Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 18, 183–196 (1971)

Einige maßtheoretische Sätze bei der Behandlung trennscharfer Tests

WOLFGANG SENDLER

§ 1. Einleitung

Es sei $(\Omega, \mathscr{S})$ ein Meßraum, Π sei die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße (W-maße) über $(\Omega, \mathscr{S})$. Bei gegebenen W-maßen P_0, P, P_n, $n \geqq 1$, seien x, x_n bzw. F, F_n die Radon-Nikodym-Dichten (R.N.-Dichten) bzw. die singulären Mengen von P, P_n bezüglich P_0. Für jede $\mathscr{S}$-meßbare Funktion ϕ, für die die entsprechenden Integrale existieren, gilt:

$$\int \phi \, dP_n = \int x_n \phi \, dP_0 + \int_N \phi \, dP_n, \qquad \text{mit } N := F \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Da die R.N.-Dichten nur bis auf P_0-Äquivalenz eindeutig sind, kann man z.B. fordern, daß auf N gilt: $x=0, x_n=0, n \geqq 1$. Von dieser Möglichkeit machen wir in den Lemmata 2.4, 2.5 und 3.1 Gebrauch; in diesem Falle gilt nämlich:

$$\int_{\{x_n > k\}} x_n \, dP_0 = P_n\{x_n > k\} \quad \text{bzw.} \quad \int_{\{x > k\}} x \, dP_0 = P\{x > k\},$$

wodurch wir zu einer übersichtlicheren Schreibweise der Beweise gelangen.

Ist ϕ irgendeine Funktion über Ω und L eine Teilmenge des Bildbereiches von ϕ, dann schreiben wir $\{\omega\colon \phi(\omega) \in L\} := \{\phi \in L\}$; diese Abkürzung bezieht sich stets auf die Variable ω.

Für jedes reelle k definieren wir die Menge $K(x) := \{k \in R\colon P_0\{x = k\} = 0\}$; ($R$ ist stets die Menge der reellen Zahlen); wegen der P_0-Integrierbarkeit von x liegt $K(x)$ dicht in R.

Nach dem Lemma von Neyman-Pearson (N.P.) ([1], S. 202, Satz 3.1) existiert zu jedem $\alpha \in [0, 1]$ zum Testproblem (α, P_0, P) ein trennscharfer Test $\bar{\phi}_\alpha$ der Gestalt:

$$\bar{\phi}_\alpha(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } \omega \in \{x > k_\alpha\} \cup F \\ \dfrac{\alpha - P_0\{x > k_\alpha\}}{P_0\{x = k\}} & \text{für } \omega \in \{x = k_\alpha\} - F \quad \text{und} \quad k_\alpha \notin K(x) \\ \text{beliebig in } [0, 1] & \text{für } \omega \in \{x = k_\alpha\} - F \quad \text{und} \quad k_\alpha \in K(x) \\ 0 & \text{für } \omega \in \Omega - (\{x \geqq k_\alpha\} \cup F). \end{cases} \tag{1.1}$$

Die durch $\alpha \to \int \bar{\phi}_\alpha \, dP$ definierte Abbildung $i_{(P_0, P)}\colon [0, 1] \to [0, 1]$ heißt Irrtumsfunktion zum Testproblem (P_0, P) und hat folgende Eigenschaften:

$$\begin{gathered} i_{(P_0, P)} \text{ ist monoton nicht abnehmend, konkav und es gilt} \\ \alpha \leqq i_{(P_0, P)}(\alpha) \leqq 1 \qquad \text{für alle } \alpha \in [0, 1]. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Die Menge aller Funktionen, welche (1.2) erfüllen, bezeichnen wir mit $\mathscr{K}$.

Gilt für $P_0, P, P_n, n \geqq 1$ für alle $\alpha \in (0,1]$ die Beziehung: $i_{(P_0, P_n)}(\alpha) \to i_{(P_0, P)}(\alpha)$, dann schreiben wir:

$$P_n \xrightarrow{P_0 - i} P.$$

Weiters verwenden wir:

$P_n \longrightarrow P$ für die starke (uniforme) Konvergenz } von Maßen
$P_n \rightharpoonup P$ für die schwache Konvergenz }
$f_n \xrightarrow{\mu - s} f$ für die μ-stochastische Konvergenz einer Folge zufälliger Variabler ($\mu \in \Pi$).

In der vorliegenden Arbeit wird der Zusammenhang zwischen $P_n \xrightarrow{P_0 - i} P$ und anderen Konvergenzbegriffen untersucht (§§ 2 und 3); außerdem wird unter recht allgemeinen Voraussetzungen über $(\Omega, \mathscr{S})$ gezeigt, daß zu jedem atomfreien $P_0 \in \Pi$ und beliebig vorgegebenem $h \in \mathscr{K}$ stets ein $P \in \Pi$ existiert mit $i_{(P_0, P)} = h$.

§ 2. Hilfs- und Konvergenzsätze

Lemma 2.1. *Es seien $h, h_n, n \geqq 1$, Funktionen aus $\mathscr{K}$. Es sei $\alpha_0 \in (0,1)$ und $\{\alpha_n\}$, $n \geqq 1$, eine beliebige, jedoch feste Folge von Zahlen aus $[0,1]$ mit $\alpha_n \to \alpha_0$. Aus $h_n(\alpha_n) \to h(\alpha_0)$ folgt: $h_n(\alpha_0) \to h(\alpha_0)$.*

Beweis. Für jede Funktion aus $\mathscr{K}$ existiert bekanntlich eine Integraldarstellung (vgl. [3]); daher lautet die Voraussetzung:

$$\lim_{a \to 0+} h_n(\alpha) + \int_0^{\alpha_n} p_n(\alpha)\, d\alpha \to \lim_{\alpha \to 0+} h(\alpha) + \int_0^{\alpha_0} p(\alpha)\, d\alpha, \qquad n \to \infty$$

($p, p_n, n \geqq 1$, sind über $[0,1]$ definiert, nicht negativ, monoton nicht zunehmend und können im Nullpunkt auch den Wert $+\infty$ annehmen). Durch indirekten Beweis zeigt man $\int_{\alpha_n}^{\alpha_0} p_n(\alpha)\, d\alpha \to 0$, woraus wegen

$$\int_0^{\alpha_0} p_n(\alpha)\, d\alpha = \int_0^{\alpha_n} p_n(\alpha)\, d\alpha + \int_{\alpha_n}^{a_0} p_n(\alpha)\, d\alpha$$

die Behauptung folgt.

Lemma 2.2. *Mit $D^+ f(\alpha)$ bzw. $D^- f(\alpha)$ seien die rechts- bzw. linksseitige Ableitung, mit f' die Ableitung von f an der Stelle α bezeichnet. Ist $k_\alpha \geqq 0$ zu einem α mit $0 < \alpha < 1$ so gewählt, daß $P_0\{x > k_\alpha\} \leqq \alpha \leqq P_0\{x \geqq k_\alpha\}$ gilt, dann folgt:*

$$D^+ i_{(P_0, P)}(\alpha) \leqq k_\alpha \leqq D^- i_{(P_0, P)}(\alpha).$$

Beweis. 1. Es sei $P_0\{x > k_\alpha\} < \alpha < P_0\{x \geqq k_\alpha\}$. Nach Definition von $i_{(P_0, P)}$ gilt dann für α' in einer offenen Umgebung von α:

$$i_{(P_0, P)}(\alpha') = \int_{\{x > k_\alpha\}} x\, dP_0 + k_\alpha(\alpha' - P_0\{x > k_\alpha\}) + P(F),$$

woraus $D^- i_{(P_0, P)}(\alpha) = D^+ i_{(P_0, P)}(\alpha) = i'_{(P_0, P)}(\alpha) = k_\alpha$ folgt.

2. Es sei $\alpha = P_0\{x > k_\alpha\}$. Zu α' mit $0 < \alpha' < \alpha$ existiert ein $k_{\alpha'} \geqq 0$ mit $P_0\{x > k_{\alpha'}\} \leqq \alpha' \leqq P_0\{x \geqq k_{\alpha'}\}$, also $P_0\{x > k_{\alpha'}\} < P_0\{x > k_\alpha\}$ und daher $k_{\alpha'} > k_\alpha$ und $P_0\{x \geqq k_{\alpha'}\} \leqq P_0\{x > k_\alpha\}$. Ist nun $P_0\{x \geqq k_{\alpha'}\} = P_0\{x > k\}$, so folgt $P_0\{x > k_{\alpha'}\} \leqq \alpha' < P_0\{x \geqq k_{\alpha'}\}$;

also ist $i_{(P_0,P)}$ im Intervall $J := [P_0\{x > k_{\alpha'}\}, P_0\{x \geqq k_{\alpha'}\}]$ linear und es gilt:

$$[i_{(P_0,P)}(\alpha) - i_{(P_0,P)}(\alpha')]\frac{1}{\alpha-\alpha'} = (P_0\{x = k_{\alpha'}\})^{-1} \cdot \int_{\{x=k_{\alpha'}\}} x\, dP_0 = k_{\alpha'} > k_\alpha. \tag{2.1}$$

Ist $P_0\{x \geqq k_{\alpha'}\} < P_0\{x > k_\alpha\}$, dann gilt:

$$[i_{(P_0,P)}(\alpha) - i_{(P_0,P)}(\alpha')]\frac{1}{\alpha-\alpha'} = (P_0\{k_\alpha < x \leqq k_{\alpha'}\})^{-1} \cdot \int_{\{k_\alpha < x \leqq k_{\alpha'}\}} x\, dP_0 \geqq k_\alpha. \tag{2.2}$$

Da die linken Seiten von (2.1) und (2.2) in α' monoton nicht wachsen, ist wegen

$$D^- i_{(P_0,P)}(\alpha) = \lim_{\alpha'\to\alpha} [i_{(P_0,P)}(\alpha) - i_{(P_0,P)}(\alpha')]\frac{1}{\alpha-\alpha'}$$

die Behauptung gezeigt.

Analog behandelt man den Fall $D^+ i_{(P_0,P)}(\alpha)$ sowie den Fall $\alpha = P_0\{x \geqq k_\alpha\}$.

Korollar 2.1. *Für α', α'' mit $0 < \alpha' < \alpha < \alpha'' < 1$ gilt:*

$$D^- i_{(P_0,P)}(\alpha'') \leqq k_\alpha \leqq D^+ i_{(P_0,P)}(\alpha').$$

Beweis. Für jedes $g \in \mathscr{K}$ gilt:

$$0 \leqq D^+ g(\alpha_2) \leqq D^- g(\alpha_2) \leqq D^+ g(\alpha_1) \leqq D^- g(\alpha_1) < \infty, \quad \text{mit} \quad 0 < \alpha_1 < \alpha_2 \leqq 1$$

(vgl. [3], S. 21ff.).

Lemma 2.3. *Es seien $g, g_n, n \geqq 1$, Funktionen aus $\mathscr{K}$ mit $g_n(\alpha) \to g(\alpha)$ für alle $\alpha \in (0, 1]$. Ist β eine Zahl aus $(0, 1)$, für welche $g'(\beta)$ existiert, dann gilt:*

$$D^- g_n(\beta) \to g'(\beta), \qquad D^+ g_n(\beta) \to g'(\beta).$$

Beweis. Ist α_0 eine Zahl mit $0 < \alpha_0 < \beta < 1$, dann konvergiert $\{g_n\}$ in $[\alpha_0, 1]$ sogar gleichmäßig gegen g. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es Zahlen α', α'', mit $0 < \alpha_0 < \alpha' < \beta < \alpha'' < 1$ und

$$g'(\beta) + \varepsilon > \frac{g(\beta) - g(\alpha')}{\beta - \alpha'} \geqq g'(\beta) \geqq \frac{g(\alpha'') - g(\beta)}{\alpha'' - \beta} > g'(\beta) - \varepsilon$$

(α', α'' sind ab nun fest).

Zu $\delta > 0$ gibt es ein $N(\delta)$ mit $|g_n(\alpha) - g(\alpha)| < \delta$, wenn nur $n \geqq N(\delta)$ und $\alpha \in [\alpha_0, 1]$ ist; daraus folgt:

$$\frac{2\delta}{\beta-\alpha'} + \frac{g(\beta)-g(\alpha')}{\beta-\alpha'} > \frac{g_n(\beta)-g_n(\alpha')}{\beta-\alpha'},$$

$$\frac{-2\delta}{\beta-\alpha'} + \frac{g(\alpha'')-g(\beta)}{\alpha''-\beta} < \frac{g_n(\alpha'')-g(\beta)}{\alpha''-\beta}.$$

Wählt man δ so, daß $2\delta[(\beta-\alpha') \wedge (\alpha''-\beta)]^{-1} < \varepsilon$ ist, so folgt:

$$g'(\beta) + 2\varepsilon > \frac{g(\beta)-g(\alpha')}{\beta-\alpha'} + \varepsilon > \frac{g_n(\beta)-g_n(\alpha')}{\beta-\alpha'} \geqq D^- g_n(\beta)$$

$$\geqq D^+ g_n(\beta) \geqq \frac{g_n(\alpha'')-g_n(\beta)}{\alpha''-\beta} > \frac{g(\alpha'')-g(\beta)}{\alpha''-\beta} - \varepsilon > g'(\beta) - 2\varepsilon$$

für alle $n \geqq N(\delta)$.

Lemma 2.4[1]. *Aus $P_n \xrightarrow{P_0 - i} P$ folgt für alle $k \in K(x)$ und $n \to \infty$:*

1. $P_0\{x_n > k\} \to P_0\{x > k\}$.
2. $P_n\{x_n < k\} \to P\{x < k\}$.

Beweis. Es sei $0 \leqq \beta := P_0\{x > k\} \leqq 1$. Wir nehmen im Falle $\beta > 0$ an, es gibt ein $\gamma > 0$ sowie eine Teilfolge $\{j\} \subset \{n\}$ mit $P_0\{x_j > k\} \leqq \beta - \gamma$ für alle j; sodann wählen wir ein α mit $\beta - \frac{\gamma}{2} \leqq \alpha < \beta$, für welches $i'_{(P_0, P)}(\alpha)$ existiert. Nach dem Lemma von N.P. existiert dazu ein k_α mit $P_0\{x > k_\alpha\} \leqq \alpha \leqq P_0\{x \geqq k_\alpha\}$, also ist $k_\alpha \geqq k$. Wäre $k_\alpha = k$, dann wäre $P_0\{x = k\} > 0$, was wegen $k \in K(x)$ unmöglich ist; also folgt $k_\alpha > k$. Mit der Bezeichnung $\alpha_j(k) := P_0\{x_j > k\}$ folgt aus Lemma 2.2 und 2.3:

$$D^+ i_{(P_0, P_j)}(\alpha) \leqq D^+ i_{(P_0, P_j)}(\beta - \gamma) \leqq D^+ i_{(P_0, P_j)}(\alpha_j(k)) \leqq k$$

also:

$$k < k_\alpha = i'_{(P_0, P)}(\alpha) = \lim_{j \to \infty} D^+ i_{(P_0, P_j)}(\alpha) \leqq k,$$

was einen Widerspruch bedeutet.

Analog widerlegt man die (nur im Falle $\beta < 1$ sinnvolle) Annahme: es gibt ein $\gamma > 0$ sowie eine Teilfolge $\{j\} \subset \{n\}$ mit $P_0\{x_j > k\} \geqq \beta + \gamma$.

2. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert dazu eine Menge $\{k_1, k_2, \ldots, k_m\} \subset K(x)$ mit $0 = k_0 < k_1 < \cdots < k_m = k$ und $k_{j+1} - k_j < \varepsilon$, $1 \leqq j \leqq m-1$. Mit den Bezeichnungen:

$$p_j := P_0\{k_{j-1} \leqq x < k_j\}, \qquad p_j^{(n)} := P_0\{k_{j-1} \leqq x_n < k_j\},$$
$$a_j p_j := P\{k_{j-1} \leqq x < k_j\}, \qquad a_j^{(n)} p_j^{(n)} := P_n\{k_{j-1} \leqq x_n < k_j\}$$

gilt $a_j^{(n)}$, $a_j \in [k_{j-1}, k_j]$ für $1 \leqq j \leqq m$ und alle n und aus 1. folgt: $\lim_{n \to \infty} p_j^{(n)} = p_j$ für $2 \leqq j \leqq m$. Also wird

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |P_n\{x_n < k\} - P\{x < k\}| = \overline{\lim_{n \to \infty}} \left| \sum_{j=1}^{m} (a_j^{(n)} p_j^{(n)} - a_j p_j) \right|$$
$$\leqq \overline{\lim_{n \to \infty}} \sum_{j=1}^{m} |a_j^{(n)} - a_j|\, p_j^{(n)} + \overline{\lim_{n \to \infty}} \sum_{j=1}^{m} a_j |p_j^{(n)} - p_j| \leqq \varepsilon + a_1 < 2\varepsilon.$$

Die Behauptung 1. von Lemma 2.4 läßt sich umkehren:

Lemma 2.5. *Aus $\lim_{n \to \infty} P_0\{x_n > k\} = P_0\{x > k\}$ für alle $k \in K(x)$ folgt: $P_n \xrightarrow{P_0 - i} P$ (und daher auch die Aussage 2. von Lemma 2.4).*

Bevor wir zum Beweis gehen, machen wir folgende Bemerkung: Ist y eine beliebige zufällige Variable, dann ist die durch $\Lambda_y(t) := P_0\{y > t\}$, $t \in R$, definierte Abbildung $\Lambda_y: R \to [0, 1]$ meßbar, monoton nicht wachsend und es gilt: $\Lambda_y(t) = 1 - F_y(t)$, wenn man mit F_y die Verteilungsfunktion der durch y auf R induzierten Verteilung Q_y bezeichnet. Faßt man nun die R.N.-Dichten als zufällige Variable auf, dann kann Lemma 2.5 auch folgendermaßen formuliert werden: Aus $F_{x_n}(t) \to F_x(t)$ für alle $t \in R$, an denen F_x stetig ist (oder, was dasselbe bedeutet: aus $Q_{x_n} \rightharpoonup Q_x$) folgt: $P_n \xrightarrow{P_0 - i} P$.

[1] Wir setzen $x(\omega) = 0$ für $\omega \in N$; siehe § 1.

Beweis des Lemmas[2]. 1. Es sei $\alpha = P_0\{x>k\}$, $k \in K(x)$; ist $k>0$ beliebig gewählt, dann gibt es zu jedem natürlichen m reelle Zahlen k_j, $j=0,1,\ldots,r_m$, mit $0=k_0<k_1<\cdots<k_{r_m}=k$ und $k_{j+1}-k_j<m^{-1}$. Mit der Bezeichnung $N_{k_j}:=\{y>k_j\}$ definieren wir:

$$\xi_m := \sum_{j=0}^{r_m-1} k_j\, c_{(N_{k_j}-N_{k_{j+1}})} + k\, c_{N_k}.$$

Es gilt: $\xi_m \leqq y \wedge k$ und $\xi_m \to y \wedge k$ für $m\to\infty$, P_0-fast überall (f.ü.) sowie:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{r_m-1} P_0(N_{k_{j+1}})(k_{j+1}-k_j) &= \sum_{j=0}^{r_m-1} [P_0(N_{k_j}) - P_0(N_{k_{j+1}})]\, k_j + P_0(N_k)\\ &= \int \xi_m\, dP_0 \to \int y\wedge k\, dP_0, \qquad m\to\infty.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Die linke Seite von (2.3) strebt für $m\to\infty$ gegen $\int\limits_0^k \Lambda_y(t)\,dt$, so daß schließlich gilt:

$$\int y\wedge k\, dP_0 = \int_0^k \Lambda_y(t)\,dt. \tag{2.4}$$

Für y setzen wir x_n, $n\geqq 1$, bzw. x ein. Nach Voraussetzung gilt: $\Lambda_{x_n}(t)\to\Lambda_x(t)$ für alle $t\in K(x)$, also auch:

$$\int_0^k \Lambda_{x_n}(t) \to \int_0^k \Lambda_x(t)\,dt,$$

woraus wegen (2.4) folgt:

$$P_n\{0\leqq x_n\leqq k\} + k\,P_0\{x_n>k\} \to P\{0\leqq x\leqq k\} + k\,P_0\{x>k\}. \tag{2.5}$$

Für $k\in K(x)$ bedeutet (2.5): $P_n\{0\leqq x_n\leqq k\}\to P\{0\leqq x\leqq k\}$, woraus wegen

$$P_n\{0\leqq x_n\leqq k\} + P_n\{x_n>k\} + P_n(F_n) = P\{0\leqq x\leqq k\} + P\{x>k\} + P(F) = 1$$

schließlich folgt:

$$P_n\{x_n>k\} + P_n(F_n) \to P\{x>k\} + P(F). \tag{2.6}$$

Mit der Bezeichnung $\alpha_n := P_0\{x_n>k\}$ ist die linke Seite von (2.6) gerade $\int \bar{\phi}_{\alpha_n}\, dP_n$, also gilt $i_{(P_0,P_n)}(\alpha_n)\to i_{(P_0,P)}(\alpha)$, woraus wegen $\alpha_n\to\alpha$ und Lemma (2.1) folgt: $i_{(P_0,P_n)}(\alpha)\to i_{(P_0,P)}(\alpha)$.

2. Es sei $\beta_1 := P_0\{x>k\}$, $\beta_2 := P_0\{x\geqq k\}$, $k\in R-K(x)$, und wir setzen zunächst $\beta_1>0$ voraus. Wir wählen zwei Folgen $\{k'_j\}\subset K(x)$, $\{k''_j\}\subset K(x)$, $j=1,2,\ldots$, mit $k'_j>k$, $k''_j<k$ für alle j und $k'_j\downarrow k$, $k''_j\uparrow k$ für $j\to\infty$. Mit $\alpha'_j := P_0\{x>k'_j\}$, $\alpha''_j := P_0\{x>k''_j\}$ gilt $\alpha'_j\uparrow\beta_1$, $\alpha''_j\downarrow\beta_2$ und wegen 1.:

$$i_{(P_0,P_n)}(\alpha'_j)\to i_{(P_0,P)}(\alpha'_j), \qquad i_{(P_0,P_n)}(\alpha''_j)\to i_{(P_0,P)}(\alpha''_j)$$

für alle j. Daraus folgt bereits:

$$i_{(P_0,P_n)}(\beta_l)\to i_{(P_0,P)}(\beta_l), \qquad l=1,2,\ n\to\infty$$

(dies zeigt man ähnlich wie Lemma (2.1) mittels der Integraldarstellung von $i_{(P_0,P_n)}$ bzw. $i_{(P_0,P)}$).

---

[2] Wir setzen $x(\omega)=x_n(\omega)=0$ für $\omega\in N$, $n\geqq 1$; siehe § 1.

3. Es sei α so gewählt, daß $0<\beta_1<\alpha<\beta_2\leqq 1$ gilt. Sei $\varepsilon>0$ beliebig, dann wählen wir Zahlen k_1, k_2 aus $K(x)$ mit $k_1>k>k_2$, $k_1-k_2<\varepsilon$. Mit der Bezeichnung $\alpha_{mn}:=P_0\{x_n>k_m\}$, $m=1,2$, gilt: $\alpha_{1n}\leqq\beta_1<\beta_2\leqq\alpha_{2n}$ und nach Lemma 2.2:

$$\begin{aligned} k_1 &\geqq D^+ i_{(P_0,P_n)}(\alpha_{1n})\geqq D^+ i_{(P_0,P_n)}(\beta_1) \\ &\geqq D^- i_{(P_0,P_n)}(\beta_2)\geqq D^- i_{(P_0,P_n)}(\alpha_{2n})\geqq k_2. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Wegen 2. existiert ein $M(\varepsilon)$, so daß $|i_{(P_0,P_n)}(\beta_l)-i_{(P_0,P)}(\beta_l)|<\varepsilon$, $l=1,2$, für $n\geqq M(\varepsilon)$ ist; für jedes $h\in\mathscr{K}$ gilt (vgl. [3]):

$$\begin{aligned} h(\gamma_1)+D^- h(\gamma_3)(\gamma_2-\gamma_1) &\leqq h(\gamma_2) \\ &\leqq h(\gamma_1)+D^+ h(\gamma_1)(\gamma_2-\gamma_1), \quad \text{mit} \quad 0<\gamma_1<\gamma_2<\gamma_3\leqq 1. \end{aligned} \tag{2.8}$$

(2.7) und (2.8) ergeben:

$$\begin{aligned} i_{(P_0,P)}(\beta_1)-\varepsilon+k_1(\alpha-\beta_1) &\leqq i_{(P_0,P_n)}(\alpha) \\ &\leqq i_{(P_0,P)}(\beta_1)+\varepsilon+(k_1+\varepsilon)(\alpha-\beta_1) \qquad \text{für } n\geqq M(\varepsilon), \end{aligned}$$

womit gezeigt ist:

$$i_{(P_0,P_n)}(\alpha)\to i_{(P_0,P)}(\beta_1)+k(\alpha-\beta_1)=i_{(P_0,P)}(\alpha).$$

4. Es sei $0=\beta_1<\beta_2$; $\varepsilon>0$ sei beliebig, k_1, k_2 seien wie in 3. gewählt. Zu α mit $0<\alpha<\beta_2$ gibt es ein $M(\varepsilon,\alpha)$, so daß für $n\geqq M(\varepsilon,\alpha)$ gilt: $\alpha_n<\alpha$, $|i_{(P_0,P)}(\alpha_{1n})-i_{(P_0,P)}(0)|<\varepsilon/2$, $|i_{(P_0,P_n)}(\alpha_{1n})-i_{(P_0,P)}(0)|<\varepsilon/2$ (die letzte Ungleichung gilt wegen 1.), also auch $|i_{(P_0,P_n)}(\alpha_{1n})-i_{(P_0,P)}(\alpha_{1n})|<\varepsilon$; wegen

$$i_{(P_0,P)}(\alpha)=i_{(P_0,P)}(0)+\frac{\alpha_{1n}}{\beta_2}\big(i_{(P_0,P)}(\beta_2)-i_{(P_0,P)}(0)\big)$$

folgt durch eine zu (2.8) analoge Ungleichung:

$$i_{(P_0,P_n)}(\alpha)\to i_{(P_0,P)}(0)+k_2\,\alpha=i_{(P_0,P)}(\alpha).$$

Lemma 2.6. *Es sei $\mu\in\Pi$ mit $\mu\gg\{P_0, P, P_n, n\geqq 1\}$. Mit den Bezeichnungen:*

$$f_0:=\frac{dP_0}{d\mu}, \qquad f_n:=\frac{dP_n}{d\mu}, \qquad f:=\frac{dP}{d\mu}$$

gilt: aus $f_n\xrightarrow{\mu-s} f$ folgt $x_n\xrightarrow{P_0-s} x$.

Beweis. N sei wie in § 1 definiert; dann sind

$$\frac{f_n}{f_0}\,c_{\Omega-N}\,c_{\{f_0\neq 0\}}, \quad n\geqq 1 \qquad \text{bzw.} \quad \frac{f}{f_0}\,c_{\Omega-N}\,c_{\{f_0\neq 0\}}$$

geeignete Versionen von x_n bzw. x. Sei $\eta>0$ beliebig; zu beliebigem $\varepsilon>0$ gibt es ein $j(\varepsilon)\geqq 1$ mit $\mu\{0<f_0<j^{-1}\}<\varepsilon$; überdies gilt μ-f.ü. $c_{\{f_0\neq 0\}}=c_{\{0<f_0<j^{-1}\}}+c_{\{f_0\geqq j^{-1}\}}$.

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\mu\{|x_n-x|\geqq\eta\}&=\mu\{c_{\Omega-N}\,c_{\{0<f_0<j^{-1}\}}\,f_0^{-1}\,|f_n-f|\geqq\eta\}\\&\quad+\mu\{c_{\Omega-N}\,c_{\{f_0\geqq j^{-1}\}}\,f_0^{-1}\,|f_n-f|\geqq\eta\}\\&\leqq\mu\{0<f_0<j^{-1}\}+\mu\{c_{\Omega-N}\,c_{\{f_0\geqq j^{-1}\}}\,j\,|f_n-f|\geqq\eta\}\\&\leqq\varepsilon+\mu\{|f_n-f|\geqq\eta j^{-1}\},\end{aligned}$$

woraus $\mu\{|x_n-x|\geqq\eta\}\to 0$ und daher

$$P_0\{|x_n-x|\geqq\eta\}=\int_{\{|x_n-x|\geqq\eta\}} f_0\,d\mu\to 0$$

folgt.

§ 3. Zusammenhang zwischen den Konvergenzbegriffen

Mit Hilfe der Ergebnisse von § 2 erhält man mühelos die folgenden Aussagen:

Satz 3.1. *Aus* $x_n\xrightarrow{P_0-s}x$ *folgt* $P_n\xrightarrow{P_0-i}P$.

Korollar 3.1. *Aus* $P_n\to P$ *folgt* $P_n\xrightarrow{P_0-i}P$.

Aus $x_n\xrightarrow{P_0-s}x$ muß bekanntlich nicht notwendig $P_n\to P$ und erst recht nicht $P_n\rightharpoonup P$ folgen. Es gilt aber der

Satz 3.2. *Aus* $x_n\xrightarrow{P_0-s}x$ *und* $P\ll P_0$ *folgt* $P_n\to P$.

Beweis. Wegen $\int x_n\,dP_0\leqq 1$, $n\geqq 1$, bzw. $\int x\,dP_0=1$ gilt für beliebiges $\varepsilon>0$:

$$\begin{aligned}\int|x_n-x|\,dP_0&\leqq\varepsilon+\int_{|x_n-x|\geqq\varepsilon}(x_n+x)\,dP_0\leqq\varepsilon+2-\int_{|x_n-x|<\varepsilon}(x_n+x)\,dP_0\\&\leqq\varepsilon+2-\int_{|x_n-x|<\varepsilon}(x-\varepsilon+x)\,dP_0.\end{aligned}$$

Da wegen der Voraussetzung $x_n\xrightarrow{P_0-s}x$ auch $P_0\{|x_n-x|<\varepsilon\}\to 1$ gilt, strebt das letzte Integral der obigen Ungleichungskette gegen $2-\varepsilon$, so daß folgt: $\overline{\lim}\int|x_n-x|\,dP_0\leqq 2\varepsilon$; damit wird gleichmäßig für alle $M\in\mathscr{S}$:

$$\begin{aligned}|P(M)-P_n(M)|&\leqq\int|x-x_n|\,dP_0+P_n(F_n)\\&=\int|x-x_n|\,dP_0+1-\int x_n\,dP_0\leqq 2\int|x-x_n|\,dP_0\to 0,\end{aligned}$$

also $\sup_{M\in\mathscr{S}}|P(M)-P_n(M)|\to 0$.

Für den Zusammenhang mit der schwachen Konvergenz, dem der Rest dieses Abschnittes gewidmet ist, benötigen wir folgendes fundamentale Lemma:

Lemma 3.1[3]. *Aus* $P_n\xrightarrow{P_0-i}P$ *und* $P_n\{x<k\}\to P\{x<k\}$ *für alle* $k\in K(x)$ *folgt:* $x_n\xrightarrow{P_0-s}x$.

Beweis. Wir führen zunächst folgende Bezeichnungen ein:

$\bar N:=\Omega-N$, $\bar A:=\bar N-A$ für $A\subset\Omega$, $Z_k:=\{x<k\}$, $Z_k^n:=\{x_n<k\}$, $n\geqq 1$, $k\in R$.

Unter Berücksichtigung der Beziehung

$$Q(A)-Q(B)=Q(A\cap\bar B)-Q(\bar A\cap B)$$

[3] Wir setzen $x(\omega)=0$ für $\omega\in N$; siehe § 1.

($A, B \in \mathscr{S}, Q = P_0, P_n, P$) gilt für beliebig vorgegebenes $\delta > 0$ und alle $k \in K(x)$:

$$\delta\big(P_0(Z_k \cap \overline{Z^n_{k+\delta}}) + P_0(\bar{Z}_k \cap Z^n_{k-\delta})\big) = \int_{Z_k \cap \overline{Z^n_{k+\delta}}} \delta\, dP_0 + \int_{\bar{Z}_k \cap Z^n_{k-\delta}} \delta\, dP_0$$

$$\leqq \int_{Z_k \cap \overline{Z^n_{k+\delta}}} (x_n - k)\, dP_0 + \int_{\bar{Z}_k \cap Z^n_{k-\delta}} (k - x_n)\, dP_0$$

$$\leqq \int_{Z_k \cap \overline{Z^n_k}} (x_n - k)\, dP_0 + \int_{\bar{Z}_k \cap Z^n_k} (k - x_n)\, dP_0$$

$$= P_n(Z^k \cap \overline{Z^n_k}) - P_n(\bar{Z}_k \cap Z^n_k) + k\big(P_0(\bar{Z}_k \cap Z^n_k) - P_0(Z_k \cap \overline{Z^n_k})\big)$$

$$= P_n(Z_k) - P_n(Z^n_k) + k\big(P_0(Z^n_k) - P_0(Z_k)\big).$$

Nach Lemma 2.4, 2. gilt $P_0(Z^n_k) \to P_0(Z_k)$ und $P_n(Z^n_k) \to P(Z_k)$ für alle $k \in K(x)$, woraus folgt:

$$\lim P_0(Z_k \cap \overline{Z^n_{k+\delta}}) = \lim P_0(\bar{Z}_k \cap Z^n_{k-\delta}) = 0. \tag{3.1}$$

Es sei weiter $\rho > 0$ gegeben. Wir wählen Zahlen l_i, $0 \leqq i \leqq m$, mit $0 = l_0 < l_1 < \cdots < l_m$, $l_m > \rho$, $\{l_1, \dots, l_m\} \subset K(x)$ und $l_i - l_{i-1} < \delta$ für $1 \leqq i \leqq m$. Dann gilt:

$$\{|x_n - x| > 2\delta\} \subset Z_0 \cup \bar{Z}_\rho \cup \bigcup_{i=1}^{m} \big((Z_{l_i} \cap \overline{Z^n_{l_i+\delta}}) \cup (\bar{Z}_{l_i} \cap Z^n_{l_i-\delta})\big),$$

also wegen (3.1) und $P_0(Z_0) = 0$:

$$\overline{\lim}\, P_0\{|x_n - x| > 2\delta\} \leqq P_0(\bar{Z}_\rho);$$

wegen $P_0(\bar{Z}_\rho) \to 0$ für $\rho \to \infty$ folgt $\lim P_0\{|x_n - x| > 2\delta\} = 0$ für alle $\delta > 0$.

Ersichtlich reicht z.B. die Forderung $P_n(M) \to P(M)$ für alle M aus, um die Voraussetzung von Lemma 3.1 zu garantieren.

Für den Rest dieses Abschnitts setzen wir Ω als topologischen Raum voraus.

Definition 3.1. Es sei A eine beliebige Indexmenge; eine Menge $\{P_\alpha: P_\alpha \in \Pi, \alpha \in A\}$ heißt gleichmäßig dominiert durch ein W-maß μ, wenn es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß $P_\alpha(M) < \varepsilon$ ist für alle $\alpha \in A$, wenn nur $\mu(M) < \delta$ ist ($M \in \mathscr{S}$).

Der folgende Satz, den wir ohne Beweis angeben, diene als Beispiel dafür, daß $P_n \rightharpoonup P$ unter gewissen Voraussetzungen hinreicht für die mengenweise Konvergenz:

Satz 3.3. *Es sei Ω ein normaler topologischer Raum*[4], *$\mathscr{S}$ sei die σ-Algebra aller Baire-Mengen; die Menge $\{P, P_n, n \geqq 1\}$ werde durch das W-maß μ gleichmäßig dominiert; aus $P_n \rightharpoonup P$ folgt dann $P_n(M) \to P(M)$ für alle $M \in \mathscr{S}$.*

Eine hinreichende Bedingung für die gleichmäßige Dominanz bietet z.B. das folgende

Lemma 3.2 (Baumann). *Es sei $P \ll P_0$ und $P_n \xrightarrow{P_0-i} P$. Dann wird $\{P, P_n, n \geqq 1\}$ gleichmäßig durch*

$$\mu := \tfrac{1}{2} P_0 + \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} P_i$$

dominiert.

[4] Der Satz gilt daher auch für metrische vollständige Räume; für den Fall eines metrischen Raumes findet man eine ähnliche Aussage in [6], S. 40, Theorem 6.1.

Beweis. $P \ll \mu$ und $P_n \ll \mu$ für alle n ist klar. Wäre die Dominanz nicht gleichmäßig, so gäbe es eine unendliche Teilfolge $\{m_n\} \subset \{n\}$, eine Folge von Mengen $\{T_n\} \subset \mathcal{S}$ sowie ein $\varepsilon > 0$ mit: $P_{m_n}(T_n) \geqq \varepsilon$ für alle n und $\lim \mu(T_n) = 0$, also um so mehr $\lim P_0(T_n) = 0$.

Wegen $P \ll P_0$ ist $\lim\limits_{\alpha \to 0} i_{(P_0, P)}(\alpha) = 0$ (Lemma 4.5). Also existiert ein $\alpha_0 > 0$ mit $i_{(P_0, P)}(\alpha) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ für $\alpha \in [0, \alpha_0]$. Wählt man nun zu gegebenem $\alpha \in (0, \alpha_0]$ ein N so, daß $P_0(T_n) < \alpha$ für alle $n \geqq N$ gilt, dann folgt

$$i_{(P_0, P)}(\alpha) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \leqq P_{m_n}(T_n) \leqq i_{(P_0, P_{m_n})}(\alpha),$$

im Widerspruch zu $P_n \xrightarrow{P_0 - i} P$.

§ 4. Ein Existenzsatz

Es sei $h \in \mathcal{K}$ und $(\Omega, \mathcal{S}, P_0)$ ein W-feld. Wir zeigen in diesem Abschnitt, daß die Atomfreiheit von P_0 eine hinreichende Bedingung ist für die Existenz eines W-maßes P mit: $i_{(P_0, P)} = h$.

Lemma 4.1. *Es sei P_0 ein atomfreies W-maß über $(\Omega, \mathcal{S})$. Die Funktion $a: [0, \infty) \to [0, 1]$ sei monoton nicht zunehmend und rechtsseitig stetig. Dann existiert eine Abbildung $A: [0, \infty) \to \mathcal{S}$ mit:*

$$A_{k_2} \subset A_{k_1} \quad \textit{für} \quad k_1 \leqq k_2 \quad \textit{und} \quad P_0(A_k) = a(k) \quad \textit{für alle} \quad k \in [0, \infty).$$

Beweis. Es sei R_r^+ die Menge aller nicht negativen rationalen Zahlen: $R_r^+ = \{r_1, r_2, \ldots\}$. Zu r_i existiert ein A_{r_i} mit $P_0(A_{r_i}) = a(r_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ (dies ist eine unmittelbare Folge des Satzes von Ljapunov). Für $k \notin R_r^+$ definieren wir $A_k := \bigcup\limits_{r_i > k} A_{r_i}$, woraus wegen der σ-Additivität von P_0 und der rechtsseitigen Stetigkeit von a folgt:

$$P_0(A_k) = \lim_{r_i \to k+} P_0(A_{r_i}) = a(k).$$

Lemma 4.2. *Es seien P_0, a und A wie in Lemma 4.1 definiert und es gelte $\lim\limits_{k \to \infty} a(k) = 0$. Dann existiert eine $\mathcal{S}$-meßbare Funktion x_a mit den Eigenschaften:*

$$x_a \geqq 0 \ P_0\text{-f.ü.}$$

$$\{x_a > k\} = A_k \quad \textit{für alle} \quad k \in [0, \infty), \ P_0\text{-f.ü.}$$

Beweis. Es sei $\mathcal{C} := \{A_k, k \in [0, \infty)\}$. Ähnlich wie beim Beweis von Lemma 4.1 konstruiert man ein bezüglich der Inklusion geordnetes Mengensystem $\mathcal{C}'$ mit folgenden Eigenschaften: $\mathcal{C}' \subset \mathcal{S}$, $\mathcal{C}' \supset \mathcal{C}$, zu jedem $\alpha \in [0, 1]$ existiert ein $B_\alpha \in \mathcal{C}'$ mit $P_0(B_\alpha) = \alpha$. Zu $\mathcal{C}'$ existiert eine $\mathcal{S}$-meßbare Funktion T: $\Omega \to R$ mit: $B_\alpha = \{T \leqq \alpha\}$ P_0-f.ü. (vgl. [1], S. 228, Lemma 5.1, sowie [4]). Also gilt für jedes $\alpha \in [0, 1]$: $P_0\{T \leqq \alpha\} = \alpha$, woraus wegen der σ-Additivität von P_0 folgt: $P_0\{T \leqq \alpha\} = P_0\{T < \alpha\}$ und somit: $\{T < a(k)\} = A_k$ P_0-f.ü. Ersichtlich kann man T so wählen, daß $0 < T \leqq 1$ gilt.

Die Funktion $\bar{a} := 1 - a$ ist monoton nicht fallend, rechtsseitig stetig, und es gilt $0 \leqq \bar{a} \leqq 1$ und $\lim\limits_{k \to \infty} \bar{a}(k) = 1$. Wir definieren für alle $\rho \in [0, 1)$ durch

$$\phi(\rho) = \inf \bar{a}^{-1}\{[\rho, 1]\} = \inf\{k' : \rho \leqq \bar{a}(k') \leqq 1\}$$

eine nicht negative, monoton nicht fallende und daher meßbare Funktion ϕ. Dann leistet die Funktion $x_a := \phi \circ (1-T)$ das Gewünschte:

$$\text{(i)}\quad \omega \in \{x_a \leqq k\} \Rightarrow \inf\{k' : 1 - T(\omega) \leqq \bar{a}(k') \leqq 1\} \leqq k$$
$$\Rightarrow \bar{a}(k) = \lim_{\varepsilon \to 0} \bar{a}(k+\varepsilon) \geqq 1 - T(\omega) \Rightarrow a(k) \leqq T(\omega);$$

damit ist gezeigt: $\{x_a > k\} \supset \{T < a(k)\}$ P_0-f.ü.

$$\text{(ii)}\quad \omega \in \{T \geqq a(k)\} \Rightarrow 1 - T(\omega) \leqq \bar{a}(k) \leqq 1$$
$$\Rightarrow k \geqq \inf\{k' : 1 - T(\omega) \leqq \bar{a}(k') \leqq 1\} = x_a(\omega);$$

damit ist gezeigt: $\{T < a(k)\} \supset \{x_a > k\}$ P_0-f.ü.

Aus (i) und (ii) folgt unmittelbar die Behauptung.

Lemma 4.3. *Es sei $g \in \mathcal{K}$. Mit v bezeichnen wir diejenige linksseitig stetige Funktion über $[0, 1]$, welche dort, wo die Ableitung g' von g existiert, mit dieser übereinstimmt. Dann existiert eine monoton nicht zunehmende, rechtsseitig stetige Funktion a_g: $[0, \infty) \to [0, 1]$, so, daß für alle $\alpha_0 \in [0, 1]$ und alle $G > 0$ gilt:*

$$\int_0^{\alpha_0} G \wedge v(\alpha)\, d\alpha = \int_0^{G} \alpha_0 \wedge a_g(k)\, dk. \tag{4.1}$$

Beweis. Wir definieren für $k \geqq 0$: $a_g(k) := \sup\{\alpha : g'(\alpha) > k\}$; ersichtlich ist a_g monoton nicht zunehmend und rechtsseitig stetig. Bezeichnet man das Innere der Ordinatenmenge der Funktion $(G \wedge v)\, c_{[0, \alpha_0]}$ mit I_1, die entsprechende Menge der Funktion $(a_g \wedge \alpha_0)\, c_{[0, G]}$ mit I_2, dann ist die linke bzw. rechte Seite von (4.1) gerade das 2-dimensionale Lebesguemaß von I_1 bzw. I_2. I_2 geht aber aus I_1 durch eine orthogonale Transformation hervor, woraus (4.1) folgt.

Läßt man in (4.1) $G \to \infty$ gehen, so gilt, da g' f.ü. mit v übereinstimmt:

$$\int_0^{\alpha_0} g'(\alpha)\, d\alpha = \int_0^{\infty} \alpha_0 \wedge a_g(k)\, dk \qquad \text{für alle } \alpha_0 \in [0, 1]. \tag{4.2}$$

Für das weitere sind folgende Definitionen wichtig:

Definition 4.1. Eine Menge $M \in \mathcal{S}$ heißt Atom, wenn für jedes $B \in \mathcal{S}$ mit $B \subset M$ gilt: $B = M$ oder $B = \emptyset$.

Definition 4.2. Es sei $Q \in \Pi$; eine Menge $K \in \mathcal{S}$ mit $Q(K) > 0$ heißt Q-Atom, wenn für jedes $B \in \mathcal{S}$ mit $B \subset K$ gilt: $Q(B) = Q(K)$ oder $Q(B) = 0$. Wenn zu einem W-maß Q kein Q-Atom existiert, dann heißt Q atomfrei.

Ein Q-Atom K muß nicht notwendig ein Atom sein (Gegenbeispiel: $\Omega := [0, 1]$, $\mathcal{S} := \mathcal{B} \cap [0, 1]$, $Q := \delta_0$, d.h.: das Punktmaß im Nullpunkt; dann ist $[0, 1]$ ein δ_0-Atom, aber kein Atom).

Definition 4.3. Ein Meßraum $(\Omega, \mathcal{S})$ habe die Eigenschaft (T), wenn für jedes atomhafte Maß Q gilt: zu jedem Q-Atom K existiert ein Atom A mit $Q(A) = Q(K)$, $Q(K - A) = 0$.

Ist z.B. Ψ ein polnischer Raum, $\mathcal{P}$ die σ-Algebra der Borelschen Mengen, dann hat $(\Psi, \mathcal{P})$ die Eigenschaft (T) (vgl. [5], S. 64ff.). Wir sind nun in der Lage, das Hauptresultat dieses Abschnitts zu beweisen:

Satz 4.1. *Es sei $P_0 \in \Pi$ ein atomfreies W-maß über $(\Omega, \mathcal{S})$, $\mathcal{S}$ enthalte mindestens ein Atom A. Dann gibt es zu jedem $g \in \mathcal{K}$ mindestens ein $P \in \Pi$, so, daß $i_{(P_0, P)} = g$ ist.*

Beweis. Wir betrachten die nach Lemma 4.3 zu g existierende Funktion a_g sowie die zu a_g nach Lemma 4.2 existierende Funktion x_{a_g}, die wir im folgenden kurz mit x bezeichnen. Für jedes $M \in \mathscr{S}$ definieren wir:

$$P(M) := K_g \, \delta_A(A \cap M) + \int_M x \, dP_0,$$

$$K_g := \lim_{\alpha \to 0+} g(\alpha), \qquad \delta_A(B) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } A \subset B \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad B \in \mathscr{S}.$$

Die σ-Additivität von P ist klar, aus (4.2) folgt für $\alpha_0 = 1$:

$$P(\Omega) = K_g + \int_0^\infty a_g(k) \, dk = K_g + \int_0^1 g'(\alpha) \, d\alpha = 1,$$

also ist P ein W-maß.

Es sei $0 \leqq \alpha \leqq 1$; nach (1.1) gilt für den trennscharfen Test $\bar{\phi}_\alpha$ des Problems (α, P_0, P): $\bar{\phi}_\alpha(\omega) = 1$ für $\omega \in A$ und es existiert ein k_α mit:

$$a_g(k_\alpha) = P_0\{x > k_\alpha\} \leqq \alpha \leqq P_0\{x \geqq k_\alpha\} = \lim_{k' \to k_\alpha -} a_g(k').$$

Nach (1.1) gilt:

$$\int \bar{\phi}_\alpha \, dP = K_g + \int_{\{0 \leqq x \leqq k_\alpha\}} x \, dP_0 + k_\alpha\big(\alpha - a_g(k_\alpha)\big). \tag{4.3}$$

Nach (2.4) gilt:

$$\int x \wedge k_\alpha \, dP_0 = \int_{\{0 \leqq x \leqq k_\alpha\}} x \, dP_0 + k_\alpha P_0\{x > k\} = \int_0^{k_\alpha} a_g(k) \, dk;$$

wegen

$$0 \leqq k_\alpha P_0\{x > k_\alpha\} \leqq \int_{\{x < k_\alpha\}} x \, dP_0 \to 0 \qquad \text{für } k_\alpha \to \infty$$

bedeutet dies: $\int x \, dP_0 = \int_0^\infty a_g(k) \, dk$, woraus schließlich folgt:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty a_g(k) \, dk &= \int_{\{0 \leqq x \leqq k_\alpha\}} x \, dP_0 + \int_{\{x > k_\alpha\}} x \, dP_0 \\ &= \int_0^{k_\alpha} a_g(k) \, dk - k_\alpha P_0\{x > k_\alpha\} + \int_{k_\alpha}^\infty a_g(k) \, dk + k_\alpha P_0\{x > k_\alpha\}, \end{aligned}$$

also $\displaystyle\int_{\{x > k_\alpha\}} x \, dP_0 = \int_{k_\alpha}^\infty a_g(k) \, dk + k_\alpha a_g(k_\alpha)$.

Aus der Monotonie von a_g sowie $a_g(k_\alpha) \leqq \alpha$ folgt:

$$\int_0^\infty \alpha \wedge a_g(k) \, dk = \int_{k_\alpha}^\infty a_g(k) \, dk + k_\alpha \alpha,$$

woraus wir unter Berücksichtigung von (4.2) und (4.3) erhalten:

$$\begin{aligned} \int \bar{\phi}_\alpha \, dP &= K_g + \int_{k_\alpha}^\infty a_g(k) \, dk + k_\alpha a_g(k_\alpha) + k_\alpha\big(\alpha - a_g(k_\alpha)\big) \\ &= K_g + \int_0^\infty \alpha \wedge a_g(k) \, dk = K_g + \int_0^\alpha g'(\beta) \, d\beta = g(\alpha). \end{aligned}$$

Satz 4.2. $(\Omega, \mathscr{S})$ *habe die Eigenschaft* (T); *es sei* $h \in \mathscr{K}$ *und die Ableitung* h' *sei in* $(0,1]$ *streng monoton abnehmend;* P_a *sei ein atomhaftes W-maß; dann existiert kein* $P \in \Pi$ *mit* $i_{(P_a, P)} = h$.

Beweis. Es gibt höchstens abzählbar viele P_a-Atome K_i, $i \geqq 1$, also wegen (T) höchstens abzählbar viele Atome $A_i \subset K_i$ mit $P_a(A_i) > 0$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. $P(\bigcup_i A_i) = 0$. Für α mit $1 - P_a(\bigcup_i A_i) \leqq \alpha \leqq 1$ erhält man einen trennscharfen Test durch:

$$\bar{\phi}_\alpha(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } \omega \in \Omega - \bigcup_i A_i \\ \alpha + P_a(\bigcup_i A_i) - 1 & \text{für } \omega \in \bigcup_i A_i. \end{cases}$$

Dann ist $i_{(P_a, P)}(\alpha) = 1$ für $\alpha \in (1 - P_a(\bigcup_i A_i), 1]$, also $i'_{(P_a, P)}$ dort nicht streng monoton.

2. Für mindestens ein i_0 gilt $P(A_{i_0}) > 0$. Dann gilt $x(\omega) = P(A_{i_0})/P_a(A_{i_0}) > 0$ für $\omega \in A_{i_0}$ (mit $x := dP/dP_a$), also existiert in $[0,1]$ ein Intervall positiver Länge, so daß $i_{(P_a, P)}$ dort linear ansteigt; daher ist $i'_{(P_a, P)}$ dort nicht streng monoton.

Korollar 4.1. $(\Omega, \mathscr{S})$ *habe die Eigenschaft* (T); P_0 *sei aus* Π *und zu jedem* $h \in \mathscr{K}$ *existiere mindestens ein* $Q_h \in \Pi$, *so, daß* $i_{(P_0, Q_h)} = h$ *ist; dann ist* P_0 *atomfrei.*

Dies ergibt zusammen mit Satz 4.1:

Satz 4.3. $(\Omega, \mathscr{S})$ *habe die Eigenschaft* (T); $P_0 \in \Pi$ *ist genau dann atomfrei, wenn es die Voraussetzungen von Korollar* 4.1 *erfüllt.*

Im folgenden bezeichnen wir mit $G_{(P_0, g)}$ die Menge aller $Q \in \Pi$ mit $i_{(P_0, Q)} = g$, wobei $P_0 \in \Pi$ und $g \in \mathscr{K}$ beliebig vorgegeben sind.

Lemma 4.4. *Es seien* M_1, M_2 *zwei Mengen aus* $\mathscr{S}$ *mit* $M_1 \subset M_2$; P_0 *und a seien wie in Lemma* 4.1 *definiert; dann existiert eine Abbildung* $A: [0, \infty) \to \mathscr{S}$, *welche die in Lemma* 4.1 *gezeigten Eigenschaften hat und für welche überdies gilt:*

$$M_1 \subset A_k \subset M_2 \quad \textit{für alle } k \quad \textit{mit} \quad P_0(M_1) < P_0(A_k) < P_0(M_2).$$

Der Beweis ist selbstverständlich.

Satz 4.4. *Es sei* $g \in \mathscr{K}$ *und es gelte nicht* $g(\alpha) = \alpha$ *für alle* $\alpha \in (0,1]$; P_0 *sei atomfrei und zu jedem* $M \in \mathscr{S}$ *existiere mindestens ein Atom A mit* $A \subset M$. *Dann ist* $G_{(P_0, g)}$ *vollständig* (vgl. [1], S. 261 ff.).

Beweis. Wir setzen zunächst voraus, daß g' in $(0,1)$ mindestens zwei verschiedene Werte annimmt.

Es sei $x := dP/dP_0$ für ein beliebiges, dann aber festes $P \in G_{(P_0, g)}$. Es gibt ein $k_0 > 0$ mit $0 < P_0\{x > k_0\} < 1$; andernfalls würde nämlich für jedes $k > 0$ entweder $P_0\{x > k\} = 1$ oder $P_0\{x > k\} = 0$ und daher $x = \text{const.}$ P_0-f. ü. gelten, also würde g in $(0,1)$ linear ansteigen, im Widerspruch zur Voraussetzung über g. Schließlich muß wegen $x \geqq 0$ P_0-f. ü. auch $k_0 > 0$ sein.

Es sei ψ beliebig, $\mathscr{S}$-meßbar und für alle $Q \in G_{(P_0, g)}$ existiere $\int \psi \, dQ$ und es gelte $\int \psi \, dQ = 0$. Wir nehmen an, es gäbe ein $P \in G_{(P_0, g)}$ mit $P\{\psi \neq 0\} > 0$. Dann unterscheiden wir zwei Fälle:

1. $P_0\{\psi \neq 0\}=0$; es kann nicht $P \ll P_0$ sein; also gibt es ein $F \in \mathscr{S}$, so daß für jede $\mathscr{S}$-meßbare Funktion χ, für welche $\int \chi\, dQ$ für alle $Q \in G_{(P_0,g)}$ existiert, gilt:

$$\int \chi\, dP = \int \chi\, x\, dP_0 + \int_F \chi\, dP, \qquad P_0(F)=0,\ P(F)>0.$$

Es sei $A \subset \{\psi \neq 0\}$ ein Atom; dann definieren wir ein W-maß P_1 wie folgt:

$$P_1(M) = \begin{cases} \int_M x\, dP_0, & \text{wenn} \quad A \cap M = \emptyset \\ P(F) + \int_M x\, dP_0, & \text{wenn} \quad A \subset M, \end{cases} \qquad M \in \mathscr{S}.$$

Klarerweise ist $P_1 \in G_{(P_0,g)}$ und es gilt:

$$\int \psi\, dP_1 = \int \psi\, x\, dP_0 + \int_A \psi\, dP_1;$$

der erste Summand verschwindet; auf A kann ψ nur einen Wert annehmen, welcher wegen $A \subset \{\psi \neq 0\}$ von Null verschieden ist, womit $\int \psi\, dP_1 \neq 0$ gezeigt ist, im Widerspruch zur Definition von ψ.

2. $P_0\{\psi \neq 0\}>0$; ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $P_0\{\psi>0\}>0$ annehmen. Wir unterscheiden:

a) P_0-f. ü. gilt $\psi=\lambda$ mit $\lambda>0$; dies würde im Fall $P \ll P_0$ sofort $\int \psi\, dP \neq 0$ ergeben; den Fall $P \not\ll P_0$ erledigt man wie in 1.

b) Es existiert mindestens ein κ mit $0<P_0\{\psi>\kappa\}<1$. Die Abbildung a_x: $[0,\infty) \to [0,1]$, definiert durch $a_x(k)=P_0\{x>k\}$, ist rechtsseitig stetig, so daß wir nach Lemma 4.1 dazu zwei Abbildungen A^i: $[0,\infty) \to \mathscr{S}$, $i=1,2$, konstruieren können, denen wir nach Lemma 4.4 noch folgende Nebenbedingungen auferlegen können:

$$\begin{aligned}
&P_0(A_k^1)=P_0(A_k^2) \quad \text{für alle } k \in [0,\infty),\\
&A_{k_0}^1 - A_{k_0}^2 \subset \{\psi>\kappa\} \quad \text{und} \quad P_0(A_{k_0}^1 - A_{k_0}^2)>0,\\
&A_{k_0}^2 - A_{k_0}^1 \subset \{\psi \leqq \kappa\} \quad \text{und} \quad P_0(A_{k_0}^2 - A_{k_0}^1)>0,\\
&A_k^1 = A_k^2 \quad \text{für alle } k \text{ mit } a_x(k)>P_0(A_{k_0}^1 \cup A_{k_0}^2)\\
&\text{und alle } k \text{ mit} \quad a_x(k) \leqq P_0(A_{k_0}^1 \cap A_{k_0}^2), \qquad \text{für ein } k_0 \in [0,\infty).
\end{aligned}$$

Nach Lemma 4.2 existieren zu A^i, $i=1,2$, $\mathscr{S}$-meßbare Funktionen x_i mit $\{x_i>k\}=A_k^i$ P_0-f. ü., so daß wir erreicht haben:

$$\begin{aligned}
&x_1=x_2 \ P_0\text{-f. ü.} \quad \text{auf} \quad A_{k_0}^1 \cap A_{k_0}^2 \quad \text{und} \quad \Omega-(A_{k_0}^1 \cup A_{k_0}^2),\\
&x_1>x_2 \ P_0\text{-f. ü.} \quad \text{auf} \quad A_{k_0}^1 - A_{k_0}^2,\\
&x_1<x_2 \ P_0\text{-f. ü.} \quad \text{auf} \quad A_{k_0}^2 - A_{k_0}^1,
\end{aligned}$$

woraus schließlich folgt:

$$\{x_1>x_2\} \subset \{\psi>\kappa\}, \qquad \{x_2>x_1\} \subset \{\psi \leqq \kappa\} \quad P_0\text{-f. ü.}$$

F sei wieder der singuläre Teil von P bezüglich P_0, dann definieren wir zwei W-maße durch

$$P_i(M) = P(F \cap M) + \int_M x_i \, dP_0, \qquad i = 1, 2.$$

Wegen $P_0(A_k^1) = P_0(A_k^2)$ ist $P_i \in G_{(P_0, g)}$ und es gilt:

$$\int \psi \, dP_1 - \int \psi \, dP_2 = \int_{\{x_1 > x_2\}} \psi(x_1 - x_2) \, dP_0 - \int_{\{x_1 < x_2\}} \psi(x_2 - x_1) \, dP_0$$

$$> \kappa \cdot \int_{\{x_1 > x_2\}} (x_1 - x_2) \, dP_0 - \kappa \cdot \int_{\{x_1 < x_2\}} (x_2 - x_1) \, dP_0 = 0.$$

Also ist entweder $\int \psi \, dP_1$ oder $\int \psi \, dP_2$ von 0 verschieden, im Widerspruch zur Definition von ψ.

Lassen wir nun die zu Anfang des Beweises gemachte Voraussetzung über g' fallen, so haben wir nur mehr den Fall

$$g(\alpha) = \xi + (1 - \xi)\alpha, \qquad \xi := \lim_{\alpha \to 0+} g(\alpha)$$

zu betrachten. In diesem Fall ist aber $P \not\ll P_0$ (Lemma 4.5), und der Beweis geht wie unter 1.

Lemma 4.5. *Es gilt* $\lim_{\alpha \to 0+} i_{(P_0, P)}(\alpha) > 0$ *genau dann, wenn* $P \not\ll P_0$ *ist.*

Beweis. Aus $P \not\ll P_0$ folgt $\lim_{\alpha \to 0+} i_{(P_0, P)}(\alpha) > 0$ unmittelbar aus (1.1).

Sei umgekehrt $\lim_{\alpha \to 0+} i_{(P_0, P)}(\alpha) > 0$. Wäre $P \ll P_0$, dann gäbe es eine Folge $\{k_j\} \subset K(x)$, $j \geqq 1$ und $k_j \to \infty$ für $j \to \infty$ und der trennscharfe Test $\bar{\phi}_{\alpha_j}$, $\alpha_j := P_0\{x > k_j\}$, hätte die Form: $\bar{\phi}_{\alpha_j} = c_{\{x > k_j\}}$, woraus wegen $P_0\{x > k_j\} \to 0$ folgt: $i_{(P_0, P)}(\alpha_j) \to 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Für zahlreiche Anregungen und Verbesserungsvorschläge danke ich den Herren P. Gänßler und V. Baumann, Köln. Insbesondere stammen der zweite Teil von Lemma 2.4 sowie die hier gebrachten Formulierungen der Beweise von Lemma 3.1, 4.2 und Satz 3.2 von Herrn Baumann.

Literatur

1. Schmetterer, L.: Einführung in die mathematische Statistik, 2. Aufl. Wien-New York: Springer 1966.
2. Krickeberg, K.: Wahrscheinlichkeitstheorie. Stuttgart: Teubner 1963.
3. Zygmund, A.: Trigonometric series, 2nd edition, vol. I. Cambridge: University Press 1959.
4. Kellerer, H. G.: Schnittmaßfunktionen meßbarer Teilmengen eines Produktraumes. Math. Ann. **146**, 103–128 (1962).
5. Neveu, J.: Mathematical foundations of the calculus of probability. San Francisco-London-Amsterdam: Holden-Day, Inc. 1965.
6. Parthasarathy, K. R.: Probability measures on metric spaces. New York and London: Academic Press 1967.

Dr. W. Sendler
Institut für Statistik
an der Technischen Hochschule
Karlsplatz 13
A-1040 Wien

(Eingegangen am 6. Februar 1970)