Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
44, 279–306 (1978)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Régions d'arrêt, localisations et prolongements de martingales

R. Cairoli et J.B. Walsh

Département de mathématiques, École polytechnique fédérale, Lausanne, Suisse
Department of Mathematics, University of British Columbia, Vancouver, Canada

§1. Introduction et notations

L'utilité et la flexibilité de la théorie classique des martingales sont dues, en large mesure, à l'emploi des temps d'arrêt et à la maniabilité de ceux-ci.

Les temps d'arrêt ont leur analogue en théorie des martingales à deux paramètres, à savoir les lignes d'arrêt ou les régions d'arrêt qui leur sont associées. Comme il fallait s'attendre, beaucoup de propriétés des temps d'arrêt passent aux lignes d'arrêt par simple transposition. D'autres, cependant, deviennent étonamment plus complexes à deux paramètres. Mentionnons ici le problème de l'arrêt d'une martingale, traité dans [19], le début d'une théorie générale des processus à deux paramètres, abordé dans [12, 13], et quelques limitations de la théorie, dont fait état [6].

Dans le présent article, nous nous concentrerons sur le problème de la localisation d'une martingale et sur son problème inverse, celui du prolongement d'une martingale définie seulement localement, c'est-à-dire dans un voisinage d'arrêt. La motivation de cette étude nous est venue du problème du prolongement analytique d'un processus holomorphe, défini dans un domaine du quadrant positif du plan. Ce problème a été traité dans [4], mais seulement dans le cas où le domaine est fixe et non pas dans celui, plus naturel, où le domaine est aléatoire (cf. [5]). Dans ce cas, la question générale du prolongement analytique reste sans réponse. En revanche, nous avons pu répondre, du moins partiellement, à la question correspondante concernant les martingales. En gros, le prolongement est possible sous une condition de bornitude dans $\mathbf{L}^{1+\varepsilon}$ pour les martingales et d'intégrabilité uniforme pour les martingales fortes.

Mais avant d'aborder ces problèmes, nous devrons développer l'appareil auxiliaire nécessaire. Ainsi, au §2 nous traiterons de quelques propriétés d'approximation des lignes d'arrêt. Le résultat nouveau principal affirme que toute ligne d'arrêt relative aux tribus du processus de Wiener est prévisible, en ce sens qu'elle peut être approchée du dessous par des lignes d'arrêt strictement plus petites. Au §3 nous étudierons les martingales locales et, après une brève digression sur les processus croissants, faite au §4, nous étendrons, au §5, les

0044-3719/78/0044/0279/$05.60

inégalités de Burkholder à deux paramètres au cas continu. Ensuite nous traiterons du prolongement d'une martingale aux §6 et 7 et celui d'une martingale forte au §8.

Voici maintenant les données et notations de base. Le quadrant positif du plan sera noté $\mathbb{R}_+^2$ et sa tribu borélienne $\mathscr{B}$. Les éléments de $\mathbb{R}_+^2$ seront notés ordinairement par les lettres a, b, z, ζ, ξ, η ou, en coordonnées, par (s,t), (u,v). Entre les éléments de $\mathbb{R}_+^2$ est définie la relation d'ordre $(s,t)\prec(u,v)$, qui signifie $s\leqq u$, $t\leqq v$. Nous écrirons $(s,t)\ll(u,v)$ pour $s<u$, $t<v$. En outre $(s,t)\curlywedge(u,v)$ signifiera $s\leqq u$, $t\geqq v$, tandis que $(s,t)\curlywedge\!\!\!\curlywedge(u,v)$ tiendra place de $s<u$, $t>v$. Le symbole ∞ aura sa signification usuelle, mais sera également utilisé pour désigner un point à l'infini de $\mathbb{R}_+^2$, c'est-à-dire un élément supérieur à tout élément de $\mathbb{R}_+^2$ pour l'ordre $\prec$. Par convention, $z+\infty=\infty$ pour tout $z\in\mathbb{R}_+^2$. Si a, $b\in\mathbb{R}_+^2$, nous désignerons par $[a,b]$ et $[a,b)$ les rectangles ou intervalles (éventuellement vides) $\{z: a\prec z\prec b\}$, resp. $\{z: a\prec z\ll b\}$. Le rectangle $[0,a]$ sera désigné de préférence par R_a. Les rectangles ouverts à gauche sont définis de manière analogue. Si $a\in\mathbb{R}_+^2$, nous poserons $[a,\infty)=\{z: a\prec z\}$ et $(a,\infty)=\{z: a\ll z\}$. Par convention, $[\infty,\infty)=(\infty,\infty)=(\infty,\infty]=\emptyset$. Nous supposerons donnés un espace de probabilité complet $(\Omega,\mathscr{F},P)$ et une famille $\{\mathscr{F}_z, z\in\mathbb{R}_+^2\}$ de sous-tribus de $\mathscr{F}$, telle que $\mathscr{F}_0$ contient les ensembles négligeables de $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_z\subset\mathscr{F}_{z'}$ si $z\prec z'$, et $\mathscr{F}_z=\bigcap_{z':\,z\ll z'}\mathscr{F}_{z'}$ (continuité à droite). Le terme «adapté» signifiera, sauf indication contraire, «adapté à la famille $\{\mathscr{F}_z, z\in\mathbb{R}_+^2\}$». Nous poserons $\mathscr{F}_{s\infty}=\bigvee_{t\in\mathbb{R}_+}\mathscr{F}_{st}$, $\mathscr{F}_{\infty t}=\bigvee_{s\in\mathbb{R}_+}\mathscr{F}_{st}$ et $\mathscr{F}_\infty=\bigvee_{z\in\mathbb{R}_+^2}\mathscr{F}_z$. Si $z=(s,t)$, au lieu de $\mathscr{F}_{s\infty}$ et $\mathscr{F}_{\infty t}$ nous écrirons souvent $\mathscr{F}_z^1$, resp. $\mathscr{F}_z^2$. La famille $\{\mathscr{F}_z, z\in\mathbb{R}_+^2\}$ sera principalement celle qu'engendre un processus de Wiener à deux paramètres $W=\{W_z, z\in\mathbb{R}_+^2\}$. Rappelons qu'on apelle ainsi un processus gaussien séparable, de moyenne nulle et de covariance $E\{W_{st}W_{uv}\}=(s\wedge u)(t\wedge v)$. Un tel processus est continu. Les tribus qu'il engendre sont les tribus $\sigma(W_\zeta, \zeta\prec z)$ complétées par les ensembles négligeables de $\mathscr{F}$. Les processus considérés par la suite seront tous réels.

§ 2. Régions et voisinages d'arrêt

Soit $A: \omega\to A(\omega)$ une application de Ω dans la collection des sous-ensembles de $\mathbb{R}_+^2$ incluant $\emptyset$. Nous dirons que A est un *ensemble aléatoire*, si, pour tout $z\in\mathbb{R}_+^2$, $I_A(z)$ est une variable aléatoire. Nous dirons qu'un ensemble aléatoire A est *adapté* (resp. *progressif*) ([9], p. 139), si le processus $\{I_A(z), z\in\mathbb{R}_+^2\}$ est adapté (resp. progressif). Rappelons qu'un processus $\{X_z, z\in\mathbb{R}_+^2\}$ est dit progressif, ou progressivement mesurable, si, pour tout $z\in\mathbb{R}_+^2$, l'application $(\zeta,\omega)\to X_\zeta(\omega)\,I_{\{\zeta\prec z\}}$ est $\mathscr{B}\times\mathscr{F}_z$-mesurable. Nous ferons principalement usage de la propriété suivante, qui découle directement de la définition de mesurabilité progressive: si A est progressif, alors $\{\omega: A(\omega)\cap R_z\neq\emptyset\}\in\mathscr{F}_z$.

Définition. Une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{R}_+^2\cup\{\infty\}$ est appelée *point d'arrêt* si, pour tout $z\in\mathbb{R}_+^2$, $\{Z\prec z\}\in\mathscr{F}_z$.

Voici deux exemples. Soit A un ensemble progressif. Si $Z=\inf A$ ($\inf\emptyset=\infty$) et $Z\in A$ sur $\{A\neq\emptyset\}$, alors Z est un point d'arrêt. En effet, $\{Z\prec z\}=\{A\cap R_z\neq\emptyset\}\in\mathscr{F}_z$. Si $a\in\mathbb{R}_+^2$, alors Z_a défini par

$$Z_a=\begin{cases} a & \text{si } a\in A,\\ \infty & \text{autrement,}\end{cases}$$

est aussi un point d'arrêt, car $\{Z_a\prec z\}$ est vide, sauf si $a\prec z$, auquel cas $\{Z_a\prec z\}=\{a\in A\}\in\mathscr{F}_z$.

Définition. Nous dirons que D est une *région d'arrêt* si

(1) D est un ensemble aléatoire progressif fermé;

(2) $Z\in D$ sur $\{D\neq\emptyset\}$, où $Z=\inf D$;

(3) si $z\in D$, alors le rectangle $[Z,z]$ est contenu dans D.

On remarquera que $[Z,\infty)$ est une région d'arrêt si et seulement si Z est un point d'arrêt. Il en est de même de $\mathbb{R}_+^2-(Z,\infty)$, en vertu de la continuité à droite des tribus.

Si D est une région d'arrêt, nous désignerons par D^0 l'ensemble des $z\in D$ tels qu'il existe $z'\in D$ avec $z\ll z'$. Nous appellerons $L=D-D^0$ *ligne d'arrêt* associée à D.

On remarquera que si $L(\omega)\neq\emptyset$, $L(\omega)$ est un chemin de type II, selon la terminologie employée dans [2], § 4, et $D(\omega)$ est la partie de $[Z(\omega),\infty)$ située en dessous (pour l'ordre $\prec$) de $L(\omega)$.

Définition. Soit Z un point d'arrêt. Nous dirons que D est un *voisinage d'arrêt* de Z si

(1) D est une région d'arrêt et $Z=\inf D$;

(2) $D=\overline{D^0}$, c'est-à-dire D est la fermeture de D^0.

Remarques. 1°. Le cas le plus utile est celui où $\inf D$ est constant sur $\{D\neq\emptyset\}$. Si $\inf D\equiv 0$, notre notion de région d'arrêt coïncide avec celle de temps d'arrêt que Wong et Zakai ont donnée dans [19].

2°. En appelant D un voisinage d'arrêt nous faisons usage abusif du langage topologique. En effet, D est seulement un voisinage pour la topologie droite, ce qui veut dire que D^0 est ouvert pour la topologie dont la collection des rectangles de la forme $[a,b)$ est une base.

3°. Si D est un voisinage d'arrêt et $a\in\mathbb{R}_+^2$, alors $\overline{D\cap(a,\infty)}$ est un voisinage d'arrêt de Z_a, où $Z_a=a$ si $a\in D^0$, $=\infty$ autrement.

La condition de mesurabilité progressive est difficile à manier. Voici une caractérisation plus simple.

Proposition 2.1. *Soit D un ensemble aléatoire fermé. Posons $Z=\inf D$ et supposons que*

(1) *l'intérieur de D est dense dans D;*

(2) *$Z\in D$ sur $\{D\neq\emptyset\}$;*

(3) *si $z,z'\in D$ et $z\prec z'$, alors $[z,z']\subset D$;*

(4) *pour tout $z\in\mathbb{R}_+^2$, $\{z\in D\}\in\mathscr{F}_z$.*

Alors D est un voisinage d'arrêt de Z.

Démonstration. Il nous faut seulement vérifier que D est progressif, car dans ce cas Z est un point d'arrêt, d'après ce qui a été remarqué précédemment. Posons

$$B_\varepsilon(\zeta)=\{\zeta': |\zeta'-\zeta|<\varepsilon\} \quad \text{et} \quad D_{\varepsilon,z}=\bigcup_{\zeta\prec z,\ \zeta\in D\cap\mathbb{Q}_+^2} B_\varepsilon(\zeta).$$

Alors $D\cap R_z=\bigcap_{\varepsilon>0} D_{\varepsilon,z}$ et il suffit donc de prouver que $D_{\varepsilon,z}$ est $\mathscr{B}\times\mathscr{F}_z$-mesurable. Or, cela suit du fait que

$$1-I_{D_{\varepsilon,z}}=\prod_{\zeta\prec z,\ \zeta\in\mathbb{Q}_+^2}(1-I_{B_\varepsilon}(\zeta)\, I_{\{\zeta\in D\}}),$$

qui est clairement $\mathscr{B}\times\mathscr{F}_z$-mesurable.

Remarque. Si Z ne prend qu'un nombre dénombrable de valeurs, on démontre de manière analogue que (2), (3) et (4) de la proposition 2.1 caractérisent les régions d'arrêt.

Les voisinages d'arrêt interviennent naturellement lorsqu'on veut localiser l'étude de processus stochastiques définis dans des régions aléatoires (cf. [5]). Le procédé est le suivant. Soit A un ensemble aléatoire progressif et soit $a\in\mathbb{R}_+^2$. Posons

$$D^0=\bigcup_{z:\,[a,z)\subset A}[a,z), \qquad D=\overline{D^0}.$$

Alors D est un voisinage d'arrêt. En effet, on peut réduire la réunion à une réunion sur $z\in\mathbb{Q}_+^2$ sans affecter la définition de D^0. Puisque $\{z\in D\}=\{[a,z)\subset A\}$ et que, A étant progressif, $\{[a,z)\subset A\}\in\mathscr{F}_z$, la proposition 2.1 permet de conclure. Si $\{X_z,\ z\in\mathbb{R}_+^2\}$ est un processus et $A(\omega)=\{z: X_z(\omega)\in\Gamma\}$, avec $\Gamma\subset\mathbb{R}$, alors D correspond au «premier temps d'atteinte» de $\mathbb{R}-\Gamma$.

Le reste de ce paragraphe sera consacré à l'étude de deux types d'approximations d'un voisinage d'arrêt.

Commençons par l'approximation du dessus. Nous poserons

$$z_{ij}^n=(i2^{-n}, j2^{-n}) \quad \text{et} \quad \Delta_{ij}^n=[z_{i-1,j-1}^n, z_{ij}^n).$$

Proposition 2.2. *Soit D une région d'arrêt et soit $Z=\inf D$. Posons*

$$D_n=\bigcup_{i,j}\{[Z,z_{ij}^n]: D\cap\Delta_{ij}^n\neq\emptyset\}.$$

Alors, pour chaque n, D_n est un voisinage d'arrêt de Z, $D\subset D_n^0\subset D_{n-1}^0$ et $D=\bigcap_n D_n$.

Démonstration. Il est clair que D_n satisfait à (1), (2) et (3) de la proposition 2.1. Pour montrer que (4) est aussi satisfaite, considérons un $z\in\mathbb{R}_+^2$ et notons que

$$\{z\in D_n\}=\bigcup_{\substack{i,j\\ z\prec z_{ij}^n}}(\{Z\prec z\}\cap\{D\cap\Delta_{ij}^n\cap R_z\neq\emptyset\}).$$

Le premier ensemble de la parenthèse appartient à $\mathscr{F}_z$, puisque Z est un point d'arrêt, et le second aussi, puisque D est progressif. Il en est donc de même du premier membre de l'égalité. Le reste est évident.

La question de savoir si un voisinage d'arrêt peut être approché du dessous est plus délicate. Dans le cas d'un paramètre, cela revient à savoir si un temps d'arrêt est prévisible.

Nous dirons qu'un voisinage d'arrêt est *prévisible* s'il existe des régions d'arrêt $D_1 \subset D_2 \subset \cdots$ telles que $\inf D_n = \inf D$ sur $\{D_n \neq \emptyset\}$, $D_n \subset D^0$ et $\bigcup_n D_n = D^0$ p.s. Suivant la terminologie employée dans [9], nous dirons que les D_n annoncent D.

Nous dirons qu'une ligne dans $\mathbb{R}_+^2$ est étagée, si elle est la réunion d'un nombre fini de segments de droite (finis) parallèles aux axes. Nous dirons qu'une ligne d'arrêt L est *étagée*, ou qu'un voisinage d'arrêt dont L est la ligne d'arrêt associée est *étagé*, si, pour chaque ω, $L(\omega)$ est une ligne étagée ou l'ensemble vide et $\bigcup_\omega L(\omega)$ est contenu dans la réunion d'une famille dénombrable de droites.

Il est clair que si $D(\omega)$ est borné pour chaque ω, les D_n de la proposition 2.2 sont des voisinages d'arrêt étagés. La proposition suivante concerne l'approximation étagée du dessous. Elle est l'analogue d'un résultat sur les temps d'arrêt prévisibles dû à Chung (cf. [8], [9]).

Proposition 2.3. *Si D est un voisinage d'arrêt prévisible, il existe une suite de voisinages d'arrêt étagés et (uniformément) bornés qui annoncent D.*

Démonstration. Soit (D_n) une suite de régions d'arrêt annonçant D. Quitte à remplacer D_n par $D_n \cap R_{nn}$, nous pouvons supposer que $D_n \subset R_{nn}$. Pour chaque n, soit (D_{nm}) l'approximation étagée de D_n du dessus considérée dans la proposition 2.2. A remarquer que $D_{nm} \subset R_{n+1,n+1}$ pour tout m. Pour chaque n, $D_n \subset D^0$, donc il existe q_n tel que $P\{D_{nq_n} \subset D^0\} > 1 - 1/n$. Posons $D'_n = \bigcap_{i \geqq n} D_{iq_i}$. Alors $D_n \subset D'_n \subset D^0$ p.s. et $D'_n \subset R_{n+1,n+1}$. Mais si $D_{nm}(\omega) \subset D^0(\omega)$, il existe $p > n$ tel que $D_{nm}(\omega) \subset D_p(\omega)$ et dans ce cas $D_{nm}(\omega) \subset D_{iq_i}(\omega)$ pour tout $i \geqq p$. Par conséquent, sauf éventuellement pour un ensemble négligeable N de ω, $D'_n(\omega) = \bigcap_{i=n}^{p_n(\omega)} D_{iq_i}(\omega)$. Posons $D''_n(\omega) = D'_n(\omega)$ si $\omega \notin N$ et $D''_n(\omega) = \emptyset$ si $\omega \in N$. La suite (D''_n) répond aux exigences de l'énoncé.

Nous terminerons ce paragraphe par l'étude du cas brownien.

Théorème 2.4. *Si $\{\mathscr{F}_z, \in \mathbb{R}_+^2\}$ est la famille de tribus engendrée par le processus de Wiener, tout voisinage d'arrêt est prévisible.*

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin d'un lemme.

Lemme 2.5. *Soit $\{X_\zeta, \zeta \in R_z\}$ une surmartingale positive séparable. Si $0 \leqq \alpha < \beta$,*

$$P\{\inf_{\zeta \prec z} X_\zeta \leqq \alpha, X_z \geqq \beta\} \leqq 2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}. \tag{2.1}$$

En particulier,

$$P\{\inf_{\zeta \prec z} X_\zeta = 0, X_z > 0\} = 0.$$

Démonstration. Il suffit de prouver (2.1) pour ζ parcourant un ensemble séparant. Un argument familier nous montre alors qu'il suffit de faire la démonstration pour une partie finie de cet ensemble, que nous pouvons supposer, après changement de notation, être $\{(i,j)\colon i=0,\dots,m,\ j=0,\dots,n\}$.

Posons $X'_i=\inf_j X_{ij}$, $i=0,\dots,m$. Etant le minimum de surmartingales relatives à une même famille de tribus, X'_i est une surmartingale.

Posons $T=\inf\{i\leqq m\colon X'_i\leqq\alpha\}\wedge m$. Alors, si $\gamma>0$,

$$\alpha\geqq\alpha P\{X'_T\leqq\alpha\}\geqq\int_{\{X'_T\leqq\alpha\}} X'_T\,dP\geqq\int_{\{X'_T\leqq\alpha\}} X'_m\,dP\geqq\gamma P\{X'_T\leqq\alpha, X'_m\geqq\gamma\},$$

donc

$$P\{\inf_i X'_i\leqq\alpha, X'_m\geqq\gamma\}\leqq\frac{\alpha}{\gamma}. \tag{2.2}$$

Ce calcul étant valable pour toute surmartingale positive, non seulement pour X'_i, nous pouvons l'appliquer à X_{mj}, ce qui nous donne, compte tenu du fait que $\inf_j X_{mj}=X'_m$,

$$P\{X'_m\leqq\gamma, X_{mn}\geqq\beta\}\leqq\frac{\gamma}{\beta}. \tag{2.3}$$

Or, puisque $\inf_i X'_i\leqq\alpha$ si $\inf_{i,j} X_{ij}\leqq\alpha$, $\{\inf_{i,j} X_{ij}\leqq\alpha,\ X_{mn}\geqq\beta\}$ est contenu dans $\{\inf_i X'_i\leqq\alpha,\ X'_m\geqq\gamma\}\cup\{X'_m\leqq\gamma,\ X_{mn}\geqq\beta\}$ et donc sa probabilité est majorée par $\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}$, d'après (2.2) et (2.3). La valeur minimale du majorant est atteinte pour $\gamma=\sqrt{\alpha\beta}$ et est donc le second membre de (2.1).

Démonstration du théorème 2.4. Soit D un voisinage d'arrêt de Z et soit d_z le minimum de 1 et de la distance de z à $[Z,\infty)-D$ si $D\neq\emptyset$, $d_z=0$ si $D=\emptyset$. Posons $X_z=E\{d_z|\mathscr{F}_z\}$, choisissons une version séparable de $\{X_z, z\in\mathbb{R}^2_+\}$ et désignons par $\mathbb{S}$ un ensemble séparant dense dans $\mathbb{R}^2_+$.

Nous allons démontrer que, sauf éventuellement pour un ensemble négligeable N de ω, $z\to X_z(\omega)$ est continue, strictement positive sur $D^0(\omega)$ et nulle sur $[Z(\omega),\infty)-D^0(\omega)$. Le théorème en résulte aisément, car pour avoir une suite (D_n) annonçant D, il suffit de poser D_n égal au «premier temps que $X_z<1/n$», c'est-à-dire $D_n(\omega)=\bigcup\{[Z(\omega),z]\colon Z(\omega)\prec z,\ X_\zeta(\omega)\geqq 1/n$ pour tout $\zeta\in[Z(\omega),z]\}$ si $\omega\notin N$, $D_n(\omega)=\emptyset$ autrement.

Pour démontrer que X est continue, écrivons

$$\begin{aligned}|X_\xi-X_\eta|&\leqq|E\{d_\zeta|\mathscr{F}_\xi\}-E\{d_\zeta|\mathscr{F}_\eta\}|+|E\{d_\zeta-d_\eta|\mathscr{F}_\eta\}|+|E\{d_\xi-d_\zeta|\mathscr{F}_\xi\}|\\&\leqq|E\{d_\zeta|\mathscr{F}_\xi\}-E\{d_\zeta|\mathscr{F}_\eta\}|+|\zeta-\xi|+|\zeta-\eta|.\end{aligned}$$

Cela vaut p.s. simultanément pour tout $\xi,\eta,\zeta\in\mathbb{S}$. Il s'ensuit, à supposer que l'on ait choisi une version continue des martingales $\{E\{d_\zeta|\mathscr{F}_z\}, z\in\mathbb{R}^2_+\}$ (cf. [18]), que p.s. simultanément pour tout $\zeta\in\mathbb{S}$ et tout $z\in\mathbb{R}^2_+$.

$$\limsup_{\substack{\xi,\eta\to z\\ \xi,\eta\in\mathbb{S}}}|X_\xi-X_\eta|\leqq 2|z-\zeta|.$$

Puisque $|z-\zeta|$ peut être rendu arbitrairement petit, il en résulte que X est continue.

Pour démontrer le reste, notons que $d_z \geqq d_{z'}$, si $z \prec z'$ — cela est dû à la forme particulière de D — et donc que

$$X_z = E\{d_z | \mathcal{F}_z\} \geqq E\{d_{z'} | \mathcal{F}_z\} = E\{X_{z'} | \mathcal{F}_z\},$$

ce qui prouve que X est une surmartingale positive continue. Cette surmartingale est p.s. identiquement nulle sur $[Z, \infty) - D$, puisque $d_z = 0$ sur cet ensemble et $\{z \in [Z, \infty) - D\} \in \mathcal{F}_z$. D'autre part, $d_z > 0$ si $z \in D^0$ et $\{z \in D^0\} \in \mathcal{F}_z$, en vertu de la continuité à droite des tribus, donc $X_z > 0$ p.s. sur $\{z \in D^0\}$. Mais alors, d'après le lemme 2.5, $\inf\limits_{\zeta \prec z} X_\zeta > 0$ p.s. sur $\{z \in D^0\}$ et en faisant parcourir à z un ensemble dénombrable dense, nous voyons que p.s. $X_z > 0$ sur D^0.

Remarque. Les seules propriétés des tribus vraiment nécessaires pour démontrer le théorème sont la propriété d'indépendance conditionnelle (voir début du § 3) et la propriété que toute martingale bornée relative à ces tribus est continue à la ligne d'arrêt associée à D. Donc, même dans le cas où la famille $\{\mathcal{F}_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$ n'est pas engendrée par un processus de Wiener, si elle vérifie ces deux propriétés, D est prévisible.

§ 3. Processus localement dans $\mathcal{M}^2$

Dans ce paragraphe nous supposerons que les tribus $\mathcal{F}_z$ satisfont à la condition d'indépendance conditionnelle suivante (appelée (F4) dans [2]): pour tout $z \in \mathbb{R}_+^2$, $\mathcal{F}_z^1$ et $\mathcal{F}_z^2$ sont conditionnellement indépendantes relativement à $\mathcal{F}_z$. A noter que les tribus engendrées par le processus de Wiener remplissent cette condition.

Nous dirons qu'une martingale $M = \{M_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$ est bornée dans $\mathbf{L}^p$ si $\sup\limits_z E\{|M_z|^p\} < \infty$. Nous désignerons par $\mathcal{M}^p$ l'ensemble des martingales continues à droite, nulles sur les axes et bornées dans $\mathbf{L}^p$. Rappelons que dans le cas où les tribus sont celles engendrées par le processus de Wiener, les martingales de $\mathcal{M}^p$, $p > 1$, sont continues (cf. [2]).

Nous allons maintenant examiner quelques propriétés élémentaires des processus qui sont localement des martingales bornées dans $\mathbf{L}^2$ selon la définition suivante.

Définition. Un processus $M = \{M_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$ est localement dans $\mathcal{M}^p$ s'il existe une suite (D_n) de voisinages d'arrêt et une suite de martingales (M^n) tels que

(1) $D_n \subset D_{n+1}$ pour tout n et $\bigcup\limits_n D_n = \mathbb{R}_+^2$ p.s.;

(2) $M^n \in \mathcal{M}^p$ pour tout n;

(3) pour tout n et presque tout ω, $M_z^n(\omega) = M_z(\omega)$ pour tout $z \in D_n(\omega)$.

Nous dirons que la suite (D_n) *réduit* M. En outre, nous désignerons l'ensemble des processus localement dans $\mathcal{M}^p$ par $\mathcal{M}_{\text{loc}}^p$. Par la suite, nous exprimerons la propriété (3) plus simplement en disant que $M^n = M$ sur D_n.

A remarquer que les processus de $\mathscr{M}^p_{\text{loc}}$ sont continus à droite – continus si les tribus sont engendrées par le processus de Wiener et $p>1$.

A noter aussi que $\{0\in D_n\}$ converge p.s. en croissant vers Ω et donc qu'en remplaçant D_n par D'_n défini par

$$D'_n=D_n \quad \text{sur } \{0\in D_n\} \qquad \text{et} \qquad D'_n=\emptyset \quad \text{sur } \{0\notin D_n\},$$

nous obtenons une suite (D'_n) qui réduit M et dont les termes D'_n sont des voisinages d'arrêt de l'origine, c'est-à-dire tels que $\inf D'_n=0$ ou ∞. Vu cette remarque, nous supposerons, par la suite, que les D_n de la définition sont des voisinages d'arrêt de l'origine.

Nous pourrions définir la classe des processus qui sont localement dans $\mathscr{M}^p$ dans le quadrant *ouvert*, tout simplement en demandant que $\bigcup_n D_n$ est p.s. l'intérieur de $\mathbb{R}^2_+$. Cela donnerait une classe radicalement différente de martingales, comme le montrent les exemples dans [5] et [17].

La classe $\mathscr{M}^1_{\text{loc}}$ est la classe des martingales locales et $\mathscr{M}^2_{\text{loc}}$ celle des martingales locales localement bornées dans $\mathbf{L}^2$. C'est cette dernière qui nous concernera dans le présent article.

On s'attend à ce que les martingales M^n de la définition soient le processus M arrêté à des «instants» successifs. Cela est vrai, mais il faut être prudent en définissant le concept d'arrêt pour un processus à deux paramètres.

Si $A=((s,t),(s',t')]$ est un rectangle contenu dans $\mathbb{R}^2_+$ et $X=\{X_z,\ z\in\mathbb{R}^2_+\}$ un processus, nous définissons $X(A)$ par la formule usuelle

$$X(A)=X_{s't'}-X_{st'}-X_{s't}+X_{st}.$$

Si D est un voisinage d'arrêt étagé de l'origine, $D(\omega)$ est, pour chaque ω, une réunion finie de rectangles ou l'ensemble vide et $X(D)$ a encore un sens (la masse attribuée par X aux axes est nulle par convention). Nous pouvons donc poser la définition suivante: si X est nul sur les axes, le processus X^D, *arrêté* de X à D, est défini par

$$X^D_z=X(D\cap R_z), \qquad z\in\mathbb{R}^2_+. \tag{3.1}$$

Proposition 3.1. *Supposons que les tribus soient celles engendrées par le processus de Wiener et que $M\in\mathscr{M}^2_{\text{loc}}$. Alors il existe une suite (D_n) de voisinage d'arrêt étagés qui réduisent M et nous pouvons prendre (M^{D_n}) comme suite (M^n) intervenant dans la réduction.*

Démonstration. Soient (D'_n) une suite réduisant M et (M^n) une suite telle que $M^n\in\mathscr{M}^2$ et $M^n=M$ sur D'_n. D'après la proposition 2.3 et le théorème 2.4, pour chaque n nous pouvons trouver une suite (D'_{nm}) de voisinages d'arrêt étagés de l'origine qui annoncent D'_n. Posons $D_n=\bigcup_{i\leq n,\, j\leq n} D'_{ij}$. Alors (D_n) est une suite croissante de voisinages d'arrêt étagés de l'origine telle que $\bigcup_n D_n=\mathbb{R}^2_+$ p.s. Pour compléter la démonstration, nous devons démontrer que $M^{D_n}\in\mathscr{M}^2$. Or, $D_n\subset D'_n$ et $M^n=M$ sur D'_n, donc $M^{D_n}=(M^n)^{D_n}$. Mais $(M^n)^{D_n}_z=M^n(D_n\cap R_z)=\int_{R_z} I_{D_n}\,dM^n$, donc M^{D_n} est une martingale de carré intégrable et il ne reste plus à démontrer que cette martingale est bornée dans $\mathbf{L}^2$. Soit $\langle M^n\rangle$ un processus croissant associé à M^n (cf. [2], théorème 1.5). Nous avons

$$E\{(M_z^{D_n})^2\} = E\{(\int_{R_z} I_{D_n} dM^n)^2\} = E\{\int_{R_z} I_{D_n} d\langle M^n\rangle\} \leqq E\{(M_z^n)^2\},$$

d'où la conclusion désirée.

Pour arrêter des processus à des régions plus générales que les régions étagées, il convient de suivre Wong et Zakai [19] et d'utiliser l'intégration stochastique. L'intégrale stochastique relative à $M\in\mathscr{M}^2$ a été définie dans [2]. Elle s'étend facilement à $\mathscr{M}^2_{\mathrm{loc}}$ par localisation. En effet, si $M\in\mathscr{M}^2_{\mathrm{loc}}$, soient (D_n) une suite réduisant M et (M^n) une suite telle que $M^n\in\mathscr{M}^2$ et $M^n=M$ sur D^n. Si $\varphi=\{\varphi_z,\ z\in\mathbb{R}^2_+\}$ est un processus prévisible borné, nous définissons, pour tout $z\in\mathbb{R}^2_+$,

$$\varphi\cdot M_z = \int_{R_z} \varphi\, dM = \lim_{n\to\infty} \int_{R_z} \varphi\, dM^n. \tag{3.2}$$

Cette limite existe p.s., car p.s. sur l'ensemble $\{z\in D_m\}$, $M_\zeta^n = M_\zeta^m$ pour tout $n\geqq m$ et tout $\zeta\in R_z$, donc $\int_{R_z} \varphi\, dM^n = \int_{R_z} \varphi\, dM^m$ pour tout $n\geqq m$ et, de plus, $\bigcup_m \{z\in D_m\} = \mathbb{R}^2_+$ p.s. Il est clair que la définition de $\varphi\cdot M_z$ ne dépend ni du choix de la suite (D_n) ni de celui de (M^n) et qu'elle coïncide avec la définition usuelle dans le cas où $M\in\mathscr{M}^2$. Il est clair également que le processus défini par (3.2) possède une version continue à droite que nous désignerons par $\varphi\cdot M$ et appellerons intégrale stochastique de φ relativement à M. Nous avons évidemment $\varphi\cdot M = \varphi\cdot M^n$ sur D_n, donc $\varphi\cdot M\in\mathscr{M}^2_{\mathrm{loc}}$.

On peut étendre l'intégrale à des φ non bornés, mais puisque nous n'aurons pas besoin de cette extension, nous l'omettrons.

Si maintenant $M\in\mathscr{M}^2_{\mathrm{loc}}$ et D est un voisinage d'arrêt prévisible de l'origine, nous définissons le processus M^D, *arrêté* de M à D, par

$$M^D = I_D\cdot M. \tag{3.3}$$

Cette définition nous permettra, par la suite, d'utiliser (M^{D_n}) comme suite (M^n) intervenant dans la réduction de M. A noter que pour D étagé (3.3) et (3.1) coïncident.

Dans le reste de ce paragraphe, nous supposerons que les tribus $\mathscr{F}_z$ sont celles qu'engendre le processus de Wiener W. Dans cette hypothèse, les diverses représentations connues des processus de $\mathscr{M}^2$ s'étendent aux processus localement dans $\mathscr{M}^2$. Par exemple, pour ce qui concerne la représentation de Wong et Zakai, nous avons:

Proposition 3.2. *Un processus appartient à $\mathscr{M}^2_{\mathrm{loc}}$ si et seulement s'il existe des processus $\varphi=\{\varphi(\xi):\ \xi\in\mathbb{R}^2_+\}$ et $\psi=\{\psi(\xi,\eta):\ \xi,\eta\in\mathbb{R}^2_+\}$ satisfaisant aux conditions*

(1) *φ est mesurable et adapté;*

(2) *ψ est mesurable et $\psi(\xi,\eta)$ $\mathscr{F}_{\xi\vee\eta}$-mesurable pour tout $\xi,\eta\in\mathbb{R}^2_+$;*

(3) *$\psi(\xi,\eta)=0$ si $\xi \not\curlywedge \eta$;*

(4) *$\int_{R_z} \varphi^2\, d\xi + \iint_{R_z\times R_z} \psi^2\, d\xi\, d\eta < \infty$ p.s., pour tout $z\in\mathbb{R}^2_+$;*

et tels que l'on ait

$$M = \varphi\cdot W + \psi\cdot WW. \tag{3.4}$$

Remarque. Les intégrales stochastiques $\varphi \cdot W$ et $\psi \cdot WW$ sont définies comme dans [20] et sont prises, grâce aux résultats de [21], dans leur version continue. La représentation (3.4) s'appelle représentation de Wong et Zakai de M.

La démonstration de la proposition 3.2 résultera facilement des deux lemmes suivants.

Lemme 3.3. *Supposons que φ et ψ satisfont aux conditions* (1)–(4) *de la proposition. Alors $\varphi \cdot W$ et $\psi \cdot WW \in \mathscr{M}^2_{\mathrm{loc}}$.*

Démonstration. Wong et Zakai ont montré (voir [21] et particulièrement la remarque qui fait suite au lemme 2) qu'il existe une suite (D_n) de voisinages d'arrêt de l'origine annonçant $\mathbb{R}^2_+$ telle que

$$E\{\int_{\mathbb{R}^2_+} \varphi^2 I_{D_n} d\xi\} < \infty \quad \text{et}$$

$$E\{\iint_{\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+} \psi^2 I_{\hat{D}_n} d\xi\, d\eta\} < \infty, \quad \text{où} \quad \hat{D}_n = \{(\xi,\eta): \xi,\eta \in \mathbb{R}^2_+, \xi \vee \eta \in D_n\}.$$

Cette suite réduit $\varphi \cdot W$ et $\psi \cdot WW$, puisque, pour tout n, $\varphi \cdot W = (\varphi I_{D_n}) \cdot W$ et $\psi \cdot WW = (\psi I_{\hat{D}_n}) \cdot WW$ sur D_n[1] et $(\varphi I_{D_n}) \cdot W$, $(\psi I_{\hat{D}_n}) \cdot WW \in \mathscr{M}^2$.

Lemme 3.4. *Supposons que $M \in \mathscr{M}^2_{\mathrm{loc}}$ soit représentable sous la forme* (3.4) *avec φ et ψ satisfaisant à* (1)–(4) *de la proposition. Soit $\alpha = \{\alpha(\xi), \xi \in \mathbb{R}^2_+\}$ un processus borné, mesurable et adapté. Alors*

$$\alpha \cdot M = (\varphi\alpha) \cdot W + (\psi\hat{\alpha}) \cdot WW, \tag{3.5}$$

où $\hat{\alpha}$ est défini par $\hat{\alpha}(\xi,\eta) = \alpha(\xi \vee \eta)$, $\xi,\eta \in \mathbb{R}^2_+$.

Démonstration. Si α est de la forme $\alpha(\xi) = X I_A(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^2_+$, où $A = (z_1, z_2]$ et X est une variable aléatoire $\mathscr{F}_{z_1}$-mesurable et bornée, alors en posant $A_z = A \cap R_z$ nous avons

$$\alpha \cdot (\varphi \cdot W)_z = X(\varphi \cdot W)(A_z) = (\varphi\alpha) \cdot W_z.$$

En outre,

$$\alpha \cdot (\psi \cdot WW)_z = X(\psi \cdot WW)(A_z),$$

et en utilisant la condition (4) ainsi qu'un peu d'algèbre, nous voyons que si $\hat{A}_z = \{(\xi,\eta): \xi,\eta \in \mathbb{R}^2_+, \xi \vee \eta \in A_z\}$, le second membre est égal à

$$X \iint_{\hat{A}_z} \psi\, dW dW = (\psi\hat{\alpha}) \cdot WW_z.$$

Cela prouve (3.5) pour les fonctions indicatrices et donc pour les sommes finies de telles fonctions (fonctions simples). Un passage à la limite nous montre alors que (3.5) est vraie pour tout α borné, mesurable et adapté.

Démonstration de la proposition. Si φ et ψ satisfont aux conditions (1)–(4), M défini par (3.4) appartient à $\mathscr{M}^2_{\mathrm{loc}}$, d'après le lemme 3.3. Réciproquement, soit $M \in \mathscr{M}^2_{\mathrm{loc}}$ et soit (D_n) une suite réduisant M. D'après [18], corollaire du théorème

[1] Ces deux égalités peuvent servir de définition alternative des deux intégrales stochastiques

6.1, la représentation (3.4) vaut pour M^{D_n}. Appelons φ_n et ψ_n les processus de cette représentation. Du fait que $M^{D_n}=M^{D_{n+1}}$ sur D_n, nous déduisons, grâce au lemme 3.4, que

$$M^{D_n}=I_{D_n}\cdot M^{D_n}=I_{D_n}\cdot M^{D_{n+1}}=(\varphi_{n+1}I_{D_n})\cdot W+(\psi_{n+1}I_{\hat{D}_n})\cdot WW$$

et donc que $\varphi_n=\varphi_{n+1}$ p.p. sur D_n et $\psi_n=\psi_{n+1}$ p.p. sur $\hat{D}_n$, où $\hat{D}_n$ est défini comme dans la démonstration du lemme 3.3. Il ne reste donc plus qu'à poser $\varphi=\varphi_n$ sur D_n-D_{n-1} et $\psi=\psi_n$ sur $\hat{D}_n-\hat{D}_{n-1}$ $(D_0,\hat{D}_0=\emptyset)$ et à utiliser à nouveau le lemme 3.4 pour conclure que $\varphi\cdot W+\psi\cdot WW$ coïncident avec M.

Mettons encore en évidence la proposition suivante, qui est un corollaire de la proposition 3.2 et du lemme 3.4.

Proposition 3.5. *Soit $M\in\mathcal{M}^2_{\text{loc}}$ et soient φ et ψ les processus de sa représentation* (3.4). *Si D est un voisinage d'arrêt de l'origine, alors*

$$M^D=(\varphi I_D)\cdot W+(\psi I_{\hat{D}})\cdot WW,$$

où $\hat{D}=\{(\xi,\eta)\colon \xi,\eta\in\mathbb{R}^2_+,\ \xi\vee\eta\in D\}$.

§ 4. Processus croissants

Dans ce paragraphe, ainsi que dans les suivants, les tribus $\mathcal{F}_z$ sont celles engendrées par le processus de Wiener W.

Rappelons qu'un processus croissant est un processus $X=\{X_z,\ z\in\mathbb{R}^2_+\}$ continu à droite, adapté, nul sur les axes et tel que $X(A)\geqq 0$ pour tout rectangle $A\subset\mathbb{R}^2_+$ dont les côtés sont parallèles aux axes.

Soit $M\in\mathcal{M}^2$ et soient φ et ψ les processus de sa représentation (3.4). Le *processus croissant* associé à M est le processus $\langle M\rangle$ défini par

$$\langle M\rangle_z=\int_{R_z}\varphi^2\,d\xi+\iint_{R_z\times R_z}\psi^2\,d\xi\,d\eta,\qquad z\in\mathbb{R}^2_+. \tag{4.1}$$

Rappelons que $\langle M\rangle$ est l'unique processus croissant X tel que M^2-X est une martingale faible, autrement dit tel que $E\{(M^2-X)((z_1,z_2])|\mathcal{F}_{z_1}\}=0$ pour tout $z_1\ll z_2$ (cf. [2]).

Fixons $z\gg 0$ et désignons par $\sigma=\{z^\sigma_{ij}\}$ une subdivision finie de R_z en rectangles $\Delta^\sigma_{ij}=(z^\sigma_{ij},\ z^\sigma_{i+1,j+1}]$ tels que $\Delta^\sigma_{ij}\cup\Delta^\sigma_{i+1,j}$ et $\Delta^\sigma_{ij}\cup\Delta^\sigma_{i,j+1}$ sont aussi des rectangles. Suivant Meyer (cf. [15]), nous dirons que les subdivisions σ deviennent arbitrairement fines si elles parcourent une suite σ_n telle que $\sup_{i,j}\|z^{\sigma_n}_{i+1,j+1}-z^{\sigma_n}_{ij}\|\to 0$ lorsque $n\to\infty$. Nous écrirons, dans ce cas, $\lim_\sigma f(\sigma)$ au lieu de $\lim_{n\to\infty} f(\sigma_n)$.

Dans [2] il est affirmé et implicitement démontré que $\langle M\rangle_z$ est limite au sens faible dans $\mathbf{L}^1$ de $\sum_{i,j}E\{M(\Delta^\sigma_{ij})^2|\mathcal{F}_{z^\sigma_{ij}}\}$ lorsque les subdivisions σ deviennent arbitrairement fines. Nous allons démontrer que la limite a lieu aussi en probabilité. Etant donné que

$$E\{\sum_{i,j} E\{M(\Delta_{ij}^\sigma)^2 | \mathscr{F}_{z_{ij}^\sigma}\}\} = \sum_{i,j} E\{\langle M\rangle(\Delta_{ij}^\sigma)\} = E\{\langle M\rangle_z\},$$

il est équivalent de prouver qu'elle a lieu au sens fort dans $\mathbf{L}^1$.

Nous procédons, ainsi que le fait Meyer dans [15], en commençant par établir que si X est un processus croissant continu tel que $E\{X_z^2\} < \infty$, alors

$$\lim_\sigma E\{(X_z - \sum_{i,j} E\{X(\Delta_{ij}^\sigma) | \mathscr{F}_{z_{ij}^\sigma}\})^2\} = 0. \tag{4.2}$$

Posons

$$d_{ij} = X(\Delta_{ij}^\sigma) - E\{X(\Delta_{ij}^\sigma) | \mathscr{F}^2_{z_{ij}^\sigma}\},$$
$$\delta_{ij} = E\{X(\Delta_{ij}^\sigma) | \mathscr{F}_{z_{ij}^\sigma}\} - E\{X(\Delta_{ij}^\sigma) | \mathscr{F}^2_{z_{ij}^\sigma}\}.$$

Si $j<j'$,

$$E\{d_{ij} d_{i'j'}\} = E\{d_{ij} E\{d_{i'j'} | \mathscr{F}^2_{z_{i'j'}^\sigma}\}\} = 0,$$

donc

$$E\{(\sum_{i,j} d_{ij})^2\} = \sum_{i,j} E\{d_{ij}^2\} + 2\sum_{i,j}(\sum_{i'>i} E\{d_{ij} d_{i'j}\}). \tag{4.3}$$

D'autre part, si $i<i'$,

$$E\{\delta_{ij}\delta_{i'j'}\} = E\{\delta_{ij} E\{\delta_{i'j'} | \mathscr{F}^1_{z_{i'j'}^\sigma}\}\} = 0,$$

donc

$$E\{(\sum_{i,j} \delta_{ij})^2\} = \sum_{i,j} E\{\delta_{ij}^2\} + 2\sum_{i,j}(\sum_{j'>j} E\{\delta_{ij}\delta_{ij'}\}). \tag{4.4}$$

Il suffit par conséquent de démontrer que les deuxièmes membres de (4.3) et (4.4) convergent vers 0 lorsque les subdivisions σ deviennent arbitrairement fines. Or, nous avons

$$\sum_{i,j} E\{d_{ij}^2\} \leqq 2\sum_{i,j} E\{X(\Delta_{ij}^\sigma)^2\} \leqq 2E\{X_z \sup_{i,j} X(\Delta_{ij}^\sigma)\}$$

et, en posant $\Gamma_j^\sigma = \bigcup_i \Delta_{ij}^\sigma$,

$$\begin{aligned} |\sum_{i,j}(\sum_{i'>i} E\{d_{ij} d_{i'j}\})| &= |\sum_{i,j}(\sum_{i'>i} E\{X(\Delta_{ij}^\sigma)\, d_{i'j}\})| \\ &\leqq E\{X_z \sup_j X(\Gamma_j^\sigma)\} + E\{X_z \sup_{j'} E\{\sup_j X(\Gamma_j^\sigma) | \mathscr{F}^2_{z_{0j'}^\sigma}\}\} \\ &\leqq E\{X_z \sup_j X(\Gamma_j^\sigma)\} + 4(E\{X_z^2\}\, E\{\sup_j X(\Gamma_j^\sigma)^2\})^{1/2}, \end{aligned}$$

le dernier passage ayant utilisé les inégalités de Schwarz et de Doob (voir (5.3)). Les trajectoires de X étant continues, il s'ensuit, d'après le théorème de Lebesgue, que les deux termes du second membre de (4.3) convergent vers 0 lorsque les subdivisions σ deviennent arbitrairement fines. La démonstration qu'il en est de même du second membre de (4.4) est analogue.

Soit maintenant $M \in \mathcal{M}^2$ et soient φ et ψ les processus de sa représentation (3.4). Posons, pour tout $\zeta \in R_z$,

$$X_\zeta^n = \int_{R_\zeta} \varphi^2 \wedge n \, d\xi + \iint_{R_\zeta \times R_\zeta} \psi^2 \wedge n \, d\xi \, d\eta,$$
$$Y_\zeta^n = \langle M \rangle_\zeta - X_\zeta^n.$$

Alors X^n et Y^n sont des processus croissants continus, borné le premier et intégrable le second. En outre, notant que

$$E\{\langle M \rangle (\Delta_{ij}^\sigma) | \mathcal{F}_{z_{ij}^\sigma}\} = E\{M(\Delta_{ij}^\sigma)^2 | \mathcal{F}_{z_{ij}^\sigma}\},$$

nous pouvons écrire

$$E\{|\langle M \rangle_z - \sum_{i,j} E\{M(\Delta_{ij}^\sigma)^2 | \mathcal{F}_{z_{ij}^\sigma}\}|\}$$
$$\leqq E\{|X_z^n - \sum_{i,j} E\{X^n(\Delta_{ij}^\sigma) | \mathcal{F}_{z_{ij}^\sigma}\}|\} + 2E\{Y_z^n\}.$$

Or, en choisissant n suffisamment grand et successivement σ suffisamment fine, les termes du membre de droite de l'inégalité peuvent être rendus arbitrairement petits, ce qui montre que $\langle M \rangle_z$ est limite dans $\mathbf{L}^1$ de $\sum_{i,j} E\{M(\Delta_{ij}^\sigma)^2 | \mathcal{F}_{z_{ij}^\sigma}\}$ quand les subdivisions σ deviennent arbitrairement fines.

Pour établir les inégalités de Burkholder, nous aurons besoin de savoir que si M est une martingale bornée, $\langle M \rangle_z$ est limite en probabilité de $\sum_{i,j} M(\Delta_{ij}^\sigma)^2$ lorsque les subdivisions σ deviennent arbitrairement fines. Pour démontrer ce résultat, il nous suffit de prouver que

$$\lim_\sigma E\{(\sum_{i,j} M(\Delta_{ij}^\sigma)^2 - \sum_{i,j} E\{M(\Delta_{ij}^\sigma)^2 | \mathcal{F}_{z_{ij}^\sigma}\})^2\} = 0, \tag{4.5}$$

puisque nous savons déjà que $\sum_{i,j} E\{M(\Delta_{ij}^\sigma)^2 | \mathcal{F}_{z_{ij}^\sigma}\}$ converge en probabilité vers $\langle M \rangle_z$. Or, (4.5) résulte en procédant comme nous venons de le faire pour obtenir (4.2). Nous omettons la démonstration détaillée, car celle-ci est identique à la dernière partie de la démonstration du théorème 1.9 de [2], à ceci près que cette partie doit être faite deux fois: une fois avec d_{ij} tel qu'il y figure et une deuxième fois avec $d_{ij} = M(\Delta_{ij}^\sigma)^2 - E\{M(\Delta_{ij}^\sigma)^2 | \mathcal{F}_{z_{ij}^\sigma}^1\}$.

Nous terminerons ce paragraphe en définissant la notion de processus croissant associé à un processus localement dans $\mathcal{M}^2$. Soit $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^2$ et soit (D_n) une suite réduisant M. D'après la proposition 3.5, $\langle M^{D_{n+1}} \rangle = \langle M^{D_n} \rangle$ sur D_n, ce qui nous permet de poser

$$\langle M \rangle = \langle M^{D_n} \rangle \quad \text{sur } D_n. \tag{4.6}$$

Le processus $\langle M \rangle$ ainsi défini est le processus croissant associé à M. Il est clair que sa définition ne dépend pas du choix de la suite (D_n) et que si φ et ψ sont les processus de la représentation (3.4) de M, (4.1) a encore lieu.

§ 5. Inégalités de Burkholder

Tout au long de ce paragraphe p est un nombre >1. Les tribus sont celles qu'engendre le processus de Wiener W. Nous commencerons par établir que $\mathscr{M}^p$ est contenu dans $\mathscr{M}^2_{\text{loc}}$, ce qui nous permettra, en particulier, d'associer un processus croissant aux éléments de $\mathscr{M}^p$. Ensuite nous démontrerons les inégalités de Burkholder pour les éléments de $\mathscr{M}^2_{\text{loc}}$. Cela sera fait, de même que dans [16] et [10], par passage du cas discret au cas continu. Les inégalités dans le cas discret s'obtiennent par itération (cf. [14, 11]), en partant des inégalités originelles établies par Burkholder dans [1].

Lemme 5.1. *Si M est une martingale bornée, les sommes $\sum_{i,j} M(\Delta^\sigma_{ij})^2$ convergent dans $\mathbf{L}^{p/2}$ vers $\langle M\rangle_z$, lorsque les subdivisions σ deviennent arbitrairement fines.*

Démonstration. L'inégalité de Burkholder

$$E\{(\sum_{i,j} M(\Delta^\sigma_{ij})^2)^{p/2}\} \leqq C_p E\{|M_z|^p\}, \tag{5.1}$$

valable pour tout p (>1), entraîne l'intégrabilité uniforme des variables aléatoires $(\sum_{i,j} M(\Delta^\sigma_{ij})^2)^{p/2}$ et donc la conclusion, puisque les sommes $\sum_{i,j} M(\Delta^\sigma_{ij})^2$ convergent en probabilité vers $\langle M\rangle_z$, d'après ce qui a été établi au paragraphe précédent.

Si M est un processus, nous poserons dorénavant $M^*_z = \sup_{\zeta \prec z} |M_\zeta|$.

Proposition 5.2. *Toute martingale continue, nulle sur les axes et de puissance p intégrable appartient à $\mathscr{M}^2_{\text{loc}}$. Réciproquement, si $M \in \mathscr{M}^2_{\text{loc}}$ et $M^*_z \in \mathbf{L}^1$ pour tout $z \in \mathbb{R}^2_+$, alors M est une martingale.*

Démonstration. Supposons que M soit une martingale continue, nulle sur les axes et de puissance p intégrable et montrons que $M \in \mathscr{M}^2_{\text{loc}}$. A cet effet, fixons $z \gg 0$ et choisissons une version continue M^n de la martingale bornée définie par $M^n_\zeta = E\{(M_z \wedge n) \vee (-n) | \mathscr{F}_\zeta\}$, $\zeta \in R_z$. Désignons par φ_n et ψ_n les processus de sa représentation (3.4). D'après le lemme 5.1, l'inégalité (5.1) écrite pour $M^m - M^n$ passe à la limite, lorsque les subdivisions σ deviennent arbitrairement fines, et donne

$$\begin{aligned}
&E\{\langle M^m - M^n\rangle^{p/2}\} \\
&\quad = E\{(\int_{R_z} (\varphi_m - \varphi_n)^2 \, d\xi + \iint_{R_z \times R_z} (\psi_m - \psi_n)^2 \, d\xi \, d\eta)^{p/2}\} \\
&\quad \leqq C_p E\{|M^m_z - M^n_z|^p\}.
\end{aligned}$$

Le dernier membre tendant vers 0 lorsque $m, n \to \infty$, il en est de même du premier et donc il existe φ et ψ satisfaisant aux conditions (1)–(4) de la proposition 3.2 et tels que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{R_z} (\varphi_n - \varphi)^2 \, d\xi + \iint_{R_z \times R_z} (\psi_n - \psi)^2 \, d\xi \, d\eta = 0$$

dans $\mathbf{L}^{p/2}$, donc en probablité. Mais alors, d'après [20], lemmes 1 et 4,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n \cdot W_\zeta + \psi_n \cdot WW_\zeta = \varphi \cdot W_\zeta + \psi \cdot WW_\zeta,$$

pour tout $\zeta \in R_z$, la limite étant prise en probabilité. D'autre part, $\varphi_n \cdot W_\zeta + \psi_n \cdot WW_\zeta$ n'est autre que M_ζ^n, qui converge vers M_ζ dans $\mathbf{L}^p$. Il s'ensuit que

$$M_\zeta = \varphi \cdot W_\zeta + \psi \cdot WW_\zeta,$$

pour tout $\zeta \in R_z$, et, puisque z est arbitraire, la proposition 3.2 permet de conclure que $M \in \mathscr{M}^2_{\mathrm{loc}}$.

Montrons, réciproquement, que si $M \in \mathscr{M}^2_{\mathrm{loc}}$ et $M_z^* \in \mathbf{L}^1$ pour tout $z \in \mathbb{R}^2_+$, alors M est une martingale. Il suffit de prouver qu'en fixant un des deux paramètres, par exemple s, $\{M_{st}, t \in \mathbb{R}_+\}$ est une martingale. Or, ce processus est évidemment une martingale locale. En outre, $\sup_{t' \leqq t} |M_{st'}| \leqq M_{st}^*$, qui appartient à $\mathbf{L}^1$, donc la conclusion s'ensuit.

Théorème 5.3. *Il existe des constantes positives c_p et C_p ne dépendant que de p (>1) telles que l'on ait, pour tout $M \in \mathscr{M}^2_{\mathrm{loc}}$ et tout $z \in \mathbb{R}^2_+$,*

$$c_p E\{M_z^{*p}\} \leqq E\{\langle M \rangle_z^{p/2}\} \leqq C_p E\{M_z^{*p}\}. \tag{5.2}$$

Remarque. Si $M \in \mathscr{M}^2_{\mathrm{loc}}$ est une martingale, nous obtenons une conclusion équivalente en remplaçant, dans (5.2), M_z^{*p} par $|M_z|^p$. Cela, grâce à l'inégalité de Doob (cf. [2], théorème 1.2)

$$E\{M_z^{*p}\} \leqq \left(\frac{p}{p-1}\right)^{2p} E\{|M_z|^p\}. \tag{5.3}$$

Démonstration. La démonstration sera faite en trois étapes et tout au long du parcours $z \gg 0$ est fixé, M est un élément de $\mathscr{M}^2_{\mathrm{loc}}$ et φ, ψ sont les processus de sa représentation (3.4).

1°. Définissons M_ζ^n, $\zeta \in R_z$, comme dans la démonstration de la proposition précédente et notons φ_n, ψ_n les processus de la représentation (3.4) de M^n. D'après le lemme 5.1, l'inégalité (5.1) et son opposée (qui est aussi vraie), écrites pour M^n à la place de M, passent à la limite quand les subdivisions σ deviennent arbitrairement fines et donnent

$$c_p E\{|M_z^n|^p\} \leqq E\{\langle M^n \rangle_z^{p/2}\} \leqq C_p E\{|M_z^n|^p\}, \tag{5.4}$$

qui équivaut à (5.2), d'après la remarque qui précède.

2°. Montrons que (5.2), ou ce qui revient au même (5.4) avec M à la place de M^n, vaut si M appartient à $\mathscr{M}^2_{\mathrm{loc}}$ et est une martingale. Si $M_z \in \mathbf{L}^p$, alors $\lim_{m,n\to\infty} E\{|M_z^m - M_z^n|^p\} = 0$, donc (5.4), écrite pour $M^m - M^n$, implique

$$\lim_{m,n\to\infty} E\{(\int_{R_z} (\varphi_m - \varphi_n)^2 \, d\xi + \iint_{R_z \times R_z} (\psi_m - \psi_n)^2 \, d\xi \, d\eta)^{p/2}\} = 0. \tag{5.5}$$

Mais alors l'argument déjà utilisé dans la première partie de la démonstration de la proposition 5.2 montre qu'il existe $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$ satisfaisant à (1)–(4) de la proposition 3.2 et tels que

$$\lim_{n\to\infty} E\{(\int_{R_z} \varphi_n^2\, d\xi + \iint_{R_z\times R_z} \psi_n^2\, d\xi\, d\eta)^{p/2}\}$$
$$= E\{(\int_{R_z} \tilde{\varphi}^2\, d\xi + \iint_{R_z\times R_z} \tilde{\psi}^2\, d\xi\, d\eta)^{p/2}\}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} M_\zeta^n = \lim_{n\to\infty} \varphi_n \cdot W_\zeta + \psi_n \cdot WW_\zeta = \tilde{\varphi}\cdot W_\zeta + \tilde{\psi}\cdot WW_\zeta$$

dans $\mathbf{L}^p$, pour tout $\zeta\in R_z$. Or, puisque M est une martingale, $\lim_{n\to\infty} M_\zeta^n = M_\zeta$ pour tout $\zeta\in R_z$. L'unicité de la représentation (3.4) implique donc que $\tilde{\varphi}=\varphi$ et $\tilde{\psi}=\psi$ p.p. et en faisant tendre n vers l'infini dans (5.4) nous obtenons bien les inégalités pour M.

Il nous reste à nous assurer que si pour un p donné $\langle M\rangle_z^{1/2}\in\mathbf{L}^p$, alors $M_z\in\mathbf{L}^p$. A cet effet, choisissons deux suites de fonctions simples $\tilde{\varphi}_n$ et $\tilde{\psi}_n$ telles que

$$\lim_{n\to\infty} E\{(\int_{R_z} (\tilde{\varphi}_n-\varphi)^2\, d\xi + \iint_{R_z\times R_z} (\tilde{\psi}_n-\psi)^2\, d\xi\, d\eta)^{p/2}\} = 0 \tag{5.6}$$

et posons

$$\tilde{M}_\zeta^n = \tilde{\varphi}_n \cdot W_\zeta + \tilde{\psi}_n \cdot WW_\zeta, \qquad \zeta\in R_z.$$

Puisque $\tilde{M}^n$ est une martingale et $\tilde{M}_z^n\in\mathbf{L}^p$, (5.4) vaut pour $\tilde{M}^m-\tilde{M}^n$ à la place de M^n, d'après ce que nous venons de démontrer. Mais alors, du fait que (5.6) implique (5.5) avec $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$ à la place de φ et ψ, $\lim_{m,n\to\infty} E\{|\tilde{M}^m-\tilde{M}^n|^p\}=0$. D'autre part, (5.6) entraîne que $\lim_{n\to\infty}\tilde{M}_z^n = M_z$ en probabilité, d'où $M_z\in\mathbf{L}^p$.

3°. Passons au cas général en considérant une suite (D_n) qui réduit M. D'après 2°, (5.2) vaut pour M^{D_n} à la place de M. En faisant tendre n vers l'infini, notant que $(M^{D_n})_z^*$ converge p.s. vers M_z^* et que $\langle M^{D_n}\rangle_z$ converge en croissant p.s. vers $\langle M\rangle_z$, nous obtenons, grâce au lemme de Fatou,

$$c_p E\{M_z^{*p}\} \leqq c_p \liminf_{n\to\infty} E\{(M^{D_n})_z^{*p}\} \leqq E\{\langle M\rangle_z^{p/2}\},$$

qui est la première moitié de (5.2). La deuxième moitié est triviale si $E\{M_z^{*p}\} = \infty$. Si $E\{M_z^{*p}\}<\infty$, d'après la proposition 5.2 nous tombons sous le cas 2°, donc la démonstration est achevée.

§6. Prolongements de bi-martingales à partir d'un voisinage d'arrêt de l'origine

Dans ce paragraphe D désigne un voisinage d'arrêt non vide de l'origine et L la ligne d'arrêt qui lui est associée. Les tribus $\mathscr{F}_z$ sont encore celles qu'engendre le processus de Wiener W.

Un processus stochastique défini dans D est une application $M:(z,\omega)\to M_z(\omega)$ de D dans $\mathbb{R}$. Pour la suite, il est commode de convenir qu'un tel processus est aussi défini et assume la valeur 0 en dehors de D. Avec cette convention, des termes indiquant une propriété de M tels que «mesurable» ou «adapté» ont la signification usuelle.

Y a-t-il une notion analogue à celle de martingale pour un processus défini dans D? La réponse est qu'il y en a plusieurs. Nous allons introduire ici celle de bi-martingale. Cette notion est naturelle et facilement vérifiable. Elle intervient lorsqu'on tue certains processus au sortir d'un voisinage d'arrêt.

Posons

$$L_t^1(\omega)=\begin{cases}\sup\{s:(s,t)\in L(\omega)\} & \text{si } (0,t)\in D(\omega),\\ 0 & \text{autrement,}\end{cases}$$

et définissons $L_s^2(\omega)$ de manière analogue.

Nous dirons qu'un processus M défini dans D, nul sur les axes, est une *1-martingale locale* (resp. *1-martingale*) dans D, si, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$ fixé, $\{M_{L_t^1\wedge s,t}, \mathscr{F}_{st}^1, s\in\mathbb{R}_+\}$ est une martingale locale (resp. martingale). De manière analogue, nous définissons les *2-martingales locales* (resp. *2-martingales*) dans D et nous dirons que M est une *bi-martingale locale* (resp. *bi-martingale*) dans D, si M est à la fois une 1- et une 2-martingale locale (resp. une 1- et une 2-martingale) dans D.

Nous désignerons par $\mathscr{B}^p(D)$ la classe des bi-martingales M dans D, séparément continues (c'est-à-dire telles que, pour presque tout ω, l'application $(s,t)\to M_{st}(\omega)$ de $D(\omega)$ dans $\mathbb{R}$ est continue séparément en s et en t) et séparément bornées dans $\mathbf{L}^p$ (c'est-à-dire telles que $\sup\limits_{s\in\mathbb{R}_+} E\{|M_{L_t^1\wedge s,t}|^p\}<\infty$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+$ et $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} E\{|M_{s,L_s^2\wedge t}|^p\}<\infty$ pour tout $s\in\mathbb{R}_+$).

Remarques. 1°. En raison de l'indépendance conditionnelle des tribus (voir début du §3), les bi-martingales locales sont adaptées et il ne fait aucune différence si, dans la définition, nous prenons les tribus $\mathscr{F}_{st}$ au lieu des tribus $\mathscr{F}_{st}^1$ et $\mathscr{F}_{st}^2$.

2°. La classe $\mathscr{B}^p(\mathbb{R}_+^2)$ est celle des martingales au sens usuel qui s'annulent sur les axes et sont séparément bornées dans $\mathbf{L}^p$.

3°. Les processus de $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^2$ sont des bi-martingales locales dans $\mathbb{R}_+^2$.

4°. La condition de continuité séparée figurant dans la définition de $\mathscr{B}^p(D)$ n'est pas indispensable. Elle a été introduite pour éviter de faire intervenir des versions non continues des martingales dans le problème du prolongement.

Soit M un processus défini dans D, nul sur les axes. Nous appellerons *prolongement* de M tout processus $\hat{M}$ défini dans $\mathbb{R}_+^2$ tel que $\hat{M}=M$ sur D. Si D est étagé, nous désignerons par M^D le prolongement défini par

$$M_z^D=M(D\cap R_z),\qquad z\in\mathbb{R}_+^2. \tag{6.1}$$

On remarquera que la formule (6.1) définissant M^D est identique à (3.1) et que dans les deux cas l'indexation par D produit un processus ayant $\mathbb{R}_+^2$ pour domaine de définition. Il est néanmoins opportun de souligner le double rôle de cette opération: arrêt si M est défini dans $\mathbb{R}_+^2$, prolongement si M est défini seulement dans D. On remarquera aussi que si M est séparément continu, M^D l'est aussi.

Théorème 6.1. *Si D est étagé et M est une bi-martingale locale dans D, alors M^D est une bi-martingale locale dans $\mathbb{R}_+^2$.*

Démonstration. Quitte à remplacer D par $D \cap R_{\infty t_0}$ et à faire tendre ensuite t_0 vers l'infini, nous pouvons supposer qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $D \subset R_{\infty t_0}$. Il nous suffit alors de prouver que, pour $t \leqq t_0$ fixé, $\{M_{st}^D, \mathscr{F}_{st_0}, s \in \mathbb{R}_+\}$ est une martingale locale. Au cours de la démonstration, les notions de temps d'arrêt et de martingale locale sont entendues relativement à la famille $\{\mathscr{F}_{st_0}\}$ et nous omettrons de le préciser à chaque fois.

Pour tout $(s, t) \in R_{\infty t_0}$ nous avons

$$M_{st}^D = M_{st_0}^D - M_{L_t^1 \wedge s,\, t_0}^D + M_{L_t^1 \wedge s,\, t}. \tag{6.2}$$

Or, par hypothèse, le dernier terme du membre de droite est une martingale locale. Si nous montrons que le premier terme en est une aussi, il en sera de même du deuxième et la démonstration sera terminée.

Désignons par $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ les abscisses successives des segments verticaux de L, en convenant qu'après le dernier segment, σ_ν est posé $= \infty$. Posons en outre $\sigma_0 = 0$ et

$$\tau_\nu = \begin{cases} L_{\sigma_\nu}^2 & \text{si } \sigma_\nu < \infty, \\ 0 & \text{si } \sigma_\nu = \infty. \end{cases}$$

Alors

$$M_{st_0}^D = \sum_{\nu=1}^{\infty} (M_{\sigma_\nu \wedge s,\, \tau_\nu} - M_{\sigma_{\nu-1} \wedge s,\, \tau_\nu}),$$

où il faut remarquer que, pour ω fixé, seul un nombre fini de termes sont non nuls. Puisque σ_n est une suite non décroissante de temps d'arrêt convergeant vers l'infini, il nous suffit de démontrer que, pour n fixé, $M_{\sigma_n \wedge s, t_0}^D$ est une martingale locale. Mais

$$M_{\sigma_n \wedge s,\, t_0}^D = \sum_{\nu=1}^{n} (M_{\sigma_\nu \wedge s,\, \tau_\nu} - M_{\sigma_{\nu-1} \wedge s,\, \tau_\nu}),$$

de sorte que tout revient à prouver que, pour chaque ν,

$$m_s = M_{\sigma_\nu \wedge s,\, \tau_\nu} - M_{\sigma_{\nu-1} \wedge s,\, \tau_\nu}$$

est une martingale locale. Pour alléger les notations nous écrirons σ, σ' et τ à la place respectivement de σ_ν, $\sigma_{\nu-1}$ et τ_ν. Soit $t_1, t_2, \ldots$ une numérotation des valeurs prises par τ. Nous remarquons tout d'abord que $\{\tau = t_i\} \in \mathscr{F}_{\sigma', t_0}$, car si $t_i > 0$,

$$\{\tau \geqq t_i\} \cap \{\sigma' = s\} = \bigcap_n \bigcup_{m \geqq n} \left\{\left(s + \frac{1}{m}, t_i\right) \in D\right\} \in \mathscr{F}_{st_0}.$$

Pour i fixé, $M_{\sigma\wedge s,\,t_i}$ est une martingale locale, donc nous pouvons choisir une suite non décroissante de temps d'arrêt S_n^i qui la réduisent, telle que $\lim_{n\to\infty} S_n^i=\infty$. Posons

$$S_n=\begin{cases} S_n^i \vee \sigma' & \text{si } \tau=t_i \text{ et } i=1,2,\ldots,n,\\ \sigma' & \text{autrement.}\end{cases}$$

Il est clair que la suite (S_n) ainsi définie est non décroissante et $\lim_{n\to\infty} S_n=\infty$. Nous avons en outre

$$\{S_n\leqq u\}=\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{S_n^i\vee\sigma'\leqq u\}\cap\{\tau=t_i\}\right)\cup\left(\{\sigma'\leqq u\}\cap\bigcup_{i=n+1}^{\infty}\{\tau=t_i\}\right)$$

et

$$\{S_n^i\vee\sigma'\leqq u\}\cap\{\tau=t_i\}=\{S_n^i\leqq u\}\cap\{\sigma'\leqq u\}\cap\{\tau=t_i\}\in\mathscr{F}_{ut_0},$$

ce qui montre que S_n est un temps d'arrêt. Il ne reste donc plus à prouver que $m_{S_n\wedge s}$ est une martingale locale. Nous avons

$$\begin{aligned} m_{S_n\wedge s}&=\sum_{i=1}^{\infty}(M_{\sigma\wedge S_n\wedge s,\,t_i}-M_{\sigma'\wedge S_n\wedge s,\,t_i})\,I_{\{\tau=t_i\}}\\ &=\sum_{i=1}^{\infty}(M_{\sigma\wedge S_n^i\wedge s,\,t_i}-M_{\sigma'\wedge S_n^i\wedge s,\,t_i})\,I_{\{\tau=t_i\}}.\end{aligned}$$

Or, il est facile de vérifier que les termes de cette série sont des martingales, donc la conclusion s'ensuit.

Signalons, en passant, que les 1- (ou 2-)martingales locales admettent une représentation intégrale que l'on peut déduire facilement de la représentation (1.3) de [3]. Plus précisément, si M est par exemple une 1-martingale locale dans D, adaptée et mesurable, alors

$$M_{L_t^1\wedge s,\,t}=\int_{R_{st}}\alpha(t;\zeta)\,dW_\zeta,\qquad (s,t)\in\mathbb{R}_+^2,$$

où $\alpha=\{\alpha(t;\zeta)\colon t\in\mathbb{R}_+,\,\zeta\in\mathbb{R}_+^2\}$ est un processus mesurable tel que $\alpha(t;u,v)$ est $\mathscr{F}_{ut}$-mesurable si $v\leqq t$ et $=0$ si $v>t$ et que $\int_{R_{st}}\alpha^2(t;\zeta)\,d\zeta<\infty$ p.s., pour tout $(s,t)\in\mathbb{R}_+^2$. Dans la terminologie de [3] α s'appelle la 1-dérivée de M. Il n'est pas difficile de vérifier que si D est étagé et M est une bi-martingale locale mesurable dans D, alors

$$M_{st}^D=\int_{R_{st}}\alpha^D(t;\zeta)\,dW_\zeta,\qquad (s,t)\in\mathbb{R}_+^2, \tag{6.3}$$

où α^D est défini au moyen de la 1-dérivée α de M par

$$\alpha^D(t;u,v)=\alpha(L_u^2\wedge t;u,v). \tag{6.4}$$

Pour énoncer les prochains théorèmes, il nous faut introduire une quantité qui représente la variation d'une bi-martingale sur une ligne d'arrêt étagée. Soit M une bi-martingale locale dans D, séparément continue. Nous désignerons par $[M]^1$ et $[M]^2$ les processus croissants associés à M (cf. [2]): pour t (resp. s) fixé, $\{[M]^1_{st}, s\in\mathbb{R}_+\}$ (resp. $\{[M]^2_{st}, t\in\mathbb{R}_+\}$) est le processus croissant associé à la martingale locale continue $\{M_{L^1_t\wedge s,t}, s\in\mathbb{R}_+\}$ (resp. $\{M_{s,L^2_s\wedge t}, t\in\mathbb{R}_+\}$). Si Λ est une ligne d'arrêt étagée contenue dans D, nous poserons

$$V^\Lambda_p(M)=E\{(\int_\Lambda \partial_1[M]^1-\int_\Lambda \partial_2[M]^2)^{p/2}\}, \tag{6.5}$$

où les intégrales de ligne sont prises dans le sens horaire.

Dans le reste de ce paragraphe p est un nombre >1. Si $M\in\mathscr{M}^2_{\text{loc}}$, nous poserons

$$M^*_\infty=\sup_{z\in\mathbb{R}^2_+} M^*_z, \quad \langle M\rangle_\infty=\sup_{z\in\mathbb{R}^2_+}\langle M\rangle_z \quad \text{et} \quad \langle M\rangle_{s\infty}=\sup_{z\in R_{s\infty}}\langle M\rangle_z.$$

En outre, si M est une bi-martingale locale séparément continue, nous poserons

$$[M]^1_{\infty t}=\sup_{s\in\mathbb{R}_+}[M]^1_{st} \quad \text{et} \quad [M]^2_{s\infty}=\sup_{t\in\mathbb{R}_+}[M]^2_{st}.$$

Lemme 6.2. *Supposons que D soit étagé et que M soit un processus défini dans D, nul sur les axes et tel que $M^D\in\mathscr{B}^p(\mathbb{R}^2_+)$. Alors*

$$c_p E\{\langle M^D\rangle^{p/2}_\infty\}\leqq V^L_p(M)\leqq C_p E\{\langle M^D\rangle^{p/2}_\infty\}, \tag{6.6}$$

où c_p et C_p sont des constantes positives qui ne dépendent que de p. En particulier, $M^D\in\mathscr{M}^p$ si et seulement si $V^L_p(M)<\infty$.

Démonstration. Il résulte de l'hypothèse que la limite $M^D_{s\infty}=\lim_{t\to\infty} M^D_{st}$ existe et définit une martingale ordinaire relative à $\{\mathscr{F}_{s\infty}\}$, continue et de puissance p intégrable. Le processus croissant associé à cette martingale est donné par $A_s=\int_{L\cap R_{s\infty}}\partial_1[M]^1$. En effet, si nous introduisons les abscisses σ_ν des segments verticaux de L et les ordonnées τ_ν comme dans la démonstration du théorème 6.1, nous voyons que cela revient à démontrer que $[M]^1_{\sigma_\nu\wedge s,\tau_\nu}-[M]^1_{\sigma_{\nu-1}\wedge s,\tau_\nu}$ est le processus croissant associé à la martingale $M^D_{\sigma_\nu\wedge s,\infty}-M^D_{\sigma_{\nu-1}\wedge s,\infty}$. Puisque τ_ν ne prend qu'un nombre dénombrable de valeurs, il nous suffit de vérifier l'assertion sur $\{\tau_\nu=t\}$, où t est une valeur arbitraire prise par τ_ν. Mais, sur cet ensemble, la vérification résulte directement de la définition de $[M]^1$ et du fait que $\{\tau_\nu=t\}\in\mathscr{F}_{\sigma_{\nu-1},\infty}$.

Nous appliquons maintenant les inégalités de Burkholder à $M^D_{s\infty}$: pour tout $s\in\mathbb{R}_+$,

$$c'_p E\{|M^D_{s\infty}|^p\}\leqq E\{A^{p/2}_s\}\leqq C'_p E\{|M^D_{s\infty}|^p\},$$

où c'_p et C'_p sont des constantes positives qui ne dépendent que de p. D'autre part, en vertu de la proposition 5.2, $M^D\in\mathscr{M}^2_{\text{loc}}$, donc, après passage à la limite, (5.2) vaut pour M^D à la place de M et (s,∞) à la place de z. Il s'ensuit que

$$c_p'' E\{\langle M^D\rangle_{s\infty}^{p/2}\} \leqq E\{A_s^{p/2}\} \leqq C_p'' E\{\langle M^D\rangle_{s\infty}^{p/2}\},$$

où c_p'' et C_p'' sont des constantes positives qui ne dépendent que de p. En faisant alors tendre s vers l'infini, nous voyons que (6.6) vaut avec $E\{(\int_L \partial_1 [M]^1)^{p/2}\}$ à la place de $V_p^L(M)$. De même on montre qu'elle vaut avec $E\{(-\int_L \partial_2 [M]^2)^{p/2}\}$, donc il ne reste plus qu'à appliquer l'inégalité élémentaire $|a+b|^{p/2} \leqq 2^{p/2}(|a|^{p/2} + |b|^{p/2})$ pour conclure.

La dernière assertion de l'énoncé est une conséquence immédiate de (5.2) et (6.6).

Théorème 6.3. *Supposons que D soit étagé. Pour qu'une bi-martingale $M \in \mathscr{B}^p(D)$ se prolonge en une martingale $\hat{M} \in \mathscr{M}^p$, il faut et il suffit que $V_p^L(M) < \infty$. Dans ce cas, M^D constitue un tel prolongement et ce prolongement est minimal en ce sens que*

$$\langle M^D\rangle_z \leqq \langle \hat{M}\rangle_z, \qquad z \in \mathbb{R}_+^2, \tag{6.7}$$

pour tout autre prolongement $\hat{M} \in \mathscr{M}^p$.

Démonstration. Supposons que $V_p^L(M) < \infty$ et montrons que $M^D \in \mathscr{M}^p$. D'après le lemme 6.2, il nous suffit de montrer que $M^D \in \mathscr{B}^p(\mathbb{R}_+^2)$. En vertu du théorème 6.1, M^D est une bi-martingale locale. En outre, M^D est séparément continu, de sorte que tout revient à prouver que $E\{([M^D]_{\infty t}^1)^{p/2}\} < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et $E\{([M^D]_{s\infty}^2)^{p/2}\} < \infty$ pour tout $s \in \mathbb{R}_+$. Or, par exemple, $[M^D]_{\infty t}^1$ est manifestement majoré par $[M]_{\infty t}^1 + \int_L \partial_1 [M]^1$. Puisque $M \in \mathscr{B}^p(D)$, le premier terme de cette somme est de puissance $p/2$ intégrable, d'après les inégalités de Burkholder. L'espérance de la $p/2$-ème puissance du second terme est majorée par $V_p^L(M)$, d'où la conclusion.

Le prolongement M^D est minimal, car (6.7) est une conséquence immédiate de la proposition 3.5, compte tenu du fait que $\hat{M}^D = M^D$ pour tout prolongement $\hat{M}$ de M.

Pour terminer, montrons que si M admet un prolongement $\hat{M} \in \mathscr{M}^p$, alors $V_p^L(M) < \infty$. D'après la proposition 3.5 et le théorème 5.3, $\hat{M}^D = M^D \in \mathscr{M}^p$. Le lemme 6.2 permet donc de conclure.

Remarque. Si D est étagé et M est une bi-martingale locale dans D telle que $E\{([M]_{\infty t}^1)^{1/2}\} < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et $E\{([M]_{s\infty}^2)^{1/2}\} < \infty$ pour tout $s \in \mathbb{R}_+$, la condition $V_1^L(M) < \infty$ implique encore que M^D est une martingale. Cependant, ne sachant pas si M^D est un élément de $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^2$ et ne disposant pas des inégalités (5.2) pour $p=1$, il ne nous est pas possible d'étendre les autres résultats du théorème 6.3 à ce cas et il ne nous sera pas non plus possible de poursuivre l'étude du problème du prolongement pour des voisinages d'arrêt non étagés.

Passons maintenant au cas d'un voisinage d'arrêt quelconque de l'origine.

Théorème 6.4. *Soient D quelconque et $M \in \mathscr{B}^p(D)$. Supposons qu'il existe une suite (D_n) de voisinages d'arrêt étagés de l'origine annonçant D, telle que*

$$\sup_n V_p^{L_n}(M) < \infty, \tag{6.8}$$

où L_n désigne la ligne d'arrêt associée à D_n. Alors la limite $M_z^D = \lim_{n\to\infty} M_z^{D_n}$ existe, dans $\mathbf{L}^p$*, pour tout $z \in \mathbb{R}_+^2$ et définit un processus $M^D \in \mathscr{M}^p$ qui prolonge M et qui est minimal dans le sens défini par le théorème 6.3. Réciproquement, si M admet un prolongement $\hat{M} \in \mathscr{M}^p$, alors* (6.8) *vaut pour toute suite (D_n) de voisinages d'arrêt étagés de l'origine qui annoncent D.*

Démonstration. D'après le théorème 6.3, $M^{D_n} \in \mathscr{M}^p$ pour tout n. En appliquant le lemme 6.2, nous voyons donc que (6.8) implique que $\sup_n E\{\langle M^{D_n}\rangle_\infty^{p/2}\} < \infty$. Mais alors, en utilisant la proposition 3.5, nous en déduisons que

$$\lim_{m,\, n\to\infty} E\{\langle M^{D_m} - M^{D_n}\rangle_\infty^{p/2}\} = \lim_{m,\, n\to\infty} E\{|\langle M^{D_m}\rangle_\infty - \langle M^{D_n}\rangle_\infty|^{p/2}\} = 0,$$

ce qui entraîne, compte tenu de (5.2), que

$$\lim_{m,\, n\to\infty} E\{(M^{D_m} - M^{D_n})_\infty^{*p}\} = 0.$$

Pour une sous-suite appropriée (n_i), la limite $M_z^D = \lim_{i\to\infty} M_z^{D_{n_i}}$ existe donc p.s. uniformément en z et définit une martingale $M^D \in \mathscr{M}^p$. Cette martingale est évidemment un prolongement de M, puisque $M^{D_m} = M^{D_n}$ sur D_n si $m \geqq n$. Montrons que M^D est le prolongement minimal. Si $\hat{M} \in \mathscr{M}^p$ est un prolongement de M, alors $\hat{M}$ est aussi un prolongement de la restriction de M à D_n, donc, d'après (6.7), $\langle M^{D_n}\rangle_z \leqq \langle \hat{M}\rangle_z$ pour tout $z \in \mathbb{R}_+^2$. Mais $\langle M^{D_n}\rangle_z$ converge en croissant vers $\langle M^D\rangle_z$ quand $n \to \infty$, donc (6.7) a lieu.

La réciproque est une conséquence immédiate de la proposition 3.5 et de (5.2) et (6.6).

Remarques. 1°. Le théorème 6.4 admet des variations évidentes. Par exemple, au lieu de D, on peut considérer l'ensemble D^0 et un processus M défini seulement dans D^0 et dont la restriction à D_n appartient à $\mathscr{B}^p(D_n)$ pour tout n. Le reste de l'énoncé est inchangé. Ou encore, au lieu de supposer que les D_n annoncent D, on peut supposer que $D_n \subset D_{n+1} \subset D$ et $\bigcup_n D_n = D$ p.s. La conclusion est encore valable.

2°. Les hypothèses et conclusions des théorèmes 6.3 et 6.4 font intervenir la condition de bornitude dans $\mathbf{L}^p$, intrinsèque aux définitions de $\mathscr{B}^p$ et $\mathscr{M}^p$. Or, en relativisant le problème du prolongement aux régions R_z, $z \in \mathbb{R}_+^2$ arbitraire, et en considérant $D \cap R_z$ à la place de D, on voit qu'en remplaçant cette condition par celle qui exige seulement l'intégrabilité de la puissance p des processus concernés, le prolongement d'une bi-martingale est encore possible et M^D constitue encore le prolongement minimal.

§ 7. Prolongements de bi-martingales à partir d'un voisinage d'arrêt quelconque

Nous allons maintenant considérer le problème du prolongement d'une bi-martingale à partir d'un voisinage d'arrêt quelconque. Les tribus $\mathscr{F}_z$ sont toujours celles engendrées par le processus de Wiener W. La remarque préliminaire suivante va nous servir de fil conducteur dans la formulation des définitions et du problème. Soit D un voisinage d'arrêt de $Z=(S,T)$, que nous supposerons fini, pour simplifier, et soit $M\in\mathcal{M}^p$. Posons $D'(\omega)=\{z\colon z\in\mathbb{R}^2_+,\ Z(\omega)+z\in D(\omega)\}$, $M'_z(\omega)=M_{Z(\omega)+z}(\omega)$ si $Z(\omega)+z\in D(\omega)$ et $\mathcal{F}'_z=\mathcal{F}_{Z+z}$, où $\mathcal{F}_{Z+z}$ désigne la tribu des $F\in\mathcal{F}_\infty$ tels que $F\cap\{Z+z\prec\zeta\}\in\mathcal{F}_\zeta$ pour tout $\zeta\in\mathbb{R}^2_+$. Alors D' est un voisinage d'arrêt de l'origine relatif à la famille $\{\mathcal{F}'_z, z\in\mathbb{R}^2_+\}$ et le processus $M'\colon(z,\omega)\to M'(\omega)$ est une bi-martingale dans D' séparément bornée dans $\mathbf{L}^p$, selon la définition du §6 prise relativement à la famille $\{\mathcal{F}'_z\}$ et sans la condition d'annulation sur les axes. La démonstration se fait aisément par approximation dyadique de Z du dessus, c'est-à-dire en supposant d'abord que Z prend ses valeurs dans un ensemble dénombrable et en approchant ensuite Z du dessus par une suite de points d'arrêt prenant leurs valeurs dans l'ensemble des points à coordonnées dyadiques. A noter que S (resp. T) est un temps d'arrêt relatif à la famille $\{\mathcal{F}^1_{s0}, s\in\mathbb{R}_+\}$ (resp. $\{\mathcal{F}^2_{0t}, t\in\mathbb{R}_+\}$) et que $\mathcal{F}'^1_{s0}=\mathcal{F}^1_{S+s,\,0}$ (resp. $\mathcal{F}'^2_{0t}=\mathcal{F}^2_{0,\,T+t}$).

A la lumière de cette remarque nous dirons qu'un processus $M\colon(z,\omega)\to M_z(\omega)$, défini dans D et nul sur $D-(Z,\infty)$, est une *bi-martingale locale* (resp. *bi-martingale*) dans D, si M' en est une dans D' relativement à la famille $\{\mathcal{F}'_z\}$, où M', D' et $\mathcal{F}'_z$ sont définis comme ci-dessus. Nous désignerons par $\mathcal{B}^p(D)$ la classe des bi-martingales dans D, séparément continues et séparément bornées dans $\mathbf{L}^p$. Il est clair que si D est un voisinage d'arrêt de l'origine, cette définition de $\mathcal{B}^p(D)$ coïncide avec celle que nous avons donnée au §6.

Le problème du prolongement d'une bi-martingale dans D ne peut être réduit au cas particulier déjà étudié moyennant le passage aux symboles affectés de $'$, pour la raison que les tribus $\mathcal{F}'_z$ ne sont généralement pas engendrées par un processus de Wiener. Il est toutefois vrai que le processus W' défini par $W'_z=W((Z,Z+z])$, $z\in\mathbb{R}^2_+$, est un processus de Wiener, mais nous avons seulement les inclusions

$$\mathcal{F}_z\subset\mathcal{F}'_z\subset\sigma(W'_\zeta,\zeta\prec z)\vee\mathcal{G}_Z, \tag{7.1}$$

où $\mathcal{G}_Z$ est la tribu, indépendante de W', formée des $F\in\mathcal{F}_\infty$ tels que $F\cap\{Z\prec z\}\in\mathcal{F}^1_z\vee\mathcal{F}^2_z$ pour tout $z\in\mathbb{R}^2_+$. Or, l'instrument indispensable qu'est la représentation (3.4) subsiste, avec W' à la place de W, pour les processus de la classe $\mathcal{M}^2_{\mathrm{loc}}$ relative à la famille des tribus du dernier membre de (7.1), mais pas pour ceux de la classe $\mathcal{M}^2_{\mathrm{loc}}$ relative à $\{\mathcal{F}'_z\}$. Pour les processus de cette dernière classe, que nous désignerons par $\mathcal{M}'^2_{\mathrm{loc}}$, nous avons néanmoins la représentation modifiée suivante. Un processus M' appartient à $\mathcal{M}'^2_{\mathrm{loc}}$ si et seulement s'il existe des processus $\varphi=\{\varphi(\xi)\colon\xi\in\mathbb{R}^2_+\}$ et $\psi=\{\psi(\xi,\eta)\colon\xi,\eta\in\mathbb{R}^2_+\}$ satisfaisant aux conditions (1)–(4) de la proposition 3.2 et tels que l'on ait

$$M'_z=\int\limits_{(Z,\,Z+z]}\varphi\,dW+\iint\limits_{\widehat{(Z,\,Z+z]}}\psi\,dW\,dW,\qquad z\in\mathbb{R}^2_+. \tag{7.2}$$

Il suffit de considérer le cas où M' est une martingale bornée dans $\mathbf{L}^2$, car l'extension à $M'\in\mathcal{M}'^2_{\mathrm{loc}}$ se fait comme au §3. Posons $M'_\infty=\lim\limits_{z\to\infty}M'_z$ et désignons par M une version continue de la martingale définie par $M_z = E\{M'_\infty \mid \mathscr{F}_z\}$, $z \in \mathbb{R}^2_+$. Par approximation dyadique de Z du dessus, on voit facilement que $M_{Z+z} = E\{M'_\infty \mid \mathscr{F}_{Z+z}\}$, ce qui montre que $M'_z = M_{Z+z}$, donc en particulier que M' et les processus de $\mathscr{M}'^2_{\mathrm{loc}}$ ont une version continue. Soient φ et ψ les processus de la représentation (3.4) de M. A nouveau par approximation dyadique de Z, il est facile de voir que M_{Z+z} est égal au second membre de (7.2), ce qui prouve notre assertion.

La représentation (7.2) vaut aussi lorsque Z n'est pas supposé fini, ce qui se constate facilement. Elle supplée à (3.4) dans l'élaboration des résultats auxiliaires utilisés au § 6 et montre ainsi qu'en remplaçant la famille de tribus $\{\mathscr{F}_z\}$ par $\{\mathscr{F}'_z\}$, les résultats de ce paragraphe restent vrais. La réduction moyennant le passage de M à M' étant dès lors possible, nous concluons que les théorèmes 6.3 et 6.4 valent également dans le cas d'un voisinage d'arrêt quelconque non vide D de Z. A noter que si D est étagé, M^D est encore défini par (6.1) (la masse attribuée par M à $D-(Z,\infty)$ est nulle par convention) et $V^L_p(M)$ par (6.5), avec la ligne d'arrêt L associée à D à la place de Λ. Les modifications à apporter aux démonstrations étant évidentes, nous ne nous attarderons pas à les détailler ici et passerons plutôt au problème du prolongement d'une martingale forte.

§ 8. Prolongements de martingales fortes

Nous consacrerons le dernier paragraphe du présent article à l'étude du problème du prolongement d'une martingale forte définie dans un voisinage d'arrêt.

Pour tout $z \in \mathbb{R}^2_+$, nous poserons $\mathscr{G}_z = \mathscr{F}^1_z \vee \mathscr{F}^2_z$, où les tribus $\mathscr{F}_z$ sont à nouveau celles engendrées par le processus de Wiener. Si Z est un point d'arrêt, la tribu $\mathscr{G}_Z$ des événements non postérieurs à Z sera, comme au § 7, la tribu des $F \in \mathscr{F}_\infty$ tels que $F \cap \{Z \prec z\} \in \mathscr{G}_z$ pour tout $z \in \mathbb{R}^2_+$.

Nous dirons qu'un processus $M: (z,\omega) \to M_z(\omega)$. défini dans un voisinage d'arrêt non vide D de Z et nul sur $D-(Z,\infty)$, est une *martingale forte* dans D, s'il est adapté et si pour tout voisinage d'arrêt étagé et borné D' de Z', tel que $D' \subset D$,

$$\begin{aligned} &M(D' \cap (Z',\infty)) \quad \text{est une variable aléatoire intégrable} \\ &\text{et} \quad E\{M(D' \cap (Z',\infty)) \mid \mathscr{G}_{Z'}\} = 0. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Nous désignerons par $\mathscr{M}_f(D)$ l'ensemble des martingales fortes M dans D continues (c'est-à-dire telles que, pour presque tout ω, l'application $(s,t) \to M_{st}(\omega)$ de $D(\omega)$ dans $\mathbb{R}$ est continue) et par $\mathscr{M}^p_f(D)$ l'ensemble des $M \in \mathscr{M}_f(D)$ tels que $\sup E\{|M(D')|^p\} < \infty$, la borne supérieure étant prise sur les voisinages d'arrêt étagés et bornés $D' \subset D$. A noter que l'hypothèse de continuité rend superflue l'intersection avec (Z',∞) dans l'énoncé (8.1) (la masse attribuée par M à $D'-(Z',\infty)$ est nulle; celle attribuée par M à $D-(Z,\infty)$ est nulle par convention).

Pour qu'il n'y ait pas de confusions dans la terminologie, $\mathscr{M}_f(\mathbb{R}^2_+)$ devrait représenter l'ensemble des martingales fortes au sens de [2], p. 115. Effectivement, il en est ainsi et ce pour deux raisons. Premièrement, l'ensemble des martingales fortes continues coïncide avec $\mathscr{M}_f(\mathbb{R}^2_+)$ (proposition 8.2);

deuxièmement, toute martingale forte possède une version continue, puisqu'elle admet la représentation (3.4) (avec $\psi \equiv 0$) (cf. [7]).

Nous allons établir, pour commencer, un résultat auxiliaire. Ce résultat (théorème 8.3) peut être considéré comme l'analogue du théorème d'arrêt de Doob pour les éléments de $\mathcal{M}_f(D)$. Il convient de le démontrer d'abord pour les martingales fortes (lemme 8.1).

A cet effet, posons la définition suivante: si D est un voisinage d'arrêt de Z, $\mathcal{G}_D$ sera la tribu engendrée par les $F \in \mathcal{J}_\infty$ tels que $F \subset \{D \neq \emptyset\}$ et que $F \cap \{Z \prec z\} \cap \{z \notin D\} \in \mathcal{G}_z$ pour tout $z \in \mathbb{R}_+^2$.

Il est clair que $\{D \neq \emptyset\} \in \mathcal{G}_D$. En outre, si D' est un voisinage d'arrêt de Z' tel que $D' \subset D$ et que $Z' = Z$ sur $\{D' \neq \emptyset\}$, alors $\mathcal{G}_{D'} \subset \mathcal{G}_D$.

On remarquera, pour la suite, qu'en vertu de la continuité à droite des tribus $\mathcal{G}_z$, dire que $F \cap \{Z \prec z\} \cap \{z \notin D\} \in \mathcal{G}_z$ pour tout $z \in \mathbb{R}_+^2$, équivaut à dire soit que $F \cap \{Z \prec z\} \cap \{z \notin D^0\} \in \mathcal{G}_z$ pour tout $z \in \mathbb{R}_+^2$, soit que $F \cap \{Z \ll z\} \cap \{z \notin D\} \in \mathcal{G}_z$ pour tout $z \in \mathbb{R}_+^2$. On remarquera aussi que si Z est un point d'arrêt et D le voisinage d'arrêt $\mathbb{R}_+^2 - (Z, \infty)$, alors $\mathcal{G}_D = \mathcal{G}_Z$.

Lemme 8.1. *Soit M une martingale forte continue. Si D' et D'' sont deux voisinages d'arrêt étagés et bornés de Z', resp. Z'', tels que $D'' \subset D'$ et que $Z' = Z''$ sur $\{D'' \neq \emptyset\}$, alors $M(D')$ et $M(D'')$ sont intégrables et*

$$E\{M(D') \mid \mathcal{G}_{D''}\} = M(D''). \tag{8.2}$$

Démonstration. Il suffit de prouver que si D est un voisinage d'arrêt étagé de Z tel que $D \subset R_z$, alors $E\{M([Z,z]) \mid \mathcal{G}_D\} = M(D)$. Puisque $M([Z,z])$ et $M(D)$ sont nuls sur $\{D = \emptyset\}$, cela revient au même de démontrer que

$$E\{M([Z,z]) \mid \mathcal{G}'_D\} = M(D), \tag{8.3}$$

où $\mathcal{G}'_D$ est la tribu des $F \in \mathcal{J}_\infty$ tels que $F \cap \{Z \prec z\} \cap \{z \notin D\} \in \mathcal{G}_z$ pour tout $z \in \mathbb{R}_+^2$. Nous supposerons d'abord que Z prend ses valeurs dans un ensemble fini. Soit D_n l'élément générique de l'approximation dyadique de D du dessus (proposition 2.2). A noter que $\inf D_n = Z$. Désignons par $z_\nu = (s_\nu, t_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, m$, les valeurs finies de Z et posons $z = (s,t)$. Quitte à les inclure aux nombres dyadiques d'ordre n, nous pouvons supposer que s, t et les s_ν, t_ν sont dyadiques d'ordre n. Posons, sur $\{Z = z_\nu\}$ et pour $i > 2^n s_\nu$,

$$\tau_i = \begin{cases} \sup\{t' : (i2^{-n}, t') \in D_n\} & \text{si } (i2^{-n}, t_\nu) \in D_n, \\ t_\nu & \text{autrement,} \end{cases}$$

et

$$B_i = (((i-1)\,2^{-n}, \tau_i), (i2^{-n}, t)].$$

Nous avons

$$\begin{aligned} & E\{M([Z,z] - D_n) \mid \mathcal{G}'_{D_n}\} \\ & \quad = \sum_{\nu=1}^{m} E\{M([z_\nu, z] - D_n)\, I_{\{Z = z_\nu\}} \mid \mathcal{G}'_{D_n}\} \\ & \quad = \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{\substack{2^n s_\nu < i \leq 2^n s \\ 2^n t_\nu \leq j \leq 2^n t}} E\{M(B_i)\, I_{\{\tau_i = j2^{-n}\}}\, I_{\{Z = z_\nu\}} \mid \mathcal{G}'_{D_n}\}. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Nous allons montrer que chaque terme de cette dernière somme est nul. En vertu de la propriété de martingale forte, il nous suffit de vérifier que si $F \in \mathscr{G}'_{D_n}$, alors $F \cap \{\tau_i = j2^{-n}\} \cap \{Z = z_v\} \in \mathscr{G}_{(i-1)2^{-n}, j2^{-n}}$. Or, les deux derniers ensembles de l'intersection appartiennent clairement à la tribu indiquée, tandis que le premier peut être remplacé par $F \cap \{Z \prec ((i-1)2^{-n}, j2^{-n})\} \cap \{((i-1)2^{-n}, j2^{-n}) \notin D_n^0\}$, qui y appartient aussi, d'où la vérification. Le premier membre de (8.4) étant donc nul, nous voyons, compte tenu du fait (facile à constater) que $M(D_n)$ est $\mathscr{G}'_{D_n}$-mesurable, que (8.3) vaut avec D_n à la place de D. En faisant alors tendre n vers l'infini, (8.3) en résulte, puisque $M(D_n)$ converge p.s. vers $M(D)$, $\mathscr{G}'_{D_{n+1}} \subset \mathscr{G}'_{D_n}$ et $\bigcap_n \mathscr{G}'_{D_n} = \mathscr{G}'_D$. La restriction sur Z est finalement levée de la manière suivante. Soit (Z_n) une suite de points d'arrêt prenant chacun leurs valeurs dans un ensemble fini, telle que $0 \ll Z_{n+1} \prec Z_n$ et que $\lim_{n \to \infty} Z_n = Z$. D'après le cas particulier déjà démontré, (8.3) vaut avec $D_n = D \cap (Z_n, \infty)$ et $Z'_n = \inf D_n$ à la place de D, resp. Z. La démonstration s'achève alors en faisant tendre n vers l'infini, tout en notant que $M([Z'_n, z])$ et $M(D_n)$ convergent p.s. vers $M([Z, z])$, resp. $M(D)$, que $\mathscr{G}'_{D_{n+1}} \subset \mathscr{G}'_{D_n}$ et $\bigcap_n \mathscr{G}'_{D_n} = \mathscr{G}'_D$ et que les variables aléatoires $M([Z'_n, z])$ sont uniformément intégrables, encore d'après le cas particulier, appliqué cette fois-ci pour $Z=0$ et $D_n = R_z - (Z'_n, \infty)$, ce qui nous donne $E\{M_z | \mathscr{G}'_{D_n}\} = M(D_n) = M_z - M([Z'_n, z])$.

Proposition 8.2. *L'ensemble des martingales fortes continues coïncide avec $\mathscr{M}_f(\mathbb{R}^2_+)$. En outre, $\mathscr{M}_f(\mathbb{R}^2_+) \subset \mathscr{M}^2_{\mathrm{loc}}$.*

Démonstration. Il est clair que les processus de $\mathscr{M}_f(\mathbb{R}^2_+)$ sont des martingales fortes continues. Réciproquement, soit M un tel processus et soit D un voisinage d'arrêt étagé de Z contenu dans R_z. Supposons d'abord que Z prend ses valeurs dans un ensemble dénombrable n'incluant pas 0 et posons $D_z = R_z - (Z, \infty)$. Alors D_z et $D_z \cup D$ sont des voisinages d'arrêt étagés de l'origine contenus dans R_z, donc d'après le lemme 8.1, $E\{M(D_z \cup D) | \mathscr{G}_{D_z}\} = M(D_z)$, ce qui implique $E\{M(D) | \mathscr{G}_{D_z}\} = 0$ et, par conséquent, $E\{M(D) | \bigvee_z \mathscr{G}_{D_z}\} = 0$. Mais $\bigvee_z \mathscr{G}_{D_z} = \mathscr{G}_{\mathbb{R}^2_+ - (Z, \infty)} = \mathscr{G}_Z$, donc (8.1) est démontré. Finalement, la restriction sur Z est levée par le procédé utilisé à la fin de la démonstration du lemme.

La deuxième partie de la proposition résulte de la proposition 3.2 et du résultat, déjà rappelé, suivant lequel toute martingale forte admet la représentation (3.4).

Dans le reste du paragraphe D désigne un voisinage d'arrêt non vide de Z.

Théorème 8.3. *Supposons que $M \in \mathscr{M}_f(D)$. Si D' et D'' sont comme dans le lemme* 8.1 *et, de plus, contenus dans D, alors* (8.2) *a lieu.*

Démonstration. Soit $M^{D'}$ le processus défini par (6.1), c'est-à-dire tel que $M^{D'}_z = M(D' \cap R_z)$, $z \in \mathbb{R}^2_+$. Il est clair que si D_1 est un voisinage d'arrêt étagé et borné de Z_1, alors $D_2 = \overline{(D' \cap D_1)^0}$ en est également un de $Z_2 = \inf D_2$ et $D_2 \subset D$. De plus, $M^{D'}(D_1) = M(D' \cap D_1) = M(D_2)$, donc

$$E\{M^{D'}(D_1) | \mathscr{G}_{Z_1}\} = E\{E\{M(D_2) | \mathscr{G}_{Z_2}\} | \mathscr{G}_{Z_1}\} = 0,$$

du fait que $M \in \mathcal{M}_f(D)$. Cela implique que $M^{D'} \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}^2_+)$, donc le théorème résulte du lemme 8.1 et de la proposition 8.2, puisque $M^{D'}(D') = M(D')$ et $M^{D'}(D'') = M(D'')$.

Le théorème conclusif donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une martingale forte dans D se prolonge en une martingale forte dans $\mathbb{R}^2_+$.

Comme au cours des deux paragraphes précédents, nous appellerons *prolongement* de $M \in \mathcal{M}_f(D)$ tout processus $\hat{M}$ défini dans $\mathbb{R}^2_+$ tel que $\hat{M} = M$ sur D. Nous désignerons par $\mathcal{H}_n$ la classe $\{M(D') : D'$ voisinage d'arrêt de Z' tel que $Z' = Z$ sur $\{D' \neq \emptyset\}$, $D' \subset D \cap R_{nn}\}$.

Théorème 8.4. *Supposons que $M \in \mathcal{M}_f(D)$. Pour que M admette un prolongement $\hat{M} \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}^2_+)$, il faut et il suffit que, pour chaque n, la classe $\mathcal{H}_n$ soit uniformément intégrable. Dans ce cas, si (D_n) est une suite de voisinages d'arrêt étagés annonçant D, la limite $M^D_z = \lim_{n \to \infty} M^{D_n}_z$ existe, dans $\mathbf{L}^1$, pour tout $z \in \mathbb{R}^2_+$ et définit un prolongement M^D qui est minimal dans le sens défini par le théorème 6.3. Sous l'hypothèse que $\bigcup_n \mathcal{H}_n$ est uniformément intégrable, M admet un prolongement $\hat{M} \in \mathcal{M}^1_f(\mathbb{R}^2_+)$. Cette hypothèse est vérifiée si $M \in \mathcal{M}^p_f(D)$, $p > 1$, et dans ce cas M se prolonge en un processus $\hat{M} \in \mathcal{M}^p_f(\mathbb{R}^2_+)$.*

Démonstration. Dans la démonstration du théorème 8.3, nous avons déjà prouvé que si D' est un voisinage d'arrêt étagé contenu dans D, le processus $M^{D'}$ appartient à $\mathcal{M}_f(\mathbb{R}^2_+)$. Soit maintenant (D_n) une suite de voisinages d'arrêt étagés annonçant D (proposition 2.3 et théorème 2.4). Fixons $z \in \mathbb{R}^2_+$ et posons $D^z_n = \overline{(D_n \cap R_z)^0}$. Il est clair que (D^z_n) est une suite de voisinages d'arrêt étagés et bornés annonçant $D^z = \overline{(D \cap R_z)^0}$. En outre, $M^{D_n}_z = M(D^z_n)$. Soient n et n' tels que $n < n'$. Nous avons, d'après le théorème 8.3,

$$E\{M^{D_{n'}}_z | \mathcal{G}_{D^z_n}\} = E\{M(D^z_{n'}) | \mathcal{G}_{D^z_n}\} = M(D^z_n) = M^{D_n}_z,$$

donc $\{M^{D_n}_z, \mathcal{G}_{D^z_n}, n \geqq 1\}$ est une martingale. Supposons que $\mathcal{H}_n$ est uniformément intégrable. Alors $M^{D_n}_z$ converge p.s. et dans $\mathbf{L}^1$, quand $n \to \infty$, et définit un processus dont la version continue $M^D = \{M^D_z, z \in \mathbb{R}^2_+\}$ appartient manifestement à $\mathcal{M}_f(\mathbb{R}^2_+)$ et prolonge M. De même que dans la dernière partie de la démonstration du théorème 6.4, on montre que M^D est le prolongement minimal.

Réciproquement, si M admet un prolongement $\hat{M} \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}^2_+)$, il résulte immédiatement du théorème 8.3 que $\mathcal{H}_n$ est uniformément intégrable pour chaque n.

La dernière partie du théorème est évidente.

Remarque. Les définitions de martingale forte dans D, de $\mathcal{M}_f(D)$ et de $\mathcal{M}^p_f(D)$ sont valables aussi dans le cas où D^0 remplace D. Avec ce même remplacement dans l'énoncé du théorème, celui-ci reste correct.

Bibliographie

1. Burkholder, D.L.: Martingale transforms. Ann. Math. Statist. **37**, 1494–1504 (1966)
2. Cairoli, R., Walsh, J.B.: Stochastic integrals in the plane. Acta Math. **134**, 111–183 (1975)
3. Cairoli, R., Walsh, J.B.: Martingale representations and holomorphic processes. Ann. Probability **5**, 511–521 (1977)

4. Cairoli, R., Walsh, J.B.: Prolongements de processus holomorphes. Cas «carré intégrable». Séminaire de probabilités XI. Lecture Notes No. 581, 327–339. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1977
5. Cairoli, R., Walsh, J.B.: Some examples of holomorphic processes. Séminaire de probabilités XI. Lecture Notes No. 581, 340–348. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1977
6. Cairoli, R., Walsh, J.B.: On changing time. Séminaire de probabilités XI. Lecture Notes. No 581, 349–355. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1977
7. Cairoli, R.: Une représentation intégrale pour les martingales fortes. Séminaire de probabilités XII. Lecture Notes No. 649, 162–169. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1978
8. Chung, K.L.: On the fundamental hypotheses of Hunt processes. Istituto di alta matematica, Sympos. Math. IX, 43–52 (1972)
9. Dellacherie, C., Meyer, P.A.: Probabilités et potentiel. Paris: Hermann 1975
10. Doléans, C.: Variation quadratique des martingales continues à droite. Ann. Math. Statist. **40**, 284–289 (1969)
11. Gundy, R.F., Varopoulos, N.Th.: A martingale that occurs in harmonic analysis. Ark. Math. **14**, 179–187 (1976)
12. Merzbach, E.: Stopping for two-dimensional stochastic processes. Technical Report, Ben Gurion Univ. of the Negev (1976)
13. Merzbach, E.: Predictability and extension of the stochastic integral in the plane. Technical Report, Ben Gurion Univ. of the Negev (1976)
14. Métraux, C.: Quelques inégalités pour martingales à paramètre bidimensionnel. Séminaire de probabilités XII. Lecture Notes. No. 649, 170–179. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1978
15. Meyer, P.A.: Intégrales stochastiques I. Séminaire de probabilités I. Lecture Notes. No. 39, 72–94. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967
16. Millar, P.W.: Martingale integrals. Trans. Amer. Math. Soc. **133**, 145–166 (1968)
17. Walsh, J.B.: A property of conformal martingales. Séminaire de probabilités XI. Lecture Notes No. 581, 490–492. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1977
18. Wong, E., Zakai, M.: Martingales and stochastic integrals for processes with a multi-dimensional parameter. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **29**, 109–122 (1974)
19. Wong, E., Zakai, M.: Weak martingales and stochastic integrals in the plane. Ann. Probab. **4**, 570–586 (1976)
20. Wong, E., Zakai, M.: An extension of stochastic integrals in the plane. Ann. Probability **5**, 770–778 (1977)
21. Wong, E., Zakai, M.: The sample function continuity of stochastic integrals in the plane. Ann. Probability **5**, 1024–1027 (1977)

Reçu le 9 Septembre, 1977