_{t^u_i})(X_{t^v_1}-X_{t^v_j})|$, $2\leqq i,j\leqq k$, $u,v=1,2$, $t^1_i=t_i$, $t^2_i=t'_i$, le déterminant associé au vecteur aléatoire $((X_{t_1}-X_{t_i}),(X_{t'_1}-X_{t'_j}))$, $2\leqq i,j\leqq k$.

7) $Q(t_1,\dots,t_k;t'_1,\dots,t'_k,\lambda_2,\dots,\lambda_k,\eta_2,\dots,\eta_k)=Q(t,t',\lambda,\eta)$

$$=\sum_{i,j=2}^k[E(X_{t_1}-X_{t_i})(X_{t_1}-X_{t_j})]\,\lambda_i\lambda_j+\sum_{i,j=2}^k[E(X_{t_1}-X_{t_i})(X_{t'_1}-X_{t'_j})]\,\lambda_i\eta_j$$
$$+\sum_{i;j=2}^k[E(X_{t'_1}-X_{t'_i})(X_{t'_1}-X_{t'_j}))]\,\eta_i\eta_j,\quad \lambda=(\lambda_2,\dots,\lambda_k),\quad \eta=(\eta_2,\dots,\eta_k),$$

$\lambda,\eta\in\mathbb{R}^{k-1}$, la forme quadratique associée à $D(t,t')$.

(2.1) **Proposition.** *Toute trajectoire appartenant à l'ensemble Ω^k_0 admet des points de multiplicité k.*

Preuve. Fixons une trajectoire $\omega\in\Omega^k_0$; pour tout entier $m\geqq 1$ il existe une suite $(t^m_1,\dots,t^m_k)\in\prod_{i=1}^k P_i$ vérifiant $\|X^p_{t^m_1}(\omega)-X^p_{t^m_i}(\omega)\|\leqq 2^{-m}$, $2\leqq i\leqq k$.

Soit $(t^{m_n}_1)$, $n\geqq 1$, une sous-suite extraite de (t^m_1), $m\geqq 1$, et convergente vers un point $t_1\in P_1$. Extrayons à nouveau de chaque suite $(t^{m_n}_i)$, $n\geqq 1$, $2\leqq i\leqq k$, une sous-suite convergente vers un point $t_i\in P_i$. La continuité des trajectoires assure l'égalité $X^p_{t_1}(\omega)=\dots=X^p_{t_k}(\omega)$.

En conclusion, pour qu'il existe, avec une probabilité non nulle, des points de multiplicité k, il suffit que la probabilité $P(\Omega^k_0)=\lim_{\varepsilon\to 0}P(\Omega^k_\varepsilon)$ soit non nulle. Dans le même ordre d'idées, on peut donner un critère assurant l'existence de points de multiplicité dénombrable (la démonstration, analogue à la précédente, étant omise).

(2.2) **Proposition.** *Fixons une suite (P_i), $i\geqq 1$, de sous-ensembles fermés deux à deux disjoints de H^p. Pour qu'il existe avec une probabilité non nulle des points de multiplicité dénombrable il suffit que l'événement suivant soit de mesure inérieure non nulle:*

$$A=\{\omega\in\Omega;\ \exists(\varepsilon_n(\omega)),n\geqq 1,\ \textit{telle que}\ \varepsilon_n(\omega)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(\varepsilon_n(\omega),\omega)>0\}.$$

Le théorème que nous proposons actuellement constitue un moyen pratique d'investigation.

(2.3) **Théorème.** *Les deux conditions suivantes assurent l'existence avec une probabilité non nulle des points de multiplicité k correspondant à des instants appartenant respectivement aux ensembles* (P_i), $1\leqq i\leqq k$.

1. Le déterminant $D^p(t)$ *ne s'annule en aucun point* $t\in P=\prod_{i=1}^{k} P_i$;

2. La fonction $(t,t')\to 1/(D^p(t,t'))^{1/2}$ *est intégrable sur le pavé* $P\times P$ *pour la mesure produit* $\left(\bigotimes_1^k \mu\right)\otimes\left(\bigotimes_1^k \mu\right)$.

Preuve. Fixons un nombre réel $\varepsilon>0$ et un entier $m\geqq 1$; l'inégalité élémentaire $\int \exp(-f_k(\varepsilon,\omega)/m\,\varepsilon^{(k-1)p})\,dP(\omega)\geqq 1-P(\Omega_\varepsilon^k)$ conduit sans difficulté aux majorations:

$$\begin{aligned}
P(\Omega_\varepsilon^k)&\geqq(1/m\,\varepsilon^{(k-1)p})\int f_k(\varepsilon,\omega)\,dP(\omega)-(1/2m^2\,\varepsilon^{2(k-1)p})\int(f_k(\varepsilon,\omega))^2\,dP(\omega)\\
&=(1/m)\{(1/\varepsilon^{(k-1)p})\int_P(1/(2\pi)^{p(k-1)/2}(D^p(t))^{1/2})\Big(\int_{\substack{x_i\in\mathbb{R}^p\\ \|x_i\|\leqq\varepsilon}} e^{-\frac{\langle x,Dx\rangle}{2}}\,dx_1\\
&\quad\dots dx_{k-1}\Big)\,d\mu(t_1)\dots d\mu(t_k)-(1/2m\,\varepsilon^{2(k-1)p})\iint_{P\times P}(1/(2\pi)^{(k-1)p}(D^p(t,t'))^{1/2})\\
&\quad\cdot\Big(\int_{\|x_i\|\leqq\varepsilon} e^{-\frac{\langle x,D'x\rangle}{2}}\,dx_1\dots dx_{2(k-1)}\Big)\,d\mu(t_1)\dots d\mu(t_k)\,d\mu(t'_1)\dots d\mu(t'_k)\}.
\end{aligned}$$

On remarquera que l'hypothèse b) implique en particulier la non-dégénerescence $\left(\bigotimes_1^{2k}\mu \text{ presque-partout}\right)$ de la mesure de Gauss associée au vecteur aléatoire $(X_{t_1}-X_{t_i},X_{t'_1}-X_{t'_j})$, $2\leqq i,j\leqq k$; ainsi, en faisant converger ε vers zéro, nous en déduisons l'inégalité valable pour tout $m\geqq 1$:

$$\begin{aligned}
P(\Omega_0^k)=\lim_{\varepsilon\to 0}P(\Omega_\varepsilon^k)&\geqq\frac{1}{m}\{(1/(2\pi)^{(k-1)p/2})\int_P(1/(D^p(t))^{1/2})\,d\mu(t_1)\dots d\mu(t_k)\\
&\quad-(1/m(2\pi)^{(k-1)p})\iint_{P\times P}(1/(D^p(t,t'))^{1/2}\,d\mu(t_1)\dots d\mu(t_k)\,d\mu(t'_1)\dots d\mu(t'_k)\}.
\end{aligned}$$

Pour m suffisamment grand, le terme de droite est strictement positif, la conclusion du théorème en découle (avec la proposition (2.1)).

Abordons maintenant le cas particulier d'un processus $H^p=(X_t^p)$, $t\in\mathbb{R}^N$, associé au processus gaussien réel $H=(X_t)$, $t\in\mathbb{R}^N, E(X_t-X_s)^2=\|t-s\|^{2\alpha}$, $0<\alpha<1$.

(2.4) **Théorème.** – *Sous la condition* $\alpha p<kN/k-1$, *presque toutes les trajectoires du processus* H^p *admettent des points de multiplicité k.*

Preuve. Nous la décomposerons en plusieurs étapes; fixons des pavés $P_1^0,\dots,P_k^0$, bornés fermés dans $\mathbb{R}^N$ et deux à deux disjoints. On commencera par établir qu'il existe une suite $P_1, \dots, P_k$ de pavés respectivement inclus dans les précédents de sorte que la fonction $(t,t') \to 1/(D(t,t'))^{p/2}$ soit intégrable sur $\left(\prod_{i=1}^{k} P_i\right) \times \left(\prod_{i=1}^{k} P_i\right)$ (pour la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^N)^{2k}$).

On notera par $d(P_i)$ le diamètre du pavé P_i; cela étant:

(2.5) **Lemma.** *Il existe deux constantes $\varepsilon > 0$, $c > 0$, de sorte que la condition $\sup_{1 \leqq i \leqq k} d(P_i) \leqq \varepsilon$ implique l'inégalité*

$$D(t,t') \geqq c \prod_{i=2}^{k} (\|t_1 - t'_1\|^{2\alpha} + \|t_i - t'_i\|^{2\alpha}), \qquad \textit{pour tout } t, t' \in \prod_{i=1}^{k} P_i.$$

Preuve du lemme. Le cas $k=2$ est signalé par N. Kôno ((11), p. 178), il peut s'établir soit en explicitant le déterminant et en modifiant convenablement l'écriture à l'aide de la formule de Taylor, soit en calculant le minimum sur la sphère unité de la forme quadratique $Q(t_1, t_1, t'_1, t'_2, ,)$. Un calcul élémentaire permet de voir que ce minimum est égal à $m = (u - (u^2 + v^2)^{1/2})/2 + w$, avec les conventions d'écriture:

1) $u = \|t_1 - t_2\|^{2\alpha} - \|t'_1 - t'_2\|^{2\alpha}$;
2) $v = \|t_1 - t'_2\|^{2\alpha} + \|t'_1 - t_2\|^{2\alpha} - \|t_1 - t'_1\|^{2\alpha} - \|t_2 - t'_2\|^{2\alpha}$
3) $w = \|t'_1 - t'_2\|^{2\alpha}$.

La formule de Taylor permet de conclure facilement.

Nous supposerons dorénavant $k > 2$.

Les termes du déterminant $D(t,t')$ se présentent sous l'une des trois formes suivantes:

1) $\alpha_{ij} = \|t_1 - t_i\|^{2\alpha} + \|t_1 - t_j\|^{2\alpha} - \|t_i - t_j\|^{2\alpha}$;
2) $\beta_{ij} = \|t'_1 - t'_i\|^{2\alpha} + \|t'_1 - t'_j\|^{2\alpha} - \|t'_i - t'_j\|^{2\alpha}$;
3) $\gamma_{ij} = \|t_1 - t'_j\|^{2\alpha} + \|t'_1 - t_i\|^{2\alpha} - \|t_1 - t'_1\|^{2\alpha} - \|t_i - t'_j\|^{2\alpha}$;

Ordonnons les lignes et les colonnes du déterminant symétrique $D(t,t')$ de sorte que les coefficients β_{ij} et γ_{ij} soient consécutifs et remplaçons dans le tableau obtenu les termes $\|t_1 - t'_1\|^{2\alpha} + \|t_i - t'_i\|^{2\alpha}$ $2 \leqq i \leqq k$ (figurant dans γ_{ii}), respectivement par les variables réelles $x_2, \dots, x_k$. On notera par $D(t,t',x)$, $x = (x_2, \dots, x_k)$, le déterminant ainsi modifié.

$$D = \left| \begin{array}{ll} 2\|t_1 - t_2\|^{2\alpha}, & \|t_1 - t'_2\|^{2\alpha} + \|t'_1 - t_2\|^{2\alpha} - x_2, \\ \|t_1 - t'_2\|^{2\alpha} + \|t'_1 - t_2\|^{2\alpha} - x_2, & 2\|t'_1 - t'_2\|, \\ \dots\dots & \dots\dots, \\ \dots\dots & \dots\dots, \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{ll} \|t_1 - t_3\|^{2\alpha} + \|t_1 - t_2\|^{2\alpha} - \|t_2 - t_3\|^{2\alpha}, \dots & \dots\dots \\ \|t'_1 - t_3\|^{2\alpha} + \|t_1 - t'_2\|^{2\alpha} - \|t_1 - t'_1\|^{2\alpha} - \|t'_2 - t_3\|^{2\alpha}, \dots & \dots\dots \\ 2\|t_1 - t_3\|^{2\alpha}, \dots & \|t'_1 - t_3\|^{2\alpha} + \|t_1 - t'_3\|^{2\alpha} - x_3, \dots \\ \|t'_1 - t_3\|^{2\alpha} + \|t_1 - t'_3\|^{2\alpha} - x_3, \dots & 2\|t'_1 - t'_3\|^{2\alpha}, \quad \dots \end{array} \right|$$

Les vecteurs $t, t' \in P^0$ étant fixés, le déterminant $D(t,t',x)$ est un polynôme du second degré des variables $x_2, \ldots, x_k$, il s'écrit donc sous la forme:

$$*)\quad D(t,t',x) = D(t,t',0) + \left[\sum_{i=2}^{k} x_i \frac{\partial D(t,t',0)}{\partial x_i}\right] + \frac{1}{2}\left[\sum_{i_1, i_2=2}^{k} x_{i_1} x_{i_2} \frac{\partial^2 D(t,t',0)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}\right] + \ldots + x_2 \ldots x_k \frac{\partial^{k-1} D(t,t',0)}{\partial x_2 \ldots \partial x_{k-1}} + \frac{1}{k!}\left[\sum_{i_1, \ldots, i_k=2}^{k} x_{i_1} \ldots x_{i_k} \frac{\partial^k D(t,t',0)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}\right].$$

La dérivée partielle $\dfrac{\partial^{k-1} D(t,t',0)}{\partial x_2 \ldots \partial x_k}$ coïncide, à un multiple entier près, avec le déterminant obtenu en supprimant dans le tableau ci-dessus une ligne sur deux toutes les deux lignes et une colonne sur deux toutes les deux colonnes de sorte que, cette opération étant effectuée, les termes $t'_1, \ldots, t'_k$ étant remplacés respectivement par $t_2, \ldots, t_k$ et x étant pris égal à zéro, on se trouve en présence du déterminant $D = (\|t_1 - t_i\|^{2\alpha} + \|t_1 - t_j\|^{2\alpha} - \|t_i - t_j\|^{2\alpha})$, $2 \leqq i, j \leqq k$. Ce dernier est minoré sur le pavé $P^0 \times P^0$ par une constante positive non nulle (propriété mentionnée au cours de la preuve du lemma (1.1)). Ainsi grâce à la continuité de l'application $(t,t') \to \dfrac{\partial^{k-1} D(t,t',0)}{\partial x_2 \ldots \partial x_k}$, nous obtiendrons la majoration $\inf\limits_{t,t' \in P} \dfrac{\partial^{k-1} D(t,t',0)}{\partial x_2 \ldots \partial x_k} > 0$, pour un choix convenable des pavés $P_i \subset P_i^0$, $1 \leqq i \leqq k$, (c'est-à-dire de diamètres suffisamment petits).

Pour conclure, il nous suffira de voir que toutes les dérivées partielles $\dfrac{\partial^n D(t,t',0)}{\partial x_2^{n_1} \ldots \partial x_k^{n_k}}$, $n_1 + \ldots + n_k = n$, sont de la forme:

$$**)\qquad O\Big(\prod_{i \in I} (\|t_1 - t'_1\|^{\mathrm{Min}(1, 2\alpha)} + \|t_i - t'_i\|)^2\Big) \text{ avec } I = \{i;\, n_i = 0\}.$$

Remarquons pour cela qu'en soustrayant dans le déterminant $D(t,t',0)$ la ligne $2i-2$ de la ligne $2i-3$ $(2 \leqq i \leqq k)$ nous obtenons des expressions se présentant sous l'une des deux formes suivantes:

$$1)\quad \varepsilon_{ij} = \|t_1 - t_j\|^{2\alpha} + \|t_1 - t_i\|^{2\alpha} - \|t_i - t_j\|^{2\alpha} - \|t'_1 - t_j\|^{2\alpha} - \|t_1 - t'_i\|^{2\alpha} + \|t_1 - t'_1\|^{2\alpha} + \|t'_i - t_j\|^{2\alpha} = \sum_{n=1}^{N} 2\alpha(t_1'^n - t_1^n)(t_j^n - \bar{t}_1^n)\|\bar{t}_1 - t_j\|^{2(\alpha-1)} + \sum_{n=1}^{N} 2\alpha(t_i'^n - t_i^n)(t_1^n - \bar{t}_i^n)\|t_1 - t_i\|^{2(\alpha-1)} + \|t_1 - t'_1\|^{2\alpha} + \sum_{n=1}^{N} 2\alpha(t_i'^n - t_i^n)(\bar{t}_i^n - t_j^n)\|\bar{t}_i - t_j\|^{2(\alpha-1)}, \quad \bar{t}_1 \in P_1,\ \bar{t}_i \in P_i:$$

$$2)\ \varepsilon'_{ij} = \|t'_1 - t_i\|^{2\alpha} + \|t_1 - t'_j\|^{2\alpha} - \|t_1 - t'_j\|^{2\alpha} - \|t_i - t'_j\|^{2\alpha} - \|t'_1 - t'_i\|^{2\alpha}$$
$$- \|t'_1 - t'_j\|^{2\alpha} + \|t'_i - t'_j\|^{2\alpha} = \sum_{n=1}^{N} 2\alpha(t_i - t'_i)(\bar{t}'_i - t_1)\|\bar{t}'_i - t_1\|^{2(\alpha-1)}$$
$$+ \sum_{n=1}^{N} 2\alpha(t_1^n - t_1'^n)(\bar{t}_1'^n - t_j'^n)\|t'_1 - t'_j\|^{2(\alpha-1)} - \|t_1 - t'_1\|^{2\alpha}$$
$$- \sum_{n=1}^{N} 2\alpha(t_i^n - t_i'^n)(\bar{t}_i'^n - t_j^n)\|t'_j - t_i\|^{2(\alpha-1)}, \quad \bar{t}'_1 \in P_1,\ \bar{t}'_i \in P_i.$$

Les termes $\varepsilon_{ij}, \varepsilon'_{ij}$ sont de la forme $O(\|t_1 - t'_1\|^{2\alpha} + \|t_i - t'_i\|)$ pour $2\alpha \leqq 1$ et de la forme $O(\|t_1 - t'_1\| + \|t_i - t'_i\|)$ dans le cas contraire. Par ailleurs, en soustrayant les colonnes $2i-3$ et $2i-2$ on trouve, par raison de symétrie, des expressions identiques.

Considérons maintenant une dérivée partielle $\dfrac{\partial^n D(t,t',0)}{\partial x_2^{n_2} \dots \partial x_k^{n_k}}$, $n_2 + \dots + n_k = n$; notons $I = \{i; n_i = 0\} = \{i_1, \dots, i_m\}$, $m = \operatorname{card} I$.

Fixons $i_1 \in I$ et soustrayons, dans le déterminant donnant cette dérivée partielle (obtenu en dérivant convenablement les lignes de $D(t,t',0)$), la ligne $2i_1 - 3$ des autres lignes. Les lignes $2i_1 - 3$ et $2i_1 - 2$ n'étant pas affectées au cours des opérations de dérivation, nous pouvons écrire le déterminant sous la forme $O(\|t_1 - t'_1\|^{\operatorname{Min}(1, 2\alpha)} + \|t_{i_1} - t'_{i_1}\|) \times A_1^0(t,t')$. En soustrayant la colonne $2i_1 - 3$ de toutes les autres colonnes (dans le déterminant $A(t,t')$) nous obtiendrons une nouvelle écriture, les coefficients de la colonne $2i_1 - 2$ se présentant sous la forme $\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ii}$ ou $\varepsilon'_{ij} + \varepsilon_{ii}$. Ceci nous permet d'érire $\dfrac{\partial^n D(t,t',0)}{\partial x_2^{n_2} \dots \partial x_k^{n_k}} = O((\|t_1 - t'_1\|^{\operatorname{Min}(1, 2\alpha)} + \|t_{i_1} - t'_{i_1}\|^2) \times A_1(t,t')$ et en réitérant le procédé avec $A_1(t,t')$, $i_2 \in I$, $A_2(t,t')$ et $i_3 \in I$, etc... d'accéder à la formule $**$).

Revenons aux expressions initiales en remplaçant dans la décomposition $*$) les variables réelles $x_2, \dots, x_k$ par $(\|t_1 - t'_1\|^{2\alpha} + \|t_i - t'_i\|^{2\alpha})$, $2 \leqq i \leqq k$. En faisant tendre $\|t - t'\|$ vers zéro il apparaît clairement (compte tenu de $**$) et de la condition $2\alpha < 2$) que le déterminant $D(t,t')$ est équivalent à

$$\prod_{i=2}^{k} (\|t_1 - t'_1\|^{2\alpha} + \|t_i - t'_i\|^{2\alpha}) \frac{\partial^{k-1} D(t,t',0)}{\partial x_2 \dots \partial x_k},$$

d'où la conclusion du lemme.

(2.6) **Corollaire.** *Il existe une suite $P_1, \dots, P_k$ de pavés inclus respectivement dans $P_1^0, \dots, P_k^0$ tels que les trajectoires du processus H^p admettent avec une probabilité non nulle des points de multiplicité k correspondant à des instants $t_1, \dots, t_k$ appartenant aux pavés (P_i), $1 \leqq i \leqq k$.*

Preuve. D'après le théorème (2.3) il suffit de vérifier l'intégrabilité de la fonction $(t,t') \to 1/(D(t,t'))^{p/2}$ sur le pavé $\left(\prod_{i=1}^{k} P_i\right) \times \left(\prod_{i=1}^{k} P_i\right)$ intervenant dans l'énoncé du lemme (2.5).

Or, les inégalités

$$(D(t,t'))^{p/2} \geqq c\left(\prod_{i=2}^{k} (\|t_1-t'_1\|^{2\alpha}+\|t_i-t'_i\|^{2\alpha}))^{p/2}\right.$$

$$\geqq c\left(\sum_{j=1}^{k}\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k}\|t_i-t'_i\|^{2\alpha}\right)\right)^{p/2} \geqq c\left(\prod_{i=1}^{k}\|t_i-t'_i\|^2\right)^{\alpha p(k-1)/2k},$$

l'hypothèse du théorème $\alpha p < kN/k-1$ et le changement de variables $t_i - t'_i = u_i$, $t_i = v_i$, ramènent le problème à la vérification de l'intégrabilité (au voisinage de l'origine) de la fonction $(u_1,\ldots,u_k) \to 1 \Big/ \left(\prod_{i=1}^{k}\|u_i\|\right)^{N-\varepsilon}$, $(u_1,\ldots,u_k)\in(\mathbb{R}^N)^k$, $\varepsilon>0$, pour la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^N)^k$, ce qui (évidemment) ne présente pas de difficulté.

Il nous reste à voir que la probabilité de l'événement $M_k^p \neq \emptyset$, non nulle d'après ce qui précède est de fait égale à un. A cet effet, considérons un pavé borné P de $\mathbb{R}^N$, puis le processus $\mathscr{Y} = (Y_{(t,s)} = X_t^p - X_s^p)$, $(t,s)\in P\times P$.

Désignons par $M_{k,P}^p$ l'événement M_k^p restreint à P, c'est-à-dire $M_{k,P}^p = \{\omega; \exists t_1,\ldots,t_k\in P$ deux à deux disjoints tels que $Y_{(t_1,t_2)}(\omega) = \ldots = Y_{(t_1,tk)}(\omega) = 0\}$. Pour tout vecteur $t_0\in\mathbb{R}^N$ les processus $\mathscr{Y}$ et $\mathscr{Y}_{t_0} = (Z_{(t,s)} = X_{t+t_0}^p - X_{s+t_0}^p)$, $(s,t)\in P\times P$, ont la même distribution, en particulier $P(M_{k,P}^p) = P(M_{k,(P+t_0)}^p)$.

Le coefficient de corrélation $c(t_0) = \operatorname*{Sup}_{\substack{Y\in\mathscr{Y}\\ Z\in\mathscr{Y}_{t_0}}} \int Y_i Z_j \, dP$, $Y = (Y_1,\ldots,Y_p)$, $Z = (Z_1,\ldots,Z_p)$ coïncide exactement avec $\frac{1}{2} \operatorname*{Sup}_{t,t',s,s'\in P} |\|t-s'-t_0\|^{2\alpha} + \|s-t'-t_0\|^{2\alpha} - \|t-t'-t_0\|^{2\alpha} - \|s-s'-t_0\|^{2\alpha}|$.

Un calcul élémentaire permet de voir que $c(t_0)$ tend vers zéro lorsque $\|t_0\|\to+\infty$. Ainsi, en fixant une suite $\varepsilon_n>0$, $n\geqq1$, il existe une suite de vecteurs (t_n), $n\geqq1$, de $\mathbb{R}^N$ satisfaisant la relation:

$$|P(M_{k,P_n}^0 \cap M_{k,P_m}^p) - P(M_{k,P_m}^p)\times P(M_{k,P_n}^p)|$$
$$\leqq \varepsilon_n,\ n\geqq1,\ 1\leqq m\leqq n,\ P_n = t_n + P,$$

(cela résulte des théorèmes classiques sur la corrélation de processus gaussiens, voir par exemple (7), p. 67).

Avec un choix convenable de la suite (ε_n), $n\geqq1$, (par exemple telle que l'on ait

$$\liminf_n \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P(M_{k,P_i}^p \cap M_{k,P_j}^p) \Big/ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P(M_{k,P_i}^p)\times P(M_{k,P_j}^p)\right) = 1\Bigg)$$

on en déduit $P(\bigcap_{m\geqq1}\bigcup_{i\geqq m} M_{k,P_i}^p) = 1$ d'où, en particulier, notre résultat.

Remarque. Avec le choix $\alpha p \leqq N$, les trajectoires du processus H^p admettent des points de multiplicité $k\geqq1$ arbitraire. Admettent-elles de points de multiplicité $\aleph_0$ (resp. $2^{\aleph_0}$)? Très probablement la construction de [6] s'adapte dans ce cas. La même question se pose évidemment dans le cas général: la condition $\limsup_{n\to+\infty}(\operatorname{Log}_2 N(H^p, 2^{-n})/n) \geqq p$ implique-t-elle l'existence de points de multiplicité $2^{\aleph_0}$? Nous espérons revenir prochainement sur l'ensemble de ces questions.

3. Points doubles et entropie d'un processus

Abordons maintenant le cas général d'un processus de Gauss $H^p(X_t^p) \hookrightarrow L^2(\Omega, \Sigma, P; \mathbb{R}^p)$ dont les composantes sont constituées de copies indépendantes d'un même processus gaussien, réel, séparé et précompact $H = (X_t) \hookrightarrow L^2(\Omega, \Sigma, P)$. Les méthodes élaborées aux paragraphes 1) et 2) sont intimement liées aux propriétés de la mesure de Lebesgue; une adaptation au cas général passerait éventuellement par la construction de mesures de Radon convenables sur le compact H^p (analogues par example aux mesures majorantes de X. Fernique [8]).

Dans ce paragraphe nous proposons un résultat plus modeste basé sur le principe de la méthode utilisée par N. Kôno dans l'étude des points doubles (du cas précédent). Un peu paradoxalement l'idée se généralise fort bien, l'extension étant obtenue en appliquant diverses variantes du lemme de Slepian [14].

Pour les notations, nous renvoyons à l'introduction, cela étant, remarquons l'égalité évidente

$$\limsup_{k\to+\infty}((\log_2 N(H, 2^{-k}))/k) = \limsup_{k\to+\infty}((\log_2 N(H^p, 2^{-k}))/k).$$

(3.1) **Théorème.** *On suppose la condition suivante réalisée:* $\limsup((\mathrm{Log}_2 N(H, 2^{-k}))/k) < p/2$; *alors les trajectoires du processus n'admettent pas (presque-sûrement de points doubles.*

Preuve. Fixons deux sous-ensembles fermés disjoints B_1, B_2 de H^p; soit $a = d(B_1, B_2)$ la distance (pour la métrique de l'espace $L^2(\Omega, \Sigma, P; \mathbb{R}^p)$ entre ces deux ensembles. Pour tout entier $k \geqq 1$ désignons par $B(X_{t_i}, 2^{-k})$, $1 \leqq i \leqq N(B_1, 2^{-k})$ et $B(X_{t_j}, 2^{-k})$, $1 \leqq j \leqq N(B_2, 2^{-k})$, les boules de H^p réalisant les recouvrements minimaux de B_1 et B_2. En fixant un nombre réel $\eta_k > 0$ on obtient l'enégalité suivante:

$$\begin{aligned} &P\{\omega; \exists X_t \in B_1, X_s \in B_2; X_t^p(\omega) = X_s^p(\omega)\} \\ &\leqq \sum_{\substack{1 \leqq i \leqq N(B_1, 2^{-k}) \\ 1 \leqq j \leqq N(B_2, 2^{-k})}} P\{\omega; \|X_{t_i}^p(\omega) - X_{s_j}^p(\omega)\| \leqq 2\eta_k\} \\ &+ \sum_{1 \leqq i \leqq N(B_1, 2^{-k})} P\{\omega; \sup_{X_t \in B(X_{t_i}, 2^{-k})} \|X_t^p(\omega) - X_{t_i}^p(\omega)\| > \eta_k\} \\ &+ \sum_{1 \leqq j \leqq N(B_2, 2^{-k})} P\{\omega; \sup_{X_t \in B(X_{s_j}, 2^{-k})} \|X_t^p(\omega) - X_{s_j}^p(\omega)\| > \eta_k\}. \end{aligned}$$

Remarquons déjà que nous avons l'inégalité: $P\{\omega; \|X_{t_i}^p(\omega) - X_{s_j}^p(\omega)\| \leqq 2\eta_k\} \leqq c_1 \eta_k^p$, la constante $c_1 > 0$ ne dépendant que de la distance a. Ce résultat est sans mystère par contre, une majoration efficace des termes restants est moins aisée à obtenir.

(3.2) **Lemme.** *L'inégalité suivante est satisfaite:*

$$P\{\omega; \sup \|X_t^p(\omega) - X_{t_i}^p(\omega)\| \geqq \eta_k\} \leqq (2/(2\pi)^{1/2}) \int_{2^k(\eta_k - m_k)}^{+\infty} \exp(-u^2/2)\, du,$$

$$\textit{avec } m_k = \int \sup_{X_t \in B(X_{t_i}, 2^{-k})} \|X_t^p - X_{t_i}^p\|\, dP.$$

Preuve. Fixons une suite (X_n^p), $n \geqq 1$, dense dans l'espace $B(X_{t_i}^p, 2^{-k})$ (pour la topologie induite par celle de $L^2(\Omega, \Sigma, P; \mathbb{R}^p)$. Pour tout entier $N \geqq 1$ la mesure γ_N, image de P par l'application $I^N(\omega) = (X_n(\omega) - X_{t_i}^p(\omega))$, $1 \leqq n \leqq N$, est de Gauss sur l'espace produit $(\mathbb{R}^p)^N$.

Un résultat général de Borel-Sudakov [1] et [15] assure que toute fonction numérique φ définie sur un espace de Gauss (E, γ) et vérifiant $|\varphi(x+\tilde{h}) - \varphi(x)| \leqq C \|\tilde{h}\|_{L^2}, \tilde{h}$ parcourant le noyau reproduisant de (E, γ), satisfait l'inégalité:

$$\gamma\{x; \varphi(x) - m \geqq cu\} \leqq (2/(2\pi)^{1/2}) \int_u^{+\infty} \exp(-x^2/2)\, dx, \quad \text{avec}$$

$$m = \int \varphi(x)\, d\gamma(x).$$

Ainsi, en posant $\varphi(x) = \sup_{1 \leqq i \leqq N} \|x_i\|$, $x = (x_i)$, $1 \leqq i \leqq N$, nous aurons une évaluation de $\gamma\{x; \sup_{1 \leqq i \leqq N} \|x_i\| \geqq \eta_k\}$ conduisant à son tour à la limite, lorsque $N \to +\infty$, au résultat annoncé.

La norme, dans l'espace $(L^2(\mathbb{R}^p)^N, \gamma)$, d'un élément

$x' = (x'_1, \ldots, x'_N) \in (\mathbb{R}^p)^N$, $\|x'\| = \sum_{n=1}^N \|x'_n\| = 1$ se détermine selon:

$$\|x'\|_{L^2} = \left(\int \left| \sum_{n=1}^N \langle x'_n, X_{t_i}^p(\omega) - X_n^p(\omega) \rangle \right|^2 dP(\omega)\right)^{1/2}$$

$$\leqq \sum_{n=1}^N \left(\int |\langle x'_n, X_{t_i}^p(\omega) - X_n^p(\omega)\rangle|^2\, dP(\omega)\right)^{1/2} \leqq 2^{-k}.$$

Nous en déduisons l'inégalité

$$\varphi(\tilde{h}) = \operatorname*{Sup}_{\|x'\|=1} (\langle x', \tilde{h} \rangle) \leqq \operatorname*{Sup}_{\|x'\|=1} (\|x'\|_{L^2} \times \|\tilde{h}\|_{L^2}) \leqq 2^{-k} \times \|\tilde{h}\|_{L^2}$$

qui se traduit par la formulation:

$$\gamma\{x; \sup_i \|x_i\| - m_k^N \geqq u 2^{-k}\} \leqq (2/(2\pi)^{1/2}) \int_u^{+\infty} \exp(-u^2/2)\, du.$$

Le procédé décrit un peu plus tôt permet facilement de conclure.

Il reste à estimer l'ordre de grandeur du paramètre m_k, sans cela la formule du lemme (3.2) ne peut être susceptible d'aucune application.

(3.3) **Lemme.** *Sous l'hypothèse* $\limsup_{k \to +\infty} (\log_2 N(H, 2^{-k})/k) < p/2$, *il existe un entier* $K_0 \geqq 1$ *tel que l'on ait:*

$$m_k \leqq 44 (p^3/2)^{1/2}\, k 2^{-k}, \quad \textit{pour tout entier } k \geqq K_0.$$

Preuve. Rappelons l'inégalité

$$\int \operatorname*{Sup}_{X \in H} X(\omega)\, dP(\omega) \leqq 22 \sum_{n=k}^{+\infty} 2^{-n} (\log_2 N(H, 2^{-n}))^{1/2}, \quad d(H) \leqq 2^{-k},$$

valide pour tout processus gaussien séparable H [8] et [15].

Nous en déduisons successivement:

$$\begin{aligned}
m_k &= \int \sup_{X_t^p \in B(X_{t_i}^p, 2^{-k})} \|X_t^p(\omega) - X_{t_i}^p(\omega)\| \, dP(\omega) \\
&\leqq p \int \sup_{X_t^1 \in B(X_{t_i}^1, 2^{-k})} |X_t^1(\omega) - X_{t_i}^1(\omega)| \, dP(\omega) \\
&\leqq 2p \int \sup_{X_t^1 \in B(X_{t_i}^1, 2^{-k})} (X_t^1(\omega) - X_{t_i}^1(\omega)) \, dP(\omega) \leqq 44p \sum_{n=k}^{+\infty} 2^{-n} (\log_2 N(H, 2^{-n}))^{1/2} \\
&\leqq 44p(p/2)^{1/2} \sum_{n=k}^{+\infty} 2^{-n} n^{1/2} \leqq 44p(p/2)^{1/2} k 2^{-k},
\end{aligned}$$

la dernière inégalité étant obtenue en appliquant l'hypothèse de l'énoncé.

Entamons l'étape finale de la preuve du théorème. Supposons les paramètres $\eta_k - m_k$ positifs non nuls. Les résultats partiels précédents permettent d'écrire:

$$\begin{aligned}
&P\{\omega; \exists (X_t^p, X_s^p) \in B_1 \times B_2; X_t^p(\omega) = X_s^p(\omega)\} \\
&\quad \leqq N(B_1, 2^{-k}) N(B_2, 2^{-k}) [c_1 \eta_k^p + c_2 (2^{-k}/(\eta_k - m_k)) \exp(-2^{2k}(\eta_k - m_k)^2/2)],
\end{aligned}$$

les constantes c_1 et c_2 ne dépendant pas des choix éventuels de k et η_k.

Les hypothèses de l'énoncé du théorème (3.1) assurent l'existence d'un entier $K_0 \geqq 1$ et d'un nombre $\varepsilon > 0$ tels que l'on ait:

$$N(H, 2^{-k}) < 2^{kp/2} \times 2^{-k\varepsilon}, \qquad \text{pour tout } k \geqq K_0.$$

Avec le choix $\eta_k = 2^{-k} \times 2^{k\varepsilon/p}$, l'expression $N(B_1, 2^{-k}) N(B_2, 2^{-k}) \eta_k^p$ converge vers zéro (lorsque $k \to +\infty$), par ailleurs, la minoration du lemme (3.3) permet de voir que non seulement les termes $\eta_k - m_k$ sont positifs (pour k suffisamment grand mais que l'exponentielle $\exp(-2^{2k}(\eta_k - m_k)^2/2)$ converge vers zéro lorsque k tend vers l'infini, au moins aussi rapidement que $\exp(-(2^{2k\varepsilon/p})/2)$. Ainsi l'événement $\Omega_{(B_1, B_2)} = \{\omega; \exists (X_t^p, X_s^p) \in B_1 \times B_2; X_t^p(\omega) = X_s^p(\omega)\}$ est de mesure nulle, d'où le résultat annoncé.

Remerciements. Nous remercions Monsieur A. Dvoretzky pour nous avoir ancouragés à achever la preuve du théorème (2.4).

Bibliographie

1. Borell, C.: The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space. Invent. Math. **30**, 107–216 (1975)
2. Cirelson, B.S., Ibragimov, I.A., Sudakov, V.N.: Norms of gaussian sample functions. Proceedings of the Third Japan - USSR Symposium on Probability Theory, Lect. Notes in Math. **550**, 20–42. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1976
3. Dvoretzky, A., Erdös, P., Kakutani, S.: Double points of paths of Brownian motion in n-space. Acta Sci. Math. (Szeged) **12**, 75–81 (1950)
4. Dvoretzky, A., Erdös, P., Kakutani, S.: Multiple points of paths of Brownian motion in the plane. Bull. Research Council of Israel, section F**3**, 364–371 (1954)
5. Dvoretzky, A., Erdös, P., Kakutani, S., Taylor, S.J.: Triple points of Brownian paths in 3 space. Proc. Cambridge Philos. Soc. **53**, 856–862 (1957)
6. Dvoretzky, A., Erdös, P., Kakutani, S.: Points of multiplicity c of plane brownian paths. Bull. Research Council of Israel, Section F**7**, 158–180 (1958)

7. Dym, H., Mc Kean, H.P.: Gaussian processes, function theory and the inverse spectral problem. New York-London: Academic Press 1976
8. Fernique, X.: Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes, Lect. Notes in Math. **480**, 1-95. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1975
9. Hawkes, J.: Multiple points for symmetric Lévy processes. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 83-90 (1978)
10. Hendricks, W.J.: Multiple Points for Transient Symmetric Lévy Processes in $\mathbb{R}^d$. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **49**, 13-21 (1979)
11. Kôno, N.: Double Points of a Gaussian Sample Path. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **45**, 175-180 (1978)
12. Levy, P.: Le mouvement brownien plan. Amer. J. Math. **62**, 487-550 (1940)
13. Schoenberg, I.J.: On certain metric spaces arising from euclidean spaces by a change of metric and their imbedding in Hilbert space. Ann. Math. **38**, **4**, 787-793 (1937)
14. Slepian, D.: The one-sided barrier problem for Gaussian moise. Bell system Tech. J., **41**, 463-501 (1962)
15. Sudakov, V.N.: Geometric Problems in the Theory of Infinite-Dimensional Probability Distributions. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Published by A.M.S., (1979)

Reçu le 15, Septembre 1980