Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 27, 1–8 (1973)

Über die Zuverlässigkeit von Systemen aus n-Elementen

Apostol Obretenov

Es sei ein System gegeben, das aus n parallelgeschalteten unabhängigen zufälligen Elementen besteht. Die Lebensdauer ξ des i-ten Elements habe die Verteilung F_i, die Reparaturzeit η eine Verteilung G_i. Im Zeitpunkt $t=0$ funktionieren alle Elemente. Wenn ein Element nach einer zufälligen Lebensdauer ξ versagt, so wird es sofort zur Reparatur geschickt, die η lang dauert. Die Zufallsgrößen ξ und η sind unabhängig. Zuerst wird der Fall $n=1$ und der entsprechende regenerative Prozeß $w(t)$ betrachtet. Es wird gezeigt, daß der Prozeß $w(t)$ durch einen ihm äquivalenten Prozeß $w^*(t)$ ersetzt werden kann. Im Fall $n>1$ werden mit der Hilfe von $w^*(t)$ die Zuverlässigkeitscharakteristiken gefunden. Für verschiedene Charakteristiken solcher Systeme im Fall wo ξ eine exponentielle Verteilung hat, s. [1].

§ 1. Der Fall $n=1$

1.1. Der Prozeß $w(t)$. Wir betrachten zunächst den Arbeitsprozeß eines Elements und bezeichnen die Verteilung seiner Lebensdauer mit F und die seiner Reparaturzeit mit G.

Es seien weiter $\{\xi_i\}$, $i\geqq 1$ und $\{\eta_i\}$, $i\geqq 1$ zwei Folgen von positiven nach F bzw. G verteilten zufälligen Größen, wobei die ξ_i und η_i untereinander und voneinander unabhängig sind.

Unter diesen Voraussetzungen wird das Verhalten des Elements durch folgenden regenerativen Prozeß $w(t)$, $t\geqq 0$ beschrieben:

$$w(t)=\sum_{k=1}^{\infty}(\xi_k+\eta_k-t)\,I_k(t), \tag{1}$$

wo $I_k(t)$ die Indikatorfunktion des Intervalls $\sum_{i=1}^{k}(\xi_i+\eta_i)\leqq t<\sum_{i=1}^{k+1}(\xi_i+\eta_i)$ bezeichnet. $w(t)$ hat folgende Bedeutung: im Zeitpunkt t muß man $w(t)$ lang warten, bis das Element arbeitsfähig wird, d.h. repariert worden ist.

Unser nächstes Ziel ist, die Wahrscheinlichkeit $F(t,x)=P\big(w(t)<x\big)$ zu finden.

1.1.1. **Satz.** *Ist die Faltung $F_* G$ absolut stetig mit der Dichte $h(t)$, so befriedigt die Laplace-Stieltjessche Transformierte $f(t,s)$ von $F(t,x)$ die folgende Differentialgleichung:*

$$\frac{\partial f(t,s)}{\partial t}=s\,f(t,s)-s\,\{F(t,+0)+[1-g(s)]\,h(t)\}, \tag{2}$$

wobei $g(s)$ die Transformierte von $G(x)$ ist.

Beweis. Es sei $\delta>0$ und $\Delta(t)$ die Zufallsgröße

$$\Delta(t)=\delta^{-1}(e^{-sw(t+\delta)}-e^{-sw(t)}).$$

Wir haben für den Mittelwert

$$\begin{aligned} E\,\Delta(t)=&E(\Delta(t)|w(t)\neq 0)\,P(w(t)\neq 0)\\ &+E(\Delta(t)|w(t)=0)\,P(w(t)=0). \end{aligned} \tag{3}$$

Falls $w(t)\neq 0$, so ist $w(t+\delta)=w(t)-\delta$ für jedes hinreichend kleine $\delta>0$. Dann hat man für den ersten Summanden in (3)

$$\begin{aligned} E(\Delta(t)|w(t)\neq 0)\,P(w(t)\neq 0)=&s\,E(e^{-sw(t)}|w(t)\neq 0)\\ &x\,P(w(t)\neq 0)+0(1)=s\,E\,e^{-sw(t)}-s\,P(w(t)=0)+o(1), \end{aligned}$$

d.h. für $\delta\to 0$

$$\lim E(\Delta(t)|w(t)\neq 0)=s\,f(t,s)-s\,P(w(t)=0). \tag{4}$$

Für den zweiten Summanden in (3) erhält man

$$E(\Delta(t)|w(t)=0)\,P(w(t)=0)=\delta^{-1}\left[E(e^{-sw(t+\delta)}|w(t)=0)-1\right].$$

Weiter gilt

$$P(w(t+\delta)>x-t-\delta\,|\,w(t)=0)=\delta h(t)[1-G(x-t-\delta)]+o(\delta), \tag{5}$$

denn damit $w(t+\delta)>x-t-\delta$ wird, muß der Erneuerungsprozeß $\xi_1, \xi_2+\eta_1, \xi_3+\eta_2, \ldots$ mit der Dichte $h(t)$ im Intervall $(t, t+\delta)$ eine Sprungstelle haben und das betreffende η größer als $x-t-\delta$ sein. Aus (5) erhalten wir

$$\lim_{\delta\to 0}\delta^{-1}E(\Delta(t)|w(t)=0)=-h(t)\int_t^\infty e^{-s(x-t)}\,d_x(1-G(x-t)). \tag{6}$$

Aus (6) und aus der Tatsache, daß $E\,\Delta(t)$ für $\delta\to 0$ gegen $\partial f/\partial t$ strebt, folgt dann (2), womit der Satz bewiesen ist.

1.2. Die stationäre Lösung von (2). Unter der Annahme, daß $F(t,+0)=P(w(t)=0)$, bekommen wir aus (2)

$$f(t,s)=e^{st}\left[1-s\int_0^t e^{-su}F(u,+0)\,du-(1-g(s))\int_0^t e^{-su}h(u)\,du\right]. \tag{7}$$

Wegen $|f(t,s)|\leqq 1$ führt dies für $t\to\infty$ auf $s\mathscr{L}(F(\cdot,+0))+(1-g(s))\mathscr{L}(h)=1$, wo $\mathscr{L}$ der Operator der Laplace-Stieltjes-Transformation ist. Da außerdem $\mathscr{L}(h)=\mathscr{L}(F)/[1-\mathscr{L}(G)\mathscr{L}(F)]$ gilt, kann dasselbe mit $f^*(s)=\mathscr{L}(F)/(1-\mathscr{L}(F))$ geschrieben werden als

$$s\mathscr{L}(F(\cdot,+0))+sf^*(s)[1-g(s)\mathscr{L}(F(\cdot,+0))=1 \tag{8}$$

und weiter, wenn man $\varphi(t)=\int_0^t h(u)[1-G(t-u)]\,du$ setzt:

$$F(t,+0)+\int_0^t F(t-u,+0)\,d\varphi(u)=1. \tag{9}$$

Aus einem bekannten Satz von Smith [2] folgt $\lim \varphi(t) = b_1/a_1$ für $t \to \infty$, und nach einem Satz von Paley und Wiener haben wir dann

$$\lim_{t \to \infty} F(t, +0) = \left(1 + \int_0^\infty \varphi'(u)\,du\right)^{-1} = \frac{a_1}{a_1 + b_1}. \tag{10}$$

Hier sind a_1 und b_1 die Mittelwerte der Verteilungen F und G.

Eine Aussage über die Konvergenzgeschwindigkeit in (10) enthält folgender

1.2.1. **Satz.** *Sind F und G keine Gitterverteilungen und besitzen sie endliche Momente zweiter Ordnung a_2 und b_2, so gilt*

$$\lim_{x \to \infty} \left(\int_0^x F(t, +0)\,dt - \frac{a_1 x}{a_1 + b_1}\right) = (b_2 a_1 - b_1 a_2 + 2 a_1 b_1)/2(a_1 + b_1)^2.$$

Beweis. Wir setzen

$$N(x) = \int_0^x F(t, +0)\,dt - c x, \qquad c = a_1/(a_1 + b_1).$$

Aus (9) folgt

$$\begin{aligned} &N(x) + \int_0^x N(x-u)\,d\varphi(u) = D(x),\\ &D(x) = x(1-c) - c\int_0^x (x-u)\,d\varphi(u). \end{aligned} \tag{11}$$

Wir bemerken zuerst, daß $\lim D(x)$ für $x \to \infty$ existiert. Ist nämlich

$$S(u) = \int_0^u \big(1 - G(u-y)\big)\,d\big(H(y) - y/a\big),$$

wo $H(y) = \int_0^y h(t)\,dt$, so folgt wegen $a_2 < +\infty$: $H(y) - a_1^{-1} y \to d = (a_2 - 2a_1^2)/2a_1^2$ und deshalb auch $\lim S(u) = 0$, $u \to \infty$. Man sieht auch leicht ein, daß

$$x(1-c) - c\,a_1^{-1} \int_0^x (x-u)\big(1 - G(u)\big)\,du \to c\,a_1^{-1} b_2/2.$$

Schließlich haben wir

$$\lim D(x) = c\,a_1^{-1} b_2/2 - c\,b_1 d \tag{12}$$

und aus dem schon erwähnten Paley-Wienerschen Satz $\lim N(x) = \lim c D(x)$ womit Satz 1.2.1 bewiesen ist. Unter der Voraussetzung der Existenz der dritten Momente von F und G war dieser Satz in [3] bewiesen worden.

Um jetzt den Grenzwert von $F(t, x)$ für $t \to \infty$ zu erhalten bemerken wir, daß aus (7) folgt

$$\lim_{t \to \infty} f(t, s) = \lim\big[F(t, +0) + h(t)\big(1 - g(s)\big)\big]$$

und wegen $h(t) \to (a_1 + b_1)^{-1}$

$$\lim_{t \to \infty} f(t, s) = \frac{a_1}{a_1 + b_1}\left(1 + \frac{1 - g(s)}{a_1}\right) = \tilde{f}(s).$$

Aber $\tilde{f}$ ist die Transformierte von

$$\tilde{F}(x)=\frac{a_1}{a_1+b_1}\left(1+a_1^{-1}\int_0^x(1-G(u))\,du\right),$$

und damit ist bewiesen der

1.2.2. **Satz.** *Für $t\to\infty$ gilt*

$$\lim_{t\to\infty}F(t,x)=\lim_{t\to\infty}P(w(t)<x)=\frac{a_1}{a_1+b_1}\left(1+a_1^{-1}\int_0^x(1-G(u))\,du\right).$$

1.3. Der Prozeß $w^*(t)$. Wir wollen jetzt einen Markovschen Prozeß einführen, der dem semimarkovschen Prozeß $w(t)$ in dem Sinne äquivalent ist, daß für alle nichtnegativen $t\geqq 0$ und $x\geqq 0$ gilt

$$F(t,x)=P(w(t)<x)=P(w^*(t)<x). \tag{13}$$

Hierzu nehmen wir zunächst einen Poissonprozeß mit der Lokalintensität

$$\lambda(t)=h(t)/F(t,+0),$$

d.h. einen Prozeß auf der positiven Halbachse $t\geqq 0$, so daß die Wahrscheinlichkeit für genau k Ereignisse (Versagen von Elementen) im Intervall $t_1\leqq t\leqq t_2$ gleich

$$(k!)^{-1}\Lambda^k(t_1,t_2)\exp[-\Lambda(t_1,t_2)]$$

ist mit $\Lambda(t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2}\lambda(u)\,du$. Es sei weiter die Folge $t_1,t_2,\ldots,t_n,\ldots$ eine Realisation der Sprungstellen dieses Poissonprozesses und $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n,\ldots$ wieder die davon unabhängige Folge der Reparaturdauer. Weiter sei $\{t_k^*\}$ folgende Unterfolge von $\{t_k\}$:

$$t_1^*=t_1,\qquad t_n^*=\min_\nu\{t_\nu,\,t_\nu\geqq t_{n-1}^*+\eta_{n-1}\},\qquad n>1.$$

Dann wird $w^*(t)$ folgendermaßen definiert:

$$w^*(t)=\begin{cases}0, & 0\leqq t\leqq t_1^*\\ \max[\eta_{n-1}-(t-t_{n-1}^*),0], & t_{n-1}^*<t\leqq t_n^*,\quad n>1.\end{cases}$$

Der Prozeß $w^*(t)$ wird als der „virtuelle" Zustand des Elements im Zeitpunkt t angesehen. Im Zeitpunkt t_ν, wo $w^*(t_\nu-0)>0$ haben wir ein „fiktives" Versagen des Elements, in t_ν^*, wo $w^*(t_\nu^*-0)=0$ ist, versagt es tatsächlich.

1.3.1. **Lemma.** *Für jedes $t\geqq 0$ und $x\geqq 0$ gilt*

$$P(w(t)<x)=P(w^*(t)<x).$$

Beweis. Wie üblich beweist man, daß $P(w^*(t)<x)=F^*(t,x)$ folgende Differentialgleichung befriedigt:

$$\frac{\partial F^*(t,x)}{\partial t}=\frac{\partial F^*(t,x)}{\partial x}-\lambda(t)\,F^*(t,+0)[1-G(x)]. \tag{14}$$

Daraus ergibt sich mit $f^*(t,s)=\mathscr{L}(F^*(t,x))$ die Gleichung

$$\frac{\partial f^*}{\partial t}=s f^*(t,s)-F^*(t,+0)\{s+\lambda(t)[1-g(s)]\},$$

die formal mit (2) übereinstimmt. Bezeichnen wir nämlich $q(t)=F^*(t,+0)-F(t,+0)$, so gilt (s. (8))

$$\int_0^\infty e^{-su} q(u)\,du+s^{-1}(1-g(s))\int_0^\infty e^{-su}\lambda(u)\,q(u)\,du=0$$

oder

$$q(u)=-\int_0^u [1-G(u-x)]\,\lambda(x)\,q(x)\,dx. \tag{15}$$

Aus $|q(u)|\leqq 1$ und $\lambda(x)\to a_1^{-1}$ für $x\to\infty$ folgt aus (15) die Abschätzung $|q(u)|\leqq c\,u$, $c=\text{const}$ und nach mehrfacher Anwendung derselben Überlegung $|q(u)|\leqq\dfrac{(c\,u)^n}{n!}$ für $n=1,2,\ldots$, d.h. $q(u)=0$, womit alles bewiesen ist.

Zuletzt sei noch bemerkt, daß, wenn die lokale Intensität des Poissonprozesses konstant ist, die Lebensdauerverteilung exponentiell sein muß. Es sei nämlich $\lambda(t)=h(t)/F(t,+0)=\lambda>0$, d.h. $h(t)=\lambda F(t,+0)$ oder $\mathscr{L}(h(t))=\lambda\,\mathscr{L}(F(t,+0))$. Da $\mathscr{L}(h)=\mathscr{L}(F)/(1-\mathscr{L}(G)\,\mathscr{L}(F))$ und $\mathscr{L}(F(t,+0))=[1-\mathscr{L}(F)]/s(1-\mathscr{L}(G)\,\mathscr{L}(F))$ erhält man $\mathscr{L}(F)=\lambda/(\lambda+s)$ w.z.b.w.

§ 2. Der Fall $n>1$

Betrachten wir jetzt ein System aus n identischen parallelgeschalteten Elementen. Es sei F_i bzw. G_i die Verteilungsfunktion der Lebensdauer bzw. Reparaturzeit des i-ten Elements $1\leqq i\leqq n$ und $w_i(t)$ bzw. $w_i^*(t)$ die ihm zugeordneten Prozesse. Offenbar entspricht bei Parallelschaltung dem ganzen System der Prozeß

$$\mathscr{W}_n(t)=\min_{1\leqq i\leqq n} w_i^*(t).$$

Für die Verteilung von $\mathscr{W}(t)$ haben wir

$$1-\mathscr{F}_n(t,x)=1-P(\mathscr{W}(t)<x)=\prod_{i=1}^n (1-F_i(t,x)),$$

wo $F_i(t,x)=P(w_i(t)<x)$.

Der Prozeß $\mathscr{W}_n(t)$ beschreibt den Zustand des Systems, denn $\mathscr{W}_n(t)=0$ bedeutet, daß das System als ganzes funktioniert und $\mathscr{W}_n(t)>0$, daß es spätestens im Zeitpunkt t versagt hat. Weiter bedeutet $\mathscr{W}_n^*(t)$ die zufällige Zeit, die man abwarten muß, bis das System wieder funktioniert.

Es sei weiter

$$B_n(t,\delta)=\{\mathscr{W}_n(t')>0 \text{ für ein } t'\colon t\leqq t'\leqq t+\delta\},$$

$G_{n,\delta}(t,x)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$G_{n,\delta}(t,x)=P(\mathscr{W}_n(t)<x\,|\,B_n(t,\delta))$$

und

$$G_n(t,x)=\lim_{\delta\to 0} G_{n,\delta}(t,x).$$

$G_n(t, x)$ ist die Verteilung der zufälligen Reparaturzeit des ganzen Systems, falls es im Zeitpunkt t versagt hat. Explizite Ausdrücke hierfür sind in der Regel unbequem, und wir werden die stationäre Verteilung $\mathscr{G}_n(x) = \lim_{t\to\infty} G_n(t, x)$ untersuchen.

2.1. **Satz.** *Es gilt*

$$\mathscr{G}_n(x) = 1 + \frac{(b_1 b_2 \dots b_n)^{-1}}{b_1^{-1} + b_2^{-1} + \dots + b_n^{-1}} \frac{d}{dx} \left\{ \prod_{i=1}^{n} \left(b_i - \int_0^x [1 - G_i(u)]\, du \right\} , \tag{1}$$

wo $b_i = \int_0^\infty t\, dG_i(t)$.

Beweis. Wir haben

$$1 - G_{n,\delta}(t, x) = \frac{P(\{\mathscr{W}_n(t+\delta) \geqq x\} \cap B_n(t, \delta))}{P(B_n(t, \delta))}.$$

Das Ereignis $\{\mathscr{W}_n(t+\delta) \geqq x\} \cap B_n(t, \delta)$ kann folgendermaßen disjunktiv zerlegt werden:

a) Im Zeitpunkt t ist $\mathscr{W}_{n-1}(t) > x + \delta$, im Zeitintervall $(t, t+\delta)$ versagt das n-te Element und dessen Reparaturzeit ist größer als $x+\delta$. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist

$$[1 - \mathscr{F}_{n-1}(t, x+\delta)]\, F_n(t, +0)\, \lambda_n(t)\, \delta\, [1 - G_n(x+\delta)] + o(\delta).$$

b) Im Zeitpunkt t gilt $w_n^*(t) > x + \delta$, im Intervall $(t, t+\delta)$ versagt das System aus den ersten $n-1$ Elementen und wird länger als $x+\delta$ repariert. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist

$$[1 - F_n(t, x+\delta)]\, P(B_{n-1}(t, \delta))\, [1 - \mathscr{G}_n(t+\delta, x+\delta)] + o(\delta).$$

c) Im Intervall $(t, t+\delta)$ versagt sowohl das n-te Element als auch das System der ersten $n-1$ Elemente. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $o(\delta)$.

Bezeichnen wir noch

$$S_k(t) = \lim_{\delta\to 0} \delta^{-1} P(B_k(t, \delta)), \qquad 1 \leqq k \leqq n,$$

dann erhält man aus a), b), c):

$$\begin{aligned} 1 - \mathscr{G}_n(t, x) = {} & [S_n(t)]^{-1} [1 - \mathscr{F}_n(t, x)]\, \lambda_n(t) \\ & \cdot F_n(t, +0) + [1 - F_n(t, x)]\, S_{n-1}(t) [1 - \mathscr{G}_{n-1}(t, x)]. \end{aligned} \tag{2}$$

Zerlegt man nämlich $B_k(t, \delta)$, so bekommt man

$$S_k(t) = [1 - \mathscr{F}_k(t, +0)] \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(t) \frac{F_i(t, +0)}{1 - F_i(t, +0)}. \tag{3}$$

Berücksichtigen wir noch dazu, daß $\lambda_i(t) \to a_i^{-1}$, so führt die Rekursionsformel (2) mit (3) zu der gewünschten Relation (1).

Aus (1) bekommen wir für die mittlere stationäre Reparaturdauer β des Systems

$$\beta = \int_0^\infty t\, d\mathscr{G}_n(t) = \left[\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \right]^{-1}. \tag{4}$$

Hieraus kann auch die mittlere stationäre Funktionsdauer α des Systems ermitteln. In der Tat ist $\beta/(\alpha+\beta)$ die Wahrscheinlichkeit, daß das System lahmgelegt ist. Andererseits ist diese Wahrscheinlichkeit gleich dem Produkt der Versagenswahrscheinlichkeiten der einzelnen Elemente, d.h.

$$\beta/(\alpha+\beta)=\prod_{k=1}^{n} b_k/(a_k+b_k)$$

oder

$$\alpha=\beta(1-\pi)\,\pi^{-1}, \qquad \pi=\prod_{k=1}^{n} b_k/(a_k+b_k).$$

Unsere weiteren Betrachtungen sind dem Fall gewidmet, wo α groß ist, oder genauer, wo sich jedes der n-Elemente so verändert, daß für das ganze System $\alpha\to\infty$. Dafür reicht hin, daß $a=\max(a_1, a_2, \ldots, a_n)\to\infty$.

Ähnlich kann auch die stationäre Verteilung $\Phi(x)$ der zufälligen Funktionsdauer des ganzen Systems angegeben werden. Da auch diese Ausdrücke unpraktisch sind, geben wir hier nur folgendes Resultat an.

2.2. **Satz.** *Es gilt*

$$\Phi(\alpha x)\to 1-\mathrm{e}^{-x}, \qquad \alpha\to\infty.$$

Beweis. Der Prozeß $\mathscr{W}_n(t)$ hat wie die Prozesse $w_i^*(t)$, $1\leqq i\leqq n$ eine Folge von Zeitpunkten (Versagen), die einem Poissonschen Erneuerungsprozeß entspringen mit der Lokalintensität

$$\lambda(u)=\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu(u), \qquad \lambda_\nu(u)=h_\nu(u)/F_\nu(u,+0).$$

Betrachten wir jetzt die Wahrscheinlichkeit

$$P_0(t)=\int_0^\infty \exp[-\Lambda(t,t+y)]\,d_y G_n(t,y)$$

$$\Lambda(t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2}\lambda(u)\,du$$

dafür, daß nach dem Versagen des Systems im Zeitpunkt keine fiktive Versagen mehr vorkommen. Wir haben $P_0(t)\to 1$, $t\to\infty$, $\alpha\to\infty$. In der Tat gilt

$$\exp[-\Lambda(t,t+y)]\to \mathrm{e}^{-\tilde{a}y}, \qquad \tilde{a}=\sum_{k=1}^{n} a_k^{-1}$$

und

$$|P_0(t)-1|\leqq\int_0^\infty |\mathrm{e}^{-\Lambda(t,t+y)}-\mathrm{e}^{-\tilde{a}y}|\,dG_n(t,y)+\int_0^\infty|\mathrm{e}^{-\tilde{a}y}-1|\,dG_n(t,y),$$

so daß

$$\lim|P_0(t)-1|\leqq\varepsilon+\beta\,\tilde{a}+o(\tilde{a}).$$

Aus $\tilde{a}\to\infty\Leftrightarrow\alpha\to\infty$ folgt die Behauptung. Sie erlaubt uns, die Funktions- und die Reparaturdauer für $\alpha\to\infty$ als unabhängig zu betrachten.

Nehmen wir jetzt ein System, in dem dieselben Elemente nicht parallel, sondern der Reihe nach geschaltet sind. Bei einem solchen System werden die Rollen des Funktionierens und der Reparatur vertauscht.

Bezeichnet $\bar{h}(t)$ die Erneuerungsdichte des Versagens dieses zweiten Systems und $\bar{\bar{\mathscr{F}}}_n(t, +0)$ die Wahrscheinlichkeit, daß es im Zeitpunkt t funktioniert, so haben wir

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\mathscr{F}}}_n(t, +0) &= \bar{\mathscr{G}}_n(t) + \int_0^t \bar{\mathscr{G}}_n(x-t)\,\bar{h}(x)\,dx, \\ \bar{\mathscr{G}}_n(t) &= 1 - \mathscr{G}_n(t) \end{aligned} \tag{5}$$

und für die entsprechenden Laplace-Transformierten

$$\bar{f}(s) = \frac{1-g_n(s)}{s}\,[1-h^*(s)]. \tag{6}$$

Da $\alpha = \int_0^\infty x\,d\Phi(x)$ und $\bar{h}(x) \to (\alpha+\beta)^{-1}$, erhält man für große α

$$s\,\bar{h}(s) = \alpha^{-1} + o(\alpha^{-1}), \qquad s \to 0.$$

Aus (6) folgt unmittelbar

$$\bar{f}(s/\alpha) \to \beta^{-1}(1+s^{-1}), \qquad \alpha \to \infty,$$

und aus (8, § 1) und der Bemerkung am Ende von § 1.3 die Relation

$$\bar{f}(s) = 1/\{s + \beta(1-\Phi^*(s))\}. \tag{7}$$

Lösen wir nach $\Phi^*(s)$ auf, so ergibt sich

$$\Phi^*(\alpha^{-1}s) = \{\beta\bar{f}(s/\alpha) + s\bar{f}(s/\alpha)/\alpha - 1\}/\beta\bar{f}(s/\alpha).$$

Aus alledem folgt

$$\Phi^*(s/\alpha) \to (1+s)^{-1},$$

w. z. b. w.

Literatur

1. Obretenov, A., Dimitrov, B., Usunov, M.: Untersuchung der Zuverlässigkeit von Systemen durch stochastische Prozesse. Izv. Mat. Inst., Bulgarska Akademija na Naukite, **9**, 159–180 (1970)
2. Smith, W. L.: Renewed theory and its ramifikations. J. Roy. Statist. Soc. Ser. B **20**, 243–302 (1958)
3. Barlow, R. E.: Repairman problems. In: Studies in Applied Prob. and Management Science, ed. by Arrow, Karlin & Scarp. Stanford: University Press 1962

Apostol Obretenov
Mathematisches Institut
der Bulgarischen Akademie
der Wissenschaften
P.O. Box 373
Sofia, Bulgarien

(Eingegangen am 9. November 1970; in revidierter Form am 6. April 1972)