Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 10, 63—69 (1968)

Die Existenz von Lösungen gewisser Optimalprobleme für lineare Funktionale

K. Neumann

Eingegangen am 13. Juni 1967

Summary. The existence of solutions of a programming problem for certain functionals is proved. In this problem we have to optimize a linear functional restricted by a system of linear differential equations. Problems of this kind are found by controlling of economic, technical and other processes.

Wir betrachten das folgende Optimierungsproblem

$$F[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t)] \to \text{Max.}, \tag{1}$$

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}(t)\,\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{c}(t), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{x}(t') = \boldsymbol{x}'. \tag{3}$$

$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ und $\boldsymbol{c}$ seien reelle Vektoren und $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ reelle Matrizen der Gestalt

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_m \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A} = (a_{ik})_{m,m} \quad \boldsymbol{B} = (b_{ij})_{m,n},$$

wobei wir die $a_{ik}(t)$, $b_{ij}(t)$ und $c_i(t)$ als im Intervall $[t', t'']$ beschränkt und Lebesgue-integrabel annehmen. F sei ein beschränktes lineares Funktional von $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$[1]. Wir setzen ferner voraus, daß die $y_j(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$ in $[t', t'']$ Lebesgue-integrierbar und die Funktionswerte $\boldsymbol{y}(t)$ für alle $t \in [t', t'']$ aus einer beschränkten, abgeschlossenen und konvexen Teilmenge S des R^n sind (S kann auch noch von t abhängen)[2]. Dies wollen wir zusammengefaßt mit

$$\boldsymbol{y}(t) \in \boldsymbol{L}^S[t', t''] \tag{4}$$

bezeichnen. $\boldsymbol{y}(t)$, die der Bedingung (4) genügen, nennen wir *zulässig*. Schließlich ist manchmal für die Lösung $\boldsymbol{x}(t)$ von (2) und (3) zusätzlich die Bedingung

$$\boldsymbol{x}(t'') = \boldsymbol{x}'' \tag{5}$$

vorgegeben. Wir setzen in diesem Fall voraus, daß das System (2), (3), (5) für wenigstens ein zulässiges $\boldsymbol{y}(t)$ eine Lösung besitzt.

[1] Das heißt, F ist bezüglich der $(m+n)$-dimensionalen Variablen $(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ linear.

[2] In diesem Fall setzen wir die gleichmäßige Beschränktheit von $S(t)$ in $[t', t'']$ voraus, d.h., es existiere eine beschränkte Menge $\hat{S} \subset R^n$ mit $S(t) \subset \hat{S}$ für alle $t \in [t', t'']$. Ferner seien die den Bereich $S(t)$ definierenden Restriktionsfunktionen bezüglich t stückweise stetig.

Problemstellungen der Art (1)—(4) bzw. (1)—(5) treten in der Praxis häufig auf, insbesondere, wenn es sich um in der Zeit ablaufende steuerbare wirtschaftliche, technische o.a. Prozesse handelt. Das Funktional F kann dann als Gewinn oder allgemeiner Nutzen gedeutet werden, und $\boldsymbol{y}(t)$ charakterisiert die Steuerung des Prozesses. Ein Überblick über solche Probleme sowie Verfahren zu ihrer Lösung wird in [4] gegeben. Weitere Beispiele finden sich in [6] und ausführlichere Darstellungen der Lösungsmethoden in [5] und [6].

Da die rechte Seite der Differentialgleichung (2)[3] bezüglich t i.a. nur integrierbar und nicht stetig ist, führen wir den verallgemeinerten Lösungsbegriff einer Differentialgleichung von Carathéodory (s. z.B. [1]) ein. Unter der Lösung einer Differentialgleichung mit zugehöriger Anfangsbedingung der Gestalt

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \qquad x(t') = x'$$

verstehen wir dabei die Lösung der Integralgleichung

$$x(t) = \int_{t'}^{t} f(x(\tau), \tau)\, d\tau + x'. \tag{6}$$

Im Fall eines Vektors $\boldsymbol{x}(t)$ mit mehreren Komponenten tritt an die Stelle von (6) ein entsprechendes Integralgleichungssystem.

Die Lösung $\boldsymbol{x}(t)$ von (2) und (3) hängt von der Funktion $\boldsymbol{y}(t)$ ab, d.h., wir können $\boldsymbol{x}(t)$ in der Form

$$\boldsymbol{x}(t) = T\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{g}(t) \tag{7}$$

schreiben, wobei T ein Operator und $\boldsymbol{g}(t)$ ein von $\boldsymbol{y}(t)$ unabhängiger Term ist. Setzen wir (7) in (1) ein, so ergibt sich ein Funktional

$$G[\boldsymbol{y}(t)] := F[T\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{g}(t), \boldsymbol{y}(t)]. \tag{8}$$

Wir sagen nun, daß $\boldsymbol{y}^*(t)$ eine Lösung unseres Problems ist (das zugehörige $\boldsymbol{x}^*(t)$ ergibt sich dann aus (7)), wenn das Funktional G für $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}^*(t)$ sein Maximum annimmt:

$$G[\boldsymbol{y}^*(t)] = \max_{\boldsymbol{y}(t) \in \boldsymbol{L}^S[t', t'']} G[\boldsymbol{y}(t)].$$

Für unsere oben formulierte Problemstellung kann man die Existenz einer Lösung beweisen, d.h. es gilt der

Existenzsatz. *Unter den obigen Voraussetzungen besitzen die Probleme* (1)—(4) *und* (1)—(5) *eine Lösung.*

Für einen Spezialfall unseres Problems, bei dem sich das Funktional F auf die Differenz $t'' - t'$ von End- und Anfangspunkt des t-Intervalls reduziert (t ist hierbei variabel)[4] und S von t unabhängig und ein Polyeder ist, ist schon in [6] die Existenz einer Lösung bewiesen worden. Soweit für uns zutreffend, werden wir auch einige Ideen daraus für den Beweis unseres Existenzsatzes verwenden. Viele

[3] Im folgenden werden wir manchmal von einer Differentialgleichung (für $\boldsymbol{x}(t)$) und an anderer Stelle von einem Differentialgleichungssystem (für $x_1(t), \ldots, x_m(t)$) sprechen.

[4] Man spricht dann auch von sogenannten „schnelligkeitsoptimalen Problemen“.

praktisch wichtige Problemstellungen werden aber durch diesen Spezialfall nicht erfaßt, beispielsweise, wenn F ein bestimmtes Integral mit einem bezüglich $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ linearen Integranden oder etwa schon im eindimensionalen Fall $y(t)$ durch zwei beschränkte Funktionen $y^-(t)$ und $y^+(t)$ begrenzt ist:

$$y^-(t) \leqq y(t) \leqq y^+(t) \quad \text{für} \quad t \in [t', t''] .$$

Der *Beweis* des Existenzsatzes erfolgt in drei Schritten (durch die Hilfssätze 1, 2 und 3 gekennzeichnet). Zunächst weisen wir nach, daß der Operator T in (7) linear und beschränkt ist, dann zeigen wir die Existenz einer Funktion $\boldsymbol{y}^*(t) \in \boldsymbol{L}[t', t'']$, für die das Supremum des Funktionals G über dem Funktionenraum $\boldsymbol{L}^S[t', t'']$ angenommen wird, und beweisen schließlich, daß die Funktionswerte dieses $\boldsymbol{y}^*(t)$ für alle $t \in [t', t'']$ der Menge $S(t)$ angehören, d.h. $\boldsymbol{y}^*(t)$ in $\boldsymbol{L}^S[t', t'']$ liegt und damit Lösung unseres Problems ist.

Hilfssatz 1. *Die Lösung $\boldsymbol{x}(t)$ der Differentialgleichung* (2)[5], *deren rechte Seite bezüglich $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ linear ist, mit der Anfangsbedingung* (3) *hängt linear von $\boldsymbol{y}(t)$ ab, d.h., es gilt*

$$\boldsymbol{x}(t) = T\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{g}(t) ,$$

wobei T ein linearer beschränkter Operator und $\boldsymbol{g}(t)$ von $\boldsymbol{y}(t)$ unabhängig ist.

Beweis. Nach obiger Voraussetzung ist die Lösung von (2), (3) dem (vektoriell geschriebenen) Integralgleichungssystem

$$\boldsymbol{x}(t) = \int_{t'}^{t} \boldsymbol{A}(\tau)\,\boldsymbol{x}(\tau)\,d\tau + \int_{t'}^{t} [\boldsymbol{B}(\tau)\,\boldsymbol{y}(\tau) + \boldsymbol{c}(\tau)]\,d\tau + \boldsymbol{x}' \tag{9}$$

äquivalent. (9) ist ein lineares Volterrasches Integralgleichungssystem zweiter Art, dessen allgemeine Form

$$\boldsymbol{x}(t) = \int_{t'}^{t} \boldsymbol{K}(t, \tau)\,\boldsymbol{x}(\tau)\,d\tau + \boldsymbol{z}(t) \tag{10}$$

lautet. Sind $\boldsymbol{K}(t, \tau)$ quadratisch integrabel und $\boldsymbol{z}(t)$ integrabel und beide beschränkt, so besitzt (10) genau eine Lösung, die sich in der Form

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{z}(t) + \int_{t'}^{t} \boldsymbol{R}(t, \tau)\,\boldsymbol{z}(\tau)\,d\tau \tag{11}$$

darstellen läßt, wobei $\boldsymbol{R}(t, \tau)$ die sogenannte „Resolvente" ist (s. etwa [7]), die nicht von $\boldsymbol{z}(t)$ abhängt. Unser Integralgleichungssystem (9) mit

$$\boldsymbol{K}(t, \tau) = \boldsymbol{A}(\tau) , \qquad \boldsymbol{z}(t) = \int_{t'}^{t} [\boldsymbol{B}(\tau)\,\boldsymbol{y}(\tau) + \boldsymbol{c}(\tau)]\,d\tau + \boldsymbol{x}' \tag{12}$$

erfüllt die für die eindeutige Lösbarkeit von (10) angegebenen Voraussetzungen. Aus (11) und (12) ersieht man die Additivität, Homogenität und Stetigkeit und damit auch Beschränktheit des Operators T in (7). Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

---

[5] Daß für jedes $\boldsymbol{y}(t) \in \boldsymbol{L}^S[t', t'']$ eine solche (eindeutige) Lösung $\boldsymbol{x}(t)$ existiert, ergibt sich aus dem folgenden Beweis.

Ist die rechte Seite der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, t)$$

nicht mehr linear bezüglich (x, y), so kann man einen solch einfachen Zusammenhang zwischen $y(t)$ und $x(t)$, wie ihn Hilfssatz 1 für den linearen Fall angibt, nicht mehr erwarten. Das zeigt schon das eindimensionale einfache bilineare Beispiel

$$\frac{dx}{dt} = xy \qquad x(t') = x',$$

das die Lösung

$$x(t) = x' e^{\int_{t'} y(\tau)d\tau}$$

besitzt.

Hilfssatz 2. *Es existiert ein* $y^*(t) \in L[t', t'']$ *mit*

$$G[y^*(t)] = \sup_{y(t)\in L^S[t',t'']} G[y(t)].$$

Für den *Beweis* dieses Hilfssatzes benötigen wir einige Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis (s. etwa [3]). Wegen (4) gehört jedes $y_j(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$ einer gewissen Kugel von $L[t', t'']$ an. In den Funktionenräumen $L_p[t', t'']$ ist nun jede Kugel schwach kompakt. Die schwache Kompaktheit einer Teilmenge M eines metrischen Raumes X besagt definitionsgemäß, daß sich aus jeder Folge von Elementen $\varphi^{(\nu)}(t) \in M$ eine Teilfolge auswählen läßt, die gegen eine Funktion $\varphi^0(t) \in M$ schwach konvergiert. Dabei heißt eine Folge $\{\varphi^{(\nu)}(t)\} \subset X$ schwach konvergent gegen $\varphi^0(t) \in X$ (i.Z. $\varphi^{(\nu)}(t) \rightharpoonup \varphi^0(t)$), wenn für alle beschränkten linearen Funktionale $\Phi(\varphi)$ mit $\varphi \in X$ gilt:

$$\lim_{\nu\to\infty} \Phi(\varphi^{(\nu)}) = \Phi(\varphi^0). \tag{13}$$

Aus jeder Folge von Funktionen $\{y_j^{(\nu)}(t)\}$ $(j = 1, \ldots, n)$ mit $\{y^{(\nu)}(t)\} \subset L^S[t', t'']$ läßt sich also eine gegen eine Funktion $y_j^*(t) \in L[t', t'']$ $(j = 1, \ldots, n)$ schwach konvergente Teilfolge auswählen, d.h. (in vektorieller Schreibweise)

$$y^{(\nu)}(t) \rightharpoonup y^*(t) \in L[t', t''].$$

Es sei hier darauf hingewiesen, daß aus unserem Beweis nicht folgt, daß $y^*(t) \in L^S[t', t'']$ ist, d.h. für alle $t \in [t', t'']$ die Funktionswerte $y^*(t)$ in $S(t)$ liegen. Dies werden wir erst in Hilfssatz 3 beweisen.

In [5] wird nun ein Verfahren angegeben, mit dessen Hilfe man für unser Problem eine Maximalfolge $\{y^{(\nu)}(t)\} \subset L^S[t', t'']$ konstruieren kann[6], d.h., es ist

$$\lim_{\nu\to\infty} G[y^{(\nu)}(t)] = \sup_{y\in L^S} G[y(t)]^7. \tag{14}$$

$\{y^{(\nu)}(t)\}$ besitzt nach obigem einen schwachen Grenzwert $y^*(t)$. Wegen der in

[6] In [5] wird anstelle des Funktionals $F[x(t), y(t)]$ in (1) ein von $x(t)$ und $y(t)$ abhängiges Integral betrachtet. Da das Funktional F linear ist und sich folglich in der Form eines Stieltjes-Integrals schreiben läßt, kann man das in [5] geschilderte Verfahren ohne weiteres auf unseren Fall übertragen.

[7] Da F und damit G sowie L^S beschränkt sind, existiert das Supremum.

Hilfssatz 1 bewiesenen Linearität[8] des Operators T und der Linearität von F ist auf Grund (7) und (8) auch das Funktional $G[\boldsymbol{y}(t)]$ bis auf einen von $\boldsymbol{y}(t)$ unabhängigen Summanden, der unsere Konvergenzbetrachtungen nicht beeinflußt, linear. Nach Definition der schwachen Konvergenz (s. (13)) haben wir damit

$$\lim_{\nu\to\infty} G[\boldsymbol{y}^{(\nu)}(t)] = G[\boldsymbol{y}^*(t)]. \tag{15}$$

(14) und (15) ergeben zusammen das gewünschte Resultat

$$G[\boldsymbol{y}^*(t)] = \sup_{\boldsymbol{y}\in \boldsymbol{L}^S} G[\boldsymbol{y}(t)]. \tag{16}$$

Da wir, wie schon erwähnt, noch nicht wissen, ob $\boldsymbol{y}^*(t) \in \boldsymbol{L}^S[t', t'']$ gilt, sondern nur, daß $\boldsymbol{y}^*(t) \in \boldsymbol{L}[t', t'']$ ist, können wir in (16) nicht „sup" durch „max" ersetzen.

Bisher haben wir nicht den Fall betrachtet, daß zusätzlich zu der Anfangsbedingung (3) für die Differentialgleichung (2) die Endbedingung (5) vorgegeben ist. Wir müssen also noch zeigen, daß ein $\boldsymbol{y}^*(t)$ existiert, für das die Beziehung (16) gilt und dessen zugehörige Lösung $\boldsymbol{x}^*(t)$ von (2) und (3), die sich aus (7) für $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}^*(t)$ ergibt, der Bedingung $\boldsymbol{x}^*(t'') = \boldsymbol{x}''$ genügt.

Für alle $\boldsymbol{y}(t) \in \boldsymbol{L}[t', t'']$ hängt $\boldsymbol{x}(t)$ linear von $\boldsymbol{y}(t)$ ab. Insbesondere gilt dies für diejenigen $\boldsymbol{y}(t)$, deren zugehöriges $\boldsymbol{x}(t)$ die Endbedingung (5) erfüllt. Wir haben damit bis eventuell auf eine unwesentliche additive Konstante

$$\boldsymbol{x}(t'') = \Psi[\boldsymbol{y}(t)], \tag{17}$$

wobei Ψ ein lineares Funktional ist.

Mit Hilfe des oben erwähnten, in [5] geschilderten Verfahrens können wir auch eine Maximalfolge $\{\boldsymbol{y}^{(\nu)}(t)\}$ erhalten, deren zugehörige $\boldsymbol{x}^{(\nu)}(t)$ der Endbedingung (5) genügen, d.h., es ist $\boldsymbol{x}^{(\nu)}(t'') = \boldsymbol{x}''$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ und somit

$$\lim_{\nu\to\infty} \boldsymbol{x}^{(\nu)}(t'') = \boldsymbol{x}''. \tag{18}$$

$\boldsymbol{y}^*(t)$ sei nun der schwache Grenzwert der Maximalfolge $\{\boldsymbol{y}^{(\nu)}(t)\}$ und $\boldsymbol{x}^*(t)$ die sich aus (7) für $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}^*(t)$ ergebende Lösung von (2) und (3). Nach (17) ist

$$\boldsymbol{x}^*(t'') = \Psi[\boldsymbol{y}^*(t)] \tag{19}$$

und, da Ψ ein lineares Funktional und $\{\boldsymbol{y}^{(\nu)}(t)\}$ eine schwach gegen $\boldsymbol{y}^*(t)$ konvergierende Folge ist,

$$\Psi[\boldsymbol{y}^*(t)] = \lim_{\nu\to\infty} \Psi[\boldsymbol{y}^{(\nu)}(t)]. \tag{20}$$

Mit (17) und (18) haben wir dann

$$\lim_{\nu\to\infty} \Psi[\boldsymbol{y}^{(\nu)}(t)] = \lim_{\nu\to\infty} \boldsymbol{x}^{(\nu)}(t'') = \boldsymbol{x}''. \tag{21}$$

(19), (20) und (21) ergeben zusammen die gewünschte Beziehung

$$\boldsymbol{x}^*(t'') = \boldsymbol{x}''.$$

Hilfssatz 3. *Die Funktionswerte der nach Hilfssatz 2 existierenden Funktion* $\boldsymbol{y}^*(t) \in \boldsymbol{L}[t', t'']$ *liegen für alle* $t \in [t', t'']$ *in der Menge* $S(t)$.

[8] Wenn wir im folgenden von der Linearität eines Operators oder Funktionals sprechen, so sei die Beschränktheit gleich mit eingeschlossen, wie es vielfach in der Funktionalanalysis üblich ist (siehe etwa [3]).

Beweis. E sei die Menge derjenigen $t \in [t', t'']$, für die $\boldsymbol{y}^*(t) \notin S(t)$[9] ist. Wir werden zeigen, daß für diese Menge das Lebesguesche Maß μ Null ist. Dann können wir $\boldsymbol{y}^*(t)$ auf E so abändern, daß für alle $t \in [t', t'']$ $\boldsymbol{y}^*(t) \in S(t)$ ist. Dies hat keinen Einfluß auf die Konvergenzbetrachtungen beim Beweis des vorigen Hilfssatzes und die zu $\boldsymbol{y}^*(t)$ gehörige Lösung $\boldsymbol{x}^*(t)$ von (2), (3) bzw. (2), (3), (5).

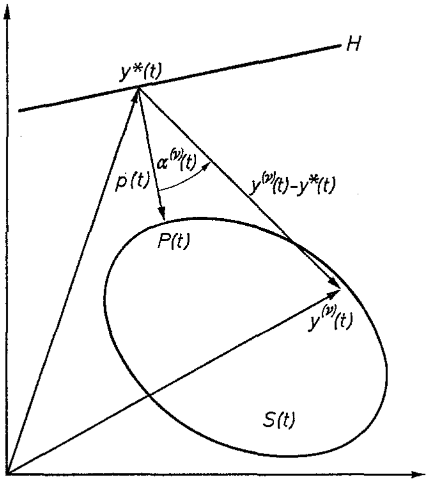

Fig. 1. Steuerbereich $S(t)$ und Hyperebene H im zweidimensionalen Fall

Wir nehmen an, daß $\mu(E) > 0$ ist und werden daraus einen Widerspruch ableiten. Im folgenden sei stets $t \in E$. Da $S(t)$ abgeschlossen und konvex ist, können wir das *Theorem der trennenden Hyperebene* (s. etwa [2]) anwenden. Es sichert die Existenz einer Hyperebene H mit der Eigenschaft, daß $S(t)$ ganz in einem der beiden durch H bestimmten offenen Halbräume liegt. Eine solche Hyperebene ist z.B. diejenige, die den Punkt $\boldsymbol{y}^*(t)$ enthält und zu dem von $\boldsymbol{y}^*(t)$ auf $S(t)$ gefällten Lot orthogonal ist (s. Fig. 1). Sei $P(t)$ der Fußpunkt dieses Lotes, $\boldsymbol{p}(t)$ der von $\boldsymbol{y}^*(t)$ nach $P(t)$ führende Vektor und $\boldsymbol{p}(t)(\boldsymbol{y}^{(\nu)}(t) - \boldsymbol{y}^*(t))$ das Skalarprodukt von $\boldsymbol{p}(t)$ und $\boldsymbol{y}^{(\nu)}(t) - \boldsymbol{y}^*(t)$[10], dann ist

$$\int_E \boldsymbol{p}(t)(\boldsymbol{y}^{(\nu)}(t) - \boldsymbol{y}^*(t))\,dt \tag{22}$$

ein lineares Funktional von $\boldsymbol{y}^{(\nu)}(t) - \boldsymbol{y}^*(t)$. Ist $\alpha^{(\nu)}(t)$ der Winkel zwischen $\boldsymbol{p}(t)$ und $\boldsymbol{y}^{(\nu)}(t) - \boldsymbol{y}^*(t)$, so haben wir

$$\boldsymbol{p}(t)(\boldsymbol{y}^{(\nu)}(t) - \boldsymbol{y}^*(t)) = |\boldsymbol{p}(t)|\,|\boldsymbol{y}^{(\nu)}(t) - \boldsymbol{y}^*(t)|\cos\alpha^{(\nu)}(t). \tag{23}$$

Da $\boldsymbol{p}(t)$ der Lotvektor von $\boldsymbol{y}^*(t)$ auf $S(t)$ ist und $\boldsymbol{y}^{(\nu)}(t)$ in $S(t)$ liegt, gilt

$$|\boldsymbol{y}^{(\nu)}(t) - \boldsymbol{y}^*(t)| \geqq |\boldsymbol{p}(t)|$$

und wegen der Abgeschlossenheit von $S(t)$

$$p := \inf_{t \in E} |\boldsymbol{p}(t)| > 0.$$

Auf Grund der Konvexität und gleichmäßigen Beschränktheit von $S(t)$ gibt es einen Winkel α so, daß für alle $t \in E$ und alle $\nu = 1, 2, \ldots$

$$|\alpha^{(\nu)}(t)| \leqq \alpha < \frac{\pi}{2}$$

---

[9] Unter $\boldsymbol{y}(t)$ sei hier und bei den folgenden geometrischen Überlegungen immer der betreffende Funktionswert, d.h. ein vom Parameter t abhängiger Punkt des R^n, und nicht eine Funktion als Element des Funktionenraumes $\boldsymbol{L}$ zu verstehen.

[10] $\{\boldsymbol{y}^{(\nu)}(t)\}$ sei wieder die im Beweis von Hilfssatz 2 betrachtete Maximalfolge, die schwach gegen $\boldsymbol{y}^*(t)$ konvergiert.

ist. Damit folgt aus (23)

$$\boldsymbol{p}(t)\,(\boldsymbol{y}^{(\nu)}(t) - \boldsymbol{y}^*(t)) \geqq p^2 \cos\alpha > 0\,,$$

und für das lineare Funktional (22) haben wir

$$\int_E \boldsymbol{p}(t)\,(\boldsymbol{y}^{(\nu)}(t) - \boldsymbol{y}^*(t))\,dt \geqq \mu(E)\,p^2 \cos\alpha > 0\,. \tag{24}$$

(24) gilt dabei für alle $\nu = 1, 2, \ldots$. Es ergibt sich also ein Widerspruch zu der schwachen Konvergenz von $\{\boldsymbol{y}^{(\nu)}(t)\}$ gegen $\boldsymbol{y}^*(t)$, da wegen der Linearität des Funktionals (22)

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_E \boldsymbol{p}(t)\,(\boldsymbol{y}^{(\nu)}(t) - \boldsymbol{y}^*(t))\,dt = 0$$

ist. Die Annahme $\mu(E) > 0$ ist somit falsch.

Auf Grund Hilfssatz 3 ist also $\boldsymbol{y}^*(t) \in \boldsymbol{L}^S[t', t'']$, und wir können in (16) statt „sup" „max" schreiben:

$$G[\boldsymbol{y}^*(t)] = \max_{\boldsymbol{y}\in \boldsymbol{L}^S} G[\boldsymbol{y}(t)]\,.$$

Damit ist unser Existenzsatz bewiesen.

Literatur

1. Carathéodory, C.: Vorlesungen über reelle Funktionen. Leipzig-Berlin: B. G. Teubner 1927.
2. Hadley, G.: Linear algebra. Palo Alto-London: Addison-Wesley Publishing Comp., Reading Mass. 1961.
3. Ljusternik, L. A., u. W. I. Sobolew: Elemente der Funktionalanalysis. Berlin: Akademie-Verlag 1960.
4. Neumann, K.: Dynamische Optimierung und Pontrjaginsches Maximumprinzip. Unternehmensforsch. **12**, 55—70 (1968).
5. — Zur Theorie und Praxis der dynamischen Optimierung, Teil II. Unternehmensforsch. **9**, 201—216 (1965).
6. Pontrjagin, L. S.: Mathematische Theorie optimaler Prozesse. München-Wien: R. Oldenbourg 1964.
7. Schmeidler, W.: Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG 1955.

Dr. K. Neumann
8011 Putzbrunn/ bei München
Äußere Ottobrunner Str. 3