

Vergleich von Experimenten im schwach dominierten Fall

Dieter Mussmann

1. Einleitung

In Anlehnung an Blackwell ([4, 5]) nennen wir einen Meßraum (X, \mathfrak{A}) zusammen mit einer Menge \mathscr{P} von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf \mathfrak{A} ein Experiment. Wenn \mathfrak{S} eine Vergrößerung von \mathfrak{A} ist, bezeichnen wir (X, \mathfrak{S}) mit der Menge der auf \mathfrak{S} eingeschränkten Maße aus \mathscr{P} als Unterexperiment. Für den Fall, daß \mathfrak{S} suffizient ist, besteht bekanntlich zwischen dem Experiment und dem von \mathfrak{S} gelieferten Unterexperiment eine Verknüpfung vermöge eines bedingten Erwartungswertes. Allgemeiner kann man zwei Experimente betrachten, die in analoger Weise miteinander verknüpft sind [12]. Wir nennen dann das eine Experiment für das andere schwach suffizient (in [12] werden andere Bezeichnungen verwendet). Dem Begriff der paarweisen Suffizienz entspricht der Begriff der paarweisen schwachen Suffizienz.

Wir beschränken uns auf Experimente, die schwach dominiert sind, d. h. bei denen es auf \mathfrak{A} ein lokalisierbares Maß [17] gibt bzgl. dessen jedes W -Maß aus \mathscr{P} eine Dichte hat. Ein σ -endliches Maß ist lokalisierbar. Man kann leicht zeigen, daß die schwache Dominiertheit zu der Verallgemeinerung der Dominiertheit in [8], Bedingung (D), äquivalent ist. In [8] wird geklärt, inwieweit die Bedingung (D) mit dem allgemeineren Dominiertheitsbegriff in [15] übereinstimmt. Daraus ergibt sich, daß bei schwach dominierten Experimenten minimalsuffiziente Vergrößerungen existieren und daß sich ein Satz über die Äquivalenz von paarweiser Suffizienz und Suffizienz formulieren läßt. Dies ist für den dominierten Fall bekannt ([1, 9]) und gilt nicht für beliebige Experimente ([9, 14]). Allgemeiner können wir eine Aussage über die Äquivalenz von paarweiser schwacher Suffizienz und schwacher Suffizienz machen (für den dominierten Fall vgl. [16]). Weiter zeigen wir, daß die schwache Suffizienz zweier Experimente, die schwach dominiert sind, impliziert, daß deren minimalsuffiziente Unterexperimente maßisomorph sind. Wir geben ein Beispiel an, bei dem zwischen \mathfrak{A} und einer suffizienten Vergrößerung eine nicht-suffiziente Vergrößerung liegt (vgl. auch [6]). Schließlich kommen wir durch eine Umformung eines Satzes aus [10] zu dem Ergebnis, daß sich die schwache Suffizienz mit Hilfe von „Risikofunktionen“ charakterisieren läßt.

Zu erwähnen ist noch die folgende Beziehung zu [11]. Dort wird als Experiment ein Tripel $(X, E, (P_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta})$ betrachtet, das aus einer nichtleeren Menge X , einem Banachverband E beschränkter reeller Funktionen auf X mit 1 und einer nichtleeren Familie $(P_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta}$ von positiven, normierten Linearformen auf E besteht. Diesem Experiment werden zwei Banachverbände L und M zugeordnet mit $L' = M$ und der Eigenschaft, daß $(P_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta}$ eine Teilmenge von L bildet und jedes Element von E ein Element aus M liefert. Experimente werden auf Grund dieser

Räume untersucht. Bezüglich der Einbettung eines Experimentes in ein Raumpaar L, M zeigen wir, daß es (auf rein maßtheoretischem Wege) möglich ist, ein in unserem Sinne definiertes Experiment in ein schwach dominiertes Experiment einzubetten. Der L^1 - bzw. L^∞ -Raum bzgl. eines Maßes, das die Menge von W -Maßen dieses Experimentes schwach dominiert und dazu äquivalent ist, entspricht dann dem Raum L bzw. M in [11].

2. Schwache Dominiertheit

Wir definieren hier zunächst die für diese Arbeit wichtigen Begriffe und stellen dann den Anschluß zu [8] und [15] her. Wir verabreden die folgenden abkürzenden Schreibweisen: (X, \mathfrak{A}) sei stets ein Meßraum. Für ein Maß μ auf \mathfrak{A} sei $\mathfrak{A}_{e, \mu} := \{A \in \mathfrak{A} : \mu(A) < \infty\}$ das System der meßbaren Mengen mit endlichem μ -Maß und $\mathfrak{A}_{\sigma, \mu} := \left\{ A \in \mathfrak{A} : A = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, E_n \in \mathfrak{A}_{e, \mu} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \right\}$ das System der meßbaren Mengen mit σ -endlichem μ -Maß. Sei weiter \mathcal{P} eine nichtleere Menge von Maßen auf \mathfrak{A} . Wenn für zwei \mathfrak{A} -meßbare Funktionen f, g gilt, daß $f = g$ P -fast überall für alle $P \in \mathcal{P}$ ist, schreiben wir $f = g[\mathcal{P}]$. Für zwei Teilmengen $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ von \mathfrak{A} bedeute $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{F}[\mathcal{P}]$, daß es zu jedem $E \in \mathfrak{G}$ ein $F \in \mathfrak{F}$ gibt mit $1_E = 1_F[\mathcal{P}]$ (1_E sei die Indikatorfunktion von E). Bei festem $A \in \mathfrak{A}$ sei $\mu|A$ das durch $\mu|A(B) := \mu(A \cap B)$ für alle $B \in \mathfrak{A}$ definierte Maß. Im folgenden handelt es sich bei \mathcal{P} meistens um eine Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen (W -Maßen). Für diesen Fall definieren wir:

(2.1) *Definition.* (a) Wenn auf (X, \mathfrak{A}) eine nichtleere Menge \mathcal{P} von W -Maßen gegeben ist, nennen wir das Tripel $(X, \mathfrak{A}, \mathcal{P})$ ein *Experiment*.

(b) Ist \mathfrak{S} eine Vergrößerung (Unter- σ -Algebra) von \mathfrak{A} , so heißt das Tripel $(X, \mathfrak{S}, \mathcal{P}|\mathfrak{S})$, wobei $\mathcal{P}|\mathfrak{S}$ die Menge der auf \mathfrak{S} eingeschränkten Maße aus \mathcal{P} sei, *Unterexperiment* von $(X, \mathfrak{A}, \mathcal{P})$.

Für das Folgende ist es im Grunde nur wichtig, daß \mathcal{P} aus positiven endlichen Maßen besteht.

(2.2) *Definition.* Das Unterexperiment heißt *suffizient*, wenn \mathfrak{S} suffizient für \mathcal{P} ist, d.h. für jede Menge $A \in \mathfrak{A}$ gibt es eine \mathfrak{S} -meßbare Funktion $E(1_A|\mathfrak{S})$, die wir einen bedingten \mathcal{P} -Erwartungswert von 1_A bzgl. \mathfrak{S} nennen, derart, daß für alle $S \in \mathfrak{S}$ und $P \in \mathcal{P}$ gilt $\int_S 1_A dP = \int_S E(1_A|\mathfrak{S}) dP$.

Wir erinnern daran, daß eine Vergrößerung \mathfrak{S} von \mathfrak{A} *paarweise suffizient* für \mathcal{P} heißt, wenn \mathfrak{S} für jede zweielementige Teilmenge von \mathcal{P} suffizient ist, und *minimalsuffizient*, wenn für jede suffiziente Vergrößerung \mathfrak{I} gilt $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{I}[\mathcal{P}]$.

Die nächsten Definitionen brauchen wir für die Einführung des Begriffes „schwach dominiert“.

(2.3) *Definition.* (a) Ein Maß μ auf (X, \mathfrak{A}) heißt *lokalisierbar*, wenn jede Menge $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{A}_{e, \mu}$ ein essentielles Supremum, $\text{ess-sup } \mathfrak{G} \in \mathfrak{A}$, hat, d.h. für jedes $A \in \mathfrak{A}$ gilt $\mu(E - A) = 0$ für alle $E \in \mathfrak{G}$ genau dann, wenn $\mu(\text{ess-sup } \mathfrak{G} - A) = 0$ ist (vgl. [17], S. 262).

(b) μ heißt *wesentlich* (finite subset property in [17], S. 257), wenn für jedes $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A) > 0$ ein \mathfrak{A} -meßbares $B \subset A$ existiert mit $\infty > \mu(B) > 0$.

(2.4) *Definition.* (a) μ sei ein Maß auf (X, \mathfrak{A}) . Eine Familie von meßbaren Funktionen $\{f_E: E \in \mathfrak{A}_{e, \mu}\}$ heißt *Querschnitt* (cross-section, vgl. [17], S. 250), wenn für alle $E, F \in \mathfrak{A}_{e, \mu}$ gilt $1_{E \cap F} f_E = 1_{E \cap F} f_F [\mu]$.

(b) Ein Querschnitt heißt *durch eine meßbare Funktion f bestimmt*, wenn $f 1_E = f_E [\mu]$ für alle $E \in \mathfrak{A}_{e, \mu}$ gilt.

(2.5) **Satz.** μ auf (X, \mathfrak{A}) sei wesentlich. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) μ ist lokalisierbar.
- (2) Jeder Querschnitt ist durch eine meßbare Funktion bestimmt.

Beweis. Vgl. [17], S. 264, Theorem 2.

(2.6) **Satz.** μ sei ein wesentliches positives Maß auf (X, \mathfrak{A}) . Dann gibt es eine Teilmenge $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{A}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (1) Für jedes $Z \in \mathfrak{Z}$ ist $\infty > \mu(Z) > 0$.
- (2) Für $Z, Z' \in \mathfrak{Z}$ mit $Z \neq Z'$ gilt $\mu(Z \cap Z') = 0$.
- (3) Gilt für ein $A \in \mathfrak{A}$ die Beziehung $\mu(A \cap Z) = 0$ für alle $Z \in \mathfrak{Z}$, so ist $\mu(A) = 0$.

Beweis. Man zeigt (2.6) unter Benutzung des Zornschen Lemmas (vgl. [17], S. 259, vor Lemma α).

(2.7) *Definition.* Die Menge \mathfrak{Z} aus (2.6) nennen wir μ -*Zerlegung* von X .

Wir kommen nun zum Begriff der schwachen Dominiertheit.

(2.8) *Definition.* Eine nichtleere Menge \mathcal{P} von W -Maßen auf (X, \mathfrak{A}) heißt *schwach dominiert*, wenn es auf (X, \mathfrak{A}) ein lokalisierbares Maß μ gibt, bzgl. dessen jedes $P \in \mathcal{P}$ eine Dichte hat. In diesem Fall heißt auch das Experiment $(X, \mathfrak{A}, \mathcal{P})$ *schwach dominiert*.

Ein Experiment heißt bekanntlich dominiert, wenn das μ aus (2.8) σ -endlich ist. Wir beweisen ein

(2.9) **Lemma.** (1) Jedes $P \in \mathcal{P}$ habe eine Dichte bzgl. eines Maßes μ auf \mathfrak{A} , das zu \mathcal{P} äquivalent ist. Dann ist μ wesentlich.

(2) \mathcal{P} sei schwach dominiert. Dann gibt es ein schwach dominierendes Maß, das zu \mathcal{P} äquivalent ist.

Beweis. (1) Es sei $T_P := \left\{ \frac{dP}{d\mu} > 0 \right\}$ für alle $P \in \mathcal{P}$. Sei $\mu(A) > 0$ für ein $A \in \mathfrak{A}$.

Dann gibt es ein $P \in \mathcal{P}$ mit $P(A) > 0$. Daher ist auch $\mu(A \cap T_P) > 0$. Da $T_P \in \mathfrak{A}_{\sigma, \mu}$ ist, folgt die Behauptung.

(2) μ sei jetzt das schwach dominierende Maß für \mathcal{P} , und T_P sei wie vorhin für jedes $P \in \mathcal{P}$ definiert. Wir setzten $\mathfrak{E} := \{E \in \mathfrak{A}_{e, \mu}: E \subset T_P \text{ für ein } P \in \mathcal{P}\}$. Es existiert $T := \text{ess-sup } \mathfrak{E} \in \mathfrak{A}$. $\mu|T$ ist ebenfalls lokalisierbar, und es ist $T_P \subset T [\mu]$ für alle $P \in \mathcal{P}$. Daher ist $\mu|T$ schwach dominierend für \mathcal{P} . $\mu|T$ ist auch bzgl. \mathcal{P} absolut stetig. Denn sei ein $A \in \mathfrak{A}$ gegeben mit $P(A) = 0$ für alle $P \in \mathcal{P}$, so ist $\mu(T_P \cap A) = 0$ für alle $P \in \mathcal{P}$. Daraus folgt $\mu(T - (X - A)) = 0$, was $A \subset X - T [\mu]$ und schließlich $\mu|T(A) = 0$ zur Folge hat.

In [15] ist für Experimente der Begriff der Dominiertheit verallgemeinert worden. Eine Formulierung der dabei angegebenen Bedingung lautet (vgl. [15], S. 599, Lemma 1.2 und Theorem 1.1):

(2.10) *Pitcher-Bedingung.* $(X, \mathfrak{A}, \mathcal{P})$ hat die beiden Eigenschaften:

(1) Sei $N \subset X$, und existiere zu jedem $P \in \mathcal{P}$ eine P -Nullmenge $N_P \in \mathfrak{A}$ mit $N \subset N_P$, dann ist $N \in \mathfrak{A}$.

(2) Zu jeder Familie von \mathfrak{A} -meßbaren Funktionen $(f_P)_{P \in \mathcal{P}}$ mit der Eigenschaft, daß zu je endlich vielen $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{P}$ eine \mathfrak{A} -meßbare Funktion f_{P_1, \dots, P_n} existiert mit $f_{P_1, \dots, P_n} = f_{P_i}[P_i]$ für $i = 1, \dots, n$, gibt es eine \mathfrak{A} -meßbare Funktion f mit $f = f_P[P]$ für alle $P \in \mathcal{P}$.

In [8] werden zwei zu (2.10)(2) äquivalente Bedingungen angegeben. Die Bedingung (D) in [8], S. 56, lautet etwas umformuliert (vgl. [8], S. 54, Bemerkung 8.1, und S. 19, Definition 2.1):

(2.11) *Diepenbrock-Bedingung (D).* Es gibt ein zu \mathcal{P} äquivalentes Maß μ auf (X, \mathfrak{A}) , bzgl. dessen jedes $P \in \mathcal{P}$ eine Dichte hat, und jeder Querschnitt (hinsichtlich μ) von \mathfrak{A} -meßbaren Funktionen ist durch eine meßbare Funktion bestimmt.

Die zweite Bedingung in [8], S. 59, heißt:

(2.12) *Diepenbrock-Bedingung (S).* Zu jeder Teilmenge $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ gibt es ein $S_{\mathfrak{C}} \in \mathfrak{A}$ mit der Eigenschaft, daß für jedes $P \in \mathcal{P}$ gilt: Für ein $A \in \mathfrak{A}$ ist $P(E - A) = 0$ für alle $E \in \mathfrak{C}$ genau dann, wenn $P(S_{\mathfrak{C}} - A) = 0$ ist.

Die Äquivalenz von (2.10)(2), (2.11) und (2.12) wird in [8], §9, S. 60–70, bewiesen.

(2.13) **Satz.** Ein Experiment ist genau dann schwach dominiert, wenn es einer der Bedingungen (2.10)(2), (2.11) oder (2.12) genügt.

Beweis. Der Beweis folgt unmittelbar aus (2.5) und (2.9).

Wir können jetzt zwei Sätze für schwach dominierte Experimente angeben, die später gebraucht werden.

(2.14) **Satz.** $(X, \mathfrak{A}, \mathcal{P})$ sei ein Experiment und \mathfrak{S} eine Vergrößerung von \mathfrak{A} .

(1) Ist \mathfrak{S} suffizient für \mathcal{P} , so ist \mathfrak{S} paarweise suffizient für \mathcal{P} .

(2) Ist \mathfrak{S} paarweise suffizient für \mathcal{P} und ist $\mathcal{P}|\mathfrak{S}$ schwach dominiert, so ist \mathfrak{S} suffizient für \mathcal{P} .

Beweis. (1) ist klar.

(2) Für jede Indikatorfunktion 1_A von $A \in \mathfrak{A}$ und jedes $P \in \mathcal{P}$ sei $E_P(1_A|\mathfrak{S})$ ein bedingter Erwartungswert hinsichtlich P . Jede endliche Familie von W -Maßen ist dominiert. Aus der paarweisen Suffizienz folgt daher die Suffizienz für jede endliche Familie aus \mathcal{P} , und $E_P(1_A|\mathfrak{S})$ erfüllt die Voraussetzungen von (2.10)(2), wenn das Experiment $(X, \mathfrak{S}, \mathcal{P}|\mathfrak{S})$ betrachtet wird. Daher gibt es einen bedingten \mathcal{P} -Erwartungswert bzgl. \mathfrak{S} .

(2.15) **Satz.** $(X, \mathfrak{A}, \mathcal{P})$ sei schwach dominiert. Dann gibt es eine für \mathcal{P} minimal-suffiziente Vergrößerung von \mathfrak{A} .

Beweis. Das schwach dominierende Maß μ sei gemäß (2.9) zu \mathcal{P} äquivalent gewählt. Zu $N \subset X$ gebe es für jedes $P \in \mathcal{P}$ eine P -Nullmenge N_P mit $N \subset N_P$. Nach [17], S. 265, Exercise 35.1, existiert $N' := X - \operatorname{ess-sup}_{P \in \mathcal{P}}(X - N_P) \in \mathfrak{A}$ (bzgl. μ), und es ist $N \subset N' \subset N_P[\mu]$ für alle $P \in \mathcal{P}$ und folglich $N' \subset N_P[P]$ für alle $P \in \mathcal{P}$. Daher ist $\mu(N') = 0$ und somit $N \in \mathfrak{A}^\mu$, der Vervollständigung von \mathfrak{A} bzgl. μ . \mathcal{P}' sei die Menge der Fortsetzungen der Maße aus \mathcal{P} auf \mathfrak{A}^μ . $(X, \mathfrak{A}^\mu, \mathcal{P}')$ erfüllt dann (2.10). Nach [15], S. 603, Theorem 2.5, gibt es eine für \mathcal{P}' minimal-suffiziente Vergrößerung \mathfrak{M} von \mathfrak{A}^μ . Eine minimal-suffiziente Vergrößerung von \mathfrak{A} für \mathcal{P} ist dann

$$\mathfrak{T} := \{A \in \mathfrak{A} : \text{es gibt ein } M \in \mathfrak{M} \text{ mit } 1_A = 1_M[\mu]\}.$$

3. Einbettung eines Experimentes in ein schwach dominiertes Experiment

$(X, \mathfrak{A}, \mathcal{P})$ sei ein Experiment. Im folgenden benötigen wir einige Eigenschaften der Menge $\mathcal{P}^* := \{Q : Q = P|A, P \in \mathcal{P}, A \in \mathfrak{A}\}$. Zwei Elemente $M, Q \in \mathcal{P}^*$ heißen *orthogonal* (mutually singular [13], S. 107), wenn es eine Menge $B \in \mathfrak{A}$ gibt mit $M(B) = 0$ und $Q(X - B) = 0$.

(3.1) *Bemerkung.* Die Glieder einer Folge $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Maßen aus \mathcal{P}^* sind genau dann paarweise orthogonal, wenn es eine Zerlegung $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $A_n \in \mathfrak{A}$, von X gibt so, daß $Q_n(A_m) = 0$ ist für $n \neq m$. Wir nennen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine zu $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gehörige Zerlegung von X .

(3.2) **Lemma.** Für zwei Maße $M, Q \in \mathcal{P}^*$ sei $T_{M,Q} := \left\{ \frac{dM}{d(M+Q)} > 0 \right\}$.

- (1) $Q|_{T_{M,Q}}$ ist bzgl. M absolut stetig und unabhängig von der Wahl der Dichte.
- (2) M und Q sind genau dann orthogonal, wenn $Q(T_{M,Q}) = 0$ ist.

Beweis. (1) Sei $M(A) = 0$ für ein $A \in \mathfrak{A}$, dann gilt $0 = \int 1_A \frac{dM}{d(M+Q)} d(M+Q)$ und daher $Q(A \cap T_{M,Q}) = 0$. Nach dem Satz von Lebesgue [13], S. 108, Proposition IV.1.3, ist $Q|_{T_{M,Q}}$ eindeutig bestimmt.

(2) Wegen $M(X - T_{M,Q}) = 0$ folgt aus $Q(T_{M,Q}) = 0$ die Orthogonalität der Maße. Gibt es andererseits ein $B \in \mathfrak{A}$ mit $M(X - B) = 0$ und $Q(B) = 0$, so kann $T_{M,Q} \subset B$ gewählt werden.

(3.3) **Satz.** Es gibt eine Teilmenge $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}^*$ mit den Eigenschaften:

- (1) Die Elemente von \mathcal{M} sind vom Nullmaß verschieden und paarweise orthogonal.
- (2) Jedes $P \in \mathcal{P}$ ist bzgl. einer höchstens abzählbaren Teilmenge \mathcal{M}_P von \mathcal{M} absolut stetig.

Beweis. Wir betrachten die Menge \mathfrak{Z} aller Teilmengen von \mathcal{P}^* mit der Eigenschaft (3.3)(1). Für jedes $P \in \mathcal{P}$ ist $\{P\} \in \mathfrak{Z}$. Die Inklusion liefert eine teilweise Ordnung auf \mathfrak{Z} . Da jede linear geordnete Teilmenge von \mathfrak{Z} eine obere Schranke (Vereinigung) hat, gibt es nach dem Zornschen Lemma ein maximales Element \mathcal{M} in \mathfrak{Z} .

Wir zeigen: Für jedes $P \in \mathcal{P}$ gibt es eine höchstens abzählbare Teilmenge $\mathcal{M}_P \subset \mathcal{M}$ derart, daß $P(T_{M,P}) = 0$ genau dann gilt, wenn $M \in \mathcal{M} - \mathcal{M}_P$ ist. Anderen-

falls gäbe es eine abzählbare unendliche Teilmenge $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $P(T_{M;P}) > \varepsilon$ für alle $M \in \mathcal{N}$. Da \mathcal{M} paarweise orthogonal ist, ist auch $\{P|T_{M;P}; M \in \mathcal{N}\}$ paarweise orthogonal; $(A_M)_{M \in \mathcal{N}}$ sei die zugehörige Zerlegung von X . Dann ist $P(X) = \sum_{M \in \mathcal{N}} P(A_M) \geq \sum_{M \in \mathcal{N}} P(T_{M;P} \cap A_M) = \sum_{M \in \mathcal{N}} P(T_{M;P})$ und wir haben einen Widerspruch.

Jedes $P \in \mathcal{P}$ ist bzgl. \mathcal{M}_P absolut stetig. Denn sei $P(A) > 0$, $A \in \mathfrak{A}$, so gibt es wegen der Maximalität von \mathcal{M} ein $M \in \mathcal{M}$, das nicht orthogonal zu $P|A$ ist. Nach dem Vorangehenden ist $M \in \mathcal{M}_P$.

Der nächste Satz beschreibt die Einbettung eines Experiments in ein schwach dominiertes Experiment.

(3.4) **Satz.** Zu jedem Experiment $(X, \mathfrak{A}, \mathcal{P})$ gibt es ein schwach dominiertes Experiment $(X', \mathfrak{A}', \mathcal{P}')$, wobei \mathcal{P}' von der Gestalt $\mathcal{P}' = \{P' : P \in \mathcal{P}\}$ ist, mit einem zu \mathcal{P}' äquivalenten schwach dominierenden Maß μ und eine $\mathfrak{A}' - \mathfrak{A}$ -meßbare Abbildung $\text{pr} : X' \rightarrow X$ mit den Eigenschaften:

(1) $P = P' \circ \text{pr}^{-1}$ für alle $P \in \mathcal{P}$.

(2) \mathfrak{E} bezeichne die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathcal{L}^1(\mathfrak{A}', \mu)$, geordnet bzgl. der Inklusion. Zu jedem $f' \in \mathcal{L}^\infty(\mathfrak{A}', \mu)$ gibt es ein gerichtetes System $(f_E)_{E \in \mathfrak{E}}$ von beschränkten \mathfrak{A} -meßbaren Funktionen so, daß für jedes $g' \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{A}', \mu)$ gilt $\int |f' - f_E \circ \text{pr}| g' d\mu = 0$ für alle $E \supset \{g'\}$.

(3) Zu jedem $A' \in \mathfrak{A}'$ gibt es ein gerichtetes System $(A_E)_{E \in \mathfrak{E}}$ (\mathfrak{E} wie in (2)) von Mengen $A_E \in \mathfrak{A}$ so, daß für jedes $P \in \mathcal{P}$ gilt $P'(\text{pr}^{-1}(A_E) \Delta A') = 0$ für alle $E \supset \left\{ \frac{dP'}{d\mu} \right\}$.

Beweis. \mathcal{M} sei die Menge aus (3.3). Es sei $X' := X \times \mathcal{M}$ und \mathfrak{A}' die σ -Algebra, deren Elemente A' die Gestalt haben $A' = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} A_M \times \{M\}$, $A_M \in \mathfrak{A}$ für alle $M \in \mathcal{M}$.

Für alle $M \in \mathcal{M}$ werde das Maß M' auf (X', \mathfrak{A}') dadurch bestimmt, daß für alle $A' \in \mathfrak{A}'$ gesetzt wird $M'(A') := M(A)$, wobei $A \times \{M\} = A' \cap (X \times \{M\})$ ist.

Das Maß μ auf (X', \mathfrak{A}') sei das Supremum aller endlichen Summen von Maßen M' , $M \in \mathcal{M}$, d.h. $\mu = \sum_{M \in \mathcal{M}} M'$ (vgl. [3], S. 32, Theorem 1). μ ist auf \mathfrak{A}' lokalisierbar und wesentlich (vgl. [17], S. 263, Theorem 1).

Die Abbildung pr sei gegeben durch $\text{pr} : (x, M) \mapsto x$, $x \in X$ und $M \in \mathcal{M}$. pr ist $\mathfrak{A}' - \mathfrak{A}$ -meßbar, und es ist $M = M' \circ \text{pr}^{-1}$ für alle $M \in \mathcal{M}$.

Zu $P \in \mathcal{P}$ wählen wir gemäß (3.3)(2) die abzählbare Teilmenge \mathcal{M}_P . Nach (3.1) ist $\sum_{M \in \mathcal{M}_P} M$ σ -endlich. Nach (3.3)(2) ist P bzgl. dieses Maßes absolut stetig und hat daher eine Dichte $p \geq 0$.

Es sei $T_P := \bigcup_{M \in \mathcal{M}_P} X \times \{M\}$. Auf \mathfrak{A}' definieren wir P' , $P \in \mathcal{P}$, vermöge

$$P'(A') := \int_{A'} p \circ \text{pr} \cdot 1_{T_P} d\mu = \sum_{M \in \mathcal{M}_P} \int_{A'} p \circ \text{pr} dM' \quad \text{für alle } A' \in \mathfrak{A}'.$$

P' und pr erfüllen dann (1).

Sei $E \subset \mathfrak{E}$ und $F := \{x' \in X' : g'(x') \neq 0 \text{ für ein } g' \in E\}$. Die Menge $\mathcal{N}_E := \{M \in \mathcal{M} : M'(F) > 0\}$ ist höchstens abzählbar. Die zu \mathcal{N}_E gemäß (3.1) gehörige Zerlegung von X sei $(A_M)_{M \in \mathcal{N}_E}$. Sei f' aus $\mathcal{L}^\infty(\mathfrak{A}', \mu)$, dann gibt es ein beschränktes \mathfrak{A}' -

meßbares f'_1 mit $f'_1 = f' [\mu]$. Zu f' definieren wir eine beschränkte \mathfrak{A} -meßbare Funktion f_E durch $f_E(x) := \sum_{M \in \mathcal{N}_E} f'_1(x, M) 1_{A_M}(x)$ für alle $x \in X$. Es ist $f_E \circ \text{pr} = f' [\sum_{M \in \mathcal{N}_E} M']$ und für jedes $g' \in E$ gilt weiter

$$\int |f' - f_E \circ \text{pr}| g' d\mu = \sum_{M \in \mathcal{N}_E} \int |f' - f_E \circ \text{pr}| g' dM' = 0.$$

Damit ist (2) bewiesen. (3) ist ein Spezialfall von (2).

(3.4)(2) beschreibt, in welchem Sinne die Menge der Funktionen der Gestalt $f \circ \text{pr}$ mit beschränktem \mathfrak{A} -meßbarem f in $\mathcal{L}^\infty(\mathfrak{U}', \mu)$ dicht liegt. Das Ergebnis entspricht dem von Le Cam, der einem Experiment den Räumen $L^\infty(\mathfrak{U}, \mu)$ und $L^1(\mathfrak{U}', \mu)$ analoge abstrakte Räume mit funktionalanalytischen Methoden zuordnet.

4. Schwache Suffizienz beim Vergleich zweier Experimente

Im folgenden seien $\mathfrak{X} := (X, \mathfrak{A}, \mathcal{P})$ und $\mathfrak{Y} := (Y, \mathfrak{C}, \mathcal{P}^*)$ zwei Experimente, wobei \mathcal{P}^* die Gestalt $\mathcal{P}^* = \{P^* : P \in \mathcal{P}\}$ habe.

(4.1) *Definition.* Eine Abbildung $\varphi : \mathfrak{C} \times X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *schwacher Markovkern von X nach (Y, C)*, wenn

- (a) $0 \leq \varphi(C, \cdot) [\mathcal{P}]$ für alle $C \in \mathfrak{C}$ ist,
- (b) $\varphi(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n, \cdot) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(C_n, \cdot) [\mathcal{P}]$ für jede Folge paarweise disjunkter Mengen $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus \mathfrak{C} ist,
- (c) $\varphi(Y, \cdot) = 1 [\mathcal{P}]$ gilt,
- (d) $\varphi(C, \cdot)$ für alle $C \in \mathfrak{C}$ eine \mathfrak{A} -meßbare Funktion ist.

Gelten die Beziehungen (a) bis (d) nicht nur modulo $[\mathcal{P}]$, sondern für alle $x \in X$, so heißt φ ein *Markovkern*.

Die Festsetzung $P'(C) := \int \varphi(C, \cdot) dP$ für alle $C \in \mathfrak{C}$ liefert für jedes $P \in \mathcal{P}$ ein W -Maß auf \mathfrak{C} .

(4.2) *Definition.* φ heißt ein *schwacher Markovkern von X nach Y*, wenn $P' = P^*$ ist für alle $P \in \mathcal{P}$.

Es sei $\mathcal{L}^1(\mathfrak{C}, \mathcal{P}^*) := \bigcap_{P \in \mathcal{P}} \mathcal{L}^1(\mathfrak{C}, P^*)$. φ läßt sich nun gewissermaßen auf Elemente von $\mathcal{L}^1(\mathfrak{C}, \mathcal{P}^*)$ „fortsetzen“:

(4.3) **Lemma.** φ sei ein schwacher Markovkern von \mathfrak{X} nach \mathfrak{Y} . Für jedes $f \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{C}, \mathcal{P}^*)$ gibt es dann ein \mathfrak{A} -meßbares $\varphi(f)$ derart, daß

- (1) $\varphi(af + bg) = a\varphi(f) + b\varphi(g) [\mathcal{P}]$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und f, g aus $\mathcal{L}^1(\mathfrak{C}, \mathcal{P}^*)$ gilt,
- (2) $0 \leq \varphi(f) [\mathcal{P}]$ ist, wenn $0 \leq f [\mathcal{P}^*]$ gilt,
- (3) $\int f dP^* = \int \varphi(f) dP$ für alle $f \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{C}, \mathcal{P}^*)$ und $P \in \mathcal{P}$ ist,
- (4) $\inf \{c \in \mathbb{R} : |f| \leq c [\mathcal{P}^*]\} = \inf \{c \in \mathbb{R} : |\varphi(f)| \leq c [\mathcal{P}]\}$ ist, wenn die linke Seite endlich ist.

Beweis. [12], S. 206, Proposition 4.1.

Wenn φ ein Markovkern ist, kann man setzen $\varphi(f) = \int f \varphi(dy, \cdot)$.

(4.4) *Definition.* Unter den Voraussetzungen von (4.3) schreiben wir für $\varphi(f)$ auch $\int f(y)\varphi(dy, \cdot)$, wenn $f \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{C}, \mathcal{P}^*)$ ist.

Der Begriff der Suffizienz läßt sich nun verallgemeinern. Die folgende Betrachtung dient der Motivation des weiteren Vorgehens. Sie folgt im wesentlichen einer Idee von Csiszár [7]. Gegeben sei ein schwacher Markovkern φ von \mathfrak{X} nach \mathfrak{Y} (in [7] ist φ ein Markovkern). \mathfrak{X} und \mathfrak{Y} lassen sich als Unterexperimente eines weiteren Experimentes auffassen, das nun konstruiert werden soll.

(4.5) **Lemma.** Q sei ein bezüglich \mathcal{P} absolut stetiges Maß auf \mathfrak{A} . Die Festsetzung $\varphi \times Q(A \times C) := \int_A \varphi(C, \cdot) dQ$ für alle $A \in \mathfrak{A}$ und $C \in \mathfrak{C}$ liefert ein Maß auf $(X \times Y, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{C})$.

Beweis. Der Beweis verläuft unter Beachtung von (4.3) und (4.4) analog [13], S. 74, Proposition III.2.1.

Somit ist $(X \times Y, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{C}, \varphi \times \mathcal{P})$, wobei $\varphi \times \mathcal{P} := \{\varphi \times P : P \in \mathcal{P}\}$ ist, ein Experiment. $X \otimes \mathfrak{C} := \{X \times C : C \in \mathfrak{C}\}$ und $\mathfrak{A} \otimes Y := \{A \times Y : A \in \mathfrak{A}\}$ sind Vergrößerungen von $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{C}$.

(4.6) **Lemma.** $\mathfrak{A} \otimes Y$ ist suffizient für $\varphi \times \mathcal{P}$.

Beweis. Vgl. [7], Lemma 2.5.

(4.7) **Lemma.** $X \otimes \mathfrak{C}$ ist genau dann suffizient für $\varphi \times \mathcal{P}$, wenn es zu jedem $A \in \mathfrak{A}$ eine \mathfrak{C} -meßbare Funktion f_A gibt mit $\int_C f_A(y) P^*(dy) = \int_A \varphi(C, x) P(dx)$ für alle $C \in \mathfrak{C}$ und $P \in \mathcal{P}$.

Beweis. Wenn es für jedes $A \in \mathfrak{A}$ ein f_A mit den angegebenen Eigenschaften gibt, vgl. [7], Lemma 2.5. Im umgekehrten Fall liefert $E(1_{A \times Y} | X \otimes \mathfrak{C})$, $A \in \mathfrak{A}$, die gewünschte Funktion.

Durch (4.6) und (4.7) ist es begründet, die folgende Begriffsbildung als Verallgemeinerung von „Suffizienz“ zu betrachten.

(4.8) *Definition.* φ sei ein schwacher Markovkern von \mathfrak{X} nach (Y, \mathfrak{C}) .

(a) \mathfrak{Y} heißt *schwach suffizient für \mathfrak{X}* , wenn es einen schwachen Markovkern ψ von \mathfrak{Y} nach (X, \mathfrak{A}) gibt mit $\int_C \psi(A, y) P^*(dy) = \int_A \varphi(C, x) P(dx)$ für alle $P \in \mathcal{P}$, $A \in \mathfrak{A}$ und $C \in \mathfrak{C}$.

(b) \mathfrak{Y} heißt *paarweise schwach suffizient für \mathfrak{X}* , wenn für jede zweielementige Teilmenge $\{P_1, P_2\} \subset \mathcal{P}$ gilt, daß $(Y, \mathfrak{C}, \{P_1^*, P_2^*\})$ schwach suffizient für $(X, \mathfrak{A}, \{P_1, P_2\})$ ist.

Wenn \mathfrak{Y} schwach suffizient für \mathfrak{X} ist, so ist auch \mathfrak{X} schwach suffizient für \mathfrak{Y} . Ist \mathfrak{Y} ein suffizientes Unterexperiment von \mathfrak{X} , so zeigt die Festsetzung $\varphi(C, \cdot) = 1_C$, $C \in \mathfrak{C}$, und $\psi(A, \cdot) = E(1_A | \mathfrak{C})$, $A \in \mathfrak{A}$, daß \mathfrak{Y} schwach suffizient für \mathfrak{X} ist.

(4.9) **Satz.** \mathfrak{Y} sei paarweise schwach suffizient für \mathfrak{X} und \mathcal{P}^* schwach dominiert. Dann ist \mathfrak{Y} schwach suffizient für \mathfrak{X} .

Beweis. Da \mathcal{P}^* schwach dominiert ist, ist auch $\varphi \times \mathcal{P} | (X \otimes \mathfrak{C})$ schwach dominiert. Nach (4.7) und (4.8) ist $X \otimes \mathfrak{C}$ paarweise suffizient für $\varphi \times \mathcal{P}$. Nach (2.14)(2) ist $X \otimes \mathfrak{C}$ daher suffizient für $\varphi \times \mathcal{P}$. Wiederum nach (4.7) und (4.8) ist \mathfrak{Y} dann schwach suffizient für \mathfrak{X} .

Im Falle der Dominiertheit von \mathcal{P} (und damit von \mathcal{P}^*) ist dieser Satz in [16] bewiesen.

5. Ein Isomorphiesatz

Gegeben seien zwei Experimente \mathfrak{X} und \mathfrak{Y} wie in 4., beide seien schwach dominiert. μ bzw. ν sei für \mathcal{P} bzw. \mathcal{P}^* ein schwach dominierendes Maß und o.E.d.A. äquivalent zu \mathcal{P} bzw. \mathcal{P}^* . Es sei $\mathfrak{A}(\mu) := \{A \in \mathfrak{A} : B \in A \text{ genau dann, wenn } 1_A = 1_B[\mu]\}$. Analog definiert man $\mathfrak{C}(\nu)$. Es sei $X \sim A \sim := (X - A) \sim$, $P(A \sim) := P(A)$ für jedes $A \in \mathfrak{A}$ und $\bigvee_{n=1}^{\infty} A_n \sim := \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \sim$, wenn $A_n \in \mathfrak{A}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

(5.1) *Definition.* \mathfrak{X} und \mathfrak{Y} heißen *maßisomorph*, wenn es eine bijektive Abbildung $T: \mathfrak{A}(\mu) \rightarrow \mathfrak{C}(\nu)$ gibt mit den Eigenschaften:

- (a) $T(X \sim - A \sim) = Y \sim - T(A \sim)$ für alle $A \in \mathfrak{A}$,
- (b) $T\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} A_n \sim\right) = \bigvee_{n=1}^{\infty} T(A_n \sim)$ für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus \mathfrak{A} ,
- (c) $P^*(T(A \sim)) = P(A \sim)$ für alle $A \in \mathfrak{A}$ und $P \in \mathcal{P}$.

\mathfrak{X} und \mathfrak{Y} haben nach (2.15) minimalsuffiziente Unterexperimente.

Wenn \mathfrak{X} dominiert ist und \mathfrak{Y} schwach suffizient für X , so folgt bereits, daß \mathfrak{Y} dominiert ist. Daß man bei dieser Aussage nicht „dominiert“ durch „schwach dominiert“ ersetzen kann zeigt das

Beispiel. Sei $X := (\mathbb{R} \times \{1\}) \cup (\mathbb{R} \times \{2\})$, $\mathfrak{A} := \mathfrak{P}(X)$ und

$$\mathcal{P} := \{P_r : r \in \mathbb{R}, P_r(A) = \frac{1}{2} 1_A(r, 1) + \frac{1}{2} 1_A(r, 2) \text{ für alle } A \in \mathfrak{A}\}.$$

$$\mathfrak{S} := \left\{ \bigcup_{r \in T} \{(r, 1), (r, 2)\} : T \subset \mathbb{R} \right\} \text{ und } \mathfrak{C} := \left\{ S \cup V : S \in \mathfrak{S}, V = \left(\bigcup_{r \in E} \{(r, 1)\} \right) \cup \left(\bigcup_{r \in F} \{(r, 2)\} \right), \right.$$

wobei E und F höchstens abzählbare Teilmengen von \mathbb{R} sind $\left. \right\}$ sind Vergrößerungen von \mathfrak{A} .

Daraus folgert man: \mathcal{P} ist schwach dominiert durch das zählende Maß, \mathfrak{S} ist suffizient für \mathcal{P} , es gilt $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ aber \mathfrak{C} ist nicht suffizient für \mathcal{P} . Selbstverständlich ist aber \mathfrak{S} auch suffizient für $\mathcal{P}|\mathfrak{C}$, und somit $(X, \mathfrak{C}, \mathcal{P}|\mathfrak{C})$ schwach suffizient für $(X, \mathfrak{S}, \mathcal{P}|\mathfrak{S})$. $\mathcal{P}|\mathfrak{C}$ ist nicht schwach dominiert, $\mathcal{P}|\mathfrak{S}$ aber.

Sei nun \mathfrak{Y} schwach suffizient für \mathfrak{X} mit φ gemäß (4.8). Es gilt der

(5.2) **Satz.** *Die minimalsuffizienten Unterexperimente von \mathfrak{X} und \mathfrak{Y} sind maßisomorph, sofern $(X \times Y, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{C}, \varphi \times \mathcal{P})$ schwach dominiert ist. (Wenn \mathfrak{X} oder \mathfrak{Y} dominiert ist, ist auch $\varphi \times \mathcal{P}$ dominiert.)*

Beweis. \mathfrak{W}' bzw. \mathfrak{C}' seien minimalsuffiziente Vergrößerungen von \mathfrak{A} bzw. \mathfrak{C} . Außerdem gibt es auch eine minimalsuffiziente Vergrößerung \mathfrak{S} von $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{C}$. λ sei schwach dominierend für $\varphi \times \mathcal{P}$ und zu $\varphi \times \mathcal{P}$ äquivalent. Wegen der Suffizienz von $\mathfrak{A} \otimes Y$ und $X \otimes \mathfrak{C}$ für $\varphi \times \mathcal{P}$, sind auch $\mathfrak{W}' \otimes Y$ und $X \otimes \mathfrak{C}'$ suffizient für $\varphi \times \mathcal{P}$, und man hat $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{W}' \otimes Y[\lambda]$ und $\mathfrak{S} \subset X \otimes \mathfrak{C}'[\lambda]$.

$\mathfrak{S}' := \{A \in \mathfrak{W}' : \text{Es gibt ein } S \in \mathfrak{S} \text{ mit } 1_S = 1_{A \times Y}[\lambda]\}$ ist eine Vergrößerung von \mathfrak{W}' . Es gilt $\mathfrak{S}' \otimes Y = \mathfrak{S}[\lambda]$. Denn $\mathfrak{S}' \otimes Y \subset \mathfrak{S}[\lambda]$ folgt nach der Definition von \mathfrak{S}' , und wenn $S \in \mathfrak{S}$ ist gibt es ein $A_S \in \mathfrak{W}'$ mit $1_S = 1_{A_S \times Y}[\lambda]$, also ist A_S in \mathfrak{S}' . Allgemeiner existiert auch zu jedem \mathfrak{S} -meßbaren f ein \mathfrak{S}' -meßbares f' mit $f(x, y) = f'(x)[\lambda]$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$.

Wir zeigen nun, daß \mathfrak{S}' suffizient für \mathcal{P} ist. Man hat nämlich für jedes $S' \in \mathfrak{S}'$, $A \in \mathfrak{A}$ und $P \in \mathcal{P}$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \int_{S'} 1_A dP &= \int_{S' \times Y} 1_{A \times Y} d(\varphi \times P) = \int_{S' \times Y} E(1_{A \times Y} | \mathfrak{S}) d(\varphi \times P) \\ &= \int_{S' \times Y} (E(1_{A \times Y} | \mathfrak{S}))' d(\varphi \times P) = \int_{S'} (E(1_{A \times Y} | \mathfrak{S}))' dP. \end{aligned}$$

Damit gilt $\mathfrak{S}' = \mathfrak{A}'[\mu]$ und schließlich $\mathfrak{S}' \otimes Y = \mathfrak{S} = \mathfrak{A}' \otimes Y[\lambda]$. In analoger Weise ergibt sich $\mathfrak{S} = X \otimes \mathfrak{C}'[\lambda]$.

Zu jedem $A \in \mathfrak{A}'$ gibt es daher ein $C \in \mathfrak{C}'$ mit $1_{A \times Y} = 1_{X \times C}[\lambda]$. Die dadurch gegebene Abbildung von $\mathfrak{A}'(\mu)$ nach $\mathfrak{C}'(\nu)$ ist der gewünschte Isomorphismus. Speziell (5.1)(c) gilt, da $1_{A \times Y} = 1_{X \times C}[\lambda]$ impliziert $1_{A \times Y} = 1_{X \times C} = 1_{A \times C}[\lambda]$, und deshalb $P(A) = \varphi \times P(A \times C) = P^*(C)$ ist.

Proposition 12 in [11] entspricht dem eben bewiesenen Satz. Dort handelt es sich allerdings um Isomorphie von linearen Räumen.

6. Hilfssätze über spezielle lineare und bilineare Abbildungen

Im Abschnitt 7 sollen Beziehungen zu den Arbeiten [11] und [10] hergestellt werden. Zu diesem Zweck benötigen wir einige Hilfsmittel, die jetzt bereitgestellt werden sollen.

\mathcal{F} und \mathcal{H} seien Vektorverbände reeller Funktionen mit 1 auf den (nicht-leeren) Mengen X bzw. Y . $\mathfrak{A}(\mathcal{F})$ bzw. $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ seien die kleinsten σ -Algebren über X bzw. Y bzgl. derer alle Funktionen aus \mathcal{F} bzw. \mathcal{H} meßbar sind. Ein $G \subset X$ heißt \mathcal{F} -offen ([2], S. 159, Definition 39.2), wenn eine isotone Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus \mathcal{F}_+ existiert mit $1_G = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$. Das System der \mathcal{F} -offenen Mengen ist gemäß [2], S. 159, Lemma 39.3, ein durchschnittsstabiler Erzeuger von $\mathfrak{A}(\mathcal{F})$.

(6.1) **Lemma.** *T sei eine positive, normierte lineare Abbildung $T: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}$ mit $T(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} T(f_n)$ für jede isotone Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus \mathcal{F}_+ mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \in \mathcal{F}$. Dann gibt es genau einen Markovkern μ von $(Y, \mathfrak{A}(\mathcal{H}))$ nach $(X, \mathfrak{A}(\mathcal{F}))$ mit $T(f)(y) = \int f(x) \mu(dx, y)$ für alle $f \in \mathcal{F}$ und $y \in Y$.*

Beweis. Für jedes $y \in Y$ erfüllt die Abbildung, die jedem $f \in \mathcal{F}$ den Wert $T(f)(y)$ zuordnet, die Voraussetzungen des Satzes von Daniell-Stone, [2], S. 160, Satz 39.4 und S. 164, Korollar 39.6, und daher gibt es für jedes $y \in Y$ genau ein W -Maß $\mu(\cdot, y)$ auf $\mathfrak{A}(\mathcal{F})$ mit $T(f)(y) = \int f(x) \mu(dx, y)$ für alle $f \in \mathcal{F}$.

Für jedes \mathcal{F} -offene A ist $\mu(A, \cdot)$ dann $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ -meßbar. Weiter ist die Menge aller $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{F})$, für die $\mu(A, \cdot)$ eine $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ -meßbare Funktion ist, ein Dynkin-System. Nach [2], Satz 2.3, ist dann $\mu(A, \cdot)$ für alle $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{F})$ eine $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ -meßbare Funktion.

Im folgenden sei (Y, \mathcal{C}, ν) ein Maßraum, ν sei lokalisierbar und wesentlich. F sei ein Vektorverband beschränkter reeller Funktionen mit 1. Eine positive Bilinearform M auf $\mathcal{F} \times L^1(\mathbb{C}, \nu)$ heißt normiert, wenn für alle $g \in L^1_+(\mathbb{C}, \nu)$ gilt $M(1, g) = \|g\|_1$.

(6.2) **Lemma.** *M sei eine positive, normierte Bilinearform auf $\mathcal{F} \times L^1(\mathbb{C}, \nu)$. Dann gibt es eine positive, normierte lineare Abbildung m von \mathcal{F} in $L^\infty(\mathbb{C}, \nu)$ mit $M(f, g) = \int m(f) g d\nu$ für alle $g \in L^1(\mathbb{C}, \nu)$ und $f \in \mathcal{F}$.*

Beweis. Für jedes feste $f \in \mathcal{F}$ ist $M(f, \cdot)$ eine stetige Linearform auf $L^1(\mathbb{C}, \nu)$ wegen der Normiertheit von M und der Beschränktheit der Elemente von \mathcal{F} . Da $L^1(\mathbb{C}, \nu) = L^\infty(\mathbb{C}, \nu)$ ist, [17], S. 364, Theorem 4, gibt es genau ein $m(f) \in L^\infty(\mathbb{C}, \nu)$ mit $M(f, g) = \int m(f) g \, d\nu$ für alle $g \in L^1(\mathbb{C}, \nu)$.

Die Beschränktheit der Elemente von \mathcal{F} werde jetzt wieder fallengelassen und ebenso die Lokalisierbarkeit von ν .

(6.3) **Lemma.** $T: \mathcal{F} \rightarrow L^\infty(\mathbb{C}, \nu)$ sei eine positive, normierte lineare Abbildung mit $T(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} T(f_n)$ für jede isotone Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus \mathcal{F}_+ mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \in \mathcal{F}$. Dann gibt es einen schwachen Markovkern φ von (Y, \mathbb{C}, ν) nach $(X, \mathfrak{A}(\mathcal{F}))$ mit $\int f \varphi(dx, \cdot) \in T(f)$ für alle $f \in \mathcal{F}$.

Beweis. Für jedes $E \in \mathfrak{C}_{e, \nu}$ liefert $\int_E T(f) \, d\nu$ (dabei soll über ein Element von $T(f)$ integriert werden) eine positive Linearform auf \mathcal{F} , die den Voraussetzungen des Satzes von Daniell-Stone ([2], S. 160, Satz 39.4 und S. 164, Korollar 39.6) genügt. Es gibt dann für jedes $E \in \mathfrak{C}_{e, \nu}$ genau ein Maß μ_E auf $\mathfrak{A}(\mathcal{F})$ mit $\int_E T(f) \, d\nu = \int f \, d\mu_E$ für alle $f \in \mathcal{F}$.

Wir behaupten: Für jedes $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{F})$ gibt es eine modulo $[\nu]$ eindeutig bestimmte \mathbb{C} -meßbare Funktion $\varphi(A, \cdot)$ mit $\int_E \varphi(A, \cdot) \, d\nu = \mu_E(A)$ für alle $E \in \mathfrak{C}_{e, \nu}$.

Die Eindeutigkeit modulo $[\nu]$ folgt dabei, weil ν wesentlich ist. Die Existenz ergibt sich folgendermaßen: Für ein \mathcal{F} -offenes A , d.h. $1_A = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$, wobei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine isotone Folge aus \mathcal{F}_+ ist, gilt $\mu_E(A) = \int_E \sup_{n \in \mathbb{N}} T(f_n) \, d\nu$. Man wähle also $\varphi(A, \cdot) = \sup_{n \in \mathbb{N}} T(f_n)$. Weiter ist die Menge aller $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{F})$, für die ein $\varphi(A, \cdot)$ existiert, ein Dynkin-System. Gemäß [2], S. 18, Satz 2.3, gibt es dann ein $\varphi(A, \cdot)$ für alle $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{F})$. Daß φ ein schwacher Markovkern von (Y, \mathbb{C}, ν) nach $(X, \mathfrak{A}(\mathcal{F}))$ ist, ist wegen der Eindeutigkeit modulo $[\nu]$ klar. Ersetzt man nun in (4.3) \mathcal{P} durch $\{\nu|E: E \in \mathfrak{C}_{e, \nu}\}$ und \mathcal{P}^* durch $\{\mu_E: E \in \mathfrak{C}_{e, \nu}\}$, so folgt

$$\int_E T(f) \, d\nu = \int f \, d\mu_E = \int_E \left(\int f \varphi(dx, \cdot) \right) \, d\nu$$

für alle $f \in \mathcal{F}$ und $E \in \mathfrak{C}_{e, \nu}$. Da ν wesentlich ist, ergibt sich die Behauptung.

(6.4) **Korollar.** $\mathcal{C}(X)$ sei die Menge der stetigen Funktionen auf einem kompakten Raum X und T eine positive, normierte lineare Abbildung $T: \mathcal{C}(X) \rightarrow L^\infty(\mathbb{C}, \nu)$. Dann erfüllt T die Stetigkeitsbedingung aus (6.3).

Beweis. Für jedes $E \in \mathfrak{C}_{e, \nu}$ ist $\int_E T(f) \, d\nu$ eine positive Linearform auf $\mathcal{C}(X)$. Gemäß [2], S. 177, Korollar 43.2, gilt dann für jede isotone Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{C}_+(X)$ mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \in \mathcal{C}(X)$ die Gleichung

$$\int_E T(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n) \, d\nu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_E T(f_n) \, d\nu = \int_E \sup_{n \in \mathbb{N}} T(f_n) \, d\nu$$

für $E \in \mathfrak{C}_{e, \nu}$. Da ν wesentlich ist, folgt die Behauptung.

7. Entscheidungstheoretische Charakterisierung der schwachen Suffizienz

Hier soll zunächst gezeigt werden, wie die Entscheidungsfunktionen im Sinne von [10] und [11] sich in unseren Rahmen einfügen. Diese Autoren definieren als Experiment ein Tripel $(X, E, (P_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta})$, wobei X eine nichtleere Menge, E ein Banachverband reeller, beschränkter Funktionen mit 1 unter der Supremumsnorm und P_ϑ für alle $\vartheta \in \Theta$ eine positive, normierte Linearform auf E ist.

Im Falle daß für jede isotone Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus E_+ mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \in E$ gilt $P_\vartheta(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} P_\vartheta(f_n)$ für alle $\vartheta \in \Theta$, kann man bekanntlich nach dem Satz von Daniell-Stone $(P_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta}$ als Familie von W -Maßen auf $\mathfrak{A}(E)$ auffassen. Wir fordern hier diese Bedingung jetzt zusätzlich und betrachten das Experiment $\mathfrak{X} := (X, \mathfrak{A}(E), \mathcal{P})$, wobei $\mathcal{P} := \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ ist. Wir benötigen nun die

(7.1) *Definition.* Gegeben sei ein Experiment $(X, \mathfrak{A}, \mathcal{P})$. Dann heißt jede konvexe, kompakte Teilmenge $D \subset [-1, +1]^\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^\mathcal{P}$ ein *Entscheidungsraum für $(X, \mathfrak{A}, \mathcal{P})$* .

In [11] wird noch von D endliche lineare Dimension gefordert. Die anschauliche Deutung von D besteht darin, daß als „Schaden“ bei vorliegender Verteilung $P \in \mathcal{P}$ und der Entscheidung $t \in D$ der Wert $\text{pr}_P(t)$ (Projektion von t auf die P -te Koordinate) angesehen wird.

Entscheidungsfunktionen analog Le Cam. \mathfrak{X} (wie vor (7.1)) wird ein schwach dominiertes Experiment $(X', \mathfrak{A}(E), \mathcal{P}')$ gemäß (3.4) zugeordnet. Das schwach dominierende Maß sei ν . D sei ein Entscheidungsraum für \mathfrak{X} . „Risikofunktionen“ analog [11] sind dann Abbildungen, die vermöge $P \mapsto M \left(\text{pr}_P, \frac{dP'}{d\nu} \right)$ definiert sind, wobei M eine positive, normierte Bilinearform auf $\mathcal{C}(D) \times L^1(\mathfrak{A}(E), \nu)$ ist. M stellt also in einem allgemeineren Sinne eine Entscheidungsfunktion dar. Nach (6.2), (6.3) und (6.4) gibt es einen schwachen Markovkern φ von $(X', \mathfrak{A}(E), \nu)$ nach $(D, \mathfrak{A}(\mathcal{C}(D)))$ derart, daß für alle $P \in \mathcal{P}$ gilt

$$M \left(\text{pr}_P, \frac{dP'}{d\nu} \right) = \int \left(\int \text{pr}_P(t) \varphi(dt, \cdot) \right) \frac{dP'}{d\nu} d\nu = \int \left(\int \text{pr}_P(t) \varphi(dt, \cdot) \right) dP'.$$

Entscheidungsfunktionen nach Heyer. D sei ein Entscheidungsraum für \mathfrak{X} (wie vor (7.1)). Jede Abbildung $f: X \rightarrow D$ mit $f = (f_P)_{P \in \mathcal{P}}$ und $f_P \in E$ für alle $P \in \mathcal{P}$ wird in [10] als Entscheidungsfunktion bezeichnet. Nach [10], Proposition 3.1.2, haben die Entscheidungsfunktionen die Gestalt $(T(\text{pr}_P))_{P \in \mathcal{P}}$, wobei $T: \mathcal{C}(D) \rightarrow E$ eine positive, normierte lineare Abbildung ist. Da D kompakt ist, erfüllt T die Voraussetzungen von (6.1) (vgl. [2], S. 177, Korollar 43.2). Es gibt also einen Markovkern φ von $(X, \mathfrak{A}(E))$ nach $(D, \mathfrak{A}(\mathcal{C}(D)))$ mit $T(\text{pr}_P) = \int \text{pr}_P(t) \varphi(dt, \cdot)$ für alle $P \in \mathcal{P}$.

Für den Fall, daß E die Menge der meßbaren beschränkten Funktionen bzgl. einer σ -Algebra \mathfrak{A} über X bezeichnet und \mathcal{P} eine dominierte Menge von W -Maßen auf \mathfrak{A} ist, werden in [10] positive, normierte lineare Abbildungen $T: \mathcal{C}(D) \rightarrow L^\infty(\mathfrak{A}, \nu)$, wobei ν ein zu \mathcal{P} äquivalentes dominierendes Maß sei, als verallgemeinerte Entscheidungsfunktionen betrachtet. Die durch $P \mapsto \int T(\text{pr}_P) dP$ definierte Abbildung wird als Risikofunktion von T bezeichnet. Nach (6.3) und (6.4)

gibt es einen schwachen Markovkern φ von (X, \mathfrak{A}, ν) nach $(D, \mathfrak{A}(\mathcal{C}(D)))$ mit $\int T(\text{pr}_P) dP = \int (\int \text{pr}_P(t) \varphi(dt, \cdot)) dP$ für alle $P \in \mathcal{P}$.

Die Experimente $\mathfrak{X} := (X, \mathfrak{A}, \mathcal{P})$ und $\mathfrak{Y} := (Y, \mathfrak{C}, \mathcal{P}^*)$ seien jetzt wie in 4. gegeben und schwach dominiert. Aus dem Vorangehenden ergibt sich, daß die nun folgenden beiden Definitionen mit denen in [10] und [11] in Einklang sind.

(7.2) *Definition.* Jeder (schwache) Markovkern φ von \mathfrak{X} nach $(D, \mathfrak{A}(\mathcal{C}(D)))$, wobei D ein beliebiger Entscheidungsraum für \mathfrak{X} ist, heißt (*schwache*) *Entscheidungsfunktion für \mathfrak{X}* .

(7.3) *Definition.* Sei D ein Entscheidungsraum für \mathfrak{X} . Für jede (schwache) Entscheidungsfunktion φ für \mathfrak{X} heißt die durch $R_\varphi(P) := \int (\int \text{pr}_P(t) \varphi(dt, \cdot)) dP$ für alle $P \in \mathcal{P}$ definierte Funktion *Risikofunktion der (schwachen) Entscheidungsfunktion φ* .

(7.4) **Satz.** *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es für jeden Entscheidungsraum D und für jede Entscheidungsfunktion ψ für \mathfrak{Y} eine schwache Entscheidungsfunktion φ für \mathfrak{X} mit $R_\varphi(P) \leq R_\psi(P) + \varepsilon$ für alle $P \in \mathcal{P}$.

(2) Es gibt einen schwachen Markovkern χ von \mathfrak{X} nach (Y, \mathfrak{C}) mit $P^*(C) = \int \chi(C, \cdot) dP$ für alle $P \in \mathcal{P}$ und $C \in \mathfrak{C}$.

Beweis. ν sei ein für \mathcal{P} schwach dominierendes Maß und äquivalent zu \mathcal{P} . Nach [10], Korollar 4.2.3, ist die Existenz einer positiven, normierten linearen Abbildung T von den beschränkten \mathfrak{C} -meßbaren Funktionen in $L^\infty(\mathfrak{A}, \nu)$ mit $T'P = P^*$ für alle $P \in \mathcal{P}$, wobei T' die zu T adjungierte Abbildung sei, äquivalent mit (1). (In [10] ist ν zwar σ -endlich, aber es wird nur die Beziehung $L^1(\mathfrak{A}, \nu) = L^\infty(\mathfrak{A}, \nu)$ gebraucht.) Daß (2) die Existenz eines solchen T liefert, ist klar.

Existiere nun das T , und sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine isotone Folge überall nicht negativer Funktionen, die \mathfrak{C} -meßbar und beschränkt sind, mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n < \infty$. Dann hat man für alle $P \in \mathcal{P}$ die Gleichung

$$\int T(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n) dP = \int \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n dP^* = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n dP^* = \int \sup_{n \in \mathbb{N}} T(f_n) dP.$$

Es folgt $\sup_{n \in \mathbb{N}} T(f_n) = T(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n)$.

Nach (6.3) gibt es nun einen schwachen Markovkern χ von (X, \mathfrak{A}, ν) nach (Y, \mathfrak{C}) mit $P^*(C) = T'(P)(1_C) = \int T(1_C) dP = \int \chi(C, \cdot) dP$ für alle $P \in \mathcal{P}$ und $C \in \mathfrak{C}$, was die Gültigkeit von (2) zeigt.

(7.5) **Satz.** *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) \mathfrak{Y} ist schwach suffizient für \mathfrak{X} .

(2) Für jedes $\varepsilon > 0$ und jeden Entscheidungsraum D gibt es zu jeder Entscheidungsfunktion ψ_1 für \mathfrak{X} bzw. ψ_2 für \mathfrak{Y} eine schwache Entscheidungsfunktion φ_1 für \mathfrak{Y} bzw. φ_2 für \mathfrak{X} mit $R_{\varphi_i}(P) \leq R_{\psi_i}(P) + \varepsilon$ für alle $P \in \mathcal{P}$ und $i = 1, 2$.

Beweis. Nach (7.4) folgt (2) aus (1). Gelte nun (2). Dann gibt es nach (7.4) schwache Markovkerne χ von \mathfrak{X} nach \mathfrak{Y} und η von \mathfrak{Y} nach \mathfrak{X} . Nach [16], Theorem 2.1, ist \mathfrak{Y} dann paarweise schwach suffizient für \mathfrak{X} . Gemäß (4.9) ist \mathfrak{Y} nun schwach suffizient für \mathfrak{X} .

Literatur

1. Bahadur, R.H.: Sufficiency and statistical decision functions. *Ann. Math. Statistics* **25**, 423–462 (1954).
2. Bauer, H.: *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie*. Berlin: De Gruyter 1968.
3. Berberian, S.K.: *Measure and integration*. New York: The MacMillan Company 1965.
4. Blackwell, D.: Comparison of experiments. *Proc. 2nd Berkeley Sympos. Math. Statist. Probab. Univ. Calif.* 93–102 (1951).
5. Blackwell, D.: Equivalent comparison of experiments. *Ann. Math. Statistics* **24**, 265–272 (1953).
6. Burkholder, D.L.: Sufficiency in the undominated case. *Ann. Math. Statistics* **32**, 1191–1200 (1961).
7. Csizsár, I.: Information-type measures of difference of probability distributions and indirect observations. *Studia Sci. Math. Hungar.* **2**, 299–318 (1967).
8. Diepenbrock, F.R.: *Charakterisierung einer allgemeineren Bedingung als Dominiertheit mit Hilfe von lokalisierbaren Maßen*. Dissertation. Münster (1971).
9. Halmos, P.R., and Savage, L.J.: Application of the Radon-Nikodym theorem to the theory of sufficient statistics. *Ann. Math. Statistics* **20**, 225–241 (1949).
10. Heyer, H.: Erschöpftheit und Invarianz beim Vergleich von Experimenten. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* **12**, 21–55 (1969).
11. Le Cam, L.: Sufficiency and approximate sufficiency. *Ann. Math. Statistics* **35**, 1419–1455 (1964).
12. Morse, N., and Sacksteder, R.: Statistical isomorphism. *Ann. Math. Statistics* **37**, 203–214 (1966).
13. Neveu, J.: *Mathematical foundations of the calculus of probability*. San Francisco-London-Amsterdam: Holden-Day, Inc. 1965.
14. Pitcher, T.S.: Sets of measures not admitting necessary and sufficient statistics or subfields. *Ann. Math. Statistics* **28**, 267–268 (1957).
15. Pitcher, T.S.: A more general property than domination for sets of probability measures. *Pacific J. Math.* **15**, 597–611 (1965).
16. Sacksteder, R.: A note on statistical equivalence. *Ann. Math. Statistics* **38**, 787–794 (1967).
17. Zaanan, A.C.: *Integration*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company 1967.

Dieter Mussmann
Mathematisches Institut der
Technischen Universität München
D-8000 München 2
Arcisstraße 21
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 24. Februar 1972, in revidierter Form am 15. September 1972)