Prob. Th. Rel. Fields 76, 573–586 (1987)

Probability Theory and Related Fields

Sur la convergence des processus ponctuels

Jean Jacod

Laboratoire de Probabilités, Université P. et M. Curie, Tour 56, Place Jussieu, F-75252 Paris Cedex, France

Summary. We give a necessary and sufficient condition for the convergence in law $N^n \xrightarrow{\mathscr{L}} N$ of simple point processes on $\mathbb{R}_+$, for Skorokhod topology, in terms of their predictable compensators A^n and A. The assumptions are that $A_t(\omega)$ is continuous in (ω, t) and meets some mild integrability condition. The condition is that A^n converges "weakly" to A in a suitable sense.

1. Introduction

Soit $(N^n)_{n \geq 1}$ une suite de processus ponctuels simples de compensateurs (prévisibles) A^n. Soit aussi N un processus ponctuel simple de compensateur A. On s' intéresse à la convergence en loi $N^n \xrightarrow{L} N$.

Brown [3] a été le premier à montrer que, si A est déterministe et continu en temps (donc N est un processus de Poisson homogène ou non), la convergence $A_t^n \xrightarrow{P} A_t$ pour tout t entraine que $N^n \xrightarrow{\mathscr{L}} N$. Kabanov et al. [9] ont ensuite généralisé ce résultat au cas où A est discontinu.

Dans Grigelionis et Mikulevicius [2] (voir aussi Rebolledo [14] ou Kurtz [11] pour des versions un peu différentes, et Jacod et Shiryaev [8] pour des références bibliographiques plus complètes) on peut trouver des conditions plus générales du type suivant: supposons que $A_t(.)$ soit une fonction du processus N, continue pour la topologie de Skorokhod, et que $t \to A_t(.)$ soit fortement dominé par une fonction croissante continue F (cf. § 2, condition [M2]). Alors

$$(1.1) \qquad A_t^n - A_t(N^n) \xrightarrow{P} 0 \qquad \forall t$$

entraine $N^n \xrightarrow{\mathscr{L}} N$. Lorsque F est seulement càdlàg, des conditions du même type, mais plus compliquées, entrainent aussi $N^n \xrightarrow{\mathscr{L}} N$. Ces résultats généralisent ceux de Brown et de Kabanov et al.

Il est bien connu que ces conditions ne sont pas nécessaires pour que $N^n \xrightarrow{\mathscr{L}} N$. Dans cet article, nous essayons de trouver des conditions nécessaires, toujours en termes de convergence de A^n vers A. Nous verrons qu'il convient de remplacer (1.1), qui (modulo une uniforme intégrabilité à ajouter) est une convergence forte dans L^1, par une condition de type «convergence faible ($\sigma(L^1, L^\infty)$) dans L^1». Cela entraine des problèmes de «localisation» qui font qu'en outre nous devons remplacer les temps fixes t par des temps d'arrêt bien choisis: voir le théorème principal au §4. Nous donnons aussi (§5) des conditions sur des temps fixes t, mais elles sont beaucoup moins satisfaisantes.

A l'exception du §5, nos résultats ne concernent que le cas où $t \to A_t$ est continu, ce qui correspond à la quasi-continuité à gauche du processus limite.

Rappelons qu'au lieu d'affaiblir la condition (1.1), on pourrait renforcer la notion de convergence en loi, en utilisant la convergence «étendue» introduite par Aldous [2]. Ainsi, Kubilius et Mikulevicius [10] ont montré que, sous des conditions similaires aux nôtres ([H1] et [H2]: §2), (1.1) équivaut à cette convergence renforcée.

2. Quelques préliminaires

La situation est la suivante: pour chaque entier $n \geqq 1$, soit $\mathscr{B}^n = (\Omega^n, \mathscr{F}^n, (\mathscr{F}_t^n)_{t \geqq 0}, P^n)$ une base stochastique munie d'un processus ponctuel simple N^n (i.e. un processus croissant à valeurs entières, càd, nul en 0, n'ayant que des sauts unité). On note A^n son compensateur, et $T_p^n = \inf(t: N_t^n = p)$ ses temps de saut.

On note Ω l'espace canonique des processus ponctuels simples, avec le processus canonique N, les tribus $\mathscr{F}_t = \sigma(N_s: s \leqq t)$ et $\mathscr{F} = \bigvee_t \mathscr{F}_t$, et les temps d'arrêt $T_p = \inf(t: N_t = p)$; rappelons que $\mathscr{F}_{T_p}$ est la tribu engendrée par $T_1, \ldots, T_p$. On munit Ω de la topologie de Skorokhod, pour laquelle $\omega_n \to \omega$ si et seulement si $T_p(\omega_n) \to T_p(\omega)$ pour tout p.

Soit aussi A un processus croissant càd à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}_+$, prévisible, nul en 0, avec $\Delta A_t \leqq 1$ (A a vocation à être le compensateur du processus canonique pour la loi limite des $\mathscr{L}(N^n)$). Nous verrons que le premier rôle est joué par les variables $A_{t \wedge T_p}$, et nous introduisons deux hypothèses les concernant:

[H1] $\omega \to A_{t \wedge T_p}(\omega)$ est continu sur Ω pour tous $t \in \mathbb{R}_+$, $p \in \mathbb{N}$.

[H2] Pour tous $t \in \mathbb{R}_+$, $p \in \mathbb{N}$, les variables $\{A_{t \wedge T_p} \circ N^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont uniformément intégrables (en abrégé: UI), pour les probabilités P^n.

Ces hypothèses peuvent paraitre un peu obscures; pour éclairer leur signification, nous allons les comparer à d'autres hypothèses plus «naturelles». Commençons par [H1].

[C1] $\omega \to A_t(\omega)$ est continu pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

[C2] $(\omega, t) \to A_t(\omega)$ est continu sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$.

(2.1) **Lemme.** [H1] *équivaut à* [C2], *et implique* [C1] *et la continuité de* $\omega \to A_{t \wedge T_{p+1} \wedge (T_p+s)}(\omega)$ *pour tous* $s, t \in \mathbb{R}_+$, $p \in \mathbb{N}$.

Preuve. Que [C2] implique [C1], [H1] et la dernière assertion du lemme est évident (car $\omega_n \to \omega$ implique $T_p(\omega_n) \to T_p(\omega)$). Il reste à montrer que [H1]$\Rightarrow$[C2]. Supposons [H1], et soit $\omega_n \to \omega$, $t_n \to t$. Pour montrer $A_{t_n}(\omega_n) \to A_t(\omega)$ et quitte à prendre une sous-suite, il suffit de considérer deux cas:

α) $\exists p \in \mathbb{N}^*$ avec $T_p(\omega) < t \leqq T_{p+1}(\omega)$ et $T_p(\omega_n) < t_n \leqq T_{p+1}(\omega_n)$ pour tout n. Définissons ω', ω'_n par

$$T_q(\omega') = \begin{cases} T_q(\omega) & \text{si } q \leqq p \\ t & \text{si } q = p+1 \\ \infty & \text{si } q > p+1, \end{cases} \qquad T_q(\omega'_n) = \begin{cases} T_q(\omega_n) & \text{si } q \leqq p \\ t_n & \text{si } q = p+1 \\ \infty & \text{si } q > p+1. \end{cases}$$

On a donc $\omega'_n \to \omega'$, et $s = \sup_n t_n = \sup_n T_{p+1}(\omega'_n)$ est fini. A cause de la prévisibilité de A (cf. [6]), on a aussi

$$A_t(\omega) = A_{s \wedge T_{p+1}}(\omega'), \qquad A_{t_n}(\omega_n) = A_{s \wedge T_{p+1}}(\omega'_n),$$

car $t \leqq s$. Donc [H1] implique que $A_{t_n}(\omega_n) \to A_t(\omega)$.

β) $\exists p \in \mathbb{N}^*$ avec $t = T_p(\omega)$ et $t_n > T_p(\omega_n)$ pour tout n. Si $s \in]t, T_{p+1}(\omega)[$ on a $s \in]T_p(\omega_n), T_{p+1}(\omega_n)[$ pour tout n assez grand, donc (α) entraine que $A_s(\omega_n) \to A_s(\omega)$. Par suite

$$\limsup_n A_{t_n}(\omega_n) \leqq A_t(\omega)$$

(prendre s arbitrairement proche de t ci-dessus: on a $t_n < s$ pour tout n assez grand). Par ailleurs, (α) appliqué à $t = T_p(\omega)$ et $t'_n = T_p(\omega_n)$ entraine que $A_{T_p}(\omega_n) \to A_t(\omega)$; comme $A_{T_p}(\omega_n) \leqq A_{t_n}(\omega_n)$ on a

$$\liminf_n A_{t_n}(\omega_n) \geqq A_t(\omega).$$

Donc $A_{t_n}(\omega_n) \to A_t(\omega)$. □

En second lieu, soit

[M1] On a $\sup_{\omega \in \Omega} A_t(\omega) < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

[M2] Il existe une fonction croissante *continue* F telle que $A(\omega) \prec F$ (i.e. $A_t(\omega) - A_s(\omega) \leqq F_t - F_s$ pour $s \leqq t$).

Les implications suivantes sont alors évidentes:

(2.2) $$[\mathrm{M2}] \Rightarrow [\mathrm{M1}] \Rightarrow [\mathrm{H2}],$$

(2.3) $$[\mathrm{M2}] + [\mathrm{C1}] \Rightarrow [\mathrm{H1}] + [\mathrm{H2}].$$

Terminons ce paragraphe par deux résultats techniquement utiles.

(2.4) **Lemme.** a) *Pour tout* $p \in \mathbb{N}$, *la suite* $(A^n_{T^n_p})_{n \geqq 1}$ *est UI.*

b) *La suite* $(A^n_t)_{n \geqq 1}$ *est UI si et seulement si la suite* $(N^n_t)_{n \geqq 1}$ *est UI.*

Preuve. $M^n = N^n - A^n$ est une martingale locale vérifiant

$$[M^n, M^n]_t = \sum_{s \leqq t} (\Delta N^n_s - \Delta A^n_s)^2 \leqq 2 \sum_{s \leqq t} (\Delta N^n_s)^2 + 2 \sum_{s \leqq t} (\Delta A^n_s)^2$$
$$\leqq 2 N^n_t + 2 A^n_t$$

(car $\Delta N^n \leqq 1$, $\Delta A^n \leqq 1$). Donc pour tout temps d'arrêt S^n sur $\mathscr{B}^n$:

(2.5) $$E^n((M^n_{S_n})^2) = E^n([M^n, M^n]_{S^n}) \leqq 4 E^n(N^n_{S^n}) = 4 E^n(A^n_{S^n}).$$

En particulier si $S^n = T^n_p$ on a $E^n((M^n_{T^n_p})^2) \leqq 4p$, donc la suite $(M^n_{T^n_p})_{n \geqq 1}$ est UI. Comme $N^n_{T^n_p} \leqq p$, on en déduit (a). De même, (2.5) appliqué à $S^n = t$ montre que $(M^n_t)_{n \geqq 1}$ est UI dès que, soit $(A^n_t)_{n \geqq 1}$, soit $(N^n_t)_{n \geqq 1}$, est UI: on en déduit immédiatement (b). □

(2.6) **Lemme.** *La suite* $(A^n_t)_{n \geqq 1}$ *est* $\mathbb{R}$*-tendue si et seulement si la suite* $(N^n_t)_{n \geqq 1}$ *est* $\mathbb{R}$*-tendue.*

Preuve. Il suffit d'utiliser les inégalités de Lenglart-Rebolledo ([12, 13]), où $a, b > 0$ sont arbitraires:

$$P^n(N^n_t \geqq a) \leqq \frac{b}{a} + P^n(A^n_t \geqq b),$$

$$P^n(A^n_t \geqq a) \leqq \frac{b+1}{a} + P^n(N^n_t \geqq b). \quad \square$$

3. Tension de la suite (N^n)

Dans ce paragraphe, on va donner un critère de tension pour la suite (N^n), en terme des compensateurs A^n.

Outre l'espace canonique Ω précédemment défini, on introduit l'ensemble $\bar{\Omega}$ des fonctions ω: $\mathbb{R}_+ \to \bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ qui sont croissantes, càd, nulles en 0, et qui n'ont que des sauts unité. On note encore N le processus canonique sur $\bar{\Omega}$, et $\bar{\mathscr{F}}_t = \sigma(N_s, s \leqq t)$, $\bar{\mathscr{F}} = \bigvee_t \bar{\mathscr{F}}_t$, et $T_p = \inf(t: N_t = p)$, et $T_\infty = \lim_p \uparrow T_p$. On a $\Omega \subset \bar{\Omega}$, et un point ω de $\bar{\Omega}$ appartient à Ω si et seulement si $T_\infty(\infty) = \infty$.

$\bar{\Omega}$ est un fermé de l'espace de Skorokhod $D(\bar{\mathbb{N}})$ des fonctions càdlàg sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\bar{\mathbb{N}}$, et on le munit de la topologie induite. Noter que la loi $\mathscr{L}(N^n)$ est a-priori une probabilité sur Ω, mais peut aussi être considérée comme une probabilité sur $\bar{\Omega}$.

On dit que *la suite* (N^n) *est* Ω*-tendue* si les $\mathscr{L}(N^n)$ sont uniformément tendues sur Ω muni de la topologie de Skorokhod. On dit qu'elle est $\bar{\Omega}$*-tendue* si les $\mathscr{L}(N^n)$ sont uniformément tendues sur $\bar{\Omega}$. Evidemment «Ω-tendue» implique «$\bar{\Omega}$-tendue».

Plutôt que d'utiliser l'un des critères usuels en termes de «module de continuité», et étant donné qu'on a affaire à des processus ponctuels, il est plus facile d'opérer directement: soit Δ la partie fermée de $\bar{\mathbb{R}}_+^{\mathbb{N}}$ (muni de la topologie produit) constituée des suites croissantes, et S_p les applications coordonnées

$(S_p(\{t_n\})=t_p)$. La formule $S_p=T_p(\omega)$ permet d'identifier $\bar{\Omega}$ avec la partie $\bar{\Delta}_0$ de Δ constituée des suites (t_n) vérifiant $t_n<t_{n+1}$ si $t_n<\infty$; de même, Ω s'identifie à la partie Δ_0 de $\bar{\Delta}_0$ constituée des suites (t_n) vérifiant en outre $\lim_n \uparrow t_n=\infty$.

Δ étant compact, la suite $\{(T_p^n)_{n\geqq 1}\}$ est automatiquement Δ-tendue. Comme $\omega_n\to\omega$ dans Ω (resp. $\bar{\Omega}$) si et seulement si $T_p(\omega_n)\to T_p(\omega)$ pour tout $p\in\mathbb{N}$ (noter qu'on n'a pas nécessairement $T_\infty(\omega_n)\to T_\infty(\omega)$ dans le cas de $\bar{\Omega}$), on déduit des identifications précédentes que:

(3.1) La suite (N^n) est Ω-tendue (resp. $\bar{\Omega}$-tendue) si et seulement si $Q(\Delta_0)=1$ (resp. $Q(\bar{\Delta}_0)=1$) pour toute probabilité Q sur Δ qui est un point-limite de la suite $\{\mathscr{L}((T_p^n)_{p\geqq 1})\}_{n\geqq 1}$.

On déduit alors facilement le lemme suivant (qui peut être vu aussi comme une application aux processus ponctuels du critère de tension d'Aldous [1]):

(3.2) **Lemme.** a) *La suite (N^n) est $\bar{\Omega}$-tendue si et seulement si on a*

(3.3) $$\forall t\in\mathbb{R}_+,\ \forall p\in\mathbb{N},\quad \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_n P^n(T_{p+1}^n<t\wedge(T_p^n+\varepsilon))=0.$$

b) *La suite (N^n) est Ω-tendue si et seulement si on a* (3.3) *et*

(3.4) $$\forall t\in\mathbb{R}_+,\quad \lim_{p\uparrow\infty}\limsup_n P^n(N_t^n\geqq p)=0.$$

Preuve. (3.3) exprime la propriété, pour toute loi limite Q de la suite $\{\mathscr{L}((T_p^n)_{p\geqq 1})\}_{n\geqq 1}$, que $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} Q(S_{p+1}<t\wedge(S_p+\varepsilon))=0$ pour tous t,p; ceci équivaut à dire que $Q(S_{p+1}=S_p<\infty)=0$ pour tout p, qui à son tour équivaut à $Q(\bar{\Delta}_0)=1$: donc (a) découle de (3.1).

Comme $\{N_t^n\geqq p\}=\{T_p^n\leqq t\}$, (3.4) exprime que $Q(\lim_p S_p=\infty)=0$ pour Q comme ci-dessus. Donc (3.3) plus (3.4) équivalent à $Q(\Delta_0)=1$, et (b) découle encore de (3.1). □

Voici maintenant le critère de tension cherché:

(3.5) **Proposition.** a) *La suite (N^n) est $\bar{\Omega}$-tendue si et seulement si*

(3.6) $$\forall t\in\mathbb{R}_+,\ \forall p\in\mathbb{N},\quad \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_n E^n(A^n_{t\wedge T^n_{p+1}\wedge(T^n_p+\varepsilon)}-A^n_{t\wedge T^n_p})=0.$$

b) *La suite (N^n) est Ω-tendue si et seulement si on a* (3.6) *et*

(3.7) $$\forall t\in\mathbb{R}_+,\quad \textit{la suite } (A_t^n)_{n\geqq 1} \textit{ est } \mathbb{R}\textit{-tendue}.$$

Preuve. Comme A^n est le compensateur de N^n, on a

$$\begin{aligned} E^n(A^n_{t\wedge T^n_{p+1}\wedge(T^n_p+\varepsilon)}-A^n_{t\wedge T^n_p}) &= E^n(N^n_{t\wedge T^n_{p+1}\wedge(T^n_p+\varepsilon)}-N^n_{t\wedge T^n_p})\\ &=P^n(T^n_{p+1}<t\wedge(T^n_p+\varepsilon)), \end{aligned}$$

donc (3.6) et (3.3) sont équivalents. Par ailleurs (3.4) revient à dire que pour chaque $t\in\mathbb{R}_+$ la suite $(N_t^n)_{n\geqq 1}$ est $\mathbb{R}$-tendue, ce qui d'après le lemme (2.6) équivaut à (3.7). Il suffit alors d'appliquer le lemme (3.2). □

4. Le résultat principal

La condition qui va remplacer (1.1) est la suivante (où $D\subset\mathbb{R}_+$):

[α-D] $\quad\forall t,u\in D,\ \forall p\in\mathbb{N},\ \forall f\in C(\bar{\mathbb{R}}_+^p)$, on a

$$E^n\{f(T_1^n,\dots,T_p^n)[A^n_{t\wedge T^n_{p+1}\wedge(T^n_p+u)}-A^n_{t\wedge T^n_p}-(A_{t\wedge T_{p+1}\wedge(T_p+u)}-A_{t\wedge T_p})\circ N^n]\}\to 0.$$

($C(\bar{\mathbb{R}}_+^p)$ est l'ensemble des fonctions continues bornées sur $\bar{\mathbb{R}}_+^p$; par convention, $C(\bar{\mathbb{R}}_+^0)$ est l'ensemble des constantes). Si on note $C_S(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues bornées sur Ω qui sont $\mathscr{F}_S$-mesurables, où S est un temps d'arrêt, on remarque que dans [α-D] on peut remplacer $f(T_1^n,\dots,T_p^n)$ par $g(N^n)$, où $g\in C_{T_p}(\Omega)$ (il y a identité entre les deux familles de fonctions de N^n).

Pour avoir une idée de ce que [α-D] signifie, on pourra remarquer que $(A^n_{T^n_{p+1}\wedge(T^n_p+u)}-A^n_{T^n_p})_{u\geqq 0}$ est le compensateur du processus ponctuel ayant un seul point, à l'instant $T^n_{p+1}-T^n_p$. La troncation supplémentaire en t est là pour n'avoir que des temps bornés.

Comme annoncé dans l'introduction, [α-D] est une sorte de convergence dans L^1 pour $\sigma(L^1,L^\infty)$, sauf qu'au lieu de considérer une fonction $g(N^n)$ mesurable bornée arbitraire, on considère seulement les $g\in C_{T_p}(\Omega)$.

Avant de poursuivre, rappelons aussi ce que «A est le $\bar{P}$-compensateur de N» signifie, lorsque $\bar{P}$ est une probabilité sur $(\bar{\Omega},\bar{\mathscr{F}})$. D'abord on étend A_t à $\bar{\Omega}$ ainsi: remarquant que si $\omega,\omega'\in\Omega$ coïncident sur $[0,t]$ on a $A_t(\omega)=A_t(\omega')$, pour tous $\omega\in\bar{\Omega}$ et $t<T_\infty(\omega)$ on définit $A_t(\omega)$ sans ambiguité en posant $A_t(\omega)=A_t(\omega^s)$ où s est quelconque dans $[t,T_\infty(\omega)[$, et où ω^s désigne la fonction arrêtée en s ($\omega^s(r)=\omega(r\wedge s)$), de sorte que $\omega^s\in\Omega$; ensuite, pour $t\geqq T_\infty(\omega)$ on pose $A_t(\omega)=\lim_p\uparrow A_{T_p}(\omega)$ (là encore, la définition est sans ambiguité).

On dit alors que *A est le $\bar{P}$-compensateur de N* (sur $\bar{\Omega}$) si pour tout $p\in\mathbb{N}$, $N^{T_p}-A^{T_p}$ est une $\bar{P}$-martingale locale (en fait, c'est alors une vraie martingale) relativement à la filtration $(\bar{\mathscr{F}}_t)$.

D'après les résultats de [6], il existe toujours *une probabilité $\bar{P}$ et une seule* sur $(\bar{\Omega},\bar{\mathscr{F}})$ telle que A soit le $\bar{P}$-compensateur de N (car A est prévisible et $\Delta A_t\leqq 1$); de plus, il existe une probabilité P sur $(\Omega,\mathscr{F})$ faisant de A le P-compensateur de N si et seulement si $\bar{P}(\Omega)=1$, auquel cas P est la restriction de $\bar{P}$ à Ω.

(4.1) **Théorème.** *Soit* [H1] *et* [H2].

a) *On a $\mathscr{L}(N^n)\to\bar{P}$ étroitement sur $(\bar{\Omega},\bar{\mathscr{F}})$ si et seulement si on a* [α-$\mathbb{R}_+$], *et il suffit même qu'on ait* [α-D] *pour une partie $D\subset\mathbb{R}_+$ de complémentaire dénombrable.*

b) *S'il existe une probabilité P sur $(\Omega,\mathscr{F})$ faisant de A le compensateur de N, on a $\mathscr{L}(N^n)\to P$ étroitement sur $(\Omega,\mathscr{F})$ si et seulement si on a* [α-$\mathbb{R}_+$] (là encore, il suffit d'avoir [α-D] pour une partie $D\subset\mathbb{R}_+$ de complémentaire dénombrable).

[H1] (qui équivaut à [C2]) contient une restriction importante: le processus N est quasi-continu à gauche sous $\bar{P}$ (ou P). On ne généralise donc pas l'intégralité des résultats de [5] ou [9].

(4.2) *Remarque.* On aurait le même résultat qu'en (a) si les processus N^n pouvaient exploser (i.e., si $P^n(\lim_p \uparrow T_p^n = \infty) > 0$). $\square$

Enfin si A est déterministe continu on a [H1] et [H2], et A est le compensateur de N pour une unique loi P sur $(\Omega, \mathscr{F})$. Donc:

(4.3) **Corollaire.** *Supposons A déterministe et continu en temps. Pour que $\mathscr{L}(N^n) \to P$ étroitement sur $(\Omega, \mathscr{F})$, il faut et il suffit qu'on ait* $[\alpha\text{-}\mathbb{R}_+]$.

Preuve de (4.1). 1) Supposons d'abord que $\mathscr{L}(N^n) \to \bar{P}$ étroitement sur $(\Omega, \mathscr{F})$. Soit $p \in \mathbb{N}$, $f \in C(\bar{\mathbb{R}}_+^p)$, $t, u \in \mathbb{R}_+$. Comme A est continu en temps, le processus N est $\bar{P}$-quasi-continu à gauche, et les fonctions $N_{t \wedge T_p}$ et $N_{t \wedge T_{p+1} \wedge (T_p + u)}$ sont $\bar{P}$-p.s. continues, bornées par $p+1$. Donc

$$\begin{aligned}(4.4)\qquad \alpha_n &:= E^n\{f(T_1^n, \ldots, T_p^n)\,[N^n_{t \wedge T^n_{p+1} \wedge (T^n_p + u)} - N^n_{t \wedge T^n_p}]\} \\ &\to \alpha := E_{\bar{P}}\{f\,T_1, \ldots, T_p)\,[N_{t \wedge T_{p+1} \wedge (T_p + u)} - N_{t \wedge T_p}]\}.\end{aligned}$$

Les fonctions $A_{t \wedge T_p}$ et $A_{t \wedge T_{p+1} \wedge (T_p + u)}$, considérées indifféremment sur Ω ou $\bar{\Omega}$, sont de la forme $g(T_1, \ldots, T_{p+1})$; de plus d'après [H1] et le lemme (2.1) ce sont des fonctions continues sur Ω, ce qui entraine (à cause de l'équivalence $\omega_n \to \omega \Leftrightarrow [T_p(\omega_n) \to T_p(\omega)\ \forall p \in \mathbb{N}]$) que g est une fonction continue sur $\bar{\mathbb{R}}_+^{p+1}$), et donc $A_{t \wedge T_p}$ et $A_{t \wedge T_{p+1} \wedge (T_p + u)}$ sont aussi continues sur $\bar{\Omega}$. En utilisant [H2], on obtient donc

$$\begin{aligned}(4.5)\qquad \beta_n &:= E^n\{f(T_1^n, \ldots, T_p^n)\,[A_{t \wedge T_{p+1} \wedge (T_p + u)} - A_{t \wedge T_{p+1}}] \circ N^n\} \\ &\to \beta := E_{\bar{P}}\{f(T_1, \ldots, T_p)\,[A_{t \wedge T_{p+1} \wedge (T_p + u)} - A_{t \wedge T_p}]\}.\end{aligned}$$

Enfin, on a aussi:

$$(4.6)\qquad \alpha_n = E^n\{f(T_1^n, \ldots, T_p^n)\,[A^n_{t \wedge T^n_{p+1} \wedge (T^n_p + u)} - A^n_{t \wedge T^n_p}]\}.$$

Comme A est le $\bar{P}$-compensateur de N, on a $\alpha = \beta$, donc $[\alpha\text{-}\mathbb{R}_+]$ découle de (4.4), (4.5) et (4.6).

2) Inversement, supposons qu'on ait [α-D] pour une partie $D \subset \mathbb{R}_+$ de complémentaire dénombrable. On va montrer que (N^n) est $\bar{\Omega}$-tendue.

Pour cela, il suffit de montrer que de toute sous-suite on peut extraire une sous-sous-suite $\bar{\Omega}$-tendue. Donc, quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer la convergence étroite:

$$(4.7)\qquad \mathscr{L}((T_p^n)_{p \geqq 1}) \to Q \quad \text{sur } \Delta$$

(notations du § 3). On va alors prouver (3.6) par récurrence sur p.

Supposons qu'on ait (3.6) pour tout $p \leqq q-1$ (si $q=0$, c'est une supposition vide!). D'après la preuve de (3.5), on a aussi (3.3) pour tout $p \leqq q-1$, ce qui revient à dire que

(4.8) $$Q(\exists\, p \leqq q-1 \text{ avec } S_q = S_{p+1} < \infty) = 0.$$

Fixons $t \in D$, et soit $H_u = A_{t \wedge T_{q+1} \wedge (T_q+u)} - A_{t \wedge T_q}$. D'après la structure des processus prévisibles sur Ω (cf. [6]), H_u est de la forme $H_u = g_{u \wedge (T_{q+1} - T_q)}(T_1 \wedge t, \dots, T_q \wedge t)$, où g_u est une fonction mesurable sur $\Delta(q) := \{(t_1, \dots, t_q) \colon 0 < t_1 \leqq \dots \leqq t_q \leqq t,\ t_i < t_{i+1} \text{ si } t_i < t\}$ (g_u est une constante si $q=0$), et où $u \to g_u(.)$ est croissante, càd, nulle en 0. En utilisant [H1] et le lemme (2.1), le même raisonnement qu'en (1) prouve que $(u, t_1, \dots, t_q) \to g_u(t_1, \dots, t_q)$ est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \Delta(q)$.

Posons $g_u(t_1, \dots, t_q) = 0$ si $(t_1, \dots, t_q) \notin \Delta(q)$, et définissons les fonctions suivantes sur Δ:

$$K_u(\{t_p\}) = g_{u \wedge (t_{q+1} - t_q)}(t_1 \wedge t, \dots, t_q \wedge t) \qquad \text{si } \{t_p\} \in \Delta.$$

D'après ce qui précède, $u \to K_u(.)$ est croissante, càd, nulle en 0, et $K_u(.)$ est continue en tout point $\{t_p\}$ de Δ tel que pour tout $p<q$ on ait $t_p < t_{p+1}$ si $t_p < \infty$. Donc d'après (4.7) et (4.8), les lois de $K_u(\{T_p^n\}_{p \geqq 1}) = H_u \circ N^n$ convergent étroitement vers la loi de K_u sous Q. Comme de plus [H2] et la majoration $H_u \circ N^n \leqq A_{t \wedge T_{q+1}} \circ N^n$ entrainent l'uniforme intégrabilité de la suite $(H_u \circ N^n)_{n \geqq 1}$, on en déduit que K_u est Q-intégrable et que

(4.9) $$E^n(H_u \circ N^n) \to E_Q(K_u).$$

Par ailleurs, en appliquant [α-D] avec $f \equiv 1$, et (4.9), on obtient pour $u \in D$:

(4.10) $$\limsup_n E^n(A^n_{t \wedge T^n_{q+1} \wedge (T^n_q + u)} - A^n_{t \wedge T^n_q}) = \limsup_n E^n(H_u \circ N^n) = E_Q(K_u).$$

Comme $K_u \downarrow 0$ quand $u \downarrow 0$ et comme K_u est Q-intégrable, $\lim_{u \downarrow 0} E_Q(K_u) = 0$, et on déduit donc de (4.10) qu'on a (3.6) pour $p=q$ et $t \in D$. Il en découle aisément qu'on a (3.6) pour $p=q$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, et la récurrence est terminée. On a donc (3.6), et la $\bar{\Omega}$-tension de (N^n) découle de (3.5).

3) Montrons maintenant la condition suffisante de (a). On suppose [α-D], et on a vu que (N^n) est $\bar{\Omega}$-tendue. Quitte à prendre une sous-suite, on peut donc supposer que $\mathscr{L}(N^n)$ converge étroitement sur $(\bar{\Omega}, \bar{\mathscr{F}})$ vers une probabilité $\bar{Q}$, et il nous faut montrer que $\bar{Q} = \bar{P}$.

Quitte à diminuer D (qui reste de complémentaire dénombrable), on peut supposer que $\bar{Q}(\Delta N_t > 0) = \bar{Q}(\Delta N_{T_p + t} > 0) = 0$ pour $p \in \mathbb{N}$, $t \in D$; les fonctions $N_{t \wedge T_p}$ et $N_{t \wedge T_{p+1} \wedge (T_p + u)}$ sont donc $\bar{Q}$-p.s. continues pour $p \in \mathbb{N}$, $t, u \in D$: on a donc (4.4) avec $\bar{Q}$ au lieu de $\bar{P}$. De même qu'en (1) on montre qu'on a (4.5) avec $\bar{Q}$ au lieu de $\bar{P}$, et on a bien-sûr (4.6). D'après [α-D] il vient alors $\alpha = \beta$, soit

(4.11) $$\begin{aligned} &E_{\bar{Q}}\{f(T_1, \dots, T_p)\,[A_{t \wedge T_{p+1} \wedge (T_p+u)} - A_{t \wedge T_p}]\} \\ &\qquad = E_{\bar{Q}}\{f(T_1, \dots, T_p)\,[N_{t \wedge T_{p+1} \wedge (T_p+u)} - A_{t \wedge T_p}]\} \end{aligned}$$

pour $u, t \in D$, $f \in C(\bar{\mathbb{R}}^p_+)$. Par des arguments classiques (classe monotone et passage à la limite) on en déduit (4.11) pour tous $u, t \geqq 0$, f borélienne bornée sur $\bar{\mathbb{R}}^p_+$.

Donc si $M(p,t)=N^{t\wedge T_{p+1}}-N^{t\wedge T_{p+1}}-(A^{t\wedge T_{p+1}}-A^{t\wedge T_p})$ ($X^u=$processus arrêté en u), (4.11) s'écrit aussi $E_{\bar{Q}}[M(p,t)_{T_p+u}|\sigma(T_1,\ldots,T_p)]=0$. Il est facile d'en déduire que pour toute fonction R positive et $\sigma(T_1,\ldots,T_p)$-mesurable sur $\bar{\Omega}$,

$$E_{\bar{Q}}[M(p,t)_{T_p+R}\,|\,\sigma(T_1,\ldots,T_p)]=0. \tag{4.12}$$

Soit alors S un $(\bar{\mathscr{F}}_t)$-temps d'arrêt. On sait [6] qu'il existe une fonction R comme ci-dessus, telle que $S\wedge T_{p+1}=(T_p+R)\wedge T_{p+1}$ sur l'ensemble $\{S>T_p\}$. D'après la définition de $M(p,t)$, on a $M(p,t)_S=M(p,t)_{T_p+R}$, donc (4.12) entraine $E_{\bar{Q}}(M(p,t)_S)=0$. Par suite $M(p,t)$ est une $\bar{Q}$-martingale.

Il en découle que $N^{T_p}-A^{T_p}$ est une $\bar{Q}$-martingale pour chaque p, ce qui signifie que A est le $\bar{Q}$-compensateur de N. L'unicité démontrée dans [6] entraine alors $\bar{Q}=\bar{P}$, et la condition suffisante de (a) est démontrée.

4) Il reste à prouver (b). On suppose donc que $\bar{P}(\Omega)=1$, et P est la restriction de $\bar{P}$ à Ω. Mais alors $\mathscr{L}(N^n)\to P$ sur $(\Omega,\mathscr{F})$ équivaut à $\mathscr{L}(N^n)\to\bar{P}$ sur $(\bar{\Omega},\bar{\mathscr{F}})$, et le résultat découle de (a). □

Développons maintenant quelques contre-exemples montrant l'importance des hypothèses [H1] et [H2] (nous n'avons pas trouvé de contre-exemple à la condition suffisante quand [H1] est vérifiée, mais pas [H2]).

(4.13) *Exemple.* Soit $T_1^n=1-\frac{1}{n}$, $T_2^n=2$, $T_3^n=\infty$, de compensateur $A^n=N^n$ (relativement à la filtration engendrée par N^n); donc $\mathscr{L}(N^n)\to P$, où P est la probabilité sur Ω telle que $P(T_1=1,\ T_2=2,\ T_3=\infty)=1$, correspondant au compensateur $A_t=1_{\{1\leqq t\}}+1_{\{2\leqq t\}}$.

Si $t\geqq 2$ et $u\geqq 1+\frac{1}{n}$, on a $A^n_{t\wedge T_2^n\wedge(T_1^n+u)}-A^n_{t\wedge T_1^n}=1$, tandis que $(A_{t\wedge T_2\wedge(T_1+u)}-A_{t\wedge T_1})\circ N^n=2$, de sorte que [α-D] n'est vérifié pour aucune partie $D\subset\mathbb{R}_+$ telle que $D\cap[2,\infty[\,\neq\emptyset$. Noter que dans ce cas, on a [H2] et [C1], mais pas [H1]. □

(4.14) *Exemple.* Une condition du type [C1] est indispensable, à la fois pour la condition nécessaire et la condition suffisante. Supposons par exemple que $T_3^n=\infty$, que $T_2^n-T_1^n$ soit indépendant de T_1^n et de loi exponentielle de paramètre 1, et que T_1^n soit portée par $\mathbb{Q}$ et converge en loi vers une v.a. exponentielle de paramètre 1. On a alors $\mathscr{L}(N^n)\to P$, où $T_3=\infty$ p.s. et T_1 et T_2-T_1 sont indépendantes exponentielles de paramètre 1 sous P. Bien-sûr, $A_t=t\wedge T_2$ est une version du P-compensateur de N, vérifiant [H1], [H2], [α-$\mathbb{R}_+$]. Cependant:

1) Une autre version est donnée par

$$A'_t=\begin{cases} t\wedge T_1 & \text{si } T_1\in\mathbb{Q} \\ t\wedge T_2 & \text{si } T_1\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

qui vérifie [H2], mais pas [C1]. $(A_{t\wedge T_2\wedge(T_1+u)}-A_{t\wedge T_1})\circ N^n=0$ découle de $T_1^n\in\mathbb{Q}$, alors que $A^n_{t\wedge T_2^n\wedge(T_1^n+u)}-A^n_{t\wedge T_1^n}=u\wedge t\wedge(T_2^n-T_1^n)$, donc [α-D] est faux si $D\neq\{0\}$.

2) Soit $N'^n = 1_{[0, T_1^n]}$, dont on note A'^n le compensateur. Il est facile de vérifier que $A_t'^n - t \wedge T_1^n \to 0$, donc $A_t'^n - A_t' \circ N^n \to 0$ (car $T_1^n \in \mathbb{Q}$) et on a [α-$\mathbb{R}_+$], alors que $\mathscr{L}(N'^n)$ ne converge pas vers P (cette partie de l'exemple est adaptée de Brown [4]). □

(4.15) *Exemple.* Soit $A_t = -\mathrm{Log}(1 - t \wedge T_1)$, qui correspond à la probabilité P sur Ω telle que $T_2 = \infty$ p.s. et que T_1 soit uniforme sur $]0, 1[$. Soit $P^n = P$ et $T_1^n = T_1 + \frac{1}{n}$, $T_2^n = \infty$. Il est clair que $\mathscr{L}(N^n) \to P$, mais on ne peut pas avoir [α-D] si $D \cap]1, \infty[\neq \emptyset$, car $A_{(1+\varepsilon) \wedge T_1} \circ N^n = \infty$ avec une probabilité strictement positive. Dans cet exemple, on a [H1], mais pas [H2]. □

Terminons ce paragraphe en déduisant du théorème (4.1) le résultat (connu) cité dans l'introduction.

(4.16) **Corollaire.** *Sous* [M2] *et* [C1], *si on a* (1.1) *pour tout* $t \geqq 0$, *alors* $\mathscr{L}(N^n) \to P$.

Preuve. Etant donné [M2], on sait (cf. [7] par exemple) que (1.1) implique $\sup_{s \leqq t} |A_s^n - A_s \circ N^n| \xrightarrow{P} 0$, et donc

$$A^n_{t \wedge T^n_{p+1} \wedge (T^n_p + u)} - A^n_{t \wedge T^n_p} - (A_{t \wedge T_{p+1} \wedge (T_p + u)} - A_{t \wedge T_p}) \circ N^n \xrightarrow{P} 0. \tag{4.17}$$

En outre, [M2] et (2.4a) entrainent que dans (4.17) on a aussi convergence dans L^1, d'ou [α-$\mathbb{R}_+$]. □

5. Résultats complémentaires

La condition [α-D] ne ressemble pas vraiment à (1.1). Il semble plus naturel d'introduire l'une des conditions suivantes:

[α_1-D] $E^n[f(N^n)(A_t^n - A_s^n - (A_t - A_s) \circ N^n)] \to 0, \quad \forall s, t \in D, s < t, \ \forall f \in C_s(\Omega)$.

[α_2-D] $E^n[f(N^n)(A_t^n - A_t \circ N^n)] \to 0, \quad \forall t \in D, \ \forall f \in C_t(\Omega)$.

[α_3-D] $E^n[f(N^n)(A_t^n - A_t \circ N^n)] \to 0, \quad \forall t \in D, \ \forall f \in C_\infty(\Omega)$.

[α_3-D] $\Rightarrow$ [α_2-D] $\Rightarrow$ [α_1-D] est évident. Noter que (1.1), plus une condition adéquate d'uniforme intégrabilité, entrainent [α_3-$\mathbb{R}_+$].

Supposons par exemple [M2] et [C1]. (1.1) est alors équivalent à $A^n_{t \wedge T^n_p} - (A_{t \wedge T_p}) \circ N^n \to 0$ en probabilité, donc dans L^1 (cf. la preuve de (4.16)). Ce genre de localisation ne marche pas quand on considère la convergence faible: même sous les hypothèses adéquates d'intégrabilité, on n'a pas l'équivalence de [α-D] avec l'une des [α_i-D].

On a cependant quelques résultats partiels dans cette direction, le plus général (et aussi le plus simple) étant le suivant. Comme dans toute la suite de ce paragraphe, on suppose qu'il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{F})$ faisant de A le compensateur de N.

(5.1) **Proposition.** *Supposons* [C1]. *Supposons aussi que pour tout t les suites $(A_t^n)_{n\geqq 1}$ et $(A_t\circ N^n)_{n\geqq 1}$ soient UI. Il y a alors équivalence entre:*

(i) $\mathscr{L}(N^n)\to P$;

(ii) *la suite (N^n) est Ω-tendue, et on* [α_1-D] *pour une partie $D\subset\mathbb{R}_+$ de complémentaire dénombrable.*

(Notons qu'ici on n'a plus nécessairement la quasi-continuité à gauche de N sous P.)

Preuve. Sous (i) on pose $Q=P$ et $D=\{t\colon Q(\Delta N_t>0)=Q(\Delta A_t>0)=0\}$. Sous (ii), quitte à prendre une sous-suite on peut supposer que $\mathscr{L}(N^n)$ converge vers une limite Q; pour D on prend alors un ensemble de complémentaire dénombrable, tel qu'on ait $Q(\Delta N_t>0)=Q(\Delta A_t>0)=0$ pour $t\in D$ et [α_1-D]. $N_t(.)$ et $A_t(.)$ sont donc Q-p.s. continus pour $t\in D$.

Soit alors $s,t\in D$, $s<t$, $f\in C_s(\Omega)$. D'après les conditions d'uniforme intégrabilité et (2.4b), il vient:

$$a_n:=E^n[f(N^n)(A_t-A_s)\circ N^n]\to a:=E_Q[f(N)(A_t-A_s)],$$
$$b_n:=E^n[f(N^n)(A_t^n-A_s^n)]=E^n[f(N^n)(N_t^n-N_s^n)]\to b:=E_Q[f(N)(N_t-N_s)].$$

Sous (i) on a $a=b$, donc $a_n-b_n\to 0$, d'où [α_1-D]. Inversement sous [α_1-D] on a $a_n-b_n\to 0$, donc $a=b$ et il en découle (voir la preuve de (4.1)) que $N-A$ est une Q-martingale, donc $Q=P$. □

(5.2) **Corollaire.** *Supposons que (N^n) soit Ω-tendue et que $(A_t^n)_{n\geqq 1}$ soit UI pour tout t. Supposons aussi* [C1], *et soit D une partie de $\mathbb{R}_+$ de complémentaire dénombrable. Sous* [M1]+[α_1-D], *ou sous* [α_2-D], *on a $\mathscr{L}(N^n)\to P$.*

Preuve. Il suffit de montrer que dans les deux cas, $(A_t\circ N^n)_{n\geqq 1}$ est UI, ce qui est évident sous [M1]. Supposons alors [α_2-D]. Il suffit de considérer $t\in D$. Soit $f_b\in C(\mathbb{R})$ telle que $0\leqq f_b\leqq 1$, $f_b(x)=1$ si $x\geqq b$. D'après [α_2-D],

$$\alpha_b^n:=E^n[f_b(N^n)(A_t\circ N^n-A_t^n)]\xrightarrow[n\uparrow\infty]{}0. \tag{5.3}$$

Comme $(A_t^n)_{n\geqq 1}$ est UI, pour tout $\varepsilon>0$ il existe $a(\varepsilon)$ tel que

$$E^n[A_t^n 1_{\{A_t^n>a(\varepsilon)\}}]\leqq\varepsilon,\qquad \forall n\geqq 1. \tag{5.4}$$

Si $b=a(\varepsilon)$, (5.3) et (5.4) entrainent:

$$\begin{aligned}E^n[(A_t\circ N^n-a(\varepsilon))\,1_{\{A_t\circ N^n>a(\varepsilon)\}}]&\leqq E^n[(A_t\circ N^n-b)\,f_b(A_t\circ N^n)]\\&\leqq E^n[(A_t\circ N^n-A_t^n\,1_{\{A_t^n\leqq a(\varepsilon)\}})\,f_b(A_t\circ N^n)]\\&\leqq E^n[(A_t\circ N^n-A_t^n)\,f_b(A_t\circ N^n)+A_t^n\,1_{\{A_t^n>a(\varepsilon)\}}\,f_b(A_t\circ N^n)]\leqq\alpha_{a(\varepsilon)}^n+\varepsilon,\end{aligned}$$

qui est majoré par 2ε pour $n>n(\varepsilon)$ d'après (5.3). Par ailleurs, [α_2-D] et l'uniforme intégrabilité de $(A_t^n)_{n\geqq 1}$ entrainent l'intégrabilité de $A_t\circ N^n$, donc il existe $b\geqq a(\varepsilon)$ tel que pour tout $n\leqq n(\varepsilon)$ on ait $E^n[(A_t\circ N^n-b)\,1_{\{A_t\circ N^n>b\}}]\leqq 2\varepsilon$. Donc

$$\sup_n E^n[(A_t\circ N^n-b)\,1_{\{A_t\circ N^n>b\}}]\leqq 2\varepsilon$$

et comme $\varepsilon>0$ est arbitraire on en déduit que $(A_t\circ N^n)_{n\geqq 1}$ est UI. □

(5.5) **Corollaire.** *Supposons* [C1], [M2], [α_3-D] *pour une partie* D *de* $\mathbb{R}_+$ *de complémentaire dénombrable, et aussi que* $(A_t^n)_{n\geqq 1}$ *est UI pour chaque* t. *Alors* $\mathscr{L}(N^n)\to P$.

Preuve. Il suffit de montrer que (N^n) est Ω-tendue. (3.7) est vraie par hypothèse, et d'après (3.5b) il suffit de montrer que de toute sous-suite on peut extraire une sous-sous-suite vérifiant (3.6), ou de manière équivalente (3.3). On peut donc supposer que $\mathscr{L}(T_p^n)\to\mu_p$ étroitement pour tout $p\in\mathbb{N}$, où μ_p est une probabilité sur $[0,\infty]$, et on peut supposer aussi que $\mu_p(\{t\})=0\ \forall t\in D$, $\forall p\in\mathbb{N}^*$.

Soit alors $t>0$, $\eta>0$, $p\in\mathbb{N}^*$ fixés. Il existe $\varepsilon>0$ tel que

$$\sup_{s\leqq t+\varepsilon}(F_{s+\varepsilon}-F_s)\leqq\eta. \tag{5.6}$$

Soit aussi $0=a_0<a_1<\ldots<a_q$, avec $t\leqq a_{q-1}\leqq t+\varepsilon/2$, $a_i\in D$, $a_{i+1}-a_i\leqq\varepsilon/2$. On a

$$T_{p+1}^n\leqq t\wedge(T_p^n+\varepsilon)\Rightarrow\exists\, i\leqq q-2\quad\text{avec}\quad a_i<T_p^n\leqq a_{i+1},\ T_{p+1}^n\leqq a_{i+2}. \tag{5.7}$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}P^n(a_i<T_p^n\leqq a_{i+1},\ T_{p+1}^n\leqq a_{i+2}) &= P^n(a_i<T_p^n\leqq a_{i+1},\ N_{a_{i+2}}^n-N_{T_p^n}^n\geqq 1)\\ &\leqq E^n[1_{(a_i,a_{i+1}]}(T_p^n)(N_{a_{i+2}}^n-N_{T_p^n}^n)]\\ &= E^n[1_{(a_i,a_{i+1}]}(T_p^n)(A_{a_{i+2}}^n-A_{T_p^n}^n)]\\ &\leqq E^n[1_{(a_i,a_{i+1}]}(T_p^n)(A_{a_{i+2}}^n-A_{a_i}^n)].\end{aligned} \tag{5.8}$$

Comme $\mu_p(\{a_i\})=0$, il existe $f_i\in C(\mathbb{R})$ avec $f_i\geqq 0$, telle que (à cause de l'uniforme intégrabilité de $(A_{a_i}^n)_{n\geqq 1}$) on ait

$$\limsup_n E^n[|f_i(T_p^n)-1_{(a_i,a_{i+1}]}(T_p^n)|\,(A_{a_i}^n+A_{a_{i+2}}^n+1)]\leqq\frac{\eta}{q-1}, \tag{5.9}$$

tandis que [α_3-D] entraine

$$\limsup_n |E^n[f_i(T_p^n)(A_{a_{i+2}}^n-A_{a_i}^n-(A_{a_{i+2}}-A_{a_i})\circ N^n)]|=0. \tag{5.10}$$

(5.6) entraine $A_{a_{i+1}}-A_{a_i}\leqq\eta$, donc (5.9) et (5.10) impliquent

$$\begin{aligned}&\limsup_n E^n[1_{(a_i,a_{i+1}]}(T_p^n)(A_{a_{i+2}}^n-A_{a_i}^n)]\\ &\qquad\leqq\frac{\eta}{q-1}+\limsup_n E^n[f_i(T_p^n)\,\eta]\\ &\qquad\leqq\frac{\eta+\eta^2}{q-1}+\eta\limsup_n P^n(a_i<T_p^n\leqq a_{i+1}).\end{aligned}$$

D'après (5.7) et (5.8), on obtient en sommant sur i de 0 à $q-2$:

$$\limsup_n P^n(T_{p+1}^n\leqq t\wedge(T_p^n+\varepsilon))\leqq 2\eta+\eta^2.$$

Comme $\eta>0$ est arbitraire, on en déduit (3.3). □

La question de savoir si ce corollaire reste vrai quand on remplace [α_3-D] par [α_2-D] reste ouverte. L'exemple suivant montre qu'en tous cas on ne peut pas remplacer [α_3-D] par [α_1-D].

(5.11) *Exemple.* Soit T_1^n suivant une loi exponentielle de paramètre 1, et $T_2^n - T$ indépendant de T et suivant une loi exponentielle de paramètre n, et $T_3^n = \infty$. Par rapport à la filtration engendré par N^n on a alors

$$A_t^n = \begin{cases} t & \text{si } t < T \\ T + n(t-T) & \text{si } T \leqq t < T_2^n \\ T + n(T_2^n - T) & \text{si } t \geqq T_2^n. \end{cases}$$

On a donc [α_1-$\mathbb{R}_+$] avec $A_t = 2(t \wedge T)$. On a donc aussi [C2] et [M2], et $(A_t^n)_{n \geqq 1}$ est UI pour tout t. Mais (N^n) n'est pas Ω-tendue, donc on n'a pas [α-$\mathbb{R}_+$] (ni [α_2-$\mathbb{R}_+$]). □

Voici enfin un exemple où on a $\mathscr{L}(N^n) \to P$, ainsi que [C2], [M2], et l'uniforme intégrabilité de $(A_t^n)_{n \geqq 1}$ et $(A_t \circ N^n)_{n \geqq 1}$, mais [$\alpha_2$-D] n'est vraie pour aucune partie $D \neq \{0\}$ de $\mathbb{R}_+$:

(5.12) *Exemple.* Soit $A_t = T_1 \wedge t$, donc sous P, T_1 suit une loi exponentielle de paramètre 1 et $T_2 = \infty$ p.s.; soit $P^n = P$, $T_1^n = T_1 + \frac{1}{n}$, $T_2^n = \infty$, et $\mathscr{F}_t^n = \mathscr{F}_t$, de sorte que $A^n = N^n$. □

Remerciements. L'auteur tient à remercier deux referees, pour plusieurs remarques et suggestions qui ont été incorporées dans le texte.

Bibliographie

1. Aldous, D.J.: Stopping times and tightness. Ann. Probab. 6, 335–340 (1978)
2. Aldous, D.J.: Weak convergence of stochastic processes viewed in the Strasbourg manner. Unpublished (1978)
3. Brown, T.: A martingale approach to the Poisson convergence of simple point processes. Ann. Probab. **6**, 615–628 (1978)
4. Brown, T.: Some distributional approximations for random measures. PhD Thesis, Univ. of Cambridge (1979)
5. Grigelionis, B., Mikulevicius, R.: On weak convergence of random point processes. Litov. Math. Sb. **21**, 4, 49–55 (1981)
6. Jacod, J.: Multivariate point processes: predictable projection, Radon-Nikodym derivative, representation of martingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. **35**, 1–37 (1976)
7. Jacod, J.: Théorèmes limite pour les processus. Ecole d'été de St-Flour XIII, 1983, Lect. Notes in Math. **1117**. Berlin Heidelberg New York: Springer 1985
8. Jacod, J., Shiryaev, A.N.: Limit theorems for stochastic processes. Berlin Heidelberg New York: Springer 1987
9. Kabanov, Yu., Liptser, R.S., Shiryaev, A.N.: Some limit theorems for simple point processes (martingale approach). Stochastics **3**, 203–216 (1981)
10. Kubilius, K., Mikulevicius, R.: Necessary and sufficient conditions for convergence of semimartingales and point processes I, II. Litov. Math. Sb. **24** (1984), English Transl. 270–276, 346–356

11. Kurtz, T.G.: Representation and approximation of counting processes. Adv. in Filtering and Optional Stochastic Control (W.H. Fleming, L.G. Gorostiza, eds.). Lect. Notes Control Inf. Sci. **42**, 177–191. Berlin Heidelberg New York: Springer 1982
12. Lenglart, E.: Relation de domination entre deux processus. Ann. Inst. H. Poincaré (B) **13**, 171–179 (1977)
13. Rebolledo, R.: La méthode des martingales appliquée à la convergence en loi des processus. Mém. Soc. Math. France **62** (1979)
14. Rebolledo, R.: Sur l'existence de solutions à certains problèmes de martingales. R.R. Acad. Sci. Paris (A) **290**, 843–846 (1980)

Received December 20, 1986