Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 18, 227–260 (1971)

Die Anzahl der γ-Niveau-Kreuzungspunkte von stochastischen Prozessen*

WERNER FIEGER

In mehreren in den letzten Jahren veröffentlichten Arbeiten ist die Frage untersucht worden, welche Voraussetzungen über einen reellen stochastischen Prozeß oder spezieller über einen Gaußschen Prozeß $x(t, \omega)$ die Existenz des Erwartungswertes der Anzahl der Nullniveau-Kreuzungspunkte und der Anzahl der γ-Niveau-Kreuzungspunkte von $x(t, \omega)$ zur Folge haben.

Das Problem der Nullniveau-Kreuzungspunkte wurde für stationäre Gaußsche Prozesse erstmals 1945 von Rice [17] untersucht. Die von Rice gegebene Herleitung seines Ergebnisses ist mathematisch nicht exakt, das Ergebnis aber ist richtig. Vollständige Beweise für das Ergebnis von Rice und auch für Ergebnisse über den Erwartungswert der Anzahl der γ-Niveau-Kreuzungspunkte haben dann in der Folgezeit verschiedene Autoren angegeben, teils unter immer schwächeren Voraussetzungen über die Pfade des Gaußschen Prozesses $x(t, \omega)$, teils auch nur für Gaußsche Prozesse ganz spezieller Form [7]. Von Grenander und Rosenblatt [7], Ivanov [9], Bulinskaya [2] und Leadbetter und Cryer [13, 15] wurden dabei Modifikationen einer Methode benutzt, die erstmals von Kac [10] bei der Berechnung des Erwartungswertes der Anzahl der reellen Nullstellen eines Polynoms mit zufälligen Koeffizienten angewandt wurde. Der Nachteil dieser Methode von Kac ist, daß sie sich nur anwenden läßt, wenn die erste Ableitung der Pfade des stochastischen Prozesses existiert und stetig ist. Von Ylvisaker [19] wurde eine andere Beweismethode verwendet, die in ersten Ansätzen, allerdings gekoppelt mit der Methode von Kac, bereits bei Bulinskaya [2] zu finden ist. Von Ylvisaker und auch von Leadbetter [14], der die Methode von Ylvisaker übernommen hat, wird nur die Stetigkeit der Pfade des Gaußschen Prozesses vorausgesetzt.

Für einen stationären Gaußschen Prozeß wurde von Ylvisaker [19] das Problem, zumindestens soweit es die Anzahl der Nullniveau-Kreuzungspunkte betrifft, durch folgenden Satz vollständig gelöst: Ist $x(t, \omega)$ ein über $[0, 1]$ erklärter stationärer Gaußscher Prozeß mit stetigen Pfaden, ist $E\,x(t, \omega)=0$ für jedes t, und bezeichnet $r(t)$ die Kovarianzfunktion $\operatorname{cov}(x(t, \omega), x(0, \omega))$ von $x(t, \omega)$, so existiert der Erwartungswert der Anzahl der Nullniveau-Kreuzungspunkte von $x(t, \omega)$ in $[0, 1]$ genau dann, wenn $r''(0)$ existiert; existiert $r''(0)$, und ist $r(0)=1$, so ist dieser Erwartungswert gleich $\frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{-r''(0)}$.

* Diese Arbeit enthält den zweiten Teil (§ 2 – § 4) der von der Fakultät für Naturwissenschaften I der Universität Fridericiana (TH) Karlsruhe angenommenen Habilitationsschrift des Verfassers. Ein Teil der vorliegenden Ergebnisse ist ohne Beweise in [5] zusammengestellt.

Die von den übrigen zitierten Autoren für stationäre Gaußsche Prozesse bewiesenen Aussagen sind schwächer als dieser Satz von Ylvisaker. Für nichtstationäre Gaußsche Prozesse sind bisher nur hinreichende Bedingungen für die Existenz des Erwartungswerts der Anzahl der γ-Niveau-Kreuzungspunkte [13–15] bekannt. In den meisten der zitierten Arbeiten werden auch hinreichende Bedingungen für die Existenz des Erwartungswertes der Anzahl der Nullniveau-Kreuzungspunkte von stochastischen Prozessen angegeben; es werden dabei im allgemeinen einschneidende Voraussetzungen über die Differenzierbarkeit der Pfade gemacht; nur Leadbetter kommt in seiner Arbeit [14] mit der Voraussetzung der Stetigkeit der Pfade und der Totalstetigkeit der gemeinsamen Verteilungsfunktion von $x(t_1, \omega)$, $x(t_2, \omega)$ für $t_1 \neq t_2$ aus.

Im folgenden werden die bisher bekannten Ergebnisse in zweierlei Hinsicht verallgemeinert:

1. Wir lassen die Voraussetzung der Stetigkeit der Pfade fallen und zeigen, daß eine entsprechende Interpretation des Begriffs „γ-Niveau-Kreuzungspunkt" auch für unstetige Funktionen möglich ist. Für separable stochastische Prozesse $x(t, \omega)$ mit $p(x(t, \omega)=\gamma)=0$ für jedes t des Definitionsbereichs geben wir eine Bedingung an, die notwendig und hinreichend ist für die Existenz des Erwartungswertes der Anzahl der γ-Niveau-Kreuzungspunkte von $x(t, \omega)$.

2. Für nicht notwendig stationäre Gaußsche Prozesse geben wir Bedingungen an, die notwendig und hinreichend für die Existenz des Erwartungswerts der Anzahl der γ-Niveau-Kreuzungspunkte bzw. der Anzahl der Schnittpunkte eines Gaußschen Prozesses mit einer vorgegebenen beschränkten reellen Funktion sind. Diese Bedingungen, die erheblich schwächer sind als die für den nichtstationären Fall bisher bekannten hinreichenden Voraussetzungen, erhalten wir durch Auswertung der in § 6 dieser Arbeit für separable Prozesse bewiesenen Aussagen. Ein wesentliches Hilfsmittel, das sich bei der Behandlung der nichtstationären Prozesse als sehr nützlich erweist, bilden einige Sätze aus der Theorie der Burkill-Unterteilungsintegrale[1].

Im Gegensatz zu den bisherigen Untersuchungen über die Anzahl der γ-Niveau-Kreuzungspunkte beschäftigen wir uns zunächst allgemein mit den Möglichkeiten, den Erwartungswert eines Zählprozesses zu berechnen. Wir beschränken uns dabei auf Intervallzählfunktionen und Zählprozesse mit einer Eigenschaft (Eigenschaft I aus § 2), die anschaulich in etwa der Ordinarität entspricht, und geben in §§ 2 und 3 eine allgemeine Theorie für die Berechnung der Erwartungswerte bei diesen Zählprozessen. Über den Begriff der ausschöpfenden Mengenfunktion gelangen wir zu Satz (3.5), der als Spezialfall den Satz enthält, der von Ylvisaker und Leadbetter benutzt und von ihnen direkt mit dem Satz von Lebesgue bewiesen wurde. Als naheliegende Verallgemeinerung der Aussagen über ausschöpfende Mengenfunktionen geben wir zwei Sätze ((3.6) und (3.7)) an, die z.B. die Behandlung folgender beider Probleme gestatten: 1. Berechnung des Erwartungswertes der Anzahl der γ-Niveau-Kreuzungspunkte, in denen die Ableitung der – als differenzierbar vorausgesetzten – Pfade eines stochastischen

[1] Leadbetter und Cryer haben in [15] vorausgesetzt, daß die Kovarianzfunktion des nichtstationären Gaußschen Prozesses zweimal differenzierbar ist, und konnten deshalb nicht zu der für die Existenz des Erwartungswerts notwendigen und hinreichenden Bedingung gelangen.

Prozesses einen Wert in einem vorgegebenenen Bereich hat; 2. Berechnung des Erwartungswertes der Anzahl der lokalen Maximalstellen eines stochastischen Prozesses. In § 4 beschäftigen wir uns kurz mit der Meßbarkeit von Zählprozessen.

§ 5 enthält die Überlegungen zur Verallgemeinerung des Begriffs „γ-Niveau-Kreuzungspunkt" und einige Aussagen über γ-Niveau-Kreuzungspunkte, die uns in § 6 sofort die angestrebten Aussagen über den Erwartungswert der Anzahl der Kreuzungspunkte eines stochastischen Prozesses mit einer reellen Funktion (Sätze (6.1) und (6.2)) liefern. In § 7 spezialisieren wir unsere Ergebnisse auf den Fall Gaußscher Prozesse und diskutieren hierfür das Burkill-Unterteilungsintegral, das in Satz (6.2) als Wert des Erwartungswertes angegeben ist. Die Ergebnisse, die wir über den Erwartungswert der Anzahl der γ-Niveau-Kreuzungspunkte eines Gaußschen Prozesses und der Anzahl seiner Kreuzungspunkte mit einer beschränkten reellen Funktion erhalten, sind in den Sätzen (7.1), (7.2) und (7.3) zusammengestellt.

In § 1 sind die Definitionen und Aussagen zusammengestellt, die wir über Burkill-Unterteilungsintegrale benötigen.

Wir setzen in dieser Arbeit voraus, daß die betrachteten Intervallfunktionen, Intervallzählfunktionen etc. über dem endlichen Intervall $[a, b]$ erklärt sind und bezeichnen mit Δ zur Abkürzung die Gesamtheit aller Paare (t_1, t_2) mit $a \leqq t_1 < t_2 \leqq b$:

$$\Delta := \{(t_1, t_2) \colon a \leqq t_1 < t_2 \leqq b\}.$$

Weiter gehen wir in §§ 2–4, 6 und 7 von einem Wahrscheinlichkeitsfeld $(\Omega, \mathfrak{K}, p)$ aus und setzen voraus, daß das Wahrscheinlichkeitsmaß p vollständig ist. $\bar{p}$ sei das zugehörige äußere Maß. Mit $N, N', \ldots, N_{i.j}$ bezeichnen wir stets p-Nullmengen (d.h. Teilmengen von Ω mit p-Maß Null); im Interesse einer knappen Darstellung benutzen wir dabei die Indizierung zur Angabe der Eigenschaften der p-Nullmengen: $N_{i.j}$ ist eine (bzw. die) p-Nullmenge mit den in Definition, Lemma oder Satz $(i.j)$ präzisierten Eigenschaften.

§ 1. Das Burkill-Unterteilungsintegral

Jede Zerlegung Z eines Intervalls $(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]$ in endlich viele Teilintervalle $(t'_1, t''_1], \ldots, (t'_r, t''_r]$ ist eindeutig beschrieben durch die $r+1$ verschiedenen Punkte, die als Eckpunkte dieser Teilintervalle auftreten. Wir numerieren diese Punkte im folgenden (von einigen Ausnahmen abgesehen) der Größe nach durch: $\tilde{t}_1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = \tilde{t}_2$ und identifizieren die durch die Teilintervalle $(t_0, t_1], \ldots, (t_{r-1}, t_r]$ beschriebene Zerlegung Z von $(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]$ mit der Menge ihrer Teilungspunkte $t_0, \ldots, t_r$: $Z = \{t_0, \ldots, t_r\}$. Die Gesamtheit der Zerlegungen Z des Intervalls $(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{Z}(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2)$. Die Eckpunkte des von einer Zerlegung Z zerlegten Intervalls $(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]$ geben wir hinter Z in runden Klammern an: $Z(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2)$, soweit dies zum besseren Verständnis oder zu einer kürzeren Darstellung beiträgt. Ist $(\tilde{t}_3, \tilde{t}_4]$ ein Teilintervall von $(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]$, und treten $\tilde{t}_3, \tilde{t}_4$ bei der Zerlegung $Z(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2)$ als Teilungspunkte auf, so bezeichnen wir mit $Z(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2 | \tilde{t}_3, \tilde{t}_4)$ die durch die in $[\tilde{t}_3, \tilde{t}_4]$ liegenden Teilungspunkte von $Z(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2)$ beschriebene Zerlegung von $(\tilde{t}_3, \tilde{t}_4]$: $Z(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2 | \tilde{t}_3, \tilde{t}_4) := Z(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2) \cap [\tilde{t}_3, \tilde{t}_4]$.

Sind Z und Z' Zerlegungen des gleichen Intervalls, so nennen wir Z' feiner als Z (oder auch: Z' Feinteilung von Z; in Zeichen: $Z' \geqq Z$), wenn jeder Teilungspunkt von Z auch Teilungspunkt von Z' ist, d.h. wenn $Z \subset Z'$ gilt.

Ist $F(t, t')$ eine für $(t, t')\in\Delta$ definierte Funktion, so nennen wir $F(t, t')$ eine über $[a, b]$ erklärte Intervallfunktion; für jede Zerlegung $Z=\{t_0, \dots, t_r\}$ eines Intervalls $(t_1', t_2']\subset(a, b]$ setzen wir zur Abkürzung

$$F(.,.)(Z):=\sum_{\rho=1}^{r} F(t_{\rho-1}, t_\rho).$$

Sofern es zum besseren Verständnis angebracht ist, schreiben wir dafür auch $F(.,.)(Z(t_1', t_2'))$.

(1.1) **Definition.** Eine über $[a, b]$ erklärte Intervallfunktion $F(t, t')$ heißt über dem Intervall $(t_1', t_2'](\subset[a, b])$ Burkill-unterteilungsintegrabel (kurz: B-integrabel) mit dem Integralwert J, wenn es zu jedem $\varepsilon>0$ Punkte $t_0, \dots, t_r$ gibt mit $t_1'=t_0<t_1<\dots<t_r=t_2'$ und mit

$$|F(.,.)(Z(t_1', t_2'))-J|<\varepsilon$$

für jede Zerlegung $Z(t_1', t_2')$ mit $Z(t_1', t_2')\supset\{t_0, \dots, t_r\}$. Wir setzen $\int_{t_1'}^{t_2'} F(.,.):=J$, falls $F(t, t')$ über $(t_1', t_2']$ B-integrabel ist.

Bezeichnen wir mit $\lim\limits_{\leqq} F(.,.)(Z(t_1', t_2'))$ den bezüglich der teilweisen Ordnung „$\leqq$" über die Z aus $\mathfrak{Z}(t_1', t_2')$ gebildeten Grenzwert[2], so ist also

$$\int_{t_1'}^{t_2'} F(.,.)=\lim_{\leqq} F(.,.)(Z(t_1', t_2')),$$

sofern dieser Grenzwert existiert.

Wir definieren entsprechend

$$\overline{\int_{t_1'}^{t_2'}} F(.,.):=\lim_{\leqq}\sup F(.,.)(Z(t_1', t_2'))$$

und

$$\underline{\int_{t_1'}^{t_2'}} F(.,.):=\lim_{\leqq}\inf F(.,.)(Z(t_1', t_2'));$$

wollen wir nur zum Ausdruck bringen, daß $\lim\limits_{\leqq} F(.,.)(Z(t_1', t_2'))$ im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne existiert, so sprechen wir von der Existenz von ${}_u\!\int_{t_1'}^{t_2'} F(.,.)$ und setzen dieses Integral gleich diesem (eigentlichen oder uneigentlichen) Grenzwert. Der Integralwert ${}_u\!\int_{t_1'}^{t_2'} F(.,.)$ einer über $(t_1', t_2']$ im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne B-integrablen Intervallfunktion $F(t, t')$ ist eindeutig bestimmt. Existiert $\int_{t_1'}^{t_2'} F(.,.)$, so existiert auch $\int_{t_3'}^{t_4'} F(.,.)$ für jedes Intervall $(t_3', t_4']\subset(t_1', t_2']$ und für die für t, t' mit $t_1'\leqq t<t'\leqq t_2'$ erklärte Funktion $G(t, t'):=\int_t^{t'} F(.,.)$ gilt $G(t_1, t_2)+G(t_2, t_3)=G(t_1, t_3)$ für $t_1'\leqq t_1<t_2<t_3\leqq t_2'$.

[2] Im folgenden lassen wir, wenn keine Mißverständnisse auftreten können, das Zeichen „$\leqq$" unter lim oft weg.

In § 7 machen wir von folgendem Satz Gebrauch, der sich aus [6] Satz (2.2) und § 3, insbesondere Satz (3.1), sofort ergibt:

(1.2) **Satz.** *Es sei $g(y)$ eine über $[0, \beta]$ erklärte, stetige Funktion mit $g(0)=0$; $F(t, t')$ sei eine über $[a, b]$ definierte Intervallfunktion mit $0 \leqq F(t, t') \leqq \beta$ für jedes $(t, t') \in \Delta$. Existiert das Integral $\int_a^b F(.,.)$, und existiert die rechtsseitige Ableitung $g'_+(0)$ von $g(y)$ im Punkt $y=0$, so existiert auch das Integral $\int_a^b g(F(.,.))$.*

Unter den Voraussetzungen von Satz (1.2) ist die für $t \in [a, b]$ erklärte Funktion

$$s(t) := \int_a^t F(.,.)$$

monoton nicht fallend.

Ist $s(t)$ in $[a, b]$ stetig, so ist nach [6] Satz (2.1)

$$\int_a^b g(F(.,.)) = g'_+(0) \cdot \int_a^b F(.,.).$$

Ist $s(t)$ in $[a, b]$ nicht stetig, so ist also mindestens eine der Mengen

$$S^L := \{\tau \in (a, b] : s(\tau - 0) < s(\tau)\},$$
$$S^R := \{\tau \in [a, b) : s(\tau) < s(\tau + 0)\}$$

nicht leer; mit der Funktion

$$s_0(t) := s(t) - \sum_{\tau \in S^L \cap (a, t]} [s(\tau) - s(\tau - 0)] - \sum_{\tau \in S^R \cap [a, t)} [s(\tau + 0) - s(\tau)],$$

dem Stetigkeitsanteil von $s(t)$, gilt dann nach [6] Satz (2.2)

$$\int_a^b g(F(.,.)) = g'_+(0) \cdot s_0(b) + \sum_{\tau \in S^L} g(s(\tau) - s(\tau - 0)) + \sum_{\tau \in S^R} g(s(\tau + 0) - s(\tau)).$$

§ 2. Erwartungswerte von Zählprozessen

(2.1) **Definition.** Ist $m(t, t'; \omega)$ eine für $(t, t', \omega) \in \Delta \times \Omega$ definierte Funktion mit Werten in $R^1 \cup \{\infty\}$, und gilt:

(I) für $(t_1, t_2) \in \Delta$ ist $N_{2.1}(t_1, t_2) := \{\omega : m(t_1, t_2; \omega) \notin \{0, 1, \ldots, \infty\}\}$ eine p-Nullmenge;

(II) für t_1, t_2, t_3 mit $a \leqq t_1 < t_2 < t_3 \leqq b$ ist $N_{2.1}(t_1, t_2, t_3) := \{\omega : m(t_1, t_2; \omega) + m(t_2, t_3; \omega) \neq m(t_1, t_3; \omega)\}$ [3] eine p-Nullmenge,

so nennen wir $m(t, t'; \omega)$ eine (über $[a, b]$ definierte) Intervallfunktion (zu $(\Omega, \mathfrak{K}, p)$).

(2.2) **Definition.** Ist $m(t, t'; \omega)$ eine Intervallzählfunktion zu $(\Omega, \mathfrak{K}, p)$, und ist für $(t_1, t_2) \in \Delta$ stets $m(t_1, t_2; \omega)$ $\mathfrak{K}$-meßbar, so nennen wir $m(t, t'; \omega)$ einen Zählprozeß zu $(\Omega, \mathfrak{K}, p)$.

[3] Für $\alpha \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$ sei $\infty + \alpha = \alpha + \infty = \infty$ gesetzt, ferner $\beta \cdot \infty = \infty$ für $\beta \in (0, \infty)$.

(2.3) **Definition.** Ein Zählprozeß $m(t, t'; \omega)$ heißt endlich, wenn für $(t_1, t_2) \in \Delta$ stets $p(m(t_1, t_2; \omega) = \infty) = 0$ gilt. Einen Zählprozeß $m(t, t'; \omega)$ nennen wir stationär, wenn

$$p(m(t_1, t_1'; \omega) = i_1, \dots, m(t_n, t_n'; \omega) = i_n)$$
$$= p(m(t_1 + h, t_1' + h; \omega) = i_1, \dots, m(t_n + h, t_n' + h; \omega) = i_n)$$

für $i_1, \dots, i_n \in \{0, 1, \dots, \infty\}$, $t_1, t_1', \dots, t_n, t_n' \in [a, b]$, reelles h und natürliches n mit $t_\nu < t_\nu'$, $t_\nu + h$, $t_\nu' + h \in [a, b]$ für $\nu = 1, \dots, n$ gilt.

Ist $x(t, \omega)$ ein über $[a, b]$ erklärter Call-Prozeß im Sinne von [4] oder ein Punktprozeß im Sinne von [16], so ist $m(t_1, t_2; \omega) := x(t_2, \omega) - x(t_1, \omega)$ ein endlicher Zählprozeß.

Bei der Untersuchung eines Zählprozesses $m(t, t'; \omega)$ spielt die für $(t, t') \in \Delta$ erklärte Intervallfunktion

$$s(t, t') := \sup\left\{\sum_{\rho=1}^{r} p(m(t_{\rho-1}', t_\rho'; \omega) \geqq 1) \colon t = t_0' < t_1' < \dots < t_r' = t',\ r \text{ nat.}\right\}$$
$$= \sup\{p(m(.,.; \omega) \geqq 1)(Z) \colon Z \text{ Zerlegung von } (t, t']\}$$

eine wichtige Rolle[4]. Es ist $0 \leqq s(t, t') \leqq \infty$ für $(t, t') \in \Delta$; ein stationärer Zählprozeß mit $s(t, t') = \infty$ für $(t, t') \in \Delta$ wurde von Khintchine ([11] S. 28) angegeben. Da für $t_1 < t_2 < t_3$ stets $p(m(t_1, t_3; \omega) \geqq 1) \leqq p(m(t_1, t_2; \omega) \geqq 1) + p(m(t_2, t_3; \omega) \geqq 1)$ gilt, ist $s(t, t') = {}_u\!\int_t^{t'} p(m(.,.; \omega) \geqq 1)$; für $a \leqq t_1 < t_2 < t_3 \leqq b$ gilt $s(t_1, t_3) = s(t_1, t_2) + s(t_2, t_3)$. Ist der Zählprozeß $m(t, t'; \omega)$ stationär, so ist $s(t, t') = \beta \cdot (t' - t)$ mit geeignetem $\beta \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$.

(2.4) **Lemma.** *Ist $m(t, t'; \omega)$ eine Intervallzählfunktion, und ist A eine abzählbare Teilmenge von $[a, b]$, so gibt es eine p-Nullmenge $N_{2.4}(A)$ derart, daß für $\omega \in \Omega - N_{2.4}(A)$ gilt:*

(I) *$m(t_1, t_2; \omega) \in \{0, 1, \dots, \infty\}$ für $t_1, t_2 \in A$ mit $(t_1, t_2) \in \Delta$;*

(II) *$m(t_1, t_2; \omega) + m(t_2, t_3; \omega) = m(t_1, t_3; \omega)$ für $t_1, t_2, t_3 \in A$ mit $t_1 < t_2 < t_3$.*

Dieses Lemma folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß jede abzählbare Vereinigung von p-Nullmengen wieder eine p-Nullmenge ist.

Die in § 6 untersuchten Intervallzählfunktionen und Zählprozesse erfüllen folgende

Eigenschaft I. Es existiert eine abzählbare, in $[a, b]$ dichte Menge A_{I} und ein System $\{N_{\mathrm{I}}(t, t') \colon (t, t') \in \Delta\}$ von p-Nullmengen derart, daß es zu $(t_1, t_2) \in \Delta$, natürlichem r und $\omega \in \Omega - N_{\mathrm{I}}(t_1, t_2)$ mit $m(t_1, t_2; \omega) \geqq r$ stets eine Zerlegung $Z = \{t_0', t_1', \dots, t_r'\}$ von $(t_1, t_2]$ in r Teilintervalle mit $Z \subset A_{\mathrm{I}} \cup \{t_1, t_2\}$ und mit $m(t_{\rho-1}', t_\rho'; \omega) \geqq 1$ für $\rho = 1, \dots, r$ gibt.

Eine Abschwächung von Eigenschaft I ist

Eigenschaft II. Es existiert eine abzählbare, in $[a, b]$ dichte Menge A_{II} und ein System $\{N_{\mathrm{II}}(t, t') \colon (t, t') \in \Delta\}$ von p-Nullmengen derart, daß es zu $(t_1, t_2) \in \Delta$, natürlichem r und $\omega \in \Omega - N_{\mathrm{II}}(t_1, t_2)$ mit $m(t_1, t_2; \omega) = \infty$ stets eine Zerlegung $Z =$

[4] „$m(t_1, t_2; \omega) \geqq n$" bedeutet hier und im Folgenden „$m(t_1, t_2; \omega) \in [n, \infty) \cup \{\infty\}$".

$\{t'_0, t'_1, \dots, t'_r\}$ von $(t_1, t_2]$ in r Teilintervalle mit $Z \subset A_{\mathrm{II}} \cup \{t_1, t_2\}$ und mit $m(t'_{\rho-1}, t'_\rho; \omega) \geqq 1$ für $\rho = 1, \dots, r$ gibt.

Wir betrachten hierzu folgende Beispiele:

Beispiel 1. $\alpha(t;\omega)$, $\alpha_1(t;\omega)$ und $\alpha_2(t;\omega)$ seien für $t \in [a, b]$, $\omega \in \Omega$ definierte Funktionen mit dem Wertebereich $\{0, 1\}$.

Gilt $p\big(\alpha(t;\omega) \neq \alpha_1(t;\omega) + \alpha_2(t;\omega)\big) = 0$ für jedes $t \in [a, b]$, so ist

$$m(t, t'; \omega) := \alpha_1(t;\omega) + \sum_{\tau \in (t, t')} \alpha(\tau;\omega) + \alpha_2(t';\omega)$$

$\big((t, t') \in \Delta\big)$ eine Intervallzählfunktion. $m(t, t'; \omega)$ erfüllt natürlich Eigenschaft I und Eigenschaft II.

Beispiel 2. Es sei $\Omega = [0, 1)$, $\mathfrak{K}$ die Gesamtheit der L-meßbaren Teilmengen von Ω und p das L-Maß über $[0, 1)$. Weiter sei $z(t;\omega) := [\omega + t] + [\omega + t - 0]$[5] für $a := -2 \leqq t \leqq b := 2$ und $m'(t, t'; \omega) := z(t';\omega) - z(t;\omega)$ für $(t, t') \in \Delta$. Man sieht unmittelbar ein, daß der Zählprozeß $m'(t, t'; \omega)$ die Eigenschaft I nicht erfüllt; dies ergibt sich auch aus Satz (2.9), da wegen $p\big(m'(t_1, t_2; \omega) \geqq 1\big) = t_2 - t_1$ für $0 < t_2 - t_1 \leqq 1$ stets $s(t, t') = t' - t$ und $E\, m'(t, t'; \omega) = 2 \cdot (t' - t) \neq s(t, t')$ gilt. $m'(t, t'; \omega)$ erfüllt natürlich Eigenschaft II.

Sind $m_1(t, t'; \omega)$, $m_2(t, t'; \omega)$ zwei Zählprozesse mit

$$0 \leqq m_1(t_1, t_2; \omega) \leqq m_2(t_1, t_2; \omega)$$

für $(t_1, t_2) \in \Delta$, $\omega \in \Omega$, und erfüllt $m_2(t, t'; \omega)$ die Eigenschaft I, so erfüllt deswegen $m_1(t, t'; \omega)$ nicht notwendig ebenfalls die Eigenschaft I.

Für jede Zerlegung $Z = \{t'_0, \dots, t'_r\}$ und jede nichtnegative ganze Zahl M definieren wir die Menge

$$W(Z; M) := \{\omega : m(t'_{\rho-1}, t'_\rho; \omega) \geqq 1 \text{ für mindestens } M \text{ Werte } \rho\}.$$

Es gilt

(2.5) **Lemma.** *Erfüllt die Intervallzählfunktion $m(t, t'; \omega)$ die Eigenschaft* I, *so gibt es zu $(t_1, t_2) \in \Delta$ eine p-Nullmenge $N_{2.5}(t_1, t_2)$ und eine Folge $Z_1(t_1, t_2)$, $Z_2(t_1, t_2)$, … von Zerlegungen mit $Z_1(t_1, t_2) \subset Z_2(t_1, t_2) \subset \cdots \subset A_{\mathrm{I}} \cup \{t_1, t_2\}$ derart, daß*

$$W\big(Z_n(t_1, t_2); M\big) \cap \big(\Omega - N_{2.5}(t_1, t_2)\big) \subset W\big(Z_{n+1}(t_1, t_2); M\big) \cap \big(\Omega - N_{2.5}(t_1, t_2)\big)$$

und

$$\lim_{n \to \infty} W\big(Z_n(t_1, t_2); M\big) \cap \big(\Omega - N_{2.5}(t_1, t_2)\big) = \{m(t_1, t_2; \omega) \geqq M\} \cap \big(\Omega - N_{2.5}(t_1, t_2)\big)$$

für $M = 0, 1, 2, \dots$ gilt.

Beweis. Es sei $N_{2.5}(t_1, t_2) := N_{2.4}(A_{\mathrm{I}} \cup \{t_1, t_2\}) \cup N_{\mathrm{I}}(t_1, t_2)$; für $\omega \in \Omega - N_{2.5}(t_1, t_2)$ ist $m(t, t'; \omega)$ über $A_{\mathrm{I}} \cup \{t_1, t_2\}$ additiv und nimmt dort nur einen Wert aus $\{0, 1, \dots, \infty\}$ an. Für $Z(t_1, t_2) \subset Z'(t_1, t_2) \subset A_{\mathrm{I}} \cup \{t_1, t_2\}$ gilt folglich

$$(*) \qquad \begin{aligned} W\big(Z(t_1, t_2); M\big) \cap \big(\Omega - N_{2.5}(t_1, t_2)\big) &\subset W\big(Z'(t_1, t_2); M\big) \cap \big(\Omega - N_{2.5}(t_1, t_2)\big) \\ &\subset \{m(t_1, t_2; \omega) \geqq M\} \cap \big(\Omega - N_{2.5}(t_1, t_2)\big). \end{aligned}$$

[5] $[u] := \max\{g : g \text{ ganze Zahl mit } g \leqq u\}$.

Sind $\tau_1, \tau_2, \ldots$ die irgendwie abgezählten Elemente von $A_\mathrm{I} \cap (t_1, t_2)$, und bezeichnen wir mit $Z_n(t_1, t_2)$ die aus den Punkten $t_1, t_2, \tau_1, \ldots, \tau_n$ bestehende Zerlegung von $(t_1, t_2]$, so gilt daher

$$\lim_{n\to\infty} W(Z_n(t_1, t_2); M) \cap (\Omega - N_{2.5}(t_1, t_2))$$
$$\subset \{m(t_1, t_2; \omega) \geqq M\} \cap (\Omega - N_{2.5}(t_1, t_2)).$$

Ist $\omega \in \Omega - N_{2.5}(t_1, t_2)$ mit $m(t_1, t_1; \omega) \geqq M$, so gibt es wegen Eigenschaft I eine Zerlegung $Z_\omega(t_1, t_2) = \{t'_0, t'_1, \ldots, t'_M\} \subset A_\mathrm{I} \cup \{t_1, t_2\}$ mit $m(t'_{\mu-1}, t'_\mu; \omega) \geqq 1$ für $\mu = 1, \ldots, M$. Wegen (*) gilt für jedes $Z_n(t_1, t_2)$ mit $Z_n(t_1, t_2) \supset Z_\omega(t_1, t_2)$ ebenfalls $\omega \in W(Z_n(t_1, t_2); M)$; wir erhalten also auch

$$\lim_{n\to\infty} W(Z_n(t_1, t_2); M) \cap (\Omega - N_{2.5}(t_1, t_2))$$
$$\supset \{m(t_1, t_2; \omega) \geqq M\} \cap (\Omega - N_{2.5}(t_1, t_2)).$$

Ähnlich beweist man

(2.6) **Lemma.** *Hat die Intervallzählfunktion $m(t, t'; \omega)$ die Eigenschaft* II, *so gibt es zu $(t_1, t_2) \in \Delta$ eine p-Nullmenge $N_{2.6}(t_1, t_2)$ und eine Folge $Z_1(t_1, t_2)$, $Z_2(t_1, t_2), \ldots$ von Zerlegungen mit*

1) $Z_1(t_1, t_2) \subset Z_2(t_1, t_2) \subset \cdots \subset A_\mathrm{II} \cup \{t_1, t_1\}$,

2) $\{m(t_1, t_2; \omega) = \infty\} \cap (\Omega - N_{2.6}(t_1, t_2)) \subset \lim_{n\to\infty} W(Z_n(t_1, t_2); M) \cap (\Omega - N_{2.6}(t_1, t_2))$

für jedes natürliche M.

Beim Beweis der folgenden beiden Sätze benötigen wir ferner

(2.7) **Lemma.** *Ist $m(t, t'; \omega)$ ein Zählprozeß, so gilt für jede natürliche Zahl M, jede Zerlegung $Z(t_1, t_2)$ und jedes $K \in \mathfrak{K}$*

$$M \cdot p(K \cap W(Z(t_1, t_2); M)) \leqq p(K \cap \{m(.,.; \omega) \geqq 1\})(Z(t_1, t_2)).$$

Beweis. $Z(t_1, t_2) = \{t'_0, \ldots, t'_r\}$ sei fest gewählt; für $S \subset \{1, \ldots, r\}$ setzen wir

$$V(S) := \{\omega: m(t'_{\rho-1}, t'_\rho; \omega) \geqq 1 \text{ für } \rho \in S,\ m(t'_{\rho'-1}, t'_{\rho'}; \omega) = 0 \text{ für } \rho' \notin S\}$$

und

$$N' := W(Z(t_1, t_2); M) \cap \bigcup_{\rho=1}^{r} \{m(t'_{\rho-1}, t'_\rho; \omega) \notin \{0, 1, \ldots, \infty\}\};$$

wegen

$$W(Z(t_1, t_2); M) = \bigcup_{\substack{S \subset \{1, \ldots, r\} \\ |S| \geqq M}} V(S) \cup N'$$

erhalten wir[6] dann aus

$$|S| \cdot p(K \cap V(S)) = \sum_{\rho=1}^{r} p(K \cap \{m(t'_{\rho-1}, t'_\rho; \omega) \geqq 1\} \cap V(S))$$

durch Summation über alle S mit $S \subset \{1, \ldots, r\}$ und $|S| \geqq M$ die Behauptung.

(2.8) **Satz.** *Hat der Zählprozeß $m(t, t'; \omega)$ die Eigenschaft* II, *so folgt aus $s(t'_1, t'_2) < \infty$ die Beziehung $p(m(t_1, t_2; \omega) = \infty) = 0$ für t_1, t_2 mit $t'_1 \leqq t_1 < t_2 \leqq t'_2$, d.h. die Endlichkeit von $m(t, t'; \omega)$ über dem Teilintervall $[t'_1, t'_2]$.*

[6] Mit $|S|$ bezeichnen wir die Mächtigkeit von S.

Beweis. Nach (2.6) gilt für die dort auftretenden Zerlegungen $Z_n(t_1, t_2)$

$$p\big(m(t_1, t_2; \omega) = \infty\big) \leqq \lim_{n \to \infty} p\big(W(Z_n(t_1, t_2); M)\big)$$

für jedes natürliche M; nach (2.7) ist

$$\begin{aligned} M \cdot p\big(W(Z_n(t_1, t_2); M)\big) &\leqq p\big(m(.,.; \omega) \geqq 1\big)\big(Z_n(t_1, t_2)\big) \\ &\leqq s(t_1, t_2) \\ &\leqq s(t_1', t_2'). \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$p\big(m(t_1, t_2; \omega) = \infty\big) \leqq \frac{1}{M} \cdot s(t_1', t_2');$$

für $M \to \infty$ ergibt sich hieraus die Behauptung.

Für die Anwendungen in den folgenden Paragraphen ist der nächste Satz wichtig.

(2.9) **Satz.** *Existiert für einen Zählprozeß* $m(t, t'; \omega)$ *der Erwartungswert* $E\,m(t_1', t_2'; \omega)$[7], *so gilt* $s(t_1, t_2) < \infty$ *für* $(t_1, t_2) \in \Delta$ *mit* $t_1' \leqq t_1 < t_2 \leqq t_2'$.

Hat der Zählprozeß $m(t, t'; \omega)$ *die Eigenschaft* I, *so folgt aus* $s(t_1', t_2') < \infty$ *die Existenz von* $E\,m(t_1, t_2; \omega)$ *für* $t_1' \leqq t_1 < t_2 \leqq t_2'$; *für diese Werte* t_1, t_2 *gilt dann* $E\,m(t_1, t_2; \omega) = s(t_1, t_2)$.

Hat ein Zählprozeß $m(t, t'; \omega)$ die Eigenschaft I, so gilt also für $(t_1, t_2) \in \Delta$: $E\,m(t_1, t_2; \omega)$ existiert genau dann, wenn $\int_{t_1}^{t_2} p\big(m(.,.; \omega) \geqq 1\big)$ existiert; existieren diese beiden Größen, so ist

$$E\,m(t_1, t_2; \omega) = \int_{t_1}^{t_2} p\big(m(.,.; \omega) \geqq 1\big).$$

Beweis. 1) Aus $E\,m(t, t'; \omega) \geqq p\big(m(t, t'; \omega) \geqq 1\big)$ und aus $E\,m(t_1'', t_2''; \omega) + E\,m(t_2'', t_3''; \omega) = E\,m(t_1''; t_3''; \omega)$ für $a \leqq t_1'' < t_2'' < t_3'' \leqq b$ ergibt sich sofort $s(t_1, t_2) \leqq E\,m(t_1, t_2; \omega) \leqq E\,m(t_1', t_2'; \omega) < \infty$.

2) Es sei $(t_1, t_2) \in \Delta$ mit $t_1' \leqq t_1 < t_2 \leqq t_2'$ fest gewählt. Zu jeder Zerlegung $Z = \{\tilde{t}_0, \ldots, \tilde{t}_r\}$ des Intervalles $(t_1, t_2]$ definieren wir die $\mathfrak{K}$-meßbare Größe

$$h(Z; \omega) := |\{\rho : \rho \in \{1, \ldots, r\} \,\&\, m(\tilde{t}_{\rho-1}, \tilde{t}_\rho; \omega) \geqq 1\}|.$$

Es ist $E\,h(Z; \omega) = p\big(m(.,.; \omega) \geqq 1\big)(Z)$ und $\{h(Z; \omega) \geqq M\} = W(Z; M)$. $Z_1, Z_2, \ldots$ seien die in Lemma (2.5) angegebenen Zerlegungen von $(t_1, t_2]$ und $N' := N_{2.5}(t_1, t_2) \cup \{m(t_1, t_2; \omega) \notin \{0, 1, \ldots, \infty\}\}$. Für die $\mathfrak{K}$-meßbaren Größen $h_n(\omega) := h(Z_n; \omega)$ gilt nach Lemma (2.5) $h_1(\omega) \leqq h_2(\omega) \leqq \cdots$ für $\omega \in \Omega - N'$; es existiert also $h(\omega) := \lim_{n \to \infty} h_n(\omega)$ auf $\Omega - N'$. Weiter gilt nach Lemma (2.5)

$$\begin{aligned} \{\omega : \omega \in \Omega - N' \,\&\, h(\omega) \geqq M\} &= \{\sup_n h_n(\omega) \geqq M\} \cap (\Omega - N') \\ &= \lim_{n \to \infty} W(Z_n; M) \cap (\Omega - N') \\ &= \{m(t_1, t_2; \omega) \geqq M\} \cap (\Omega - N') \end{aligned}$$

[7] Wie üblich sprechen wir von der Existenz von $E\,m(t_1, t_2; \omega)$, wenn $\int_\Omega m(t_1, t_2; \omega) \cdot dp$ (mit endlichem Wert) existiert.

für $M=0, 1, \ldots$. Es ist also $m(t_1, t_2; \omega)=\lim_{n\to\infty} h_n(\omega)$ für $\omega\in\Omega-N'$; aus $E h_n(\omega)= p(m(.,.;\omega)\geqq 1)(Z_n)\leqq s(t_1, t_2)\leqq s(t_1', t_2')<\infty$ folgt daher nach dem Satz von Lebesgue $\lim_{n\to\infty} p(m(.,.;\omega)\geqq 1)(Z_n)=E m(t_1, t_2; \omega)$ und damit wegen der Subadditivität der Intervallfunktion $p(m(t, t'; \omega)\geqq 1)$ und der in Beweisteil 1 gezeigten Aussage

$$E m(t_1, t_2; \omega)=\int_{t_1}^{t_2} p(m(.,.;\omega)\geqq 1)=s(t_1, t_2).$$

Zur Verallgemeinerung des für stationäre Zählprozesse erklärten Begriffes „ordinär" übernehmen wir aus [4][8] die nächste Definition. Wir setzen dabei zur Abkürzung $s(t):=s(a, t)$ für $t\in(a, b]$ und $s(a):=0$ und erklären mit dieser monoton nicht fallenden Funktion $s(t)$ die Menge S^L, S^R wie in § 1. Mit σ_0 bezeichnen wir das vom Stetigkeitsanteil $s_0(t)$ von $s(t)$ auf dem σ-Körper der Borelschen Teilmengen von $[a, b]$ induzierte Maß (d.h. $\sigma_0((t, t'])=s_0(t')-s_0(t)$ für jedes $(t, t')\in\Delta$).

(2.10) **Definition.** Ein Zählprozeß $m(t, t'; \omega)$ mit $s(a, b)<\infty$ heißt ordinär, wenn

$$\lim_{\tau\nearrow t} \frac{p(m(\tau, t; \omega)\geqq 2)}{s(t)-s(\tau)}=0$$

für σ_0-fast alle Stetigkeitspunkte t von $s(\cdot)$ und alle $t\in S^L$ und

$$\lim_{\tau\searrow t} \frac{p(m(t, \tau; \omega)\geqq 2)}{s(\tau)-s(t)}=0$$

für σ_0-fast alle Stetigkeitspunkte t von $s(\cdot)$ und alle $t\in S^R$ gilt.

Aus Satz (2.9) und der in [4] bewiesenen Verallgemeinerung des Satzes von Korolyuk folgt unmittelbar

(2.11) **Satz.** *Erfüllt der Zählprozeß $m(t, t'; \omega)$ die Eigenschaft* I, *und gilt $s(a, b)<\infty$, so ist $m(t, t'; \omega)$ ordinär.*

Dieser Satz ist die Verallgemeinerung eines Satzes, den Dobrushin für stationäre Punktprozesse bewiesen hat [18].

§ 3. Ausschöpfende Mengenfunktionen

In den in den folgenden Paragraphen betrachteten Fällen ist die Berechnung von $p(m(t_1, t_2; \omega)\geqq 1)$ aus den Wahrscheinlichkeitsverteilungen der dort untersuchten stochastischen Prozesse praktisch nicht durchführbar. Wir versuchen daher, die Intervallfunktion $s(t, t')$ (und damit den Erwartungswert $E m(t, t'; \omega)$) als B-Integral einfach zu berechnender Ausdrücke darzustellen.

(3.1) **Definition.** Jedem $(t, t')\in\Delta$ sei eine Menge $S(t, t')$ aus $\mathfrak{R}$ zugeordnet. Wir nennen diese Mengenfunktion $S(t, t')$ ausschöpfend für den Zählprozeß $m(t, t'; \omega)$, wenn gilt:

(1) $\qquad S(t_1, t_2)\subset\{m(t_1, t_2; \omega)\geqq 1\}$ für $(t_1, t_2)\in\Delta$;

(2) $\qquad s(t_1, t_2)={}_u\!\int_{t_1}^{t_2} p(S(.,.))$ für $(t_1, t_2)\in\Delta$.

[8] Eine mit dieser Definition nicht äquivalente Einführung des Begriffes „ordinär" ist in [3], [12] und [20] angegeben.

Gilt $s(a,b)<\infty$, und erfüllt $S(t_1,t_2)$ (3.1)(1), so ist (3.1)(2) gleichwertig mit

$$(2')\qquad s(a,b)=\int_a^b p(S(.,.)).$$

Ist $Z=\{t'_0,t'_1,\dots,t'_r\}$ eine Zerlegung von $(t_1,t_2]$, so setzen wir zur Abkürzung

$$B(Z):=\{m(t_1,t_2;\omega)\geqq 1\}-\bigcup_{\rho=1}^{r} S(t'_{\rho-1},t'_\rho).$$

(3.2) **Lemma.** *Ist $m(t,t';\omega)$ eine Intervallzählfunktion, und ist $S(t,t')$ eine Mengenfunktion mit $S(t',t'')\in\mathfrak{R}$ und*

$$(+)\qquad \lim_{\leqq}\bar{p}(B(Z(t',t'')))=0 \quad \textit{für jedes } (t',t'')\in\Delta,$$

so gilt

$$\bar{p}(m(t_1,t_2;\omega)\geqq 1)\leqq {}_u\!\int_{t_1}^{t_2}\bar{p}(m(.,.;\omega)\geqq 1)\leqq \int_{t_1}^{t_2} p(S(.,.)) \quad \textit{für } (t_1,t_2)\in\Delta.$$

Beweis. 1) Für $a\leqq t''_1<t''_2<t''_3\leqq b$ gilt

$$\{m(t''_1,t''_3;\omega)\geqq 1\}\subset\{m(t''_1,t''_2;\omega)\geqq 1\}\cup\{m(t''_2,t''_3;\omega)\geqq 1\}\cup N(t''_1,t''_2,t''_3).$$

Wegen der Subadditivität des äußeren Maßes $\bar{p}$ ergibt sich aus dieser Teilmengenrelation die Existenz von

$${}_u\!\int_{t_1}^{t_2}\bar{p}(m(.,.;\omega)\geqq 1) \qquad \text{für } (t_1,t_2)\in\Delta$$

und die Gültigkeit des ersten „$\leqq$"-Zeichens.

2) Zu $(t_1,t_2)\in\Delta$ wählen wir ein $\varepsilon>0$ und ein γ mit

$$\gamma<{}_u\!\int_{t_1}^{t_2}\bar{p}(m(.,.;\omega)\geqq 1).$$

Zu γ gibt es ein $Z_0(t_1,t_2)=\{t'_0,t'_1,\dots,t'_r\}$ mit $\gamma<\bar{p}(m(.,.;\omega)\geqq 1)(Z_0(t_1,t_2))$. Zu $\rho\in\{1,\dots,r\}$ gibt es wegen $(+)$ ein $Z_\rho(t'_{\rho-1},t'_\rho)$ mit $\bar{p}(B(Z'(t'_{\rho-1},t'_\rho)))<\varepsilon/r$ und folglich mit $\bar{p}(m(t'_{\rho-1},t'_\rho;\omega)\geqq 1)-p(S(.,.))(Z'(t'_{\rho-1},t'_\rho))<\varepsilon/r$ für $Z'(t'_{\rho-1},t'_\rho)\geqq Z_\rho(t'_{\rho-1},t'_\rho)$.

Definieren wir nun die Zerlegung $Z^*(t_1,t_2)$ durch $Z^*(t_1,t_2):=Z_1(t'_0,t'_1)\cup Z_2(t'_1,t'_2)\cup\dots\cup Z_r(t'_{r-1},t'_r)$, so erhalten wir für $Z(t_1,t_2)\supset Z^*(t_1,t_2)$

$$(*)\qquad \begin{aligned} p(S(.,.))(Z(t_1,t_2)) &= \sum_{\rho=1}^{r} p(S(.,.))(Z(t_1,t_2|t'_{\rho-1},t'_\rho)) \\ &> \sum_{\rho=1}^{r}\bar{p}(m(t'_{\rho-1},t'_\rho;\omega)\geqq 1)-\varepsilon \\ &> \gamma-\varepsilon; \end{aligned}$$

diese Ungleichung hat aber

$${}_u\!\int_{t_1}^{t_2}\bar{p}(m(.,.;\omega)\geqq 1)\leqq\int_{t_1}^{t_2}p(S(.,.))$$

zur Folge.

Eine Charakterisierung der ausschöpfenden Mengenfunktion ist enthalten in

(3.3) **Satz.** *Ist* $m(t,t';\omega)$ *ein Zählprozeß mit* $s(a,b)<\infty$, *und gilt* $S(t_1,t_2)\subset \{m(t_1,t_2;\omega)\geqq 1\}$ *und* $S(t_1,t_2)\in\mathfrak{R}$ *für jedes* $(t_1,t_2)\in\Delta$, *so sind folgende beiden Aussagen äquivalent:*

(1) *die Mengenfunktion* $S(t,t')$ *ist ausschöpfend für* $m(t,t';\omega)$;

(2) *es gilt* $\lim\limits_{\leqq} p\big(B(Z(t_1,t_2))\big)=0$ *für jedes* $(t_1,t_2)\in\Delta$.

Ist $s(a,b)=\infty$, *so folgt* (1) *aus* (2).

Beweis. 1) Wir setzen $R(t,t'):=\{m(t,t';\omega)\geqq 1\}-S(t,t')$. Gilt (1) und $s(a,b)<\infty$, so ist

$$\int_{t_1}^{t_2} p\big(R(.,.)\big)=s(t_1,t_2)-\int_{t_1}^{t_2} p\big(S(.,.)\big)=0$$

für jedes $(t_1,t_2)\in\Delta$. Ferner ist für jede Zerlegung $Z=\{t'_0,\dots,t'_r\}$ von $(t_1,t_2]$

$$\begin{aligned} B(Z)&\subset\Big(\bigcup_{\rho=1}^{r}\{m(t'_{\rho-1},t'_\rho;\omega)\geqq 1\}-\bigcup_{\rho=1}^{r} S(t'_{\rho-1},t'_\rho)\Big)\cup N_{2.4}(Z)\\ &\subset\bigcup_{\rho=1}^{r}\big(\{m(t'_{\rho-1},t'_\rho;\omega)\geqq 1\}-S(t'_{\rho-1},t'_\rho)\big)\cup N_{2.4}(Z)\\ &=\bigcup_{\rho=1}^{r} R(t'_{\rho-1},t'_\rho)\cup N_{2.4}(Z);\end{aligned}$$

daraus ergibt sich

$$p\big(B(Z)\big)\leqq p\big(R(.,.)\big)(Z).$$

Wegen $\int_{t_1}^{t_2} p\big(R(.,.)\big)=0$ erhalten wir also (2).

2) Ist (2) erfüllt, so ergibt sich aus $\int_{t_1}^{t_2} p\big(S(.,.)\big)\leqq s(t_1,t_2)$ und aus Lemma (3.2) sofort (1).

Im nächsten Satz geben wir einige Bedingungen an, die notwendig sind dafür, daß $S(t,t')$ ausschöpfend ist.

Zur Abkürzung definieren wir zu einer vorgegebenen Mengenfunktion $S(t,t')$ und zu einer Menge $A\subset[a,b]$

$$\begin{aligned} C(t_1,t_2;A)&:=\{\omega\colon \text{zu } \omega \text{ existieren } t'_1,t'_2\in A \text{ mit } t_1\leqq t'_1<t'_2\leqq t_2 \text{ und mit } \omega\in S(t'_1,t'_2)\}\\ &=\bigcup_{\substack{t'_1,t'_2\in A\\ t_1\leqq t'_1<t'_2\leqq t_2}} S(t'_1,t'_2)\end{aligned}$$

und

$$C'(t_1,t_2;A):=\big\{\omega\colon \text{zu } \omega \text{ existieren } t'_1,t'_2\in A\cup\{t_1,t_2\} \text{ mit } t_1\leqq t'_1<t'_2\leqq t_2 \text{ und } \omega\in S(t'_1,t'_2)\big\}\quad \text{für } (t_1,t_2)\in\Delta.$$

(3.4) **Satz.** *Ist die Mengenfunktion* $S(t,t')$ *für den Zählprozeß* $m(t,t';\omega)$ *ausschöpfend, und ist* $s(a,b)<\infty$, *so gilt:*

(1) $\lim\limits_{\leqq} p\big(S(t_1,t_2)-\bigcup_{\rho=1}^{r} S(t'_{\rho-1},t'_\rho)\big)=0$ (*dieser Grenzwert ist über die Zerlegungen* $Z=\{t'_0,\dots,t'_r\}\in\mathfrak{Z}(t_1,t_2)$ *zu bilden*) *für jedes* $(t_1,t_2)\in\Delta$.

(2) *Es gibt eine abzählbare, in* $[a, b]$ *dichte Menge* A *mit* $p(\{m(t_1, t_2; \omega) \geqq 1\} - C(t_1, t_2; A)) = 0$ *für jedes* $(t_1, t_2) \in \Delta$.

Beweis. 1) Aussage (1) ergibt sich wegen $S(t_1, t_2) \subset \{m(t_1, t_2; \omega) \geqq 1\}$ unmittelbar aus (3.3).

2) a) Aus (3.3) (2) folgt, daß es zu jedem $(t_1, t_2) \in \Delta$ eine Zerlegungsfolge $Z_1(t_1, t_2)$, $Z_2(t_1, t_2)$, ... mit $p(B(Z_n(t_1, t_2))) \to 0$ für $n \to \infty$ gibt. Setzen wir

$$A(t_1, t_2) := \bigcup_{n \geqq 1} Z_n(t_1, t_2),$$

so gilt

$$p(\{m(t_1, t_2; \omega) \geqq 1\} - C(t_1, t_2; A(t_1, t_2))) \leqq p(B(Z_n(t_1, t_2))) \qquad \text{für } n = 1, 2, \ldots.$$

Für $n \to \infty$ erhalten wir aus dieser Beziehung

$$p(\{m(t_1, t_2; \omega) \geqq 1\} - C(t_1, t_2; A(t_1, t_2))) = 0.$$

b) D sei eine abzählbare, in $[a, b]$ dichte Menge, die alle Unstetigkeitspunkte der Funktion $s(a, t)$ enthält, und

$$A := \bigcup_{\substack{\tau_1 < \tau_2 \\ \tau_1, \tau_2 \in D}} A(\tau_1, \tau_2).$$

Ist $(t_1', t_2') \in \Delta$ mit $t_1', t_2' \in D$, so gilt nach Konstruktion von A stets

$$p(\{m(t_1', t_2'; \omega) \geqq 1\} - C(t_1', t_2'; A)) = 0.$$

Wählen wir zu beliebigem $(t_1, t_2) \in \Delta$ Punkte $t_1', t_2' \in D$ mit $t_1 \leqq t_1' < t_2' \leqq t_2$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} p(\{m(t_1, t_2; \omega) \geqq 1\} - C(t_1, t_2; A)) &\leqq p(\{m(t_1, t_2; \omega) \geqq 1\} - C(t_1', t_2'; A)) \\ &= p(\{m(t_1, t_2; \omega) \geqq 1\} - \{m(t_1', t_2'; \omega) \geqq 1\}) \\ &\leqq p(m(t_1, t_1'; \omega) \geqq 1) + p(m(t_2', t_2; \omega) \geqq 1)^{9} \\ &\leqq s(t_1, t_1') + s(t_2', t_2) \\ &= [s(a, t_1') - s(a, t_1)] + [s(a, t_2) - s(a, t_2')]; \end{aligned}$$

da D in $[a, b]$ dicht ist und alle Unstetigkeitspunkte von $s(a, t)$ enthält, ist für beliebiges $(t_1, t_2) \in \Delta$

$$p(\{m(t_1, t_2; \omega) \geqq 1\} - C(t_1, t_2; A)) = 0.$$

Eigenschaft (3.4) (2) ist zusammen mit einer Verschärfung von Eigenschaft (3.4) (1) hinreichend dafür, daß die Mengenfunktion $S(t, t')$ für den Zählprozeß $m(t, t'; \omega)$ ausschöpfend ist; dies zeigt der nächste Satz. Die Voraussetzung (2) in diesem Satz ist eine Abschwächung der Eigenschaft (3.4) (2). Ist $s(a, b) < \infty$, so sind, wie man aus dem Beweisteil 2) zu Satz (3.4) ersieht, (3.4) (2) und (3.5) (2) äquivalent.

[9] Für $t \in [a, b]$, $\omega \in \Omega$ sei hier $m(t, t; \omega) = 0$ gesetzt.

(3.5) **Satz.** *Ist $m(t,t';\omega)$ eine Intervallzählfunktion und $S(t,t')$ eine Mengenfunktion mit $S(t_1,t_2)\in\mathfrak{R}$ für $(t_1,t_2)\in\Delta$, und sind folgende beiden Eigenschaften erfüllt:*

(1) *zu beliebigen t_1,t_2,t_3 mit $a\leqq t_1<t_2<t_3\leqq b$ gibt es eine p-Nullmenge $N_{3.5}(t_1,t_2,t_3)$ mit $S(t_1,t_3)\subset S(t_1,t_2)\cup S(t_2,t_3)\cup N_{3.5}(t_1,t_2,t_3)$;*

(2) *es gibt eine abzählbare, in $[a,b]$ dichte Menge A derart, daß*

$$p(\{m(t_1,t_2;\omega)\geqq 1\}-C'(t_1,t_2;A))=0$$

für jedes $(t_1,t_2)\in\Delta$ ist,

so gilt $\lim\bar{p}(B(Z(t_1,t_2)))=0$ *für $(t_1,t_2)\in\Delta$. Ist $m(t,t';\omega)$ sogar ein Zählprozeß, und gilt ferner noch $S(t_1,t_2)\subset\{m(t_1,t_2;\omega)\geqq 1\}$ für $(t_1,t_2)\in\Delta$, so ist $S(t,t')$ ausschöpfend für $m(t,t';\omega)$.*

Beweis. 1) Zu beliebig gewähltem $(t_1,t_2)\in\Delta$ sei N die Vereinigung aller $N_{3.5}(\tau_1',\tau_2',\tau_3')$ mit $\tau_1',\tau_2',\tau_3'\in A\cup\{t_1,t_2\}$, $\tau_1'<\tau_2'<\tau_3'$; für $Z=\{t_0',\dots,t_r'\}$ setzen wir $S(Z):=\bigcup_{\rho=1}^{r}S(t_{\rho-1}',t_\rho')$. $\tau_1,\tau_2,\dots$ seien die irgendwie abgezählten Elemente von $A\cap(t_1,t_2)$ und Z_n die durch die Punktmenge $\{t_1,t_2,\tau_1,\dots,\tau_n\}$ beschriebene Zerlegung von $(t_1,t_2]$. Wegen (1) gilt für zwei Zerlegungen Z,Z' von $(t_1,t_2]$ mit $Z\subset Z'\subset A\cup\{t_1,t_2\}$ stets

$$S(Z)\subset S(Z')\cup N,$$

also

$$(*)\qquad p(S(Z)-S(Z'))=0$$

und daher weiter

$$\begin{aligned}C'(t_1,t_2;A)&\subset\bigcup_{n\geqq 1}S(Z_n)\cup N\\&=\lim_{n\to\infty}(S(Z_n)\cup N).\end{aligned}$$

Wegen (2) gilt

$$\begin{aligned}\bar{p}(B(Z_n))&=\bar{p}(\{m(t_1,t_2;\omega)\geqq 1\}-S(Z_n))\\&\leqq p(C'(t_1,t_2;A)-S(Z_n))\\&=p(\lim_{m\to\infty}(S(Z_m)\cup N)-S(Z_n))\xrightarrow[n\to\infty]{}0\end{aligned}$$

und weiter wegen $(*)$

$$\lim\bar{p}(B(Z(t_1,t_2)))=0.$$

2) Die zweite Behauptung folgt sofort aus Satz (3.3).

Die ausschöpfenden Mengenfunktionen sind Funktionen zweier Variablen. Für manche Zählprozesse existieren aber keine ausschöpfenden Mengenfunktionen $S(t,t')$ mit einfach zu berechnendem $p(S(t,t'))$. Im folgenden geben wir noch zwei Sätze an, die Möglichkeiten zur Verallgemeinerung des Begriffs „ausschöpfende Mengenfunktion" aufzeigen. Zunächst beschäftigen wir uns mit dem Fall, daß die Mengenfunktion $S(t,t')$ die Bedingung „$S(t_1,t_2)\subset\{m(t_1,t_2;\omega)\geqq 1\}$ für $(t_1,t_2)\in\Delta$" nicht erfüllt.

(3.6) **Satz.** *Es seien $m(t,t';\omega)$, $m_1(t,t';\omega)$ zwei Zählprozesse mit $m(t,t';\omega)\leqq m_1(t,t';\omega)$ für $(t,t',\omega)\in\Delta\times\Omega$ und mit $E\,m_1(a,b;\omega)<\infty$. Erfüllt die auf Δ definierte Mengenfunktion $S(t,t')$ folgende Forderungen:*

(1) $S(t_1, t_2) \subset \{m_1(t_1, t_2; \omega) \geqq 1\}$ *und* $S(t_1, t_2) \in \mathfrak{R}$ *für* $(t_1, t_2) \in \Delta$;

(2) $S(t, t') \cap \{m(t, t'; \omega) \geqq 1\}$ *ist ausschöpfend für* $m(t, t'; \omega)$;

(3) *zu jeder abzählbaren Teilmenge A von* $[a, b]$ *gibt es eine p-Nullmenge* $N_{3.6}(A)$ *und eine Funktion* $\varepsilon(\omega) = \varepsilon(\omega; A)$ *mit* $\varepsilon(\omega) > 0$ *für* $\omega \in \Omega$ *und mit der Eigenschaft, daß für* $t_1', t_2' \in A$, $\omega \in S(t_1', t_2') - N_{3.6}(A)$ *mit* $t_1' < t_2' < t_1' + \varepsilon(\omega)$ *stets* $m(t_1', t_2'; \omega) \geqq 1$ *gilt,*

so ist

$$\int_{t_1}^{t_2} p(m(.,.; \omega) \geqq 1) = \int_{t_1}^{t_2} p(S(.,.))$$

für jedes $(t_1, t_2) \in \Delta$.

Beweis. 1) Wegen (2) gilt für $(t_1, t_2) \in \Delta$ stets

$$\int_{t_1}^{t_2} p(m(.,.; \omega) \geqq 1) \leqq \underline{\int_{t_1}^{t_2}} p(S(.,.)) \leqq \underline{\int_{t_1}^{t_2}} p(\{m(.,.; \omega) \geqq 1\} \cup S(.,.)).$$

Daher genügt es,

$$\overline{\int_{t_1}^{t_2}} p(\{m(.,.; \omega) \geqq 1\} \cup S(.,.)) \leqq \int_{t_1}^{t_2} p(m(.,.; \omega) \geqq 1)$$

für $(t_1, t_2) \in \Delta$ nachzuweisen.

2) Für $Z = \{t_0', t_1', \ldots, t_r'\}$ setzen wir $l(Z) := \max\{t_\rho' - t_{\rho-1}' : \rho = 1, \ldots, r\}$,

$$a(Z; \omega) := \sum_{\rho=1}^{r} \chi_{\{m(t_{\rho-1}', t_\rho'; \omega') \geqq 1\}}(\omega)^{10}$$

und

$$a_1(Z; \omega) := \sum_{\rho=1}^{r} \max\{\chi_{S(t_{\rho-1}', t_\rho')}(\omega),\ \chi_{\{m(t_{\rho-1}', t_\rho'; \omega') \geqq 1\}}(\omega)\}.$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt

$$p(m(.,.; \omega) \geqq 1)(Z) = E\, a(Z; \omega)$$

und

$$p(\{m(.,.; \omega) \geqq 1\} \cup S(.,.))(Z) = E\, a_1(Z; \omega).$$

Aus der Annahme, daß für ein $(t_1, t_2) \in \Delta$

$$\overline{\int_{t_1}^{t_2}} p(\{m(.,.; \omega) \geqq 1\} \cup S(.,.)) > \int_{t_1}^{t_2} p(m(.,.; \omega) \geqq 1)$$

gilt, folgt die Existenz einer Folge $Z_1, Z_2, \ldots$ von Zerlegungen von $(t_1, t_2]$ mit $Z_n \leqq Z_{n+1}$, $\lim_{n \to \infty} l(Z_n) = 0$ und

$$(*) \qquad \lim_{n \to \infty} E\, a_1(Z_n; \omega) > \lim_{n \to \infty} E\, a(Z_n; \omega).$$

Wir setzen $A := \bigcup_{n \geqq 1} Z_n$ und wählen N so, daß für $\omega \in \Omega - N$ $m(t, t'; \omega)$ und $m_1(t, t'; \omega)$ über A additiv sind und nur die Werte $0, 1, \ldots, \infty$ annehmen. Wegen $S(\tau, \tau') \subset \{m_1(\tau, \tau'; \omega) \geqq 1\}$ und $m(\tau, \tau'; \omega) \leqq m_1(\tau, \tau'; \omega)$ für $(\tau, \tau') \in \Delta$ gilt für $\omega \in \Omega - N$, $n = 1, 2, \ldots$

$$0 \leqq a(Z_n; \omega) \leqq a_1(Z_n; \omega) \leqq m_1(t_1, t_2; \omega)$$

[10] Für $Q \subset \Omega$ bezeichnen wir mit $\chi_Q(\omega)$ die Indikatorfunktion der Menge Q.

und

$$a(Z_n;\omega) \leqq a(Z_{n+1};\omega).$$

Wegen (3) und $\lim_{n\to\infty} l(Z_n)=0$ gibt es zu $\omega \in \Omega - N_{3.6}(A)$ ein $n(\omega)$ mit $a(Z_n;\omega)=a_1(Z_n;\omega)$ für $n \geqq n(\omega)$. Es gilt folglich $\lim_{n\to\infty} a(Z_n;\omega)=\lim_{n\to\infty} a_1(Z_n;\omega)$ für $\omega\in\Omega-(N\cup N_{3.6}(A))$. Da der Erwartungswert von $m_1(t_1,t_2;\omega)$ existiert, ergibt die Anwendung des Satzes von der majorisierten Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} E\,a(Z_n;\omega)=\lim_{n\to\infty} E\,a_1(Z_n;\omega)$$

im Widerspruch zu $(*)$.

Als zweite Möglichkeit, den Begriff „ausschöpfende Mengenfunktion“ zu verallgemeinern, betrachten wir folgende Situation:

Voraussetzungen. (A) Jeder Zerlegung $Z=\{t'_0,t'_1,\ldots,t'_r\}$ sind $r=|Z|-1$ Mengen $S_1(Z),\ldots,S_r(Z)$ mit $S_\rho(Z)\in\mathfrak{R}$ und $S_\rho(Z)\subset\{m(t'_{\rho-1},t'_\rho;\omega)\geqq 1\}$ für $\rho=1,\ldots,r$ zugeordnet.

(B) Zu t_1,t_2,t_3 mit $a\leqq t_1<t_2<t_3\leqq b$ und $\varepsilon>0$ gibt es ein $Z_\varepsilon(t_1,t_3)$ mit folgenden beiden Eigenschaften:

(1) $t_2\in Z_\varepsilon(t_1,t_3)$;

(2) für $Z(t_1,t_3)\geqq Z_\varepsilon(t_1,t_3)$ gilt mit den Abkürzungen

$$r:=|Z(t_1,t_3)|-1,\qquad n:=|Z(t_1,t_3|t_1,t_2)|-1$$

(daraus folgt $r-n=|Z(t_1,t_3|t_2,t_3)|-1$) stets

$$\sum_{\nu=1}^{n} p\big(S_\nu(Z(t_1,t_3|t_1,t_2))-S_\nu(Z(t_1,t_3))\big)+\sum_{\nu=1}^{r-n} p\big(S_\nu(Z(t_1,t_3|t_2,t_3))-S_{n+\nu}(Z(t_3))\big)<\varepsilon.$$

Zur Abkürzung setzen wir wieder $p(S(.))(Z):=\sum_{\rho=1}^{r} p(S_\rho(Z))$.

Aus Voraussetzung (B)(2) folgt, daß für jede Zerlegung $Z(t_1,t_3)$, die durch Zusammensetzen zweier Zerlegungen $Z(t_1,t_2)$, $Z(t_2,t_3)$ mit $Z(t_1,t_2)\geqq Z_\varepsilon(t_1,t_3|t_1,t_2)$ und $Z(t_2,t_3)\geqq Z_\varepsilon(t_1,t_3|t_2,t_3)$ entsteht, stets

$$p(S(.))(Z(t_1,t_3))>p(S(.))(Z(t_1,t_2))+p(S(.))(Z(t_2,t_3))-\varepsilon$$

gilt.

Wir begnügen uns hier mit folgendem Satz[11]:

(3.7) **Satz.** *Ist $s(a,b)<\infty$, und gelten für $S_\rho(Z)$ $(\rho=1,\ldots,|Z|-1)$ die Voraussetzungen* (A) *und* (B), *so sind folgende beiden Aussagen äquivalent:*

[11] Satz (3.7) kann man anwenden, wenn man den Erwartungswert der Anzahl $m(t,t';\omega)$ der in (t,t') liegenden lokalen Maximalstellen eines stochastischen Prozesses berechnen will. Einige zusätzliche Überlegungen ergeben in diesem Fall, daß unter einfachen Regularitätsvoraussetzungen für $S'_\rho(Z):=\{x(t_{\rho-1},\omega)<x(t_\rho,\omega),\ x(t_{\rho+1},\omega)<x(t_\rho,\omega)\}$ für $\rho=1,\ldots,r-1$ und $S'_r(Z):=\emptyset$

$$\lim p(S(.))(Z(t_1,t_2))=\int_{t_1}^{t_2} p(m(.,.;\omega)\geqq 1)$$

gilt.

(1) $s(t_1, t_2) = \lim\limits_{\leq} p(S(\cdot))(Z(t_1, t_2))$ *für jedes* $(t_1, t_2) \in \Delta$;

(2) *für* $B'(Z) := \{m(t_1, t_2; \omega) \geqq 1\} - \bigcup\limits_{\rho=1}^{r} S_\rho(Z)$ *gilt* $\lim\limits_{\leq} p(B'(Z(t_1, t_2))) = 0$ *für jedes* $(t_1, t_2) \in \Delta$.

Ist $s(a, b) = \infty$, *so folgt* (1) *aus* (2).

Den *Beweis*, den man zum größten Teil in den gleichen Schritten wie den Beweis zu Satz (3.3) führen kann, geben wir hier nicht an.

§ 4. Die $\mathfrak{K}$-Meßbarkeit einer Intervallzählfunktion

Um die Berechnung von $s(t, t')$ zu erleichtern, haben wir im vorhergehenden Abschnitt den Begriff „ausschöpfende Mengenfunktion" eingeführt. In diesem Abschnitt zeigen wir, daß die Existenz einer Mengenfunktion mit einigen der Eigenschaften, die ausschöpfende Mengenfunktionen haben, die $\mathfrak{K}$-Meßbarkeit der „zugehörigen" Intervallzählfunktion zur Folge hat. Ferner geben wir auch Bedingungen an, die die $\mathfrak{K}$-Meßbarkeit einer Intervallzählfunktion in der in Satz (3.6) vorliegenden Situation gewährleisten. Auf die Formulierung eines Satzes für den in (3.7) betrachteten Fall verzichten wir; der Beweis zu Satz (4.2) zeigt unmittelbar, welche Bedingungen in diesem Fall für die $\mathfrak{K}$-Meßbarkeit von $m(t', t'; \omega)$ hinreichend sind. Wir benutzen beim Beweis der folgenden zwei Sätze

(4.1) **Lemma.** *Erfüllt die Intervallzählfunktion* $m(t, t'; \omega)$ *die Eigenschaft* I, *und gilt* $\{m(t_1, t_2; \omega) \geqq 1\} \in \mathfrak{K}$ *für beliebiges* $(t_1, t_2) \in \Delta$, *so ist* $m(t, t'; \omega)$ *ein Zählprozeß zu* $(\Omega, \mathfrak{K}, p)$.

Die Aussage dieses Lemmas ergibt sich aus Lemma (2.5), da wegen

$$\{m(\tau_1, \tau_2; \omega) \geqq 1\} \in \mathfrak{K}$$

natürlich $W(Z; M) \in \mathfrak{K}$ für jede Zerlegung Z und jedes natürliche M gilt.

Für die in den Aussagen (3.2)–(3.5) betrachtete Situation geben wir folgenden Satz an:

(4.2) **Satz.** *Ist* $m(t, t'; \omega)$ *eine Intervallzählfunktion mit Eigenschaft* I, *und gibt es eine für* $(t, t') \in \Delta$ *definierte Mengenfunktion* $S(t, t')$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(1) $S(t_1, t_2) \in \mathfrak{K}$ *für* $(t_1, t_2) \in \Delta$;

(2) $S(t_1, t_2) \subset \{m(t_1, t_2; \omega) \geqq 1\}$ *für* $(t_1, t_2) \in \Delta$;

(3) $S(t, t')$ *erfüllt Eigenschaft* (3.5)(2),

so ist $m(t, t'; \omega)$ *ein Zählprozeß zu* $(\Omega, \mathfrak{K}, p)$.

Beweis. Aus (1) folgt $C'(t_1, t_2; A) \in \mathfrak{K}$, aus (2) $C'(t_1, t_2, A) \subset \{m(t_1, t_2; \omega) \geqq 1\} \cup N_{2.4}(A \cup \{t_1, t_1\})$. Berücksichtigen wir (3.5)(2), so erhalten wir also $p(C'(t_1, t_2; A) \triangle \{m(t_1, t_2; \omega) \geqq 1\}) = 0$[12] und damit wegen der Vollständigkeit des Wahrscheinlichkeitsmaßes p auch $\{m(t_1, t_2; \omega) \geqq 1\} \in \mathfrak{K}$ für beliebiges $(t_1, t_2) \in \Delta$.

Für den Fall, daß es $(t_1, t_2) \in \Delta$ mit $\{m(t_1, t_2; \omega) \geqq 1\} \not\supset S(t_1, t_2)$ gibt, enthält der nächste Satz hinreichende Bedingungen für die $\mathfrak{K}$-Meßbarkeit von $m(t, t'; \omega)$.

[12] Mit $A_1 \triangle A_2$ bezeichnen wir die symmetrische Differenz $(A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_1)$.

(4.3) **Satz.** *Wenn die Intervallzählfunktion $m(t,t';\omega)$ die Eigenschaft* I *erfüllt, und wenn eine für $(t,t')\in\Delta$ erklärte Mengenfunktion $S(t,t')$ mit folgenden drei Eigenschaften existiert:*

(1) *$S(t_1,t_2)\in\mathfrak{R}$ für beliebiges $(t_1,t_2)\in\Delta$;*

(2) *$S(t,t')$ erfüllt Eigenschaft* (3.5)(2);

(3) *$S(t,t')$ erfüllt Eigenschaft* (3.6)(3)

dann ist $m(t,t';\omega)$ ein Zählprozeß zu $(\Omega,\mathfrak{R},p)$.

Beweis. 1) A sei die in (3.5)(2) eingeführte abzählbare, in $[a,b]$ dichte Menge. Für beliebiges $\varepsilon>0$ sei

$$C'(t_1,t_2;\varepsilon;A):=\bigcup_{\substack{t_1',t_2'\in A\cup\{t_1,t_2\}\\ t_1',t_2'\in[t_1,t_2]\\ 0<t_2'-t_1'<\varepsilon}} S(t_1',t_2')$$

gesetzt.

Wenn wir zu $(t_1,t_2)\in\Delta$, $\varepsilon>0$ Punkte $\tau_1,\dots,\tau_{n-1}\in A$ so wählen, daß $t_1=:\tau_0<\tau_1<\dots<\tau_n:=t_2$ und $\tau_\nu-\tau_{\nu-1}<\varepsilon$ für $\nu=1,\dots,n$ gilt, erhalten wir wegen (3.5)(2)

$$\begin{aligned}\{m(t_1,t_2;\omega)\geqq 1\}&\subset\bigcup_{\nu=1}^{n}\{m(\tau_{\nu-1},\tau_\nu;\omega)\geqq 1\}\cup N_{2.4}(\{\tau_0,\dots,\tau_n\})\\&\subset\bigcup_{\nu=1}^{n}C'(\tau_{\nu-1},\tau_\nu;A)\cup\tilde N(\tau_0,\dots,\tau_n)\\&\subset C'(t_1,t_2;\varepsilon;A)\cup\tilde N(\tau_0,\dots,\tau_n)\end{aligned}$$

mit geeignet gewähltem $\tilde N(\tau_0,\dots,\tau_n)$. $N'(t_1,t_2;\varepsilon):=\{m(t_1,t_2;\omega)\geqq 1\}-C'(t_1,t_2;\varepsilon;A)$ ist folglich eine p-Nullmenge.

Setzen wir

$$N''(t_1,t_2):=\bigcup_{n\geqq 1}N'\left(t_1,t_2;\frac{1}{n}\right),$$

so gilt

$$\{m(t_1,t_2;\omega)\geqq 1\}\subset\bigcap_{n\geqq 1}C'\left(t_1,t_2;\frac{1}{n};A\right)\cup N''(t_1,t_2)$$

für $(t_1,t_2)\in\Delta$.

2) Wegen (3.6)(3) gilt für $\tau_1,\tau_2\in A\cup\{t_1,t_2\}$ mit $\tau_1<\tau_2$, $\tau_1,\tau_2\in[t_1,t_2]$

$$\begin{aligned}S(\tau_1,\tau_2)&\subset\{m(\tau_1,\tau_2;\omega)\geqq 1\}\cup\{\varepsilon(\omega)\leqq\tau_2-\tau_1\}\cup N_{3.6}(A\cup\{t_1,t_2\})\\&\subset\{m(t_1,t_2;\omega)\geqq 1\}\cup\{\varepsilon(\omega)\leqq\tau_2-\tau_1\}\cup N_{3.6}(A\cup\{t_1,t_2\})\cup N_{2.4}(A\cup\{t_1,t_2\})\end{aligned}$$

und mit $N(t_1,t_2):=N_{3.6}(A\cup\{t_1,t_2\})\cup N_{2.4}(A\cup\{t_1,t_2\})$ folglich

$$C'(t_1,t_2;\varepsilon;A)\subset\{m(t_1,t_2;\omega)\geqq 1\}\cup\{\varepsilon(\omega)<\varepsilon\}\cup N(t_1,t_2);$$

also erhalten wir, da $\varepsilon(\omega)>0$ für $\omega\in\Omega$,

$$\bigcap_{n\geqq 1}C'\left(t_1,t_2;\frac{1}{n};A\right)\subset\{m(t_1,t_2;\omega)\geqq 1\}\cup N(t_1,t_2)$$

für $(t_1,t_2)\in\Delta$. Wegen

$$\bigcap_{n\geqq 1}C'\left(t_1,t_2;\frac{1}{n};A\right)\in\mathfrak{R}$$

können wir aus der letzten Teilmengenrelation und der in 1) bewiesenen Beziehung auf $\{m(t_1, t_2; \omega) \geqq 1\} \in \mathfrak{K}$ für beliebiges $(t_1, t_2) \in \Delta$ schließen.

§ 5. Kreuzungspunkte zweier reeller Funktionen

Wir geben zunächst die Definition des Kreuzungspunktes zweier reeller Funktionen und einige weitere Definitionen an. Die dafür bewiesenen Aussagen (5.3), (5.5) und (5.7) liefern zusammen mit den Sätzen von §§ 2–4 relativ leicht die angestrebten Sätze über die Kreuzungspunkte eines stochastischen Prozesses mit einer reellen Funktion.

Mit $x(t)$, $g(t)$ bezeichnen wir in diesem Paragraphen zwei über $[a, b]$ definierte reelle Funktionen.

Wie üblich formulieren wir (vgl. etwa [14])

(5.1) **Definition.** (1) Wir sagen, $x(t)$ und $g(t)$ kreuzen sich im Punkt t_0, wenn es in jeder Umgebung[13] von t_0 Punkte t_1, t_2 mit $x(t_1) < g(t_1)$, $x(t_2) > g(t_2)$ gibt.

(2) Ist $g_1(t) \equiv \gamma$ auf $[a, b]$, und kreuzen sich $x(t)$ und $g_1(t)$ in t_0, so nennen wir t_0 einen γ-Niveau-Kreuzungspunkt (abgekürzt: γ NK-Punkt) von $x(t)$.

Ist t_0 ein γ NK-Punkt von $x(t)$, und ist $x(t)$ in t_0 stetig, so ist natürlich $x(t_0) = \gamma$; ist aber $x(t)$ in t_0 unstetig, so braucht $x(t_0)$ nicht gleich γ zu sein.

Die nächste Definition ist wesentlich verschieden von der Definition, die in [14] für die Aussage „$x(t)$ hat ein ‚upcrossing' (‚downcrossing') in t_0" gegeben wird.

(5.2) **Definition.** (1) Wir sagen, daß $g(t)$ von $x(t)$ in t_0 von unten nach oben (von oben nach unten) gekreuzt wird, wenn es in jeder Umgebung von t_0 Punkte t_1, t_2 mit $t_1 \leqq t_0 \leqq t_2$ und $x(t_1) < g(t_1)$, $x(t_2) > g(t_2)$ $\big(x(t_1) > g(t_1), x(t_2) < g(t_1)\big)$ gibt.

(2) Ist $g_1(t) \equiv \gamma$, und wird $g_1(t)$ von $x(t)$ in t_0 von unten nach oben (von oben nach unten) gekreuzt, so nennen wir t_0 einen γ-Niveau-Kreuzungspunkt von unten nach oben (von oben nach unten; abgekürzt u.o. γ NK-Punkt resp. o.u. γ NK-Punkt von $x(t)$).

Aus den Definitionen (5.1) und (5.2) ersehen wir unmittelbar, daß wir uns im Folgenden nur mit der Untersuchung der γ NK-Punkte und der u.o. γ NK-Punkte zu beschäftigen brauchen.

In diesem Paragraphen benutzen wir die Abkürzungen

$$s(t, \varepsilon) := \sup\{x(\tau) \colon \tau \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon) \cap [a, b]\},$$

$$s_L(t, \varepsilon) := \sup\{x(\tau) \colon \tau \in (t-\varepsilon, t) \cap [a, b]\},$$

$$s'_L(t, \varepsilon) := \sup\{x(\tau) \colon \tau \in (t-\varepsilon, t] \cap [a, b]\},$$

$$s_R(t, \varepsilon) := \sup\{x(\tau) \colon \tau \in (t, t+\varepsilon) \cap [a, b]\},$$

$$s'_R(t, \varepsilon) := \sup\{x(\tau) \colon \tau \in [t, t+\varepsilon) \cap [a, b]\},$$

$$i(t, \varepsilon) := \inf\{x(\tau) \colon \tau \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon) \cap [a, b]\},$$

und analog $i_L(t, \varepsilon)$, $i'_L(t, \varepsilon)$, $i_R(t, \varepsilon)$, $i'_R(t, \varepsilon)$.

---

[13] Unter einer Umgebung U von t_0 verstehen wir hier und im Folgenden eine Umgebung von t_0 bezüglich der Relativtopologie auf $[a, b]$; für U gilt also insbesondere: $U \subset [a, b]$.

Leicht einzusehen ist

(5.3) **Lemma.** *(1) t_0 ist genau dann ein γ NK-Punkt von $x(t)$, wenn $i(t_0,\varepsilon)<\gamma<s(t_0,\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon>0$ gilt.*

(2) t_0 ist genau dann ein u.o. γ NK-Punkt von $x(t)$, wenn $i'_L(t_0,\varepsilon)<\gamma<s'_R(t_0,\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon>0$ gilt.

Es ist zweckmäßig, die u.o. γ NK-Punkte (und natürlich ebenso die o.u. γ NK-Punkte) noch weiter zu klassifizieren.

(5.4) **Definition.** Wir setzen für $\tau\in[a,b]$

$$\alpha^+(\tau;\gamma):=\begin{cases}1 & \text{falls } \tau \text{ ein u.o. } \gamma\,\text{NK-Punkt von } x(t),\\ 0 & \text{sonst,}\end{cases}$$

für $\tau\in(a,b]$

$$\alpha_L^+(\tau;\gamma):=\begin{cases}1 & \text{falls } \tau \text{ ein u.o. } \gamma\,\text{NK-Punkt von } x(t) \text{ mit } x(\tau)>\gamma \text{ ist,}\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

und für $\tau\in[a,b)$

$$\alpha_R^+(\tau;\gamma):=\begin{cases}1 & \text{falls } \tau \text{ ein u.o. } \gamma\,\text{NK-Punkt von } x(t) \text{ mit } x(\tau)<\gamma \text{ ist,}\\ 0 & \text{sonst,}\end{cases}$$

und definieren damit für $(t_1,t_2)\in\Delta$

$$m^+(t_1,t_2;\gamma):=\alpha_R^+(t_1;\gamma)+\sum_{t\in(t_1,t_2)}\alpha^+(t;\gamma)+\alpha_L^+(t_2;\gamma)$$

als Anzahl der u.o. γ NK-Punkte von $x(t)$ in dem Intervall $\langle t_1,t_2\rangle$[14].

Analog seien die Anzahl der o.u. γ NK-Punkte in $\langle t_1,t_2\rangle$ (Bezeichnung: $m^-(t_1,t_2;\gamma)$) und die Anzahl der Punkte in $\langle t_1,t_2\rangle$, in denen $g(t)$ von unten nach oben bzw. von oben nach unten von $x(t)$ gekreuzt wird (Bezeichnung: $m^+(t_1,t_2;g(.))$ bzw. $m^-(t_1,t_2;g(.))$), erklärt.

Die Größen $m^+(t_1,t_2;\gamma)$, $m^-(t_1,t_2;\gamma)$ sind durch den Funktionsverlauf von $x(t)$ in $[t_1,t_2]$ eindeutig bestimmt. Dagegen ist an dem Bild der Funktion $x(t)$ über $[t_1,t_2]$ nicht notwendig zu erkennen, ob t_1 bzw. t_2 ein u.o. γ NK-Punkt oder ein o.u. γ NK-Punkt ist[15].

Ist für ein $t_2\in(a,b)$ $x(t_2)\neq\gamma$, so gilt $\alpha^+(t_2;\gamma)=\alpha_L^+(t_2;\gamma)+\alpha_R^+(t_2;\gamma)$ und damit $m^+(t_1,t_3;\gamma)=m^+(t_1,t_2;\gamma)+m^+(t_2,t_3;\gamma)$ für $a\leqq t_1<t_2<t_3\leqq b$. Stets gilt $\alpha^+(t_2;\gamma)\geqq\alpha_L^+(t_2;\gamma)+\alpha_R^+(t_2;\gamma)$ für $t_2\in(a,b)$ und somit $m^+(t_1,t_3;\gamma)\geqq m^+(t_1,t_2;\gamma)+m^+(t_2,t_3;\gamma)$ für $a\leqq t_1<t_2<t_3\leqq b$.

Wir sagen, daß ein $t_0\in[t_1,t_2]$ einen positiven Beitrag zu $m^+(t_1,t_2;\gamma)$ liefert, wenn entweder $t_0=t_1$ und $\alpha_R^+(t_0;\gamma)=1$ oder $t_0\in(t_1,t_2)$ und $\alpha^+(t_0;\gamma)=1$ oder $t_0=t_2$ und $\alpha_L^+(t_0;\gamma)=1$ ist.

---

[14] Wir verwenden absichtlich die Klammern $\langle\,,\rangle$, die nichts darüber aussagen sollen, ob t_1,t_2 Elemente des „Intervalles" $\langle t_1,t_2\rangle$ sind oder nicht.

[15] Aus diesem Grund haben wir $m^+(t_1,t_2;\gamma)$ nicht gleich

$$\sum_{t\in(t_1,t_2]}\alpha^+(t;\gamma)\quad\text{oder gleich}\quad\sum_{t\in[t_1,t_2)}\alpha^+(t;\gamma)$$

gesetzt.

Für die nächsten zwei Lemmata sei T eine abzählbare, in $[a,b]$ dichte Teilmenge von $[a,b]$ mit

$$\sup\{x(t)\colon t\in(t_1,t_2)\cap[a,b]\}=\sup\{x(t)\colon t\in(t_1,t_2)\cap[a,b]\cap T\},$$
$$\inf\{x(t)\colon t\in(t_1,t_2)\cap[a,b]\}=\inf\{x(t)\colon t\in(t_1,t_2)\cap[a,b]\cap T\}$$

für jedes offene Intervall (t_1,t_2), das mit $[a,b]$ mindestens einen Punkt gemeinsam hat[16].

(5.5) **Lemma.** *Ist $x(t)$ in keinem (nicht zu einem Punkt ausgearteten) Teilintervall*[17] *von $[a,b]$ konstant gleich γ, so sind folgende zwei Aussagen äquivalent:*

(I) $m^+(t_1,t_2;\gamma)\geqq k$;

(II) *es gibt $t_1',t_1'',\ldots,t_k',t_k''\in T\cup\{t_1,t_2\}$ mit $t_1\leqq t_1'<t_1''<t_2'<\cdots<t_k''\leqq t_2$ und mit $x(t_\kappa')<\gamma<x(t_\kappa'')$ für $\kappa=1,\ldots,k$.*

Ist (I) *erfüllt, und liefern die Punkte $\tilde t_1,\ldots,\tilde t_k$ einen positiven Beitrag zu $m^+(t_1,t_2;\gamma)$, so können wir zu jedem $\varepsilon>0$ die t_κ',t_κ'' in* (II) *speziell so wählen, daß $\tilde t_\kappa-\varepsilon<t_\kappa'<t_\kappa''<\tilde t_\kappa+\varepsilon$ für $\kappa=1,\ldots,k$ gilt.*

Die Aussage von Lemma (5.5) bleibt richtig, wenn wir (II) durch

(II′) es gibt $t_1',t_1'',\ldots,t_k''$ mit $t_1\leqq t_1'<t_1''<t_2'<\cdots<t_k''\leqq t_2$ und mit $x(t_\kappa')<\gamma<x(t_\kappa'')$ für $\kappa=1,\ldots,k$

ersetzen. Wesentlich für das Folgende ist jedoch, daß wir $t_1',\ldots,t_k''$ in $T\cup\{t_1,t_2\}$ wählen können.

Beweis. 1) (α) Ist $\alpha^+(\tilde t;\gamma)=1$, so gilt (a) $i_L(\tilde t,\varepsilon)<\gamma$ für jedes $\varepsilon>0$ und $s(\tilde t,\varepsilon')>\gamma$ für jedes $\varepsilon'>0$ oder (b) $s_R(\tilde t,\varepsilon)>\gamma$ für jedes $\varepsilon>0$ und $i(\tilde t,\varepsilon')<\gamma$ für jedes $\varepsilon'>0$. Im Fall (a) gibt es nach Wahl der Menge T zu jedem $\varepsilon>0$ ein $t'\in T$ mit $\tilde t-\varepsilon<t'<\tilde t$ und $x(t')<\gamma$ und zu t' weiter ein $t''\in T$ mit $t'<t''<\tilde t+\varepsilon$ und $x(t'')>\gamma$; im Fall (b) gibt es zu jedem $\varepsilon>0$ ein $t''\in T$ mit $\tilde t<t''<\tilde t+\varepsilon$ und $x(t'')>\gamma$ und hierzu ein $t'\in T$ mit $\tilde t-\varepsilon<t'<t''$ und $x(t')<\gamma$.

Ist $\alpha^+(\tilde t;\gamma)=1$, so gibt es also zu jedem $\varepsilon>0$ $t',t''\in T$ mit $\tilde t-\varepsilon<t'<t''<\tilde t+\varepsilon$ und $x(t')<\gamma<(t'')$.

(β) Ist $\alpha_L^+(\tilde t;\gamma)=1$, so gilt $x(t'')>\gamma$ für $t''\colon=\tilde t$, und zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es ein $t'\in T$ mit $\tilde t-\varepsilon<t'<\tilde t$ und $x(t')<\gamma$.

(γ) Ist $\alpha_R^+(\tilde t;\gamma)=1$, so gilt $x(t')<\gamma$ für $t'\colon=\tilde t$ und zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es ein $t''\in T$ mit $\tilde t<t''<\tilde t+\varepsilon$ und $x(t'')>\gamma$.

2) Ist $m^+(t_1,t_2;\gamma)\geqq k$, so gibt es mindestens k verschiedene Punkte $\tilde t_1,\ldots,\tilde t_k\in[t_1,t_2]$, die einen positiven Beitrag zu $m^+(t_1,t_2;\gamma)$ liefern. Wählen wir $\varepsilon>0$ so, daß $\varepsilon\leqq\frac12\cdot\min\{|\tau-\tau'|\colon\tau,\tau'\in\{t_1,\tilde t_1,\ldots,\tilde t_k,t_2\},\tau\neq\tau'\}$ gilt, und zu jedem $\tilde t_\kappa$ die Punkte t_κ',t_κ'' wie in 1) (α), (β) oder (γ), je nachdem ob $\tilde t_\kappa\in(t_1,t_2)$, $\tilde t_\kappa=t_2$ oder $\tilde t_\kappa=t_1$, so gilt $t_1',t_1'',\ldots,t_k''\in T\cup\{t_1,t_2\}$, $t_1\leqq t_1'<t_1''<t_2'<\cdots<t_k''\leqq t_2$ und $x(t_\kappa')<\gamma<x(t_\kappa'')$.

[16] Es läßt sich leicht zeigen, daß zu jeder über $[a,b]$ erklärten reellen Funktion $x(t)$ eine Menge T mit diesen Eigenschaften existiert.

[17] Im Folgenden verstehen wir in diesem Zusammenhang unter einem Teilintervall von $[a,b]$ immer ein nicht zu einem Punkt ausgeartetes Teilintervall.

Damit haben wir also gezeigt, daß aus (I) sich (II) ergibt, und daß die letzte Aussage von (5.5) richtig ist.

3) Es sei $t_0', t_0'' \in [a, b]$ mit $t_0' < t_0''$ und mit $x(t_0') < \gamma < x(t_0'')$. Ist

$$t_0 := \sup\{\tau : \tau \in [t_0', t_0''],\ x(\tau) < \gamma\} \in (t_0', t_0''),$$

so gilt $i_L'(t_0, \varepsilon) < \gamma$ für jedes $\varepsilon > 0$; weiter gilt $x(t) \geqq \gamma$ für $t \in (t_0, t_0'')$ und somit, da $x(t)$ in keinem Intervall konstant gleich γ ist, $s_R'(t_0, \varepsilon) > \gamma$ für jedes $\varepsilon > 0$. Wir erhalten in diesem Fall daher nach (5.3) $\alpha^+(t_0; \gamma) = 1$.

Ist $t_0 = t_0''$, so erhalten wir $i_L(t_0, \varepsilon) < \gamma$ für jedes $\varepsilon > 0$ und wegen $x(t_0) > \gamma$ daher $\alpha_L^+(t_0, \gamma) = 1$.

Ist $t_0 = t_0'$, so gilt, da $x(t)$ in keinem Intervall konstant gleich γ ist, $s_R(t_0, \varepsilon) > \gamma$ für jedes $\varepsilon > 0$ und $x(t_0) < \gamma$ und folglich $\alpha_R^+(t_0; \gamma) = 1$.

Wir haben damit also gezeigt, daß aus $x(t_0') < \gamma < x(t_0'')$ stets $m^+(t_0', t_0''; \gamma) \geqq 1$ folgt.

4) Aus (II) folgt wegen 3) $m^+(t_\kappa', t_\kappa''; \gamma) \geqq 1$ für $\kappa = 1, \ldots, k$ und somit, da nach einer der Bemerkungen im Anschluß an (5.4)

$$m^+(t_1, t_1'; \gamma) + m^+(t_1', t_1''; \gamma) + m^+(t_1'', t_2'; \gamma) + \cdots + m^+(t_k', t_k''; \gamma) + m^+(t_k'', t_2; \gamma) \leqq m^+(t_1, t_2; \gamma)$$

gilt[18], auch $m^+(t_1, t_2; \gamma) \geqq k$.

Ist $x(t)$ in keinem Intervall konstant gleich γ, so ist t_0 ein γ NK-Punkt von $x(t)$ genau dann, wenn t_0 entweder ein u.o. γ NK-Punkt oder ein o.u. γ NK-Punkt oder beides ist. Der Fall, daß t_0 gleichzeitig ein u.o. γ NK-Punkt und ein o.u. γ NK-Punkt von $x(t)$ ist, ist möglich, falls t_0 ein innerer Punkt von $[a, b]$ ist. Es ist nämlich t_0 genau dann gleichzeitig ein u.o. γ NK-Punkt und ein o.u. γ NK-Punkt, wenn einer der folgenden drei Fälle vorliegt:

Fall I: $x(t_0) > \gamma$; $i_L(t_0, \varepsilon) < \gamma$ und $i_R(t_0, \varepsilon) < \gamma$ für jedes $\varepsilon > 0$;

Fall II: $x(t_0) < \gamma$; $s_L(t_0, \varepsilon) > \gamma$ und $s_R(t_0, \varepsilon) > \gamma$ für jedes $\varepsilon > 0$;

Fall III: $x(t_0) = \gamma$; $s_L(t_0, \varepsilon) > \gamma$, $s_R(t_0, \varepsilon) > \gamma$, $i_L(t_0, \varepsilon) < \gamma$ und $i_R(t_0, \varepsilon) < \gamma$ für jedes $\varepsilon > 0$.

(5.6) **Definition.** t_0 nennen wir einen doppelten (oder auch: beidseitigen) γ NK-Punkt von $x(t)$, wenn t_0 gleichzeitig u.o. γ NK-Punkt und o.u. γ NK-Punkt von $x(t)$ ist.

Ist $x(t)$ in dem doppelten γ NK-Punkt t_0 stetig, so liegt Fall III der vor Definition (5.6) angegebenen Fallunterscheidung vor. Ist $x(t)$ in keinem Teilintervall von $[a, b]$ konstant gleich γ, so ist t_0 deshalb ein beidseitiger Häufungspunkt von u.o. γ NK-Punkten und ebenso ein beidseitiger Häufungspunkt von o.u. γ NK-Punkten. (Der Beweis hierfür ergibt sich sofort aus Beweisteil 2) zu Lemma (5.7).)

(5.7) **Lemma.** *Ist $x(t)$ in keinem Teilintervall von $[a, b]$ konstant gleich γ, ist t_0 ein doppelter γ NK-Punkt von $x(t)$, und ist t_0 kein Element von T, so ist t_0 ein Häufungspunkt von γ NK-Punkten von $x(t)$.*

[18] Es sei hier $m^+(t', t'; \gamma) := 0$ für $t' \in [a, b]$ gesetzt.

Beweis. 1) Ist t_0 ein beidseitiger γNK-Punkt mit $x(t_0)>\gamma$, $i_L(t_0,\varepsilon)<\gamma$ und $i_R(t_0,\varepsilon)<\gamma$ für jedes $\varepsilon>0$ (Fall I der Fallunterscheidung vor Definition (5.6)), so gilt für jedes $\varepsilon>0$:

$$\begin{aligned}\gamma<s(t_0,\varepsilon)&=\sup\{x(\tau)\colon \tau\in(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)\cap T\}\\&=\sup\{x(\tau)\colon \tau\in\{(t_0-\varepsilon,t_0)\cup(t_0,t_0+\varepsilon)\}\cap T\}\\&=\max\{s_L(t_0,\varepsilon),s_R(t_0,\varepsilon)\}.\end{aligned}$$

Es ist also

$$(*)\qquad i_L(t_0,\varepsilon)<\gamma<s_L(t_0,\varepsilon)\qquad \text{für jedes } \varepsilon>0$$

oder

$$(**)\qquad i_R(t_0,\varepsilon)<\gamma<s_R(t_0,\varepsilon)\qquad \text{für jedes } \varepsilon>0.$$

Mindestens eine der Aussagen (*), (**) gilt auch im Fall II (Beweis ähnlich wie oben) und im Fall III.

2) Wir setzen für den weiteren Beweis voraus, daß (*) gilt. (Gilt (**), so ist der Beweis analog weiterzuführen.) Aus (*) folgt zunächst, daß ein $t_1\in[a,b]\cap T$ mit $t_0-1<t_1<t_0$ und mit $x(t_1)<\gamma$ existiert, weiter daß ein $t_2\in T$ mit $t_1<t_2$, $t_0-\frac{1}{2}<t_2<t_0$ und mit $x(t_2)>\gamma$ existiert, allgemein daß es zu bereits gewähltem t_{n-1} ein $t_n\in T$ mit $t_{n-1}<t_n$, $t_0-\dfrac{1}{n}<t_n<t_0$ und mit $\operatorname{sign}(x(t_n)-\gamma)=(-1)^n$ gibt. Da nach Lemma (5.5) in $[t_{2m-1},t_{2m}]$ mindestens ein u.o. γNK-Punkt und in $[t_{2m},t_{2m+1}]$ mindestens ein o.u. γNK-Punkt liegt, ist t_0 ein Häufungspunkt von γNK-Punkten.

Etwas anders als $m^+(t_1,t_2;\gamma)$ in Definition (5.4) definieren wir nun die Anzahl der γNK-Punkte von $x(t)$ in $\langle t_1,t_2\rangle$.

(5.8) **Definition.** Für $\tau\in[a,b]$ sei

$$\alpha(\tau;\gamma):=\begin{cases}1 & \text{falls } \tau \text{ ein nicht beidseitiger } \gamma\text{NK-Punkt von } x(t) \text{ ist,}\\ 0 & \text{sonst,}\end{cases}$$

für $\tau\in(a,b]$

$$\alpha_L(\tau;\gamma):=\begin{cases}1 & \text{falls } \alpha(\tau;\gamma)=1 \text{ und entweder } x(\tau)>\gamma \text{ und } i_L(\tau,\varepsilon)<\gamma \text{ für jedes } \varepsilon>0\\ & \text{oder } x(\tau)<\gamma \text{ und } s_L(\tau,\varepsilon)>\gamma \text{ für jedes } \varepsilon>0 \text{ gilt,}\\ 0 & \text{sonst,}\end{cases}$$

für $\tau\in[a,b)$

$$\alpha_R(\tau;\gamma):=\begin{cases}1 & \text{falls } \alpha(\tau;\gamma)=1 \text{ und entweder } x(\tau)>\gamma \text{ und } i_R(\tau,\varepsilon)<\gamma \text{ für jedes } \varepsilon>0\\ & \text{oder } x(\tau)<\gamma \text{ und } s_R(\tau,\varepsilon)>\gamma \text{ für jedes } \varepsilon>0 \text{ gilt,}\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

und für $\tau\in[a,b]$

$$\beta(\tau;\gamma):=\begin{cases}1 & \text{falls } \tau \text{ ein doppelter } \gamma\text{NK-Punkt von } x(t) \text{ ist,}\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Mit diesen Bezeichnungen definieren wir für $(t_1, t_2) \in \Delta$

$$m(t_1, t_2; \gamma) := \alpha_R(t_1; \gamma) + \sum_{t \in (t_1, t_2)} \alpha(t; \gamma) + \alpha_L(t_2; \gamma)$$
$$+ \beta(t_1; \gamma) + 2 \cdot \sum_{t \in (t_1, t_2)} \beta(t; \gamma) + \beta(t_2; \gamma)$$

als Anzahl der γ NK-Punkte von $x(t)$ in $\langle t_1, t_2 \rangle$.

Weiter sei zur Abkürzung $m_1(t_1, t_2; \gamma) := m^+(t_1, t_2; \gamma) + m^-(t_1, t_2; \gamma)$ gesetzt. Entsprechend seien auch die Größen $m(t_1, t_2; g(.))$ und $m_1(t_1, t_2; g(.))$ eingeführt.

Es sei $x(t)$ in keinem Teilintervall konstant gleich γ. Führen wir die Funktionen $\alpha^-(\tau; \gamma)$, $\alpha_L^-(\tau; \gamma)$, $\alpha_R^-(\tau; \gamma)$ analog zu $\alpha^+(\tau; \gamma)$, $\alpha_L^+(\tau; \gamma)$, $\alpha_R^+(\tau; \gamma)$ in Definition (5.4) für die o.u. γ NK-Punkte von $x(t)$ ein, so gilt

$$\alpha(t; \gamma) + 2 \cdot \beta(t; \gamma) = \alpha^+(t; \gamma) + \alpha^-(t; \gamma) \quad \text{für jedes } t \in [a, b],$$
$$\alpha_R(t; \gamma) + \beta(t; \gamma) = \alpha_R^+(t; \gamma) + \alpha_R^-(t; \gamma) \quad \text{für jedes } t \in [a, b] \text{ mit } x(t) \neq \gamma$$

und

$$\alpha_L(t; \gamma) + \beta(t; \gamma) = \alpha_L^+(t; \gamma) + \alpha_L^-(t; \gamma) \quad \text{für jedes } t \in [a, b] \text{ mit } x(t) \neq \gamma.$$

Wenn wir die erste Gleichung über alle $t \in (t_1, t_2)$ summieren und noch die zweite und dritte Gleichung beachten, erhalten wir

$$m(t_1, t_2; \gamma) = m_1(t_1, t_2; \gamma)$$

für jedes $(t_1, t_2) \in \Delta$ mit $x(t_1) \neq \gamma$, $x(t_2) \neq \gamma$ [19].

§ 6. Kreuzungspunkte eines stochastischen Prozesses

In diesem Paragraphen sei $x(t, \omega)$ ein für $t \in [a, b]$ definierter, reeller stochastischer Prozeß auf dem Wahrscheinlichkeitsfeld $(\Omega, \mathfrak{K}, p)$. Weiter sei $g(t)$ eine ebenfalls über $[a, b]$ erklärte reelle Funktion.

Die Anzahl der in $\langle t_1, t_2 \rangle$ liegenden Kreuzungspunkte zwischen $g(t)$ und $x(t, \omega)$ bezeichnen wir mit $m(t_1, t_2; g(.); \omega)$. Entsprechend sind die Bezeichnungen $m^+(t_1, t_2; g(.); \omega)$, $m^-(t_1, t_2; g(.); \omega)$ und $m_1(t_1, t_2; g(.); \omega)$ zu verstehen.

(6.1) **Satz.** *Gilt $p(x(t, \omega) = g(t)) = 0$ für jedes $t \in [a, b]$, und ist $x(t, \omega) - g(t)$ separabel (bezüglich der Gesamtheit der abgeschlossenen Intervalle), so sind $m^+(t, t'; g(.); \omega)$, $m^-(t, t'; g(.); \omega)$ zwei über $[a, b]$ erklärte Zählprozesse. Diese beiden Zählprozesse haben die Eigenschaft* I *(aus* § 2).

Mit den Abkürzungen

$$S_g^+(t_1, t_2) := \{x(t_1, \omega) < g(t_1), x(t_2, \omega) > g(t_2)\},$$
$$S_g^-(t_1, t_2) := \{x(t_1, \omega) > g(t_1), x(t_2, \omega) < g(t_2)\}$$

---

[19] Dieses Ergebnis genügt für die folgenden wahrscheinlichkeitstheoretischen Untersuchungen. Beachtet man, daß jeder doppelte γNK-Punkt t_0 von $x(t)$ mit $x(t_0) = \gamma$ ein beidseitiger Häufungspunkt von u.o. γNK-Punkten und auch von o.u. γNK-Punkten ist, falls $x(t)$ in keinem Teilintervall von $[a, b]$ konstant gleich γ ist, so erhält man unter dieser Voraussetzung sogar $m(t_1, t_2; \gamma) = m_1(t_1, t_2; \gamma)$ für jedes $(t_1, t_2) \in \Delta$.

gilt weiter für jedes $(t_1, t_2) \in \Delta$:

(1) $E m^+(t_1, t_2; g(.); \omega)$ *existiert genau dann, wenn* $p(S_g^+(t, t'))$ *über* $(t_1, t_2]$ *B-integrabel ist; falls beide Ausdrücke existieren, gilt*

$$E m^+(t_1, t_2; g(.); \omega) = \int_{t_1}^{t_2} p(S_g^+(.,.)).$$

(2) *Ebenso ist*

$$E m^-(t_1, t_2; g(.); \omega) = \int_{t_1}^{t_2} p(S_g^-(.,.)),$$

falls mindestens eine dieser beiden Größen existiert.

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $g(t) \equiv 0$ in $[a, b]$ annehmen. Weiter genügt es, die Aussagen für $m^+(t, t'; 0; \omega)$ zu beweisen.

1) Trivialerweise gilt $m^+(t, t'; 0; \omega) \in \{0, 1, \ldots, \infty\}$ (Eigenschaft (2.1)(I)). Wegen $\{m^+(t_1, t_2; 0; \omega) + m^+(t_2, t_3; 0; \omega) \neq m^+(t_1, t_3; 0; \omega)\} \subset \{x(t_2, \omega) = 0\}$ für $a \leqq t_1 < t_2 < t_3 \leqq b$ gilt auch (2.1)(II). Nach Beispiel 1 zu § 2 erfüllt die Intervallzählfunktion $m^+(t, t'; 0; \omega)$ auch die Eigenschaft I.

2) Wegen $\{\omega: x(t, \omega)$ ist in irgendeinem Teilintervall von $[a, b]$ konstant gleich Null$\} \subset \{\omega: x(t, \omega) = 0$ für mindestens ein rationales $t \in [a, b]\} = \bigcup_{\substack{t \in [a,b] \\ t \text{ rational}}} \{x(t, \omega) = 0\}$ gibt es eine p-Nullmenge N_1 mit der Eigenschaft, daß für jedes $\omega \in \Omega - N_1$ $x(t, \omega)$ über keinem Teilintervall von $[a, b]$ konstant gleich Null ist.

3) T sei eine Separabilitätsmenge zum stochastischen Prozeß $x(t, \omega)$ und N_2 eine zugehörige p-Nullmenge (das soll heißen, daß

$$\sup\{x(t, \omega): t \in (t_1, t_2) \cap [a, b]\} = \sup\{x(t, \omega): t \in (t_1, t_2) \cap [a, b] \cap T\}$$

und

$$\inf\{x(t, \omega): t \in (t_1, t_2) \cap [a, b]\} = \inf\{x(t, \omega): t \in (t_1, t_2) \cap [a, b] \cap T\}$$

für jedes $\omega \in \Omega - N_2$ und jedes offene Intervall (t_1, t_2), das mit $[a, b]$ einen nicht leeren Durchschnitt hat, gilt).

Für $S^+(t_1, t_2) := \{x(t_1, \omega) < 0,\ x(t_2, \omega) > 0\} - (N_1 \cup N_2)$ gilt $S^+(t_1, t_2) \in \mathfrak{R}$ und nach (5.5) $S^+(t_1, t_2) \subset \{m^+(t_1, t_2; 0; \omega) \geqq 1\}$. Weiter gibt es nach (5.5) zu jedem $\omega \in \Omega - (N_1 \cup N_2)$ mit $m^+(t_1, t_2; 0; \omega) \geqq 1$ stets $t_1', t_2' \in (t_1, t_2) \cap T \cup \{t_1, t_2\}$ mit $t_1' < t_2'$ und $\omega \in S^+(t_1', t_2')$. Nach Satz (4.2) ist folglich $m^+(t, t'; 0; \omega)$ ein Zählprozeß.

4) Wegen $S^+(t_1, t_3) \subset S^+(t_1, t_2) \cup S^+(t_2, t_3) \cup \{x(t_2, \omega) = 0\}$ für $a \leqq t_1 < t_2 < t_3 \leqq b$ und wegen der in Beweisteil 3) angegebenen Eigenschaften ist $S^+(t_1, t_2)$ nach Satz (3.5) für $m^+(t, t'; 0; \omega)$ ausschöpfend. Nach Satz (2.9) gilt daher für $(t_1, t_2) \in \Delta$

$$E m^+(t_1, t_2; 0; \omega) = \int_{t_1}^{t_2} p(S^+(.,.)).$$

Wegen

$$m_1(t, t'; g(.); \omega) = m^+(t, t'; g(.); \omega) + m^-(t, t'; g(.); \omega)$$

und

$$\{m(t_1, t_2; g(.); \omega) \neq m_1(t_1, t_2; g(.); \omega)\} \subset \{x(t_1, \omega) = g(t_1)\} \cup \{x(t_2, \omega) = g(t_2)\}$$

erhalten wir aus Satz (6.1) sofort

(6.2) **Satz.** *Erfüllen $x(t,\omega)$ und $g(t)$ die Voraussetzungen von Satz* (6.1), *so sind* $m(t,t';g(.);\omega)$, $m_1(t,t';g(.);\omega)$ *zwei über* $[a,b]$ *erklärte Zählprozesse. Mit der Abkürzung* $S_g(t_1,t_2):=\{(x(t_1,\omega)-g(t_1))\cdot(x(t_2,\omega)-g(t_2))<0\}$ *gilt für jedes* $(t_1,t_2)\in\Delta$

$$E\,m(t_1,t_2;g(.);\omega)=E\,m_1(t_1,t_2;g(.);\omega)=\int_{t_1}^{t_2} p(S_g(.,.)),$$

falls mindestens eine dieser Größen existiert.

Die Zählprozesse $m(t,t';g(.);\omega)$, $m_1(t,t';g(.);\omega)$ haben eine gewisse Ähnlichkeit mit dem in Beispiel 2 zu § 2 angegebenen Zählprozeß; trotzdem gilt aber

(6.3) **Satz.** *Erfüllen $x(t,\omega)$ und $g(t)$ die Voraussetzungen von Satz* (6.1), *so haben* $m(t,t';g(.);\omega)$ *und* $m_1(t,t';g(.);\omega)$ *die Eigenschaft* I.

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir wieder $g(t)\equiv 0$ auf $[a,b]$ annehmen. N_1, N_2 und T seien wie im Beweis zu Satz (6.1). Entsprechend den in Definition (5.8) zur Funktion $x(t)$ eingeführten Größen $\alpha(\tau;\gamma)$, $\alpha_L(\tau;\gamma)$, $\alpha_R(\tau;\gamma)$ und $\beta(\tau;\gamma)$ erklären wir zum Pfad $x(t,\omega)$ die Größen $\alpha(\tau;\gamma;\omega)$, $\alpha_L(\tau;\gamma;\omega)$, $\alpha_R(\tau;\gamma;\omega)$ und $\beta(\tau;\gamma;\omega)$.

1) Für ein ω mit

$$\begin{aligned} r\leqq m(t_1,t_2;0;\omega)&=\alpha_R(t_1;0;\omega)+\sum_{\tau\in(t_1,t_2)}\alpha(\tau;0;\omega)+\alpha_L(t_2;0;\omega)\\ &\quad+\beta(t_1;0;\omega)+2\cdot\sum_{\tau\in(t_1,t_2)}\beta(\tau;0;\omega)+\beta(t_2;0;\omega)\end{aligned}$$

gilt die in Eigenschaft I geforderte Beziehung mit $A_{\mathrm{I}}:=T$ jedenfalls dann, wenn

$$\begin{aligned}&\alpha_R(t_1;0;\omega)+\sum_{\tau\in(t_1,t_2)}\alpha(\tau;0;\omega)+\alpha_L(t_2;0;\omega)+\beta(t_1;0;\omega)\\ &\quad+2\cdot\sum_{\tau\in(t_1,t_2)\cap T}\beta(\tau;0;\omega)+\beta(t_2;0;\omega)\geqq r\end{aligned}$$

ist, also auf alle Fälle dann, wenn $\beta(\tau;0;\omega)=0$ für jedes $\tau\in(t_1,t_2)-T$ gilt.

Ist aber $\omega\in\Omega-(N_1\cup N_2)$ und $\beta(\tau;0;\omega)=1$ für wenigstens ein $\tau\in(t_1,t_2)-T$, so ist τ nach Lemma (5.7) Häufungspunkt von Nullniveau-Kreuzungspunkten von $x(t,\omega)$. Setzen wir $A_{\mathrm{I}}=T$, so gilt also für den Zählprozeß $m(t,t';0;\omega)$ die in Eigenschaft I verlangte Beziehung für jedes $\omega\in\Omega-(N_1\cup N_2)$.

2) Wegen $p(m(t_1,t_2;0;\omega)\neq m_1(t_1,t_2;0;\omega))=0$ für jedes $(t_1,t_2)\in\Delta$ erfüllt auch $m_1(t,t';0;\omega)$ die Eigenschaft I.

§ 7. Kreuzungspunkte eines Gaußschen Prozesses mit einer reellen Funktion

In diesem Paragraphen untersuchen wir für Gaußsche Prozesse das in Satz (6.2) angegebene B-Integral.

Im Folgenden sei $x(t,\omega)$ ein für $t\in[a,b]$ definierter Gaußscher Prozeß auf dem Wahrscheinlichkeitsfeld $(\Omega,\mathfrak{K},p)$ mit $E\,x(t,\omega)=0$ und $\operatorname{var} x(t,\omega)=1$. Mit $r(t_1,t_2)$ bezeichnen wir die für $t_1,t_2\in[a,b]$ erklärte Kovarianzfunktion von $x(t,\omega)$; unter den hier gemachten Voraussetzungen ist $r(t_1,t_2)=E\,x(t_1,\omega)\cdot x(t_2,\omega)$ für $t_1,t_2\in[a,b]$.

Für den Erwartungswert der Anzahl $m(a,b;\gamma;\omega)$ der in $\langle a,b\rangle$ liegenden γ NK-Punkte von $x(t,\omega)$ gilt folgende Aussage:

(7.1) **Satz.** *Ist $x(t,\omega)$ separabel, so sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *$E\,m(a,b;\gamma;\omega)$ existiert für jedes reelle γ;*

(2) *$E\,m(a,b;\gamma;\omega)$ existiert für wenigstens ein reelles γ;*

(3) *es existiert* $\int\limits_a^b \arccos r(.,.)$;

(4) *es existiert* $\int\limits_a^b \sqrt{1-r(.,.)}$;

(5) *es gilt* $\bar{\int\limits_a^b} \sqrt{1-r(.,.)}<\infty$.

Den *Beweis* für diesen Satz und für die nächsten beiden Sätze geben wir am Ende dieses Paragraphen an.

Mit dem Erwartungswert der Anzahl der Punkte, in denen $x(t,\omega)$ eine beschränkte reelle Funktion $g(t)$ kreuzt, beschäftigen wir uns im nächsten Satz.

(7.2) **Satz.** *Ist $g(t)$ eine über $[a,b]$ definierte beschränkte reelle Funktion, und ist $x(t,\omega)-g(t)$ separabel, so sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(1) *es existiert $E\,m(a,b;g(.);\omega)$;*

(2) *$g(t)$ ist über $[a,b]$ von beschränkter Variation, und es existiert* $\int\limits_a^b \sqrt{1-r(.,.)}$.

Die Auswertung des B-Integrals in Satz (6.2) ergibt für $E\,m(a,b;\gamma;\omega)$ einen einfachen Ausdruck. Um diesen Ausdruck besser darstellen zu können, bezeichnen wir mit h_1, h_2 zwei unabhängige Gaußsche Einheitsvariable und definieren für $\gamma\in(-\infty,\infty)$, $\delta\in[0,\sqrt{2}]$

$$\varphi(\gamma,\delta):=p\big(h_1>\gamma,\,(1-\delta^2)\cdot h_1+\delta\cdot\sqrt{2-\delta^2}\cdot h_2<\gamma\big).$$

(7.3) **Satz.** *Wir setzen voraus, daß $x(t,\omega)$ separabel ist, und eine der Aussagen (1)–(5) von Satz (7.1) gilt, und definieren auf $[a,b]$ die monoton nicht fallende Funktion $s(t)$ durch $s(a):=0$ und $s(t):=\int\limits_a^t\sqrt{1-r(.,.)}$ für $a<t\leqq b$. Bezeichnen wir wie in § 1 mit $s_0(t)$ den Stetigkeitsanteil von $s(t)$ und mit S^L, S^R die Menge der Punkte, in denen $s(t)$ linksseitig resp. rechtsseitig unstetig ist, so gilt*

$$E\,m(a,b;\gamma;\omega)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot\exp\left(-\frac{\gamma^2}{2}\right)\cdot s_0(b)+2\cdot\sum_{\tau\in S^L}\varphi\big(\gamma,s(\tau)-s(\tau-0)\big)$$
$$+2\cdot\sum_{\tau\in S^R}\varphi\big(\gamma,s(\tau+0)-s(\tau)\big);$$

ist $s(t)$ stetig in $[a,b]$, so ist also speziell

$$E\,m(a,b;\gamma;\omega)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot\exp\left(-\frac{\gamma^2}{2}\right)\cdot\int\limits_a^b\sqrt{1-r(.,.)}.$$

Zunächst geben wir einige Hilfssätze an, die wir beim Beweis der Sätze (7.1)–(7.3) benutzen.

Mit h_1, h_2 bezeichnen wir im Folgenden stets zwei unabhängige Gaußsche Einheitsvariable.

(7.4) **Hilfssatz.** *Zu jedem $\gamma>0$ gibt es ein $C_4(\gamma)>0$ mit*

$$p(h_1>\alpha,\, r\,h_1+\sqrt{1-r^2}\cdot h_2<\beta)\geqq C_4(\gamma)\cdot\sqrt{1-r}$$

für $-1\leqq r\leqq 1,\ -\gamma\leqq\alpha\leqq\beta\leqq\gamma$.

Beweis. 1) Wir beweisen diesen Hilfssatz zunächst nur für α,β mit $\alpha+\beta\geqq 0$. Aus

$$(*)\quad p(h_1>\alpha,\, r\,h_1+\sqrt{1-r^2}\cdot h_2<\beta)\geqq p(\alpha+\sqrt{1-r}>h_1>\alpha,\, \sqrt{1-r^2}\cdot h_2<\beta-r\,h_1)$$

folgt für $r\in[0,1)$

$$\begin{aligned}
&p(h_1>\alpha,\, r\,h_1+\sqrt{1-r^2}\cdot h_2<\beta)\\
&\quad>p(\alpha+\sqrt{1-r}>h_1>\alpha,\, \sqrt{1-r^2}\cdot h_2<\beta-r\cdot\alpha-r\cdot\sqrt{1-r})\\
&\quad>p(\alpha+\sqrt{1-r}>h_1>\alpha)\cdot p(\sqrt{1-r^2}\cdot h_2<\beta\cdot(1-r)+r\cdot(\beta-\alpha)-\sqrt{1-r})\\
&\quad\geqq p(\alpha+\sqrt{1-r}>h_1>\alpha)\cdot p\left(h_2<\beta\cdot\sqrt{\frac{1-r}{1+r}}-\frac{1}{\sqrt{1+r}}\right)\\
&\quad\geqq p(\gamma+\sqrt{1-r}>h_1>\gamma)\cdot p(h_2<-\gamma-1);
\end{aligned}$$

für $r\in(-1,0)$ ergibt sich aus $(*)$

$$\begin{aligned}
p(h_1>\alpha,\, r\,h_1+\sqrt{1-r^2}\cdot h_2<\beta)&>p(\alpha+\sqrt{1-r}>h_1>\alpha,\, \sqrt{1-r^2}\cdot h_2<\beta-r\,\alpha)\\
&\geqq p(\gamma+\sqrt{1-r}>h_1>\gamma)\cdot p(\sqrt{1-r^2}\cdot h_2<\beta\cdot(1+r)-r\cdot(\alpha+\beta))\\
&\geqq p(\gamma+\sqrt{1-r}>h_1>\gamma)\cdot p\left(h_2<\beta\cdot\sqrt{\frac{1+r}{1-r}}\right)\\
&>p(\gamma+\sqrt{1-r}>h_1>\gamma)\cdot p(h_2<-\gamma).
\end{aligned}$$

Wir erhalten daher für $r\in(-1,1)$

$$p(h_1>\alpha,\, r\,h_1+\sqrt{1-r^2}\cdot h_2<\beta)>p(h_2<-\gamma-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left(-\frac{(\gamma+2)^2}{2}\right)\cdot\sqrt{1-r}.$$

Da für $r=-1$

$$\begin{aligned}
p(h_1>\alpha,\, r\cdot h_1+\sqrt{1-r^2}\cdot h_2<\beta)&=p(h_1>\max\{\alpha,-\beta\})\\
&\geqq p(h_1>\gamma)
\end{aligned}$$

gilt, und da die zu beweisende Abschätzung für $r=1$ trivial ist, ist unsere Behauptung für α,β mit $\alpha+\beta\geqq 0$ bewiesen.

2) Ist $\alpha+\beta<0$, so erhalten wir wegen

$$\begin{aligned}
p(h_1>\alpha,\, r\cdot h_1+\sqrt{1-r^2}\cdot h_2<\beta)&=p(h_1<\beta,\, r\cdot h_1+\sqrt{1-r^2}\cdot h_2>\alpha)\\
&=p(h_1>-\beta,\, r\cdot h_1+\sqrt{1-r^2}\cdot h_2<-\alpha)
\end{aligned}$$

und $-\gamma\leqq-\beta\leqq-\alpha\leqq\gamma,\ -\alpha-\beta>0$ sofort aus Beweisteil 1) die zu beweisende Abschätzung.

(7.5) **Hilfssatz.** *Zu jedem* $\gamma > 0$ *existiert ein* $C_5(\gamma) > 0$ *mit folgenden zwei Eigenschaften:*

(1) $p(h_1 > \alpha, r \cdot h_1 + \sqrt{1-r^2} \cdot h_2 < \beta) \geqq C_5(\gamma) \cdot (\beta - \alpha)$ *für* $-\gamma \leqq \alpha \leqq \beta \leqq \gamma$, $r \in [0, 1]$;

(2) $p(h_1 < \alpha, r \cdot h_1 + \sqrt{1-r^2} \cdot h_2 > \beta) \geqq C_5(\gamma) \cdot (\beta - \alpha)$ *für* $-\gamma \leqq \alpha \leqq \beta \leqq \gamma$, $r \in [-1, 0]$.

Beweis. 1) *Für* $r \in [0, 1)$ *gilt*

$$\begin{aligned} p(h_1 > \alpha, r \cdot h_1 + \sqrt{1-r^2} \cdot h_2 < \beta) &\geqq p(\beta > h_1 > \alpha, \sqrt{1-r^2} \cdot h_2 < \beta - r \cdot h_1) \\ &\geqq p(\beta > h_1 > \alpha, \sqrt{1-r^2} \cdot h_2 < \beta - r \cdot \beta) \\ &\geqq p\left(\beta > h_1 > \alpha, h_2 < \sqrt{\frac{1-r}{1+r}} \cdot \beta\right) \\ &\geqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot p(h_2 < -\gamma) \cdot \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2}\right) \cdot (\beta - \alpha); \end{aligned}$$

für $r = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} p(h_1 > \alpha, r \cdot h_1 + \sqrt{1-r^2} \cdot h_2 < \beta) &= p(\alpha < h_1 < \beta) \\ &\geqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2}\right) \cdot (\beta - \alpha). \end{aligned}$$

2) Für $r \in (-1, 0]$ erhalten wir, wenn wir zunächst zusätzlich $\alpha + \beta \leqq 0$ voraussetzen:

$$\begin{aligned} p(h_1 < \alpha, r \cdot h_1 + \sqrt{1-r^2} \cdot h_2 > \beta) &> p(2\alpha - \beta < h_1 < \alpha, \sqrt{1-r^2} \cdot h_2 > \beta - r\alpha) \\ &\geqq p\big(2\alpha - \beta < h_1 < \alpha, \sqrt{1-r^2} \cdot h_2 > \beta \cdot (1+r) - r \cdot (\alpha + \beta)\big) \\ &\geqq p\left(2\alpha - \beta < h_1 < \alpha, h_2 > \beta \cdot \sqrt{\frac{1+r}{1-r}}\right) \\ &\geqq p(2\alpha - \beta < h_1 < \alpha) \cdot p(h_2 > \gamma) \\ &> \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot p(h_2 > \gamma) \cdot \exp\left(-\frac{9\gamma^2}{2}\right) \cdot (\beta - \alpha); \end{aligned}$$

ist $\alpha + \beta \geqq 0$, so führt die Identität

$$p(h_1 < \alpha, r \cdot h_1 + \sqrt{1-r^2} \cdot h_2 > \beta) = p(h_1 < -\beta, r \cdot h_1 + \sqrt{1-r^2} \cdot h_2 > -\alpha)$$

sofort zur gleichen Abschätzung. Für $r = -1$ ist

$$\begin{aligned} p(h_1 < \alpha, r \cdot h_1 + \sqrt{1-r^2} \cdot h_2 > \beta) &= p(h_1 < \min\{\alpha, -\beta\}) \\ &\geqq p(h_1 < -\gamma) \\ &> \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{9\gamma^2}{2}\right) \cdot (\beta - \alpha). \end{aligned}$$

Für $C_5(\gamma) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot p(h_2 < -\gamma) \cdot \exp\left(-\frac{9\gamma^2}{2}\right)$ gelten daher (1) und (2).

(7.6) **Hilfssatz.** *Für jedes $M<\infty$ gilt*

$$\frac{\varphi(\gamma,\delta)}{\delta}\xrightarrow[\delta\searrow 0]{}\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\pi}\cdot\exp\left(-\frac{\gamma^2}{2}\right)$$

gleichmäßig für $\gamma\in[-M,M]$.

Beweis. 1) Es ist

$$\begin{aligned}\varphi(\gamma,\delta)&=p\big(h_1>\gamma,(1-\delta^2)\cdot h_1+\delta\cdot\sqrt{2-\delta^2}\cdot h_2<\gamma\big)\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_\gamma^\infty p\big(\delta\cdot\sqrt{2-\delta^2}\cdot h_2<\gamma-(1-\delta^2)\cdot u\big)\cdot\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\cdot du\\&=\frac{\delta}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_0^\infty p\big(\delta\cdot\sqrt{2-\delta^2}\cdot h_2<\gamma-(1-\delta^2)\cdot(\gamma+\delta v)\big)\cdot\exp\left(-\frac{(\gamma+\delta v)^2}{2}\right)\cdot dv\\&=\frac{\delta}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_0^\infty p\big(\sqrt{2-\delta^2}\cdot h_2<\gamma\cdot\delta-(1-\delta^2)\cdot v\big)\cdot\exp\left(-\frac{(\gamma+\delta v)^2}{2}\right)\cdot dv.\end{aligned}$$

2) Für $\gamma\in[-M,M]$, $\delta\in(0,\frac{1}{2}]$, $v\in[M,\infty]$ gilt $\gamma\cdot\delta-(1-\delta^2)\cdot v\leqq\frac{1}{2}\cdot v-\frac{3}{4}\cdot v$ $=-\dfrac{v}{4}$ und somit

$$\begin{aligned}p\big(\sqrt{2-\delta^2}\cdot h_2<\gamma\cdot\delta-(1-\delta^2)\cdot v\big)&\leqq p\left(\sqrt{2-\delta^2}\cdot h_2<-\frac{v}{4}\right)\\&\leqq p\left(h_2<-\frac{v}{8}\right)\end{aligned}$$

und folglich für $m\geqq M$

$$\begin{aligned}0&\leqq\int_m^\infty p\big(\sqrt{2-\delta^2}\cdot h_2<\gamma\cdot\delta-(1-\delta^2)\,v\big)\cdot\exp\left(-\frac{(\gamma+\delta v)^2}{2}\right)\cdot dv\\&\leqq\int_m^\infty p\left(h_2<-\frac{v}{8}\right)\cdot dv.\end{aligned}$$

Da folgende Konvergenzaussagen gleichmäßig für $\gamma\in[-M,M]$, $v\in[-m,m]$ gelten:

$$\frac{1}{\sqrt{2-\delta^2}}\cdot\big(\gamma\cdot\delta+(\delta^2-1)\cdot v\big)\xrightarrow[\delta\searrow 0]{}-\frac{v}{\sqrt{2}}$$

$$\tfrac{1}{2}\cdot(\gamma+\delta\cdot v)^2\xrightarrow[\delta\searrow 0]{}\tfrac{1}{2}\cdot\gamma^2$$

und (wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $p(h_2<z)$ auf $(-\infty,+\infty)$ und von $\exp(-z)$ auf $[0,\infty)$)

$$\begin{aligned}&p\big(\sqrt{2-\delta^2}\cdot h_2<\gamma\cdot\delta+(\delta^2-1)\cdot v\big)\cdot\exp\left(-\frac{(\gamma+\delta v)^2}{2}\right)\\&\qquad\xrightarrow[\delta\searrow 0]{}p\left(h_2<-\frac{v}{\sqrt{2}}\right)\cdot\exp\left(-\frac{\gamma^2}{2}\right),\end{aligned}$$

strebt

$$\int_0^m p\left(\sqrt{2-\delta^2}\cdot h_2<\gamma\cdot\delta+(\delta^2-1)\cdot v\right)\cdot\exp\left(-\frac{(\gamma+\delta v)^2}{2}\right)\cdot dv$$

für $\delta\searrow 0$ gleichmäßig auf $-M\leqq\gamma\leqq M$ gegen

$$\exp\left(-\frac{\gamma^2}{2}\right)\cdot\int_0^m p\left(h_2<-\frac{v}{\sqrt{2}}\right)\cdot dv.$$

Da

$$\int_m^\infty p\left(h_2<-\frac{v}{8}\right)\cdot dv$$

und

$$\int_m^\infty p\left(h_2<-\frac{v}{\sqrt{2}}\right)\cdot dv \qquad \text{für } m\to\infty$$

gegen Null streben, und da

$$\int_0^\infty p\left(h_2<-\frac{v}{\sqrt{2}}\right)\cdot dv=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

ist, gilt daher

$$\frac{\varphi(\gamma,\delta)}{\delta}\xrightarrow[\delta\searrow 0]{}\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\exp\left(-\frac{\gamma^2}{2}\right)$$

gleichmäßig für $\gamma\in[-M,M]$.

Wir beweisen nun die Sätze (7.1)–(7.3).

Beweis von Satz (7.1).

a) Aus (4) folgt (1).

Denn es gilt für jedes $(t_1,t_2)\in\Delta$

$$p\left((x(t_1,\omega)-\gamma)\cdot(x(t_2,\omega)-\gamma)<0\right)=2\cdot\varphi\left(\gamma,\sqrt{1-r(t_1,t_2)}\right).$$

$\varphi(\gamma,\delta)$ ist bei festem γ eine stetige Funktion von δ mit $\varphi(\gamma,0)=0$; nach Hilfssatz (7.6) existiert die rechtsseitige partielle Ableitung nach δ von $\varphi(\gamma,\delta)$ in den Punkten $(\gamma,0)$. Aus der Existenz von $\int_a^b\sqrt{1-r(.,.)}$ folgt daher nach Satz (1.2) die B-Integrabilität von $p\left((x(t_1,\omega)-\gamma)\cdot(x(t_2,\omega)-\gamma)<0\right)$ über $[a,b]$ für jedes reelle γ und somit nach Satz (6.2) die Existenz von $E\,m(a,b;\gamma;\omega)$ für jedes reelle γ.

b) Aus (1) folgt (2).

c) Aus (2) folgt (5).

Denn nach Hilfssatz (7.4) und Lemma (5.5) gilt für jedes $(t_1,t_2)\in\Delta$ stets

$$\begin{aligned}C_4(|\gamma|)\cdot\sqrt{1-r(t_1,t_2)}&\leqq p\left(h_1>\gamma,r(t_1,t_2)\cdot h_1+\sqrt{1-r^2(t_1,t_2)}\cdot h_2<\gamma\right)\\&=p\left(x(t_1,\omega)>\gamma,x(t_2,\omega)<\gamma\right)\leqq E\,m(t_1,t_2;\gamma;\omega)\end{aligned}$$

und somit für jede Zerlegung $Z(a,b)$ von $(a,b]$

$$\sqrt{1-r(.,.)}\,(Z(a,b))\leqq\frac{1}{C_4(|\gamma|)}\cdot E\,m(a,b;\gamma;\omega)<+\infty.$$

d) Aus (5) folgt (3).

Denn wegen

$$p\big(x(t_1,\omega)<0,\, x(t_2,\omega)>0\big)=\frac{1}{2\pi}\cdot\arccos r(t_1,t_2)$$

(vgl. [1], S. 43) gilt

$$(*)\qquad \arccos r(t_1,t_3)\leqq \arccos r(t_1,t_2)+\arccos r(t_2,t_3)$$

für $a\leqq t_1<t_2<t_3\leqq b$. Ferner folgt aus der für $r\in[-1,1]$ gültigen Beziehung $0\leqq\arccos r\leqq 4\cdot\sqrt{1-r}$ und aus (5) sofort $\int\limits_a^b \arccos r(.,.)<+\infty$ und damit wegen (*) die B-Integrabilität von $\arccos r(t_1,t_2)$ über $[a,b]$.

e) Aus (3) folgt (4).

Denn für die für $y\in[0,2\pi]$ definierte Funktion

$$\psi(y):=\sqrt{1-\cos y}\quad \text{gilt}\quad \psi(0)=0,\qquad \psi'_+(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

und

$$\psi\big(\arccos r(t_1,t_2)\big)=\sqrt{1-r(t_1,t_2)}.$$

Da $\psi(y)$ in $[0,2\pi]$ stetig ist, folgt aus (3) nach Satz (1.2) die Existenz von $\int\limits_a^b \sqrt{1-r(.,.)}$.

Die Aussage von Satz (7.3) ergibt sich unmittelbar aus Satz (1.2), da die rechtsseitige partielle Ableitung nach δ von $\varphi(\gamma,\delta)$ im Punkt $(\gamma,0)$ den Wert $\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\pi}\cdot\exp\left(-\frac{\gamma^2}{2}\right)$ hat.

Beweis von Satz (7.2).

Es sei $|g(t)|\leqq\gamma<+\infty$ für $t\in[a,b]$.

a) Aus (1) folgt (2).

Denn nach Lemma (5.5) gilt für jedes $(t_1,t_2)\in\Delta$

$$\begin{aligned}E\,m\big(t_1,t_2;g(.);\omega\big)\geqq\; & p\big(x(t_1,\omega)>g(t_1),\, x(t_2,\omega)<g(t_2)\big)\\ & +p\big(x(t_1,\omega)<g(t_1),\, x(t_2,\omega)>g(t_2)\big)\end{aligned}$$

und folglich mit $\alpha:=\min\{g(t_1),g(t_2)\}$, $\beta:=\max\{g(t_1),g(t_2)\}$

$$(*)\qquad \begin{aligned}E\,m\big(t_1,t_2;g(.);\omega\big)\geqq\; & p\big(h_1>\alpha,\, r(t_1,t_2)\cdot h_1+\sqrt{1-r^2(t_1,t_2)}\cdot h_2<\beta\big)\\ & +p\big(h_1<\alpha,\, r(t_1,t_2)\cdot h_1+\sqrt{1-r^2(t_1,t_2)}\cdot h_2>\beta\big).\end{aligned}$$

Ist $r(t_1,t_2)\geqq 0$, so ist nach Hilfssatz (7.5) der erste rechts vom „$\geqq$“-Zeichen stehende Ausdruck nicht kleiner als $C_5(\gamma)\cdot(\beta-\alpha)=C_5(\gamma)\cdot|g(t_1)-g(t_2)|$, ist $r(t_1,t_2)<0$, so ist der zweite rechts stehende Ausdruck nicht kleiner als $C_5(\gamma)\cdot|g(t_1)-g(t_2)|$.

Daher gilt für jede Zerlegung $Z(a,b)=\{t'_0,t'_1,\dots,t'_r\}$

$$\sum_{\rho=1}^{r}|g(t'_{\rho-1})-g(t'_\rho)|\leqq\frac{1}{C_5(\gamma)}\cdot E\,m\big(a,b;g(.);\omega\big).$$

Weiter folgt aus (*) und Hilfssatz (7.4)

$$E\,m(t_1, t_2; g(.); \omega) \geqq C_4(\gamma) \cdot \sqrt{1 - r(t_1, t_2)}$$

und folglich $\int_a^b \sqrt{1-r(.,.)} < \infty$ und hieraus wie im Beweis zu Satz (7.1) die Existenz von $\int_a^b \sqrt{1-r(.,.)}$.

b) Aus (2) folgt (1).

Denn zunächst gibt es, da $0 \leqq p(x(t_1, \omega) > \gamma', x(t_2, \omega) < \gamma') \leqq 1$ gilt, nach Hilfssatz (7.6) ein $C_\gamma > 0$ mit

$$\begin{aligned} p(x(t_1, \omega) > \gamma', x(t_2, \omega) < \gamma') &= p(x(t_1, \omega) < \gamma', x(t_2, \omega) > \gamma') \\ &\leqq C_\gamma \cdot \sqrt{1 - r(t_1, t_2)} \end{aligned}$$

für $\gamma' \in [-\gamma, \gamma]$. Also erhalten wir für $(t_1, t_2) \in \Delta$ mit $g(t_1) \leqq g(t_2)$

$$\begin{aligned} & p(x(t_1, \omega) > g(t_1), x(t_2, \omega) < g(t_2)) + p(x(t_1, \omega) < g(t_1), x(t_2, \omega) > g(t_2)) \\ & \quad \leqq p(x(t_1, \omega) > g(t_2), x(t_2, \omega) < g(t_2)) + p(g(t_1) < x(t_1, \omega) \leqq g(t_2)) \\ & \qquad + p(x(t_1, \omega) < g(t_2), x(t_2, \omega) > g(t_2)) \\ & \quad \leqq 2 \cdot C_\gamma \cdot \sqrt{1 - r(t_1, t_2)} + |g(t_1) - g(t_2)|; \end{aligned}$$

die gleiche Beziehung erhalten wir auch im Fall $g(t_1) > g(t_2)$. Folglich gilt für

$$S_g(t_1, t_2) := \{(x(t_1, \omega) - g(t_1)) \cdot (x(t_2, \omega) - g(t_2)) < 0\}:$$

$$\int_a^b p(S_g(.,.)) \leqq 2 \cdot C_\gamma \cdot \int_a^b \sqrt{1 - r(.,.)} + \int_a^b |g(.) - g(.)| < \infty.$$

Wegen der Subadditivität von $p(S_g(t_1, t_2))$ folgt hieraus die B-Integrabilität von $p(S_g(t_1, t_2))$ über $[a, b]$ und damit nach Satz (6.2) die Existenz von $E\,m(a, b; g(.); \omega)$.

Literatur

1. Anderson, T.W.: An introduction to multivariate statistical analysis. New York: Wiley 1960.
2. Bulinskaya, E.V.: On the mean number of crossings of a level by a stationary Gaussian process. Theor. Probab. Appl. **6**, 435–438 (1961).
3. Fieger, W.: Zwei Verallgemeinerungen der Palmschen Formeln. Trans. Third Prague Conf. Information Theory, statist. Decision Functions, Random Processes. Prag 1964. 107–122.
4. – Eine für beliebige Call-Prozesse geltende Verallgemeinerung der Palmschen Formeln. Math. Scandinav. **16**, 121–147 (1965).
5. – Die Anzahl der Niveaudurchgänge und der lokalen Maximalstellen von Gaußschen Prozessen. Symposium on Probability Methods in Analysis. Lecture Notes in Mathematics Vol. **31**, 63–67 (1967).
6. – Die Transformation von Burkill-Unterteilungsintegralen. Math. Ann. **183**, 115–129 (1969).
7. Grenander, U., Rosenblatt, M.: Statistical analysis of stationary time series. New York: Wiley 1957.
8. Ito, K.: The expected number of zeros of continuous stationary Gaussian processes. J. Math. Kyoto Univ. **3**, 207–216 (1964).
9. Ivanov, V.A.: On the average number of crossings of a level by sample functions of a stochastic process. Theor. Probab. Appl. **5**, 319–323 (1960).

10. Kac, M.: On the average number of real roots of a random algebraic equation. Bull. Amer. math. Soc. **49**, 314–320 (1943).
11. Khintchine, A.Y.: Mathematical methods in the theory of queueing. London: Griffin 1960.
12. – On Poisson sequences of chance events. Theor. Probab. Appl. **1**, 291–297 (1956).
13. Leadbetter, M.R.: On crossings of arbitrary curves by certain Gaussian processes. Proc. Amer. math. Soc. **16**, 60–68 (1965).
14. – On crossings of level and curves by a wide class of stochastic processes. Ann. math. Statistics **37**, 260–267 (1966).
15. – Cryer, J.D.: On the mean number of curve crossings by non stationary normal processes. Ann. math. Statistics **36**, 509–516 (1965).
16. Matthes, K.: Stationäre zufällige Punktfolgen. I. Jber. Deutsch. Math.-Verein **66**, 66–79 (1963).
17. Rice, S.O.: The mathematical analysis of random noise. Bell System techn. J. **23**, 282–332 (1944); **24**, 46–156 (1945).
18. Volkonskii, V.A.: An ergodic theorem on the distribution of the duration of fades. Theor. Probab. Appl. **5**, 323–326 (1960).
19. Ylvisaker, N.D.: The expected number of zeros of a stationary Gaussian process. Ann. math. Statistics **36**, 1043–1046 (1965).
20. Zitek, F.: Zur Theorie der ordinären nachwirkungsfreien Folgen. Czechosl. math. J. **8** (83), 448–459 (1958). (Russisch; deutsche Zusammenfassung.)

Priv.-Doz. Dr. W. Fieger
Institut für Mathematische Statistik
Technische Hochschule
BRD-7500 Karlsruhe 1, Englerstraße
Deutschland

(Eingegangen am 3. Oktober 1969)