Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
42, 175–203 (1978)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Sur l'intégrabilité uniforme des martingales exponentielles

Dominique Lepingle[1] et Jean Mémin[2]

[1] Département de Mathématiques, Université d'Orléans, F-45045 Orléans Cedex, France
[2] I.R.I.S.A., Laboratoire associé n° 227, Université de Rennes,
F-35031 Rennes Cedex BP 25 A, France

Sommaire. Nous donnons des conditions suffisantes pour que la martingale locale $\mathscr{E}(M)$ définie par C. Doléans-Dade soit une martingale uniformément intégrable. Le lien est établi avec la martingale locale exponentielle $\alpha(N, z, \mu)$ de Kunita-Watanabe, ce qui permet de généraliser un théorème de Novikov.

Introduction

La formule exponentielle de C. Doléans-Dade [2]

$$\mathscr{E}(M)_t = \exp\{M_t - \tfrac{1}{2}\langle M^c, M^c\rangle_t\} \prod_{s \leqq t} (1 + \Delta M_s) \exp(-\Delta M_s)$$

où M est une martingale locale nulle en zéro généralise celle introduite par McKean [13] lorsque M est une intégrale stochastique brownienne, puis par Stroock-Varadhan [19] lorsque M est une martingale continue.

Lorsque $\Delta M \geqq -1$, $\mathscr{E}(M)$ est une martingale locale positive; si elle est uniformément intégrable, ce qui est équivalent à $E[\mathscr{E}(M)_\infty] = 1$, $\mathscr{E}(M)_\infty$ représente une densité de probabilité, et c'est un point important en théorie du filtrage et du contrôle stochastiques où l'on est souvent amené à faire des changements absolument continus de lois de probabilité.

Une seconde formule exponentielle utilisée par Kunita-Watanabe [8] pour décrire la martingale locale figurant dans la décomposition d'une fonctionnelle multiplicative quasi-continue à gauche a été reprise en particulier par Grigelionis [4]. Elle s'écrit

$$\begin{aligned}\alpha(N, z, \mu)_t = \exp\{&N_t - \tfrac{1}{2}\langle N, N\rangle_t + 1_{\{|z|>1\}} z \cdot \mu_t \\ &+ 1_{\{|z| \leqq 1\}} z * (\mu - \nu)_t - (e^z - 1 - z\, 1_{\{|z| \leqq 1\}}) \cdot \nu_t\}\end{aligned}$$

où N est une martingale locale continue, nulle en zéro, μ une mesure aléatoire quasi-continue à gauche, ν sa projection prévisible duale. Notons que les deux formules exponentielles coïncident si $M = N$ et $z = 0$. Avec certaines hypothèses

0044-3719/78/0042/0175/$05.80

sur z et μ le processus $\alpha(N, z, \mu)$ est une martingale locale positive et la question de son intégrabilité uniforme a le même intérêt que celle de $\mathscr{E}(M)$.

Lorsque M est une intégrale stochastique brownienne une condition pour $\mathscr{E}(M)$ a été donnée par Gikhman-Skorokhod [3], améliorée par Liptzer-Shiryaev [11], puis par Novikov [16] (voir aussi des compléments dans [12]). Lorsque M n'est plus continue, à part la remarque de C. Doléans-Dade suivant laquelle $\mathscr{E}(M)$ est bornée, donc uniformément intégrable, si M est bornée, on ne trouve guère qu'un résultat donné par Jacod-Mémin [7] dans le cas quasi-continu à gauche; nous le reprenons ici dans notre théorème II.5. Aucun résultat n'est connu, semble-t-il, lorsque les sauts de M ne sont plus minorés par -1, c'est-à-dire lorsque $\mathscr{E}(M)$ n'est plus positive.

Pour la seconde exponentielle, Grigelionis demande à $\langle N, N\rangle$, z et $z^2 \cdot \nu_\infty$ d'être bornés et Novikov [17] obtient un résultat presque optimal.

Dans ce travail, après les rappels et préliminaires de la partie I, nous donnons dans la partie II divers résultats d'intégrabilité assez forte sur $\mathscr{E}(M)$, entraînant en particulier l'intégrabilité uniforme, et cela sans que $\mathscr{E}(M)$ soit nécessairement positive; les critères s'expriment à partir de processus prévisibles bornés adéquats. La partie III est consacrée à la démonstration de deux résultats d'intégrabilité uniforme sur $\mathscr{E}(M)$ lorsque $\Delta M \geqq -1$, ces résultats étant optimaux en un certain sens. Utilisant comme Novikov [17] des martingales locales complexes, nous obtenons une condition portant sur $\langle M^c, M^c\rangle$ et les sauts de M (théorème III.7). D'autre part, une famille de temps d'arrêt analogue à celle qu'il introduit joue un rôle important aussi bien pour obtenir ce théorème que pour le théorème III.1, où la condition trouvée porte sur un processus prévisible associé à M. Dans la partie IV, ce même théorème III.1 nous donne une extension du résultat de Novikov relatif à la seconde exponentielle. Le cas des martingales à accroissements indépendants est brièvement traité dans la partie V, tandis que figurent en VI des exemples permettant de préciser la portée des résultats démontrés.

I. Préliminaires

I.1. Les notations générales sont celles de [14]. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqq 0}, P)$ un espace probabilisé complet filtré, la filtration $(\mathscr{F}_t)$ étant supposée être continue à droite et contenir les ensembles de mesure nulle de $\mathscr{F}$. Les martingales locales et surmartingales que nous rencontrerons seront continues à droite, pourvues de limites à gauche et adaptées à la famille $(\mathscr{F}_t)$.

Si S et T sont deux temps d'arrêt, l'intervalle stochastique $[S, T]$ est défini par $[S, T] = \{(\omega, t) : S(\omega) \leqq t \leqq T(\omega), t < \infty\}$; les intervalles $]S, T[$, $[S, T[$ et $]S, T]$ sont définis de manière analogue. En particulier $[T] = [T, T]$ est le graphe de T dans $\Omega \times [0, \infty[$. Nous convenons toujours que $\inf \emptyset = \infty$ dans la définition des temps d'entrée.

Si X est un processus et T un temps d'arrêt, on note X^T le processus arrêté à l'instant T. On dit que la suite de temps d'arrêt (T_n) réduit la martingale locale M si T_n croît p.s. vers l'infini et si $M^{T_n} - M_0$ est pour tout n une martingale uniformément intégrable. Si X est un processus continu à droite pourvu de limites à gauche, on note ΔX le processus défini sur $[0, \infty]$ par

$$\begin{aligned} \Delta X_t &= X_0 && \text{si } t=0 \\ &= X_t - X_{t-} && \text{si } 0<t<\infty \\ &= 0 && \text{si } t=\infty. \end{aligned}$$

La notation X_∞ désigne la limite p.s. finie ou infinie de X_t lorsque t tend vers l'infini, si cette limite existe.

Par processus croissant, on entend un processus adapté dont presque toutes les trajectoires sont positives, croissantes, continues à droite. Un processus à variation finie est un processus différence de deux processus croissants A et B, et il est à variation intégrable si $E[A_\infty + B_\infty] < \infty$.

Nous disons qu'une martingale M est de carré intégrable si $E[\sup_t (M_t)^2] < \infty$. Un processus A est à variation localement intégrable (resp.: une martingale locale M est localement de carré intégrable) s'il existe une suite de temps d'arrêt (T_n) tendant vers l'infini p.s. telle que pour tout n, A^{T_n} soit à variation intégrable (resp.: M^{T_n} soit une martingale de carré intégrable).

Si A est localement à variation intégrable, on appelle *compensateur prévisible* de A l'unique processus B prévisible tel que $A-B$ soit une martingale locale nulle en zéro. Si M et N sont localement de carré intégrable, on note $\langle M, N\rangle$ l'unique processus croissant prévisible tel que $MN-B$ soit une martingale locale nulle en zéro. Toute martingale locale M admet une décomposition unique $M = M^c + M^d$, où M^c est une martingale locale continue et M^d une somme compensée de sauts nulle en zéro. La variation quadratique de M est le processus

$$[M, M]_t = \langle M^c, M^c\rangle_t + \sum_{0<s\leq t} \Delta M_s^2$$

et si M est localement de carré intégrable, $\langle M, M\rangle$ est exactement le compensateur prévisible de $[M, M]$. Nous disons que M appartient à l'espace $\mathbb{H}^1$ si $E[([M, M]_\infty)^{1/2}] < \infty$ ou si $E[\sup_t |M_t|] < \infty$, ces deux normes étant équivalentes d'après les inégalités de B. Davis. Rappelons que les martingales de carré intégrable et celles à variation intégrable sont dans $\mathbb{H}^1$, que les martingales de $\mathbb{H}^1$ sont uniformément intégrables et qu'à toute martingale locale on peut associer une suite de temps d'arrêt (T_n) qui la réduit fortement, c'est-à-dire telle que T_n tende vers l'infini p.s. et que $M^{T_n} - M_0$ soit dans $\mathbb{H}^1$ pour tout n.

On appelle *semi-martingale* la somme d'une martingale locale et d'un processus à variation finie. Si X et Y sont deux semi-martingales, on peut associer à chacune sa partie martingale locale continue X^c ou Y^c et on pose alors

$$[X, Y]_t = \langle X^c, Y^c\rangle_t + \sum_{0<s\leq t} \Delta X_s \Delta Y_s.$$

Toute surmartingale positive X est une semi-martingale, la limite X_∞ existe et est finie p.s. Voici deux résultats supplémentaires.

I.2. **Lemme.** *Si X est une surmartingale positive,*

a) $P([X,X]_\infty > a^2) \leqq \frac{3}{a} E[X_0]$ *pour tout* $a>0$;

b) $E[\sup_t (X_t)^\lambda] \leqq \frac{(E[X_0])^\lambda}{1-\lambda}$ *pour tout* $\lambda \in]0,1[$.

Démonstration. a) Ce résultat est bien connu pour les martingales discrètes [15]. Si nous discrétisons l'intervalle $[0,t]$ par des subdivisions de pas tendant vers zéro, nous savons [14, p. 356] que $[X,X]_t$ est la limite en probabilité des sommes $X_0^2 + \sum_1 (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$, qui représentent les variations quadratiques de surmartingales discrètes de même valeur initiale X_0; il en résulte que

$$P([X,X]_\infty > a^2) = \lim_{t\to\infty} P([X,X]_t > a^2) \leqq \frac{3}{a} E[X_0].$$

b) Il suffit d'intégrer par rapport à $d(a^\lambda)$ l'inégalité

$$P(\sup_t X_t > a) \leqq \min\left(\frac{E[X_0]}{a}, 1\right). \quad \square$$

I.3. Si X est une semi-martingale et H un processus prévisible localement borné (c'est-à-dire tel qu'il existe une suite croissante de temps d'arrêt (T_n) tendant p.s. vers l'infini avec H^{T_n} borné pour tout n), on sait définir la semi-martingale intégrale stochastique $H \cdot X$. Elle vérifie

$$[H \cdot X, H \cdot X]_t = \int_{[0,t]} H_s^2 \, d[X,X]_s.$$

Si M est une martingale locale localement de carré intégrable, $H \cdot M$ l'est également et

$$\langle H \cdot M, H \cdot M\rangle_t = \int_{[0,t]} H_s^2 \, d\langle M,M\rangle_s.$$

Si X est une semi-martingale nulle en zéro, il existe une semi-martingale Z unique solution de l'équation

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-} \, dX_s,$$

elle est donnée par la formule

$$\mathscr{E}(X)_t = \exp\{X_t - \tfrac{1}{2}\langle X^c, X^c\rangle_t\} \prod_{s \leqq t} (1 + \Delta X_s) \exp(-\Delta X_s)$$

sur laquelle on vérifie aisément [22]

$$\mathscr{E}(X)\,\mathscr{E}(Y) = \mathscr{E}(X + Y + [X,Y]). \tag{1.1}$$

I.4. A partir de maintenant, M désigne une martingale locale nulle en zéro. L'exponentielle $\mathscr{E}(M)$ est donc une martingale locale; sie de plus $\Delta M \geqq -1$, elle est positive, c'est donc une surmartingale positive, et comme $\mathscr{E}(M)_0=1$, elle est uniformément intégrable si et seulement si $E[\mathscr{E}(M)_\infty]=1$. Pour voir si $\mathscr{E}(M)_\infty$ est nul ou strictement positif, nous disposons du résultat suivant, qui reprend une argumentation de Lenglart [9].

I.5. **Proposition.** a) *Lorsque* $\Delta M \geqq -1$,

$$\{\mathscr{E}(M)_\infty > 0\} \subset \{[M,M]_\infty < \infty\} \text{ p.s.}$$

b) *Si de plus* $\Delta M > -1$ *et* $P(\lim_{t\to\infty} M_t = -\infty) = 0$,

$$\{\mathscr{E}(M)_\infty > 0\} = \{[M,M]_\infty < \infty\} \text{ p.s.}$$

Démonstration. a) D'après le lemme I.2, $[\mathscr{E}(M),\mathscr{E}(M)]_\infty < \infty$ p.s. L'égalité

$$[\mathscr{E}(M),\mathscr{E}(M)]_t = 1 + \int_0^t \mathscr{E}^2(M)_{s-}\, d[M,M]_s$$

entraîne alors que sur $\{[M,M]_\infty = \infty\}$, $\mathscr{E}(M)_\infty = 0$ p.s.

b) Sur l'ensemble $\{[M,M]_\infty < \infty\} = \{\langle M^c, M^c\rangle_\infty < \infty\} \cap \{\sum_t \Delta M_t^2 < \infty\}$, il n'y a qu'un nombre fini de sauts pour lesquels $|\Delta M| > \frac{1}{2}$. Comme il existe une constante $k>0$ telle que

$$\operatorname{Log}(1+x) - x \geqq -kx^2 \qquad \text{pour } |x| \leqq \tfrac{1}{2},$$

cela montre que $\prod_t (1+\Delta M_t)\exp(-\Delta M_t) > 0$ p.s. Comme p.s. $\exp M_t$ ne tend pas vers zéro à l'infini, il en résulte que $\mathscr{E}(M)_\infty > 0$ p.s. sur $\{[M,M]_\infty < \infty\}$. □

Il résulte également de la démonstration de b), en s'arrêtant à t fini, que $\mathscr{E}(M) > 0$ si et seulement si $\Delta M > -1$ (tandis que d'après la formule même de définition, $\mathscr{E}(M) \geqq 0$ si et seulement si $\Delta M \geqq -1$).

I.6. Nous aurons souvent à utiliser des martingales locales λM, où M est fixée et où λ est un paramètre réel ou même complexe: pour tout λ complexe, la solution de l'équation

$$Z = 1 + \lambda Z_- \cdot M$$

est donnée par

$$\mathscr{E}(\lambda M)_t = \exp\left\{\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2}\langle M^c, M^c\rangle_t\right\} \prod_{s\leqq t} (1+\lambda\Delta M_s)\exp(-\lambda\Delta M_s);$$

c'est une martingale locale complexe, et le produit qui figure dans le membre de droite est p.s. absolument convergent pour tout $t<\infty$; sur tout compact de $\mathbb{C}$, ce produit est même normalement convergent, il en résulte que p.s. $\mathscr{E}(\lambda M)_t$ est une fonction analytique de λ pour tout $t<\infty$; c'est encore vrai pour $t=\infty$ si M_∞ existe et est fini p.s. et si $[M,M]_\infty < \infty$ p.s.

I.7. Lorsque $0<\lambda\leqq 1$, nous aurons besoin de la double inégalité

$$0\leqq 1+\lambda x-(1+x)^{\lambda}\leqq(1-\lambda)\,[(1+x)\,\mathrm{Log}(1+x)-x] \tag{1.2}$$

valable pour $x\geqq -1$ avec la convention $0\,\mathrm{Log}\,0=0$. Notons aussi que, toujours pour $x\geqq -1$,

$$0\leqq(1+x)\,\mathrm{Log}(1+x)-x\leqq x^2 \tag{1.3}$$

Voici un premier exemple d'utilisation du paramètre λ, qui nous donne une condition tout à fait simple d'intégrabilité uniforme, et même un peu mieux.

I.8. **Théorème.** *Si $\Delta M\geqq -1$, si M est uniformément intégrable et si*

$$E[\exp M_\infty]<\infty,$$

alors $\mathscr{E}(M)$ est dans $\mathbb{H}^1$.

Démonstration. Choisissons un λ quelconque dans l'intervalle $]0,1[$. D'après la première inégalité de (1.2),

$$\mathscr{E}(M)\leqq\mathscr{E}^{1/\lambda}(\lambda M)\leqq\exp M.$$

De l'inégalité de Jensen il résulte que pour tout t

$$E[\exp M_t]\leqq E[\exp M_\infty]<\infty,$$

et l'inégalité de Doob entraîne que

$$E[\sup_t\mathscr{E}(M)_t]\leqq E[\sup_t\mathscr{E}^{1/\lambda}(\lambda M)_t]\leqq\frac{1}{(1-\lambda)^{1/\lambda}}E[\exp M_\infty]. \quad \square$$

II. Décomposition de semi-martingales exponentielles et applications

Dans cette partie, à partir d'un résultat fondamental (proposition II.1) sur la décomposition multiplicative de l'exponentielle de certaines semi-martingales, nous obtenons d'abord des conditions (théorème II.2) pour que $\mathscr{E}(M)$ soit de carré intégrable ou à variation intégrable, puis (proposition II.3) une décomposition multiplicative de $\mathscr{E}^{\lambda}(M)$ permettant d'aboutir (théorème II.5) à un résultat d'appartenance à $\mathbb{H}^1$. Nous verrons dans la partie III une seconde application de la décomposition multiplicative de $\mathscr{E}^{\lambda}(M)$. On remarquera que les hypothèses des théorèmes II.2 et II.5 consistent à supposer bornés des processus prévisibles intervenant dans les décompositions multiplicatives obtenues, et que le théorème II.2 n'exige pas $\Delta M\geqq -1$.

II.1. **Proposition.** *Soient N une martingale locale, A un processus prévisible à variation finie tel que $\Delta A\neq -1$, N et A tous deux nuls en zéro. Il existe alors une martingale locale $\tilde{N}$ nulle en zéro telle que*

$$\mathscr{E}(N+A)=\mathscr{E}(\tilde{N})\,\mathscr{E}(A).$$

Démonstration. Notre première étape consiste comme en [14, p. 314 ou 21, théorème 1.5] à montrer que le processus prévisible $\frac{1}{1+\Delta A}$ est localement borné. Posons pour $n \geqq 1$

$$S_n = \inf\left\{t : |1+\Delta A| \leqq \frac{1}{n}\right\}.$$

Ces temps d'arrêt tendent p.s. vers l'infini quand n tend vers l'infini, l'ensemble $\left\{|1+\Delta A| \leqq \frac{1}{n}\right\}$ est prévisible et contient le graphe $[S_n]$ de son début, ce qui prouve [1, T16] que S_n est prévisible. Si $(S_{n,m}, m \geqq 1)$ tend en croissant p.s. vers S_n avec $S_{n,m} < S_n$ p.s. pout tout m, en posant

$$T_n = \sup_{k \leqq n,\, m \leqq n} S_{k,m},$$

nous obtenons $\left|\frac{1}{1+\Delta A}\right| \leqq n$ sur $[0, T_n]$, et $\bigcup_n [0, T_n] = \Omega \times \mathbb{R}_+$.

Considérons alors la martingale locale $\tilde{N} = \frac{1}{1+\Delta A} \cdot N$. Elle vérifie

$$\tilde{N}^c = N^c \quad \text{et} \quad \Delta\tilde{N} = \frac{\Delta N}{1+\Delta A}.$$

Comme A est prévisible à variation finie, $[\tilde{N}, A]$ est une martingale locale somme compensée de ses sauts $\Delta\tilde{N}\Delta A$ [20, p. 454]. Il en résulte que les deux margingales locales N et $\tilde{N} + [\tilde{N}, A]$ ont même partie continue et mêmes sauts, elles sont donc identiques. D'après l'égalité (1.1),

$$\mathscr{E}(\tilde{N})\,\mathscr{E}(A) = \mathscr{E}(A + \tilde{N} + [\tilde{N}, A]) = \mathscr{E}(N + A). \quad \square$$

Comme exemples de semi-martingales $X = N + A$ vérifiant les conditions de la proposition, nous avons les sous-martingales nulles en zéro. Dans ce cas en effet, A est croissant, donc $\Delta A \geqq 0$ et $\frac{1}{1+\Delta A}$ est borné par 1.

II.2. **Théorème.** a) *Si M est de carré intégrable et si $\langle M, M\rangle$ est borné, alors $\mathscr{E}(M)$ est de carré intégrable.*

b) *Si M est à variation intégrable et si le compensateur prévisible de $\sum_{s \leqq t} |\Delta M_s|$ est borné, alors $\mathscr{E}(M)$ est à variation intégrable.*

Démonstration. a) Appliquons la formule (1.1) avec $X = Y = M$, puis la proposition II.1

$$\mathscr{E}^2(M) = \mathscr{E}(2M + [M, M]) = \mathscr{E}(N + \langle M, M\rangle) = \mathscr{E}(\tilde{N})\,\mathscr{E}(\langle M, M\rangle)$$

où $N = 2M + [M, M] - \langle M, M\rangle$ et $\tilde{N} = \frac{1}{1+\Delta\langle M, M\rangle} \cdot N$. D'après la formule donnant l'exponentielle, puisque $\langle M,M\rangle \leqq k$,

$$0<\mathscr{E}(\langle M,M\rangle)\leqq \exp\langle M,M\rangle \leqq \exp k.$$

Ainsi $\mathscr{E}(\tilde{N})$ est une surmartingale positive valant 1 en zéro, et nous en déduisons que pour tout t

$$E[\mathscr{E}^2(M)_t]\leqq E[\mathscr{E}(\tilde{N})_t]\exp k\leqq \exp k,$$

donc $\mathscr{E}(M)$ est de carré intégrable.

b) Commençons par montrer que $\mathscr{E}(M)$ est dans $\mathbb{H}^1$. Notons A le compensateur prévisible de $B_t=\sum_{s\leqq t}\Delta M_s$, et V celui de $W_t=\sum_{s\leqq t}|\Delta M_s|$. Par hypothèse, il existe $k>0$ tel que $|A|\leqq V\leqq k$. Comme $M=B-A$,

$$\mathscr{E}(M)_t=\exp(-A_t)\prod_{s\leqq t}(1+\Delta M_s),$$

$$\sup_{s\leqq t}|\mathscr{E}(M)_s|\leqq \exp k\prod_{s\leqq t}(1+|\Delta M_s|).$$

Mais

$$\prod_{s\leqq t}(1+|\Delta M_s|)=\mathscr{E}(W)_t=\mathscr{E}(W-V+V)_t=\mathscr{E}(\tilde{N})_t\,\mathscr{E}(V)_t,$$

où $\tilde{N}$ est la martingale locale $\frac{1}{1+\Delta V}\cdot(W-V)$; on en déduit que $\mathscr{E}(\tilde{N})$ est une surmartingale positive valant 1 en zéro, puis que $\sup_t|\mathscr{E}(M)_t|$ a son espérance majorée par $\exp 2k$. Pour voir maintenant que $\mathscr{E}(M)$ est à variation intégrable, il suffit de constater que

$$(\mathscr{E}(M))^c=1+\mathscr{E}(M)_-\cdot M^c=1,$$

et de vérifier que

$$\begin{aligned}E\Big[\sum_t|\Delta\mathscr{E}(M)_t|\Big]&=E\Big[\sum_t|\mathscr{E}(M)_{t-}||\Delta M_t|\Big]\\&=E\left[\int_0^\infty|\mathscr{E}(M)_{s-}|\,dW_s\right]=E\left[\int_0^\infty|\mathscr{E}(M)_{s-}|\,dV_s\right]\\&\leqq E\Big[\sup_t|\mathscr{E}(M)_t|\,V_\infty\Big]\leqq k\exp 2k.\quad\square\end{aligned}$$

II.3. **Proposition.** *Soient $\lambda>0$ et M une martingale locale telle que $\Delta M\geqq -1$. Posons*

$$T=\inf\{t\colon \Delta M_t=-1\}=\inf\{t\colon \mathscr{E}(M)_t=0\},$$

et supposons que le processus $\sum_{s\leqq t\wedge T}|(1+\Delta M_s)^\lambda-1-\lambda\,\Delta M_s|$ soit localement *intégrable. En appelant* V^λ *le compensateur prévisible de* $W_t^\lambda = \sum_{s \leqq t \wedge T} ((1+\Delta M_s)^\lambda - 1 - \lambda \Delta M_s)$, *si*

$$A^\lambda = \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} \langle M^c, M^c \rangle^T + V^\lambda,$$

$$N^\lambda = \lambda M^T + W^\lambda - V^\lambda,$$

alors

a) $\mathscr{E}^\lambda(M) = \mathscr{E}(N^\lambda + A^\lambda)$

b) *il existe une martingale locale* $\tilde{N}^\lambda$ *telle que*

$$\mathscr{E}^\lambda(M) = \mathscr{E}(\tilde{N}^\lambda)\, \mathscr{E}(A^\lambda). \tag{2.1}$$

Démonstration. Posons

$$T_n = \inf\left\{t : \mathscr{E}(M)_t \leqq \frac{1}{n}\right\},$$

$$M_t^n = M_t\, 1_{\{t < T_n\}} + M_{T_n -}\, 1_{\{t \geqq T_n\}}.$$

Les processus M^n et $\mathscr{E}(M^n)$ sont des semi-martingales, $\mathscr{E}(M^n) \geqq \frac{1}{n}$ et de plus $\mathscr{E}(M^n)_t = \mathscr{E}(M)_t$ si $t < T_n$ comme on peut le voir sur la formule explicite donnant ces deux exponentielles. L'hypothèse $\Delta M \geqq -1$ montre que T_n tend vers T quand n tend vers l'infini. Appliquons alors pour chaque $n \geqq 1$ la formule de changement de variables à une fonction f^n deux fois continûment dérivable et coïncidant avec la fonction x^λ dans l'intervalle $\left[\frac{1}{n}, +\infty\right[$.

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}^\lambda(M^n)_t &= f^n(\mathscr{E}(M^n)_t) \\
&= 1 + \lambda \int_0^t \mathscr{E}^{\lambda-1}(M^n)_{s-}\, d\mathscr{E}(M^n)_s \\
&\quad + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} \int_0^t \mathscr{E}^{\lambda-2}(M^n)_{s-}\, d\langle (\mathscr{E}(M^n))^c, (\mathscr{E}(M^n))^c \rangle_s \\
&\quad + \sum_{s \leqq t} (\mathscr{E}^\lambda(M^n)_s - \mathscr{E}^\lambda(M^n)_{s-} - \lambda \mathscr{E}^{\lambda-1}(M^n)_{s-}\, \Delta \mathscr{E}(M^n)_s) \\
&= 1 + \int_0^t \mathscr{E}^\lambda(M^n)_{s-}\, dX_s^n
\end{aligned}$$

où

$$X_t^n = \lambda M_t^n + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} \langle (M^n)^c, (M^n)^c \rangle_t + \sum_{s \leqq t} ((1+\Delta M_s^n)^\lambda - 1 - \lambda \Delta M_s^n),$$

et donc $\mathscr{E}^\lambda(M^n) = \mathscr{E}(X^n)$. Posons encore

$$X = \lambda M^T + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} \langle M^c, M^c \rangle^T + W^\lambda.$$

Sur $[0, T_n[$, on a $X^n = X$ et $\mathscr{E}^\lambda(M) = \mathscr{E}(X)$; en faisant tendre n vers l'infini, on voit que les processus $\mathscr{E}^\lambda(M)$ et $\mathscr{E}(X)$ coïncident sur $[0, T[$, et comme $\Delta X_T = -1$ sur $\{T < \infty\}$, ils sont nuls tous deux sur $[T, +\infty[$, d'où la conclusion de a).

b) Nous aurons le résultat par application de la proposition II.1 dès que nous aurons montré que $\Delta A^\lambda > -1$. Posons

$$S = \inf\{t\colon \Delta A^\lambda \leqq -1\}.$$

C'est un temps prévisible comme début de l'ensemble prévisible $\{\Delta A^\lambda \leqq -1\}$, donc

$$\Delta A_S^\lambda = E[\Delta A_S^\lambda | \mathscr{F}_{S-}] = E[\Delta X_S | \mathscr{F}_{S-}] = E[(1 + \Delta M_S)^\lambda - 1 | \mathscr{F}_{S-}],$$

d'où, comme $\{S < \infty\}$ appartient à $\mathscr{F}_{S-}$,

$$0 \geqq E[1_{\{S<\infty\}}(\Delta A_S^\lambda + 1)] = E[1_{\{S<\infty\}}(1 + \Delta M_S)^\lambda]$$

et ainsi $\Delta M_S = -1$ sur $\{S < \infty\}$, ce qui prouve que $S \geqq T$. Par ailleurs, si (R_n) est une suite de temps d'arrêt finis, réduisant M.

$$0 = E[\Delta M_S^{R_n}] = E[\Delta M_T^{R_n} 1_{\{S=T\}}] + E[\Delta M_S^{R_n} 1_{\{T<S\}}].$$

La deuxième espérance est nulle car $\{T < S\}$ appartient à $\mathscr{F}_{S-}$, donc

$$0 = E[\Delta M_T 1_{\{S=T \leqq R_n\}}] = -P(S = T \leqq R_n).$$

Cela montre en faisant tendre n vers l'infini que $S > T$, et comme $\Delta A^\lambda = 0$ en dehors de $[0, T]$, en fait $\Delta A^\lambda > -1$. □

II.4. *Remarques.* a) Les conclusions de la proposition précédente sont encore valables pour λ entier pair sans exiger $\Delta M \geqq -1$. On en déduit aisément comme dans le théorème II.2.a que si le processus correspondant A^λ, qui est croissant, est de plus borné, alors $\mathscr{E}(M)$ est de puissance λ-intégrable; même conclusion pour les entiers impairs, mais avec $\Delta M \geqq -1$.

b) Lorsque M est quasi-continue à gauche, le processus V^λ, s'il existe, est continu, ainsi que A^λ. La martingale locale $\tilde{N}^\lambda = N^\lambda$ est caractérisée alors par

$$(\tilde{N}^\lambda)^c = \lambda (M^c)^T \quad \text{et} \quad \Delta \tilde{N}^\lambda = -1 + (1 + \Delta M^T)^\lambda.$$

Dans ce cas, la décomposition multiplicative (2.1) est celle qui figure dans [22] pour $\lambda > 1$.

c) Lorsque $0 < \lambda \leqq 1$, la condition d'intégrabilité locale de la proposition est automatiquement satisfaite. En effet, d'après (1.2) et (1.3),

$$1 + \lambda \Delta M - (1 + \Delta M)^\lambda \leqq (1 - \lambda) \Delta M^2 \qquad \text{pour } |\Delta M| \leqq 1, \tag{2.2}$$

$$\leqq \lambda \Delta M \qquad \text{pour } \Delta M > 1. \tag{2.3}$$

Le processus $\sum_{s \leqq t} \Delta M_s^2 1_{\{|\Delta M_s| \leqq 1\}}$ est localement intégrable puisque c'est un processus croissant à sauts bornés. Si (R_n) réduit M et si

$$S_n = \inf\{t\colon |M_t| \geqq n \text{ ou } \sum_{s \leqq t} \Delta M_s 1_{\{\Delta M_s > 1\}} \geqq n\}.$$

alors $T_n = R_n \wedge S_n$ tend en croissant vers l'infini p.s., et

$$E\Big[\sum_{t \leqq T_n} \Delta M_t \, 1_{\{\Delta M_t > 1\}}\Big] \leqq n + E[|M_{T_n -}|] + E[|M_{T_n}|] \leqq 2n + E[|M_{T_n}|] < \infty,$$

donc

$$\sum_{s \leqq t} \Delta M_s \, 1_{\{\Delta M_s > 1\}} \text{ est localement intégrable.}$$

Le contenu des deux dernières remarques va nous servir dans la démonstration du résultat suivant [7].

II.5. **Théorème.** *Soit M une martingale quasi-continue à gauche vérifiant $\Delta M \geqq -1$ et soit encore $T = \inf\{t: \Delta M_t = -1\}$. Si le compensateur prévisible C du processus*

$$\langle M^c, M^c \rangle_{t \wedge T} + \sum_{s \leqq t \wedge T} \Delta M_s^2 \, 1_{\{|\Delta M_s| \leqq 1\}} + \sum_{s \leqq t \wedge T} \Delta M_s \, 1_{\{\Delta M_s > 1\}}$$

est borné, alors $\mathscr{E}(M)$ est dans $\mathbb{H}^1$.

Démonstration. Comme en I.8 choisissons un λ quelconque tel que $0 < \lambda < 1$. Avec les notations de II.3, le processus A^λ est décroissant et continu, donc $\mathscr{E}(A^\lambda) = \exp A^\lambda$. Les inégalités (2.2) et (2.3) s'étendent sans difficulté au compensateur prévisible, donc $-A^\lambda \leqq C$. D'après (2.1), si k est une constante majorant C,

$$\mathscr{E}^\lambda(M) \leqq \mathscr{E}(\tilde{N}^\lambda) \leqq \exp C \mathscr{E}^\lambda(M) \leqq k \mathscr{E}^\lambda(M).$$

Il en résulte que pour tout t,

$$E[\mathscr{E}^{1/\lambda}(\tilde{N}^\lambda)_t] \leqq k^{1/\lambda},$$

donc, en utilisant l'inégalité de Doob,

$$E[\sup_t \mathscr{E}(M)_t] \leqq \left(\frac{k}{1-\lambda}\right)^{1/\lambda}. \quad \square$$

III. Deux théorèmes optimaux

Cette partie est consacrée à la démonstration de deux théorèmes dont nous verrons dans la partie VI en quoi nous pouvons les qualifier d'optimaux. Comme le résultat de Novikov [17], ils donnent des conditions d'intégrabilité uniforme et leur démonstration est partiellement inspirée de la sienne. Nous supposons ici $\Delta M \geqq -1$ et posons comme en II

$$T = \inf\{t: \Delta M_t = -1\} = \inf\{t: \mathscr{E}(M)_t = 0\}.$$

III.1. **Théorème.** *Si le processus*

$$\tfrac{1}{2}\langle M^c, M^c \rangle_{t \wedge T} + \sum_{s \leqq t \wedge T} ((1 + \Delta M_s) \operatorname{Log}(1 + \Delta M_s) - \Delta M_s)$$

admet un compensateur prévisible B et si

$$E[\exp B_\infty] < \infty, \tag{3.1}$$

alors $\mathscr{E}(M)$ est uniformément intégrable et $\{\mathscr{E}(M)_\infty > 0\} = \{T = \infty\}$ p.s.

Nous décomposons la démonstration de ce théorème en plusieurs lemmes.

III.2. **Lemme.** *Sous la condition* (3.1), *M^T appartient à $\mathbb{H}^1$ et $\mathscr{E}(M)_{T-} > 0$* p.s.

Démonstration. L'hypothèse faite montre que B_∞ est intégrable, il en est donc de même de $\sum_{t \leq T} ((1+\Delta M_t) \operatorname{Log}(1+\Delta M_t) - \Delta M_t)$. On vérifie facilement les inégalités

$$\begin{aligned}(1+x)\operatorname{Log}(1+x) - x &\geqq x^2/6 \quad \text{pour } |x| \leqq 1\\ &\geqq x/3 \quad \text{pour } x > 1,\end{aligned}$$

et par conséquent

$$E\Big[\sum_{t \leq T} \Delta M_t^2 \, 1_{\{\Delta M_t \leqq 1\}}\Big] < \infty,$$

$$E\Big[\sum_{t \leq T} \Delta M_t \, 1_{\{\Delta M_t > 1\}}\Big] < \infty,$$

ce qui, conjugué avec $E[\langle M^c, M^c\rangle_T] < \infty$, montre que M^T est dans $\mathbb{H}^1$. En reprenant alors la démonstration de I.5.b, il est facile de vérifier que $\mathscr{E}(M)_{T-} > 0$ p.s. $\square$

Posons

$$\hat{M} = \operatorname{Log}(\mathscr{E}(M)) - B \tag{3.2}$$

en convenant que $\hat{M} = -\infty$ si $\mathscr{E}(M) = 0$.

III.3. **Lemme.** *Sous la condition* (3.1), *le processus $\mathscr{E}(M)\hat{M}$ est une martingale locale.*

Démonstration. Le processus croissant B étant prévisible est localement borné [14, p. 297 ou 5, lemme 4.4]. Il existe donc une suite de temps d'arrêt (R_n) croissante et tendant vers l'infini p.s. telle que $B_{R_n} \leqq n$ p.s. pour tout n. Soit (S_n) une suite de temps d'arrêt réduisant fortement les martingales locales M et $\mathscr{E}(M)$. Posons encore

$$U_n = \inf\left\{t \colon \mathscr{E}(M)_t \geqq n \text{ ou } \mathscr{E}(M)_t \leqq \frac{1}{n}\right\},$$

$$T_n = R_n \wedge S_n \wedge U_n.$$

Il est clair que $\bigcup_n [0, T_n] = [0, T]$. Soit N la martingale locale

$$N_t = \sum_{s \leqq t \wedge T} ((1+\Delta M_s)\operatorname{Log}(1+\Delta M_s) - \Delta M_s) - B_t + \tfrac{1}{2}\langle M^c, M^c\rangle_{t\wedge T}.$$

Fixons provisoirement n et appliquons la formule de changement de variable à une fonction g_n deux fois continûment dérivable coïncidant dans l'intervalle $\left[\frac{1}{n}, +\infty\right[$

avec la fonction $x \operatorname{Log} x$, en posant pour simplifier $X = \mathscr{E}(M)^{T_n}$. Il vient

$$\begin{aligned} & g_n(X_t) - X_t B_{t \wedge T_n} \\ & \quad = \int_0^t (\operatorname{Log} X_{s-} + 1)\, dX_s + \tfrac{1}{2} \int_0^{t \wedge T_n} X_{s-}\, d\langle M^c, M^c \rangle_s - \int_0^t B_s\, dX_s \\ & \qquad - \int_0^{t \wedge T_n} X_{s-}\, dB_s + \sum_{s \leqq t \wedge T_n} (g_n(X_s) - X_{s-} \operatorname{Log} X_{s-} - (\operatorname{Log} X_{s-} + 1)\, X_{s-}\, \Delta M_s). \end{aligned}$$

Comme

$$X_s \operatorname{Log} X_s = (1 + \Delta M_s)\, X_{s-} (\operatorname{Log} X_{s-} + \operatorname{Log}(1 + \Delta M_s)),$$

nous obtenons pour $t < T_n$

$$X_t \operatorname{Log} X_t - X_t B_t = \int_0^t ((\operatorname{Log} X_{s-} + 1) - B_s)\, dX_s + \int_0^t X_{s-}\, dN_s.$$

Il est aisé de vérifier que les deux membres ont même saut en T_n, par conséquent $X \operatorname{Log} X - X B^{T_n}$ est une martingale de $\mathbb{H}^1$, et en faisant tendre n vers l'infini on obtient sur $[0, T]$

$$\begin{aligned} & \mathscr{E}(M)_t \operatorname{Log} \mathscr{E}(M)_t - \mathscr{E}(M)_t B_t \\ & \quad = \int_0^t (\operatorname{Log} \mathscr{E}(M)_{s-} + 1 - B_s)\, d\mathscr{E}(M)_s + \int_0^t \mathscr{E}(M)_{s-}\, dN_s \end{aligned}$$

et c'est encore vrai sur $[T, +\infty[$ car les intégrales stochastiques du second membre sont constantes sur cet intervalle. □

III.4. **Lemme.** *Soit* $0 < \lambda \leqq 1$. *Sous la condition* (3.1),

a) *il existe une martingale locale positive Z^λ arrêtée en T et un processus décroissant positif arrêté en T, égal à 1 pour $t = 0$, tels que*

$$\mathscr{E}^\lambda(M) = Z^\lambda D^\lambda; \tag{3.3}$$

b) *on a l'inégalité*

$$Z^\lambda \leqq \mathscr{E}^\lambda(M) \exp((1-\lambda) B) \tag{3.4}$$

et pour tout temps d'arrêt R, Z^λ_R converge p.s. vers $\mathscr{E}(M)_R$ lorsque λ tend vers 1.

Démonstration. La partie a) est une conséquence directe de la proposition II.3 avec $Z^\lambda = \mathscr{E}(\tilde{N}^\lambda)$ et $D^\lambda = \mathscr{E}(A^\lambda)$.

b) Reprenons la suite de temps d'arrêt (T_n) du lemme III.3 et montrons l'inégalité (3.4) sur $[0, T_n]$; supposons, pour simplifier les notations, que M et Z^λ soient arrêtées en T_n et notons Q la probabilité définie par la densité $\frac{dQ}{dP} = \mathscr{E}(M)_\infty$. D'après le lemme précédent, $\hat{M}$ est une Q-martingale, $(\lambda - 1)\hat{M}$ aussi et $\exp((\lambda-1)\hat{M})$ est une Q-sous-martingale bornée dans $L^1(Q)$; en effet, d'après (3.2),

$$\mathscr{E}(M) \exp((\lambda - 1)\hat{M}) = \mathscr{E}^\lambda(M) \exp((1-\lambda) B) \leqq \mathscr{E}^\lambda(M) \exp((1-\lambda)\, n)$$

d'où comme $\mathscr{E}^\lambda(M)$ est une surmartingale positive égale à 1 en zéro,

$$E_Q[\exp((\lambda-1)\hat{M}_\infty)] \leqq \exp((1-\lambda)n).$$

On en déduit que $\mathscr{E}(M)\exp((\lambda-1)\hat{M})=S$ est une sous-martingale bornée dans $L^1(P)$. D'après (3.3), $S=Z^\lambda H$, où H est le processus prévisible $D^\lambda \exp((1-\lambda)B)$. Il en résulte que

$$dS=Z^\lambda_- \, dH + H\,dZ^\lambda,$$

ce qui donne la décomposition de Doob-Meyer de S. Comme $Z^\lambda_- > 0$ sur $]0, T]$, nécessairement H est un processus croissant et par conséquent sur $[0, T_n]$,

$$1 \leqq D^\lambda \exp((1-\lambda)B),$$
$$Z^\lambda \leqq \mathscr{E}^\lambda(M)\exp((1-\lambda)B).$$

Il reste à faire tendre n vers l'infini pour avoir (3.4) sur $[0, T]$. Nous avons vu en II.3 que $\Delta A^\lambda > -1$, donc $D^\lambda = \mathscr{E}(A^\lambda) > 0$ et ainsi $Z^\lambda = 0$ sur $[T, +\infty[$, ce qui termine la démonstration de (3.4). De la double inégalité

$$\mathscr{E}^\lambda(M) \leqq Z^\lambda \leqq \mathscr{E}^\lambda(M)\exp((1-\lambda)B)$$

nous tirons facilement la dernière assertion du lemme, y compris sur l'ensemble $\{R=\infty\}$ puisque $B_\infty < \infty$ p.s. $\square$

III.5. **Lemme.** *Sous la condition* (3.1), *pour tout* $\lambda \in]0, 1[$, Z^λ *est uniformément intégrable.*

Démonstration. Posons pour tout $n \geqq 1$

$$S_n = \inf\{t: B_t \geqq n\}.$$

D'après le lemme I.2,

$$E[\sup_t \mathscr{E}^\lambda(M)_t] \leqq \frac{1}{1-\lambda}$$

et en utilisant (3.4) on en déduit

$$E[\sup_{t<S_n} Z^\lambda_t] \leqq \frac{\exp((1-\lambda)n)}{1-\lambda}.$$

Soit alors (U_p) une suite de temps d'arrêt finis réduisant Z^λ.

$$1 = E[Z^\lambda_{S_n \wedge U_p}] = E[Z^\lambda_{U_p} 1_{\{U_p < S_n\}}] + E[Z^\lambda_{S_n} 1_{\{U_p \geqq S_n\}}].$$

Le premier terme tend par convergence dominée vers $E[Z^\lambda_{S_n} 1_{\{S_n=\infty\}}]$, le second vers $E[Z^\lambda_{S_n} 1_{\{S_n<\infty\}}]$, d'où $E[Z^\lambda_{S_n}]=1$. Pour terminer la démonstration, écrivons

$$E[Z^\lambda_\infty] = 1 + E[Z^\lambda_\infty 1_{\{S_n<\infty\}}] - E[Z^\lambda_{S_n} 1_{\{S_n<\infty\}}].$$

D'après (3.4) et l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}E[Z^\lambda_{S_n} 1_{\{S_n<\infty\}}] &\leqq E[\mathscr{E}^\lambda(M)_{S_n} \exp\{(1-\lambda) B_{S_n}\} 1_{\{S_n<\infty\}}]\\ &\leqq (E[\mathscr{E}(M)_{S_n}])^\lambda (E[1_{\{S_n<\infty\}} \exp B_{S_n}])^{1-\lambda}\\ &\leqq (E[1_{\{S_n<\infty\}} \exp B_\infty])^{1-\lambda}.\end{aligned}$$

D'après la condition (3.1), $P(S_n<\infty)\to 0$ et $E[1_{\{S_n<\infty\}} \exp B_\infty]\to 0$ quand n tend vers l'infini. On en déduit $E[Z^\lambda_\infty]\geqq 1$, donc $E[Z^\lambda_\infty]=1$. □

III.6. *Démonstration du théorème.* Si $0<\lambda\leqq 1$, nous déduisons de (3.2) et (3.4) les deux inégalités

$$Z^\lambda \leqq \exp B \exp(\lambda \hat{M}), \tag{3.5}$$

$$Z^\lambda \leqq \mathscr{E}(M) \exp((\lambda-1)\hat{M}). \tag{3.6}$$

Posons

$$T_k=\inf\{t\colon \hat{M}_t\leqq -k\}.$$

Il est clair que

$$Z^\lambda_{T_k}\leqq 1_{\{T_k<\infty\}} \exp B_{T_k} \exp(-\lambda k)+1_{\{T_k=\infty\}}\mathscr{E}(M)_{T_k} \exp((1-\lambda)k). \tag{3.7}$$

Le membre de droite de (3.7) est majoré par la variable

$$1_{\{T_k<\infty\}} \exp B_\infty + 1_{\{T_k=\infty\}} \exp k\mathscr{E}(M)_{T_k}$$

qui est intégrable et indépendante de λ. On en déduit l'intégrabilité uniforme de la famille $(Z^\lambda_{T_k})_{0<\lambda\leqq 1}$, d'où en utilisant le lemme III.4.b la convergence dans L^1 de $Z^\lambda_{T_k}$ vers $\mathscr{E}(M)_{T_k}$ lorsque λ tend vers 1, ce qui prouve (lemme III.5) que

$$E[\mathscr{E}(M)_{T_k}]=1.$$

Il reste à écrire

$$E[\mathscr{E}(M)_\infty]=1+E[\mathscr{E}(M)_\infty 1_{\{T_k<\infty\}}]-E[\mathscr{E}(M)_{T_k} 1_{\{T_k<\infty\}}].$$

En utilisant (3.2), on obtient

$$E[\mathscr{E}(M)_{T_k} 1_{\{T_k<\infty\}}]\leqq E[\exp B_\infty] \exp(-k),$$

ce qui tend vers zéro lorsque k tend vers l'infini, d'où

$$E[\mathscr{E}(M)_\infty]=1. \quad \square$$

Nous passons maintenant au deuxième théorème. La condition assurant l'intégrabilité uniforme de $\mathscr{E}(M)$ porte cette fois sur un processus croissant non prévisible, défini à partir des sauts de M. Nous devrons exclure les sauts égaux à -1 et le temps d'arrêt T sera donc infini.

La démonstration sera également décomposée en plusieurs lemmes.

III.7. **Théorème.** *Supposons que*

$$\Delta M > -1$$

$$E\left[\exp\{\tfrac{1}{2}\langle M^c, M^c\rangle_\infty\} \prod_t (1+\Delta M_t) \exp\left(-\frac{\Delta M_t}{1+\Delta M_t}\right)\right] < \infty. \tag{3.8}$$

Alors $\mathscr{E}(M)$ *est uniformément intégrable et* $\mathscr{E}(M)_\infty > 0$ p.s.

III.8. **Lemme.** *Sous la condition* (3.8), M *est dans* $\mathbb{H}^1$ *et* $\mathscr{E}(M)_\infty > 0$ p.s.

Démonstration. Il est clair que $E[\langle M^c, M^c\rangle_\infty] < \infty$. L'inégalité

$$(1+u)\exp\left(-\frac{u}{1+u}\right) \geqq 1 + \frac{3-e}{e}\, u$$

valable pour $u \geqq 1$ montre que $E[\sum_t \Delta M_t\, 1_{\{\Delta M_t \geqq 1\}}] < \infty$. Pour $|u| < 1$, il existe une constante $k > 0$ telle que

$$\operatorname{Log}(1+u) - \frac{u}{1+u} \geqq k u^2,$$

ce qui entraîne

$$E[\sum_t \Delta M_t^2\, 1_{\{\Delta M_t < 1\}}] \leqq \frac{1}{k}\, E[\exp(k \sum_t \Delta M_t^2\, 1_{\{\Delta M_t < 1\}})] < \infty.$$

Il vient ainsi

$$\begin{aligned} &E[([M,M]_\infty)^{1/2}] \\ &\quad \leqq (E[\langle M^c, M^c\rangle_\infty + \sum_t \Delta M_t^2\, 1_{\{\Delta M_t < 1\}}])^{1/2} + E[\sum_t \Delta M_t\, 1_{\{\Delta M_t \geqq 1\}}] < \infty. \end{aligned}$$

Cela montre que M est dans $\mathbb{H}^1$ et d'après la proposition I.5 nous pouvons en conclure que $\mathscr{E}(M)_\infty > 0$ p.s. □

III.9. **Lemme.** *Il existe un* $a > 1$ *et un* $b > e$ *tels que si* z *est complexe et si*

$$\operatorname{Re} z \leqq a,$$
$$b\,|\operatorname{Im} z| \leqq |\operatorname{Re} z|,$$

alors

$$|(1-z)\, e^z| \leqq 1.$$

Démonstration. Soit $x = \operatorname{Re} z$. Si z vérifie l'hypothèse pour un $b > e$,

$$|(1-z)\, e^z| \leqq \left[(1-x)^2 + \frac{x^2}{b^2}\right]^{1/2} e^x.$$

La fonction

$$f(x)=\left[(1-x)^2+\frac{x^2}{b^2}\right]e^{2x}$$

est croissante pour $x \leqq 0$, décroissante pour $0 \leqq x \leqq \frac{b^2-1}{b^2+1}$, puis croissante à nouveau. Il suffit de choisir $a>1$ tel que

$$(a-1)\,e^a<1$$

et b tel que

$$\left[(1-a)^2+\frac{a^2}{b^2}\right]e^{2a} \leqq 1$$

pour que $f(x) \leqq 1$ pour tout $x \leqq a$. □

III.10. **Lemme.** *Si $\Delta M>-1$, posons pour $t<\infty$*

$$A_t=\tfrac{1}{2}\langle M^c, M^c\rangle_t+\sum_{s \leqq t}\left[\operatorname{Log}(1+\Delta M_s)-\frac{\Delta M_s}{1+\Delta M_s}\right],$$

$$\tilde{M}_t=M_t-\langle M^c, M^c\rangle_t-\sum_{s \leqq t}\frac{\Delta M_s^2}{1+\Delta M_s}=\operatorname{Log}[\mathscr{E}(M)_t]-A_t.$$

Si a et b sont les réels déterminés en III.9 *et si λ est un nombre complexe vérifiant*

$$1-a \leqq \operatorname{Re}\lambda \leqq 1-b\,|\operatorname{Im}\lambda|$$

alors

$$|\mathscr{E}(\lambda M)_t| \leqq \exp A_t \exp(\operatorname{Re}\lambda\tilde{M}_t) \tag{3.9}$$

$$\leqq \mathscr{E}(M)_t \exp\{(\operatorname{Re}\lambda-1)\,\tilde{M}_t\}. \tag{3.10}$$

Démonstration. D'après le lemme III.9, pour

$$1-a \leqq \operatorname{Re}\lambda \leqq 1-b\,|\operatorname{Im}\lambda|$$
$$-1<u$$

nous avons, en posant $z=(1-\lambda)\,\frac{u}{1+u}$,

$$|1+\lambda u| \exp\left(-\operatorname{Re}\lambda\,\frac{u}{1+u}\right) \leqq (1+u)\exp\left(-\frac{u}{1+u}\right).$$

Remarquons également que pour $\operatorname{Re}\lambda \leqq 1-|\operatorname{Im}\lambda|$, nous avons

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\lambda^2}{2}-\lambda+\tfrac{1}{2}\right) \geqq 0.$$

Nous en déduisons les majorations suivantes

$$|\mathscr{E}(\lambda M)_t| \leqq \exp\{\operatorname{Re}\lambda M_t - (\operatorname{Re}\lambda - \tfrac{1}{2})\langle M^c, M^c\rangle_t\} \prod_{s\leqq t} |1+\lambda \Delta M_s| \exp(-\operatorname{Re}\lambda \Delta M_s)$$
$$\leqq \exp A_t \exp(\operatorname{Re}\lambda \tilde{M}_t),$$

et la seconde inégalité cherchée s'en déduit en remplaçant A_t par $\operatorname{Log}[\mathscr{E}(M)_t] - \tilde{M}_t$. $\square$

III.11. *Démonstration du théorème.* Remarquons tout d'abord que sous la condition (3.8) et grâce au lemme III.8 A_∞ et $\tilde{M}_\infty$ existent et sont finis p.s., les inégalités (3.9) et (3.10) sont encore valables pour $t=\infty$ et $\mathscr{E}(\lambda M)_\infty$ est p.s. une fonction analytique de λ. Posons

$$T_k = \inf\{t : \tilde{M}_t \leqq -k\}, \qquad k \in \mathbb{N}^*.$$

Si

$$\begin{aligned} &1-a \leqq \operatorname{Re}\lambda \leqq 1-b\,|\operatorname{Im}\lambda| \\ &\operatorname{Re}\lambda \leqq 0 \\ &t < T_k \end{aligned}$$

de (3.9) nous tirons que

$$|\mathscr{E}(\lambda M)_t| \leqq \exp A_\infty \exp(-k \operatorname{Re}\lambda).$$

Comme $\Delta\tilde{M} = \dfrac{\Delta M}{1+\Delta M}$, nous remarquons que $-1 < \Delta M_{T_k} \leqq 0$, d'où

$$|\mathscr{E}(\lambda M)_{T_k}| = |1+\lambda \Delta M_{T_k}|\,|\mathscr{E}(\lambda M)_{T_k-}| \leqq (1+|\lambda|)\,|\mathscr{E}(\lambda M)_{T_k-}|,$$

et par conséquent si

$$\begin{aligned} &1-a \leqq \operatorname{Re}\lambda \leqq 1-b\,|\operatorname{Im}\lambda| \\ &\operatorname{Re}\lambda \leqq 0 \\ &t \leqq T_k, \\ &|\mathscr{E}(\lambda M)_t| \leqq \exp A_\infty \exp(-k\operatorname{Re}\lambda) \quad (1+|\lambda|). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Les parties réelle et imaginaire de $\mathscr{E}(\lambda M)^{T_k}$ sont donc dans $\mathbb{H}^1$, ce qui entraîne que

$$E[\mathscr{E}(\lambda M)_{T_k}] = 1 \tag{3.12}$$

lorsque λ satisfait aux conditions de (3.11). De (3.9) nous tirons encore que si $\operatorname{Re}\lambda \geqq 0$,

$$|\mathscr{E}(\lambda M)_{T_k}|\, 1_{\{T_k<\infty\}} \leqq \exp A_\infty \exp(-k\operatorname{Re}\lambda)\, 1_{\{T_k<\infty\}} \tag{3.13}$$

et de (3.10) nous tirons que

$$|\mathscr{E}(\lambda M)_{T_k}|\, 1_{\{T_k=\infty\}} \leqq \mathscr{E}(M)_{T_k} \exp\{k(1-\operatorname{Re}\lambda)\}\, 1_{\{T_k=\infty\}}. \tag{3.14}$$

De (3.11), (3.13) et (3.14), il résulte que $\mathscr{E}(\lambda M)_{T_k}$ est borné par une variable aléatoire intégrable indépendante de λ pour tout λ dans le triangle

$$1-a \leqq \operatorname{Re}\lambda \leqq 1-b\,|\operatorname{Im}\lambda|.$$

Comme, pour presque tout $\omega \in \Omega$, $\mathscr{E}(\lambda M)_{T_k}(\omega)$ est analytique à l'intérieur de ce triangle et continue au bord, nous en déduisons que $E[\mathscr{E}(\lambda M)_{T_k}]$ jouit de la même propriété, ce qui joint à (3.12) prouve que

$$E[\mathscr{E}(M)_{T_k}]=1,$$

ou encore

$$E[\mathscr{E}(M)_{T_k}\, 1_{\{T_k<\infty\}}]+E[\mathscr{E}(M)_\infty\, 1_{\{T_k=\infty\}}]=1.$$

D'après (3.13), le premier terme de cette somme tend vers zéro lorsque k tend vers l'infini, et par conséquent $E[\mathscr{E}(M)_\infty]=1$. $\square$

III.12. *Remarque.* Les deux théorèmes que nous venons d'obtenir sont comparables à bien des aspects. Tout d'abord les processus croissants A et B intervenant dans leurs conditions de validité sont liés par la relation suivante: si $E[\mathscr{E}(M)_\infty]=1$ et si Q est la probabilité définie par sa densité $dQ/dP=\mathscr{E}(M)_\infty$, alors B est le Q-compensateur prévisible de A, s'il existe, c'est-à-dire si A est Q-localement intégrable. Mais surtout l'analogie entre les deux démonstrations est frappante et aurait pu être poussée plus loin. En effet, au lieu d'utiliser un paramètre λ à valeurs complexes, nous pouvons donner une démonstration de III.7 avec λ réel dans l'intervalle $]0,1]$ comme pour III.1. A la place de la double inégalité

$$\mathscr{E}^\lambda(M)\leqq Z^\lambda \leqq \mathscr{E}^\lambda(M)\exp((1-\lambda)\,B),$$

nous obtenons beaucoup plus facilement grâce à (1.2)

$$\mathscr{E}^\lambda(M)\leqq \mathscr{E}(\lambda M)\leqq \mathscr{E}^\lambda(M)\exp((1-\lambda)\,A),$$

où A est comme B un processus croissant et $\mathscr{E}(\lambda M)$ comme Z^λ une martingale locale positive. Nous terminons la démonstration comme en III.5 et III.6, les inégalités (3.5) et (3.6) étant remplacées par (3.9) et (3.10). La démonstration avec λ complexe évite les temps d'arrêt de III.5 mais nécessite le lemme III.9 et est un peu plus mystérieuse.

IV. Le cas quasi-continu à gauche et la seconde martingale exponentielle

Dans cette partie, nous montrons que le théorème III.1 admet comme corollaire une extension du résultat de Novikov [17] concernant la seconde martingale exponentielle. Pour introduire celle-ci nous devons faire quelques rappels, essentiellement tirés de [5, 6], sur les mesures aléatoires.

IV.1. *Mesures aléatoires et systèmes de Lévy.* Une mesure aléatoire μ est une mesure de transition positive de $(\Omega, \mathscr{F})$ dans $[0,+\infty[\times E$ muni de la tribu

$\mathscr{B}_{[0,\infty[}\otimes\mathscr{E}$ de ses boréliens avec $E=\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Si μ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}U\{+\infty\}$ et si $\mu(\omega,\{t\}\times E)\leqq 1$, on dit que μ est à valeurs entières. Si y est une fonction définie sur $\Omega\times[0,\infty[\times E, \mathscr{F}\otimes\mathscr{B}_{[0,\infty[}\otimes\mathscr{E}$-mesurable, à valeurs positives, on note $y\cdot\mu$ le processus croissant à valeurs dans $\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$ défini par

$$y\cdot\mu_t=\int_0^t\int_E y(\omega,s,x)\,\mu(\omega,ds,dx).$$

La formule

$$m_\mu(y)=E[y\cdot\mu_\infty]$$

définit une mesure positive sur $(\Omega\times[0,\infty[\times E, \mathscr{F}\otimes\mathscr{B}_{[0,\infty[}\otimes\mathscr{E})$.

La tribu prévisible (resp.: optionnelle) sur $\Omega\times\mathbb{R}_+$ étant notée $\mathscr{P}$ (resp.: $\mathscr{O}$), on dit que μ est prévisible (resp.: optionnelle) si le processus $y\cdot\mu$ est prévisible (resp.: optionnel) pour tout $y\,\mathscr{P}\otimes\mathscr{E}$ (resp.: $\mathscr{O}\otimes\mathscr{E}$)-measurable et positif. Si la restriction de la measure m_μ à $(\Omega\times[0,\infty[\times E, \mathscr{P}\otimes\mathscr{E})$ est σ-finie, Jacod [5] a montré qu'il existe une mesure aléatoire prévisible et une seule ν telle que pour tout $y\mathscr{P}\otimes\mathscr{E}$-measurable et positif on ait la relation

$$m_\mu(y)=m_\nu(y).$$

La mesure ν est la *projection prévisible duale* de μ (elle dépend de P). On en déduit que si pour tout $t<\infty$, $y\cdot\nu_t<\infty$ p.s., alors $y\cdot\nu$ est le compensateur prévisible de $y\cdot\mu$.

L'hypothese faite sur m_μ est en particulier vérifiée [6] si μ est la mesure aléatoire à valeurs entières associée aux sauts d'un processus X adapté, continu à droite et pourvu de limites à gauche

$$\mu(\omega,dt,dx)=\sum_{0<s}1_{\{\Delta X_s(\omega)\neq 0\}}\varepsilon_{(s,\Delta X_s(\omega))}(dt,dx),$$

où ε_a désigne la mesure de Dirac en a. La projection prévisible duale ν est alors appelée le *système de Lévy* de X.

IV.2. *Mesures aléatoires quasi-continues à gauche et intégration stochastique.* Une mesure aléatoire est *quasi-continue à gauche* si elle est optionnelle et si pour tout temps d'arrêt prévisible T, $\mu([T]\times E)=0$. On a alors les propriétés suivantes [6]:
– si μ admet une projection prévisible duale ν,

$$P(\omega\colon \nu(\omega,\{t\}\times E)>0)=0 \qquad \text{pour tout } t;$$

– la mesure associée aux sauts d'un processus X est quasi-continue à gauche si et seulement si X est quasi-continu à gauche.

Dans toute cette partie, μ est une mesure aléatoire à valeurs entières quasi-continue à gauche telle que la restriction de m_μ à $(\Omega\times[0,\infty[\times E,\mathscr{P}\otimes\mathscr{E})$ soit σ-finie; ν désigne sa projection prévisible duale. Si H est $\mathscr{P}\otimes\mathscr{E}$-mesurable à valeurs réelles, on note $C(H)$ le processus croissant à valeurs positives finies ou infinies défini par

$$C_t(H)=(1_{\{|H|\leqq 1\}}H^2+1_{\{|H|>1\}}|H|)\cdot\nu_t.$$

Il est clair que

– si $|H| \leqq |K|$, alors $C(H) \leqq C(K)$,

– si $C_t(H) < \infty$ et $C_t(K) < \infty$, alors $C_t(H+K) < \infty$.

L'ensemble $\{H: C_t(H) < \infty$ p.s. pour tout t fini$\}$ est un espace vectoriel noté $\mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$.

Toujours d'après [6], on peut pour $H \in \mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ définir l'intégrale stochastique $H * (\mu - \nu)$; le processus obtenu est l'unique martingale locale somme compensée de sauts telle que pour tout t fini on ait

$$\Delta(H * (\mu - \nu)_t)(\omega) = \int_E H(\omega, t, x)\, \mu(\omega, \{t\}, dx).$$

On en déduit en particulier que si $|H| \cdot \nu_t < \infty$ p.s. pour tout t fini, alors

$$H * (\mu - \nu) = H \cdot \mu - H \cdot \nu.$$

Cette intégrale stochastique est nécessairement quasi-continue à gauche.

Si X est une martingale locale quasi-continue à gauche, si μ^X et ν^X désignent la mesure aléatoire et le système de Lévy associés, alors

$$(1_{\{|x| \leqq 1\}} x^2 + 1_{\{|x| > 1\}} |x|) \cdot \nu_t^X < \infty \text{ p.s. pour tout } t < \infty,$$

et on a la représentation

$$X = X^c + x * (\mu^X - \nu^X).$$

Revenons à M et $\mathscr{E}(M)$. Dans cette partie, M^d est donnée à partir de la mesure aléatoire fixée μ par la relation

$$M^d = y * (\mu - \nu),$$

où y est un élément de $\mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ tel que $y(\omega, t, x) \geqq -1$. On peut facilement passer de μ et ν à μ^M et ν^M car

$$M^d = y * (\mu - \nu) = x * (\mu^M - \nu^M)$$

et de plus, si f est borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et telle que

$$\sum_{s \leqq t} |f(\Delta M_s)| < \infty \quad \text{p.s.} \qquad \text{pour tout } t < \infty,$$

alors

$$\sum_{s \leqq t} f(\Delta M_s) = f(y) \cdot \mu_t = f(x) \cdot \mu_t^M,$$

et par conséquent on a

$$f(y) \cdot \nu_t = f(x) \cdot \nu_t^M$$

dès que l'un des membres est défini.

Compte tenu de cette remarque, en notant encore $T = \inf\{t: \Delta M_t = -1\}$, le théorème III.1 s'écrit dans ce cas de la façon suivante.

IV.3. **Théorème.** *Supposons que*

$$E[\exp\{\tfrac{1}{2}\langle M^c, M^c\rangle_T + ((1+y)\operatorname{Log}(1+y)-y)\cdot\nu_T\}]<\infty. \tag{4.1}$$

Alors $\mathscr{E}(M)$ est uniformément intégrable.

Passons maintenant à la seconde martingale exponentielle.

IV.4. *La martingale exponentielle $\alpha(N,z,\mu)$.* La mesure aléatoire μ étant toujours quasi-continue à gauche et admettant une projection prévisible duale ν, soit z une fonction $\mathscr{P}\otimes\mathscr{E}$-measurable à valeurs réelles; notons $z_1 = z1_{\{|z|>1\}}$, $z_2 = z1_{\{|z|\leqq 1\}}$. On suppose que $|z_1|\cdot\mu_t$, $|e^{z_1}-1|\cdot\nu_t$ et $(z_2)^2\cdot\nu_t$ sont finis p.s. pour tout t fini. Donnons nous aussi une martingale locale continue N nulle en zéro et considérons le processus

$$\alpha(N,z,\mu)=\exp\{N-\tfrac{1}{2}\langle N,N\rangle + z_1\cdot\mu + z_2 * (\mu-\nu) - (e^z - z_2 - 1)\cdot\nu\}.$$

Kunita et Watanabe ont montré en [8] que $\alpha(N,z,\mu)$ est une martingale locale; plus précisement, on a le résultat suivant (voir aussi [4, 10, 22]).

IV.5. **Proposition.** *Avec les hypothèses ci-dessus, le processus $\alpha(N,z,\mu)$ est une martingale locale positive et*

$$\alpha(N,z,\mu)=\mathscr{E}(N+(e^z-1)*(\mu-\nu)). \tag{4.2}$$

Démonstration. Montrons tout d'abord que e^z-1 est dans $\mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu)$. En effet, si $|x|\leqq 1$, alors $|e^x-1)\leqq 2x$, donc

$$1_{\{|z|\leqq 1\}}(e^z-1)^2\cdot\nu_t<\infty \quad \text{p.s.}$$

puisque $(z_2)^2\cdot\nu_t<\infty$ p.s. Ensuite,

$$1_{\{|z|>1\}}|e^z-1|\cdot\nu_t = |e^{z_1}-1|\cdot\nu_t<\infty \quad \text{p.s.}.$$

Il est facile de voir que ces deux résultats entraînent que

$$C_t(|e^z-1|)<\infty \quad \text{p.s.}$$

Soit alors $X=(e^z-1)*(\mu-\nu)$. Nécessairement $\Delta X>-1$, et $\mathscr{E}(N+X)$ est une martingale locale positive. Il reste à montrer l'égalité (4.2).

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(X) &= \exp\{(e^z-1)*(\mu-\nu)-[(e^z-1)-\operatorname{Log}(1+(e^z-1))]\cdot\mu\}\\ &= \exp\{(e^{z_2}-1)*(\mu-\nu)-(e^{z_1}-1)\cdot\nu-(e^{z_2}-1)\cdot\mu+z\cdot\mu\}\\ &= \exp\{z_1\cdot\mu+(e^{z_2}-1)*(\mu-\nu)-(e^{z_1}-1)\cdot\nu-(e^{z_2}-z_2-1)\cdot\mu\}.\end{aligned}$$

Comme

$$0\leqq(e^{z_2}-z_2-1)\leqq 2(z_2)^2,$$

nous pouvons écrire

$$(e^{z_2}-z_2-1)\cdot\mu=(e^{z_2}-z_2-1)*(\mu-\nu)+(e^{z_2}-z_2-1)\cdot\nu$$

d'où l'égalité

$$\alpha(N,z,\mu)=\mathscr{E}(N)\,\mathscr{E}(X)=\mathscr{E}(N+X). \quad \square$$

Voici alors le résultat de Novikov, légèrement généralisé [17].

IV.6. **Théorème.** *Soient N une martingale locale continue nulle en zéro et z une fonction $\mathscr{P}\otimes\mathscr{E}$-mesurable à valeurs réelles telles que*

$$\begin{aligned} &1_{\{z<-1\}} z\cdot\mu_t<\infty \quad \text{p.s.} \quad \textit{pour tout } t<\infty \\ &E[\exp\{\tfrac{1}{2}\langle N,N\rangle_\infty+(z e^z-e^z+1)\cdot\nu_\infty\}]<\infty \end{aligned} \tag{4.3}$$

Alors $\alpha(N,z,\mu)$ est une martingale uniformément intégrable.

Démonstration. On verifie aisément que l'hypothèse (4.3) permet d'obtenir que $|z_1|\cdot\mu_t$, $|e^{z_1}-1|\cdot\nu_t$ et $(z_2)^2\cdot\nu_t$ sont finis p.s. pour tout t fini, d'où l'égalité (4.2). En posant

$$M=N+(e^z-1)*(\mu-\nu),$$

on constate que la condition (4.1) est vérifiée avec $y=e^z-1$, et l'application du théorème IV.3 fournit la conclusion désirée. □

IV.7. *Remarques.* a) En fait, si l'on se restreint en IV.3 aux martingales M telles que $\Delta M>-1$, les théorèmes IV.3 et IV.6 sont équivalents. On peut d'ailleurs démontrer d'abord le théorème IV.6 à l'aide, pour $0<\lambda\leqq 1$, de la double inégalité

$$\alpha^\lambda(N,z,\mu)\leqq\alpha(\lambda N,\lambda z,\mu)\leqq\alpha^\lambda(N,z,\mu)\exp\{\tfrac{1}{2}\langle N,N\rangle+(z e^z-e^z+1)\cdot\nu\}$$

et de la méthode employée en III.5 et III.6; pour obtenir ensuite IV.3, il suffit d'appliquer le théorème IV.6 en identifiant $\mathscr{E}(M)$ à $\alpha(M^c, \operatorname{Log}(1+y), \mu)$. Notons que si Z^λ est associé à M comme en (3.3), on a

$$Z^\lambda=\alpha(\lambda M^c,\lambda\operatorname{Log}(1+\mathrm{y}),\mu).$$

b) Le résultat du théorème IV.6 contient également celui du lemme 2 de [4].

V. Le cas des accroissements indépendants

Nous allons supposer dans toute cette partie que pour tout couple (s,t) vérifiant $0\leqq s<t<\infty$, M_t-M_s est indépendant de $\mathscr{F}_s$, mais comme dans le théorème II.2 dont nous allons voir l'application à ce cas particulier, nous n'exigeons pas $\Delta M\geqq -1$. Nous commençons par un lemme qui permet de retrouver des résultats connus sur les processus à accroissements indépendants.

V.1. **Lemme.** *Soit A un processus croissant nul en zéro localement inégrable tel que pour tout couple (s,t) vérifiant $0\leqq s<t<\infty$, A_t-A_s soit indépendant de $\mathscr{F}_s$. Alors, le compensateur prévisible $\tilde{A}$ de A est déterministe et vaut $\tilde{A}_t=E[A_t]$. Si de plus $\tilde{A}_\infty<\infty$* p.s., *alors $\tilde{A}_\infty=E[A_\infty]<\infty$.*

Démonstration. i) Commençons par montrer la propriété suivante, qui nous servira également en V.2.c: si A est un processus croissant, nul en zéro, à accroissements indépendants, à sauts uniformément bornés, et si $P(A_\infty<\infty)>0$, alors $E[A_\infty]<\infty$. Soit en effet θ un réel >0. Si pour tout $n\geqq 1$

$$S_n=\sum_k(1-\exp\{-\theta(A_{(k+1)/2^n}-A_{k/2^n})\}),$$

un moment de réflexion montre que S_n tend en croissant quand $n \to \infty$ vers $S = \sum_t (1-\exp\{-\theta \Delta A_t\}) + \theta A^c_\infty$, où A^c est la partie continue de A, et comme ΔA est borné, pour un $k>0$ on a $k A_\infty \leqq S$. L'inégalité $1-x \leqq -\operatorname{Log} x$ pour $0<x\leqq 1$ montre ensuite que

$$k\, E[A_\infty] \leqq E[S] = \lim_n E[S_n] \leqq -\operatorname{Log} E[\exp\{-\theta A_\infty\}] < \infty.$$

ii) Revenant aux hypothèses du lemme, notons A^n le processus croissant ayant même partie continue que A et tel que $\Delta A^n = \Delta A \wedge n$; pour tout t fini, A^n_t est intégrable et le compensateur prévisible de A^n vaut $\tilde{A}^n_t = E[A^n_t]$. Quand $n \to \infty$, $\tilde{A}^n_t$ tend en croissant p.s. vers $\tilde{A}_t$, qui est fini p.s. par hypothèse, donc égal p.s. à une constants finie, ce qui prouve que $\tilde{A}_t$ et par voie de conséquence A_t sont intégrables. Enfin, si $\tilde{A}_\infty < \infty$ p.s., il est clair que $\tilde{A}_\infty = \lim_{t\to\infty} \tilde{A}_t$ est déterministe, donc $\tilde{A}_\infty = E[A_\infty] < \infty$. □

V.2. **Théorème.** a) *Si M est de carré intégrable, $\mathscr{E}(M)$ est de carré intégrable.*

b) *Si $\Delta M > -1$ et si $\mathscr{E}(M)$ est de carré intégrable. M est de carré intégrable.*

c) *S'il existe $b>0$ tel que $-1 \leqq \Delta M \leqq b$, et si M n'est pas de carré intégrable, alors* $\mathscr{E}(M)_\infty = 0$ p.s.

Démonstration. a) D'après le lemme précédent, le processus $\langle M,M\rangle$ est déterministe et $\langle M,M\rangle_t = E[M_t^2]$, donc $\langle M,M\rangle$ est borné et d'après II.2, $\mathscr{E}(M)$ est de carré intégrable.

b) De $M = \dfrac{1}{\mathscr{E}(M)_-} \cdot \mathscr{E}(M)$, nous tirons que M est localement de carré intégrable, donc d'après le lemme $\langle M,M\rangle_t = E[M_t^2] < \infty$ pour tout t fini. Posons $h(t) = E[M_t^2]$. Comme $E[\mathscr{E}(M)_\infty] = 1$, de

$$\langle \mathscr{E}(M), \mathscr{E}(M)\rangle_\infty = 1 + \int_0^\infty \mathscr{E}^2(M)_{s-}\, dh(s) < \infty,$$

nous déduisons que nécessairement $h(\infty) < \infty$.

c) Si $E[\langle M^c, M^c\rangle_\infty] = \infty$, alors $\langle M^c, M^c\rangle_\infty = \infty$ p.s., donc d'après la proposition I.5, $\mathscr{E}(M)_\infty = 0$ p.s. Si $E[\sum_t \Delta M_t^2] = \infty$, d'après la propriété déjà utilisée dans le lemme V.1, cela entraîne $\sum_t \Delta M_t^2 = \infty$ p.s., et toujours d'après I.5, $\mathscr{E}(M)_\infty = 0$ p.s. □

Il est facile de voir, compte tenu du théorème II.2.b, que les énoncés V.2.a et b sont encore valides si l'on remplace partout l'expression «de carré intégrable» par l'expression «à variation intégrable». Cependant, l'analogue de V.2.c n'est pas vrai.

V.3. *Remarque.* On peut rapprocher le théorème V.2 de résultats connus sur les produits de Riesz [18]. Voici par exemple comment, sans utiliser la variation quadratique, on peut démontrer c) pour les martingales M discrètes à accroissements indépendants D_k vérifiant $-1 \leqq D_k \leqq b$, $\sum_k E[D_k^2] = \infty$: posant $a_k = E[D_k^2]$, on obtient par Banach-Steinhaus une suite de réels (c_k) positifs telle que

$$\sum_k c_k^2 a_k < \infty \quad \text{et} \quad \sum_k c_k a_k = \infty;$$

nous remarquons que $\mathscr{E}(M)$ prend une forme très simple $\mathscr{E}(M)_n = \prod_{k=1}^{n} (1+D_k)$; posant encore $Y_n = \sum_{k=1}^{n} c_k D_k$, on vérifie aisément que Y est une martingale convergente p.s. dans $\mathbb{R}$, tandis que

$$E\left[\mathscr{E}(M)_n \left(Y_n - \sum_{k=1}^{n} c_k a_k\right)^2\right] = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 E[(1+D_k)(D_k - a_k)^2]$$
$$\leqq (1+b) \sum_k c_k^2 a_k,$$

et par conséquent d'après le lemme de Fatou $\mathscr{E}(M)_\infty = 0$ p.s.

VI. Exemples

Cette partie est consacrée à la discussion de quelques exemples.

VI.1. Montrons tout d'abord que la condition (3.8) du théorème III.7 n'est pas trop forte au sens où elle n'entraîne pas déjà l'appartenance à $\mathbb{H}^1$ de $\mathscr{E}(M)$.

On prend pour $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ l'ensemble $\mathbb{N}^*$ muni de la tribu de ses parties avec pour chaque $i \geqq 1$, $p_i = 2^{-i}$. Soient

$\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$

$\mathscr{F}_n =$ tribu engendrée par les parties $\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}$.

$$\begin{aligned} D_k(i) &= 0 && \text{si } 1 \leqq i < k \\ &= \frac{1-k}{1+k} && \text{si } 1 \leqq i = k \\ &= \frac{k-1}{k+1} && \text{si } 1 \leqq k < i, \end{aligned}$$

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} D_k, \qquad \mathscr{E}(M)_n = \prod_{k=1}^{n} (1+D_k).$$

On vérifie alors que

$$\mathscr{E}(M)_\infty(i) = \frac{2^i}{i(i+1)}, \qquad \text{donc } E[\mathscr{E}(M)_\infty] = 1,$$

$$\sup_n \mathscr{E}(M)_n(i) = \frac{2^i}{2i}, \qquad \text{donc } E[\sup_n \mathscr{E}(M)_n] = +\infty,$$

$$E\left[\prod_{k=1}^{\infty} (1+D_k) \exp\left(-\frac{D_k}{1+D_k}\right)\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1+i} \prod_{k=1}^{i-1} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \exp\left(\frac{1}{2k}\right)$$
$$\leqq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1+i} \prod_{k=1}^{i-1} \exp\left(-\frac{1}{2k} + \frac{1}{k(k+1)}\right)$$
$$\leqq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{i^{3/2}} \exp\left(1 - \frac{C}{2}\right)$$

où C est la constante d'Euler et a_i tend vers 1 quand i tend vers l'infini. Il en résulte que la condition (3.8) est bien vérifiée par M, mais que $\mathscr{E}(M)$ n'est pas dans l'espace $\mathbb{H}^1$.

VI.2. Dans [16], Novikov montre que pour les martingales continues on ne peut pas diminuer la constante 1/2 qui figure dans la condition

$$E[\exp(\tfrac{1}{2}\langle M,M\rangle_\infty)]<\infty$$

sous peine de perdre l'intégrabilité uniforme de $\mathscr{E}(M)$. Pour les martingales sommes compensées de sauts nous allons montrer sur un exemple inspiré par la même technique que l'on ne peut pas avec $\varepsilon>0$ remplacer les conditions (3.8) et (3.1) par

$$E\left[\exp\left\{(1-\varepsilon)\sum_t\left(\operatorname{Log}(1+\Delta M_t)-\frac{\Delta M_t}{1+\Delta M_t}\right)\right\}\right]<\infty,$$
$$E[\exp\{(1-\varepsilon)[(1+x)\operatorname{Log}(1+x)-x]\cdot\nu_\infty\}]<\infty.$$

Soient $0<b<1$, N la fonction de comptage du processus de Poisson standard,

$$T_b=\inf\{t\colon N_t-(1+b)t=-1\},$$
$$U_n=\inf\{t\colon N_t=n\}.$$

Comme $\{T_b=\infty\}=\bigcap_n\left\{U_n\leqq\frac{n}{1+b}\right\}$ p.s. et que U_n/n tend vers 1 p.s. d'après la loi des grands nombres, il en résulte que $P(T_b=\infty)=0$, donc

$$N_{T_b}-(1+b)T_b=-1 \text{ p.s.}$$

Pour tout λ réel,

$$E[\exp-\lambda(N_t-(1+b)t)]=\exp(tf(\lambda)),$$

où $f(\lambda)=e^{-\lambda}+\lambda(1+b)-1$. Le processus $\exp\{-\lambda(N_t-(1+b)t)-tf(\lambda)\}$ est donc une martingale pour la filtration engendrée par le processus N, et par application du théorème d'arrêt des surmartingales positives,

$$E[\exp(-T_bf(\lambda))]\leqq e^{-\lambda}.$$

Si l'on pose $M_t=N_t-t$, alors $\mathscr{E}(M)_t=\exp(N_t\operatorname{Log}2-t)$,

$$E[\mathscr{E}(M)_{T_b}]=\tfrac{1}{2}E[\exp\{T_b((1+b)\operatorname{Log}2-1)\}].$$

Comme

$$(1+b)\operatorname{Log}2-1\leqq(1+b)\operatorname{Log}(1+b)-b=-f(-\operatorname{Log}(1+b)),$$

nous obtenons

$$E[\mathscr{E}(M)_{T_b}]\leqq\tfrac{1}{2}E[\exp\{-T_bf(-\operatorname{Log}(1+b))\}]=\frac{1+b}{2}<1.$$

Cependant, pour tout $\varepsilon>0$, nous pouvons trouver $b<1$ tel que

$$E[\exp\{(1-\varepsilon)N_{T_b}(\mathrm{Log}\,2-1/2)\}]<\infty,$$
$$E[\exp\{(1-\varepsilon)T_b(2\,\mathrm{Log}\,2-1)\}]<\infty.$$

Il suffit pour cela que respectivement

$$(1+b)\,\mathrm{Log}\,(1+b)-b\geqq(1-\varepsilon)(1+b)(\mathrm{Log}\,2-\tfrac{1}{2}),$$
$$(1+b)\,\mathrm{Log}\,(1+b)-b\geqq(1-\varepsilon)(2\,\mathrm{Log}\,2-1).$$

VI.3. Prenons le même exemple du processus de Poisson N, avec cette fois

$$M_t=(e-1)(N_t-t)$$

Si T est le premier instant de saut de N, alors $\mathscr{E}(M)^T$ est bornée donc uniformément intégrable, et on constate que la condition (3.8) est satisfaite pour M^T. Cependant la condition (3.1) ne l'est pas puisque le système de Lévy ν de M^T est

$$\nu(dt,dx)=1_{\{t\leqq T\}}\,dt\,\varepsilon_{e-1}(dx)$$

et que

$$E[\exp\{[(1+x)\,\mathrm{Log}\,(1+x)-x]\cdot\nu_\infty\}]=E[\exp T]=+\infty.$$

Inversement, prenons

$$\begin{aligned}&\Omega=]-1,+1[,\\ &\mathscr{F}_t=(\emptyset,\Omega) && \text{si } t<1\\ &\quad=\mathscr{B}_{]-1,+1[} && \text{si } t\geqq 1,\end{aligned}$$

P la loi uniforme sur $]-1,+1[$.

Le processus M tel que

$$\begin{aligned}M_t(x)&=0 && \text{si } t<1\\ &=x && \text{si } t\geqq 1\end{aligned}$$

définit une martingale bornée avec un seul saut en $t=1$, et par conséquent $\mathscr{E}(M)$ est bornée et uniformément intégrable. La condition (3.8) n'est pas vérifiée puisque

$$E\left[\sum_t \mathrm{Log}\,(1+\Delta M_t)-\frac{\Delta M_t}{1+\Delta M_t}\right]=\int_{-1}^{+1}\left(\mathrm{Log}\,(1+x)-\frac{x}{1+x}\right)dx=+\infty$$

mais la condition (3.1) est satisfaite car

$$\nu(dt,dx)=1_{\{-1<x<+1\}}\varepsilon_1(dt)\,dx$$
$$[(1+x)\,\mathrm{Log}\,(1+x)-x]\cdot\nu_\infty=\int_{-1}^{+1}[(1+x)\,\mathrm{Log}(1+x)-x]\,dx\leqq 2.$$

Les théorèmes III.1 et III.7 ne sont donc pas équivalents, le premier convenant plutôt pour des martingales à sauts proches de -1, le second pour des martingales à grands sauts positifs.

VI.4. L'exemple suivant est destiné à montrer que le théorème II.2.b peut nous permettre de conclure à l'intégrabilité uniforme de $\mathscr{E}(M)$ lorsque III.1 ne le permet pas. Soient $\Omega = D([0, \infty[)$ l'espace des fonctions continues à droite et limitées à gauche à valeurs réelles, X le processus canonique défini par $X_t(\omega) = \omega(t)$, $\mathscr{F}_t^0 = \sigma(X_s, s \leqq t)$, $\mathscr{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s^0$ et $\mathscr{F} = V \mathscr{F}_t$. Soit encore

$$F(x) = 0 \qquad \text{si } x \leqq 1$$
$$= \frac{1}{x(1+x)\operatorname{Log}^2(1+x)} \qquad \text{si } x > 1.$$

Il existe une probabilité P unique sur $(\Omega, \mathscr{F})$ telle que X soit une martingale somme compensée de sauts à accroissements indépendants, de système de Lévy $v^X(dt, dx) = F(x)\, dt\, dx$. Si T est un temps fini non aléatoire, soient $M = X^T$ et v le système de Lévy de M. Alors,

$$|x| \cdot v_\infty = T \int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)\operatorname{Log}^2(1+x)} = \frac{T}{\operatorname{Log} 2}.$$

D'après II.2.b, $\mathscr{E}(M)$ est à variation intégrable, donc uniformément intégrable, cependant

$$((1+x)\operatorname{Log}(1+x) - x) \cdot v_\infty = +\infty.$$

Notons aussi que M n'est pas de carré intégrable, et pourtant la conclusion de V.2.c n'est pas vraie car ΔM n'est pas majoré.

VI.5. Montrons enfin qu'on ne peut guère affaiblir les hypothèses de la proposition I.5.b. Soit en effet une suite (D_k) de variables aléatoires indépendantes de lois données par

$$D_k = -\frac{1}{k} \qquad \text{avec probabilité } 1 - \frac{1}{k^2}$$
$$= k - \frac{1}{k} \qquad \text{avec probabilité } \frac{1}{k^2}.$$

Si $M_n = \sum_{k=1}^n D_k$, on vérifie facilement que $M_\infty = -\infty$ p.s., $\mathscr{E}(M)_\infty = 0$ p.s., et pourtant $[M, M]_\infty < \infty$ p.s.

Références

1. Dellacherie, C.: Capacités et processus stochastiques. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1972
2. Doléans-Dade, C.: Quelques applications de la formule de changement de variables pour les semimartingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **16**, 181–194 (1970)

3. Gihman, I.I., Skorohod, A.V.: Stochastic differential equations. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1972
4. Grigelionis, B.: Sur la continuité absolue des mesures associées à des processus stochastiques (en russe). Lietuvos Matematikos Rinkinys **11**, 783–794 (1971)
5. Jacod, J.: Multivariate point processes: predictable projection, Radon-Nikodym derivatives, representation of martingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **31**, 235–253 (1975)
6. Jacod, J.: Un théorème de représentation pour les martingales discontinues. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **34**, 225–244 (1976)
7. Jacod, J., Mémin, J.: Caractéristiques locales et conditions de continuité absolue pour les semi-martingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **35**, 1–37 (1976)
8. Kunita, H., Watanabe, S.: On square integrable martingales. Nagoya Math. J. **30**, 209–245 (1967)
9. Lenglart, E.: Transformation des martingales locales par changement de probabilité. Propriétés locales des semi-martingales. Applications aux équations différentielles stochastiques. Université de Rouen (1976)
10. Lepeltier, J.P., Marchal, B.: Problème des martingales et équations différentielles associées à un opérateur intégro-différentiel. Ann. Inst. H. Poincaré, Section B**12**, 43–103 (1976)
11. Liptzer, R.C., Shiryaev, A.N.: Sur la continuité absolue des mesures correspondant à des processus de diffusion par rapport à la mesure de Wiener (en russe). Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Mat. **36**, 877–889 (1972)
12. Liptzer, R.C., Shiryaev, A.N.: Statistiques des processus stochastiques. Moscou 1974 (traduction à l'Université de Rennes 1976)
13. McKean, H.P.: Stochastic integrals. New York: Academic Press 1969
14. Meyer, P.A.: Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire de probabilités X, Lecture Notes in Math. 511. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1976
15. Neveu, J.: Martingales à temps discret. Paris: Masson 1972
16. Novikov, A.A.: On an identity for stochastic integrals. Theor. Probability Appl. **17**, 717–720 (1972)
17. Novikov, A.A.: On discontinuous martingales. Theor. Probability Appl. **20**, 11–26 (1975)
18. Peyrière, J.: Etude de quelques propriétés des produits de Riesz. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **25**, 127–171 (1975)
19. Stroock, D.W., Varadhan, S.R.S.: Diffusion processes with continuous coefficients I, II. Comm. Pure Appl. Math. **22**, 345–400 et 479–530 (1969)
20. Yoeurp, C.: Décompositions des martingales locales et formules exponentielles. Séminaire de probabilités X, Lexture Notes in Math. 511. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1976
21. Yoeurp, C., Yor, M.: Espace orthogonal à une semi-martingale; applications. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete (à paraître)
22. Yor, M.: Sur les intégrales stochastiques optionnelles et une suite remarquable de formules exponentielles. Séminaire de probabilités X, Lecture Notes in Math. 511. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1976

Reçu le 16 juillet 77