Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 33, 1–18 (1975)

Une formule d'isométrie pour l'intégrale stochastique hilbertienne et équations d'évolution linéaires stochastiques

Michel Métivier et Giovanni Pistone *

Laboratoire de Probabilités, ERA 250 C.N.R.S., Université de Rennes, B.P. 25 A, F-35031 Rennes, France

Il a été remarqué (cf. [8]) que dans [2] des intégrales stochastiques $\int \Phi \cdot d\beta$ étaient écrites où β est un mouvement brownien à valeurs dans un espace de Hilbert $\mathbb{H}$ et où Φ est un processus à valeurs dans l'espace $\mathscr{L}(\mathbb{H};\mathbb{G})$ des applications linéaires continues de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{G}$, mais non bien mesurable comme application à valeurs dans l'espace de Banach $\mathscr{L}(\mathbb{H};\mathbb{G})$ muni de la norme usuelle.

Cela seul justifie l'extension de la théorie classique de l'intégrale L^2 par rapport à une martingale Hilbertienne continue à droite. Or la méthode utilisée consiste à considérer sur l'espace des processus considérés une métrique qui est moins fine que la métrique L^2 traditionnelle, et qui a cet avantage de transformer l'application $X \rightsquigarrow \int_0^t X\,dM$ en une isométrie de l'espace de processus considéré dans $L^2_{\mathbb{G}}(\Omega, \mathscr{F}_t, P)$. Cette métrique introduite dans [8], repose sur l'existence d'un processus Q fortement prévisible, à valeurs dans $\mathbb{H}\hat{\otimes}_1\mathbb{H}$, tel que pour tout $s \leqq t$ et $F \in \mathscr{F}_s$ on ait

$$E[1_F \cdot (M_t^{\otimes 2} - M_s^{\otimes 2})] = \int_{]s,t] \times F} Q\,d\lambda$$

où λ est la mesure engendrée sur les prévisibles par la sous martingale réelle $(\|M_t\|^2)$.

Nous donnons ici une démonstration rapide de l'existence de Q, et étudions l'espace complété de l'espace des processus étagés sur les rectangles prévisibles pour la semi norme hilbertienne:

$$X \rightsquigarrow \int_{[0,T] \times \Omega} \operatorname{Tr}(X \tilde{Q} X^*)\,d\lambda$$

($\tilde{Q}$ étant l'opérateur nucléaire associé à Q).

L'intégrale stochastique d'un tel processus en résulte immédiatement.

Le § 4 étend à cette intégrale les formules du calcul différentiel stochastique.

Le § 5 reprend le cas des équations d'évolution linéaires stochastiques abordé par Curtain et Falb, mais cette fois avec une entrée stochastique qui est une martingale générale, supposée seulement continue à droite.

1. Rappel des définitions et notations

(1.1) Nous serons toujours sur une base stochastique $(\Omega, (\mathscr{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}, P)$ où la famille croissante de tribus $(\mathscr{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ de parties de Ω, est supposée posséder comme d'habitude la propriété: $\forall F \in \mathscr{F}_\infty = \bigvee_{t \in \mathbb{R}^+} \mathscr{F}_t\; P(F) = 0 \Rightarrow F \in \mathscr{F}_t$ pour tout t.

* Travail effectué alors que le second auteur bénéficiait d'une bourse du Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(1.2) Nous noterons $\mathscr{R}$ l'ensemble des rectangles prévisibles dans $\mathbb{R}^+ \times \Omega$, i.e. l'ensemble des rectangles de la forme $F \times]s, t]$ où $s \leqq t$ et $F \in \mathscr{F}_s$.

Nous noterons $\mathscr{P}$ la tribu des prévisibles (tribu engendrée par $\mathscr{R}$) sur $\mathbb{R}^+ \times \Omega$.

(1.3) Les espaces de Hilbert que nous considérerons: $\mathbb{H}, \mathbb{G}, \ldots$ seront toujours supposés séparables.

On notera

$\mathscr{L}(\mathbb{H}; \mathbb{G})$ l'espace vectoriel des opérateurs linéaires bornés de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{G}$,

$\mathscr{L}_1(\mathbb{H}; \mathbb{G})$ l'espace vectoriel des opérateurs linéaires nucléaires de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{G}$,

$\mathscr{L}_2(\mathbb{H}; \mathbb{G})$ l'espace vectoriel des opérateurs linéaires de Hilbert-Schmidt de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{G}$.

La norme usuelle sur $\mathscr{L}(\mathbb{H}; \mathbb{G})$ (norme dite «uniforme») sera désignée par $\|.\|$, la norme sur $\mathscr{L}_1(\mathbb{H}; \mathbb{G})$, appelée norme Trace, notée $\|.\|_{\mathrm{Tr}}$, et la mesure de Hilbert-Schmidt sur $\mathscr{L}_2(\mathbb{H}; \mathbb{G})$ notée $\|.\|_{H-S}$.

(1.4) On notera $\mathbb{H} \hat{\otimes}_1 \mathbb{G}$ le produit tensoriel projectif des espaces de Hilbert $\mathbb{H}$ et $\mathbb{G}$, muni de la norme trace notée $\|.\|_{\mathrm{Tr}}$ $\mathbb{H} \hat{\otimes}_2 \mathbb{G}$ le produit tensoriel de Hilbert-Schmidt, muni de sa structure Hilbertienne.

(1.5) Nous identifierons l'élément $x \otimes y$ de $\mathbb{H} \otimes \mathbb{G}$, à l'élément noté $\widetilde{x \hat{\otimes} y}$ de $\mathscr{L}(\mathbb{H}; \mathbb{G})$, défini par

$$\widetilde{x \otimes y}(h) = \langle x, h \rangle y.$$

L'«identification» $x \otimes y \leftrightarrow \widetilde{x \otimes y}$ se prolonge en une isométrie $u \leftrightarrow \tilde{u}$ de $\mathbb{H} \hat{\otimes}_1 \mathbb{G}$ et $\mathscr{L}_1(\mathbb{H}; \mathbb{G})$.

(1.6) L'isométrie de $\mathscr{L}(\mathbb{H} \hat{\otimes}_1 \mathbb{G}; \mathbb{F})$ sur l'espace des applications bilinéaires de $(\mathbb{H} \times \mathbb{G})$ dans $\mathbb{F}$, muni de sa norme, nous permettra d'identifier systématiquement applications bilinéaires sur $\mathbb{H} \times \mathbb{G}$ et éléments de $\mathscr{L}(\mathbb{H} \hat{\otimes}_1 \mathbb{G}; \mathbb{F})$. Pour une forme bilinéaire b, nous noterons donc indifféremment $b(x, y)$ ou $b(x \otimes y)$.

En particulier, la forme linéaire Trace sur $\mathbb{H} \hat{\otimes}_1 \mathbb{H}$ (et donc sur $\mathscr{L}_1(\mathbb{H}; \mathbb{H})$ d'après (1.5)), provient de la forme bilinéaire $(x, y) \rightsquigarrow \langle x, y \rangle$ du produit scalaire dans $\mathbb{H}$.

(1.7) Enfin $\tilde{b}$ notera l'application linéaire de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{G}$ associée à la forme bilinéaire b par

$$\langle \tilde{b}(x), y \rangle = b(x, y) = b(x \otimes y). \tag{1.7.1}$$

Cette identification permet de donner une expression souvent présente dans la littérature de $b(u)$ où $u \in \mathbb{H} \hat{\otimes}_1 \mathbb{G}$. On vérifie en effet immédiatement à partir de la définition et de la formule (1.5) que

$$\widetilde{\tilde{b}(x) \otimes y} = \widetilde{x \otimes y} \circ \tilde{b}^*$$

d'où d'après (1.7.1)

$$b(x \otimes y) = \mathrm{Tr}(\tilde{b}(x) \otimes y) = \mathrm{Tr}\, \widetilde{x \otimes y} \circ \tilde{b}^*$$

et par suite pour tout $u \in \mathbb{H} \hat{\otimes}_1 \mathbb{G}$

$$b(u) = \mathrm{Tr}\, \tilde{u} \circ \tilde{b}^*. \tag{1.7.2}$$

(1.8) Si X est un élément de $\mathscr{L}(\mathbb{H}_1;\mathbb{H}_2)$ et Y un élément de $\mathscr{L}(\mathbb{G}_1;\mathbb{G}_2)$, on note $X\otimes Y$ l'application linéaire de $\mathbb{H}_1\hat{\otimes}_1\mathbb{H}_2$ dans $\mathbb{G}_1\hat{\otimes}_1\mathbb{G}_2$ définie comme l'extension continue unique à $\mathbb{H}_2\hat{\otimes}_1\mathbb{H}_2$ de

$$(h_1\hat{\otimes} h_2)\rightsquigarrow X h_1\otimes Y h_2$$

$$\forall u\in\mathbb{H}_1\hat{\otimes}_1\mathbb{H}_2 \quad \widetilde{X\otimes Y(u)}=Y\circ\tilde{u}\circ X^*. \tag{1.8.1}$$

2. Une extension de l'intégrale L^2

Dans l'intégrale stochastique de Kunita [10] (cf. aussi [5]) les processus à valeurs dans l'espace $\mathscr{L}(\mathbb{H};\mathbb{H})$, considérés, sont fortement mesurables relativement à la tribu des ensembles prévisibles (nous dirons: fortement prévisibles). Dans certaines applications, cette restriction est gênante: par exemple si $(e^{tA})_{t\in\mathbb{R}^+}$ est le semi-groupe de générateur infinitésimal A, A étant un opérateur non borné dans $\mathbb{H}$, on aimerait donner un sens à des intégrales stochastiques du type $\int_0^t e^{sA}\,dM_s$, alors que $s\rightsquigarrow e^{sA}$ n'est pas nécessairement mesurable comme application à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathbb{H};\mathbb{H})$ muni de la norme uniforme.

Théorème 1. *Soit $\mathbb{H}\hat{\otimes}_1\mathbb{H}$ le produit tensoriel projectif. Si M est une martingale de carré intégrable, continue à droite, à valeurs dans $\mathbb{H}$, et si λ est la mesure de Doleans de $\|M\|^2$, alors il existe un processus Q, fortement prévisible à valeurs dans l'ensemble des éléments symétriques positifs de $\mathbb{H}\hat{\otimes}_1\mathbb{H}$, unique à une λ-équivalence, tel que*

$$\forall\,]s,t]\times F\in\mathscr{R} \qquad E[1_F\cdot(M_t-M_s)^{\otimes 2}]=\int_{]s,t]\times F} Q\,d\lambda \quad \text{et} \quad \operatorname{Tr} Q=1 \qquad \lambda\text{.p.p.}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\|E\,1_F\cdot(M_t^{\otimes 2}-M_s^{\otimes 2})\|_{\mathbb{H}\hat{\otimes}_1\mathbb{H}}&=\|E\,1_F\cdot(M_t-M_s)^{\otimes 2}\|_{\mathbb{H}\hat{\otimes}_1\mathbb{H}}\\ &\leqq E\,\|1_F\cdot(M_t-M_s)^{\otimes 2}\|_{\mathbb{H}\hat{\otimes}_1\mathbb{H}}=E(1_F\cdot\|M_t-M_s\|^2)=\lambda]s,t]\times F\end{aligned}$$

d'où l'on déduit, pour tout $A=\sum_i]s_i,t_i]\times F_i\in\mathscr{A}$ [1] les $]s_i,t_i]\times F_i$ étant disjoints:

$$\|\mu_{M^{\otimes 2}}(A)\|_{\mathbb{H}\hat{\otimes}_1\mathbb{H}}\leqq\lambda(A).$$

Comme $\mathbb{H}\hat{\otimes}_1\mathbb{H}$ est un dual séparable d'espace de Banach (Théorème de Shatten), on peut appliquer un théorème de Radon-Nikodym classique. D'où l'existence et l'unicité de Q à une λ-équivalence près. Comme $\mu_{M^{\otimes 2}}$ prend ses valeurs dans le cône fermé des éléments symétriques positifs de $\mathbb{H}\hat{\otimes}_1\mathbb{H}$, il est évident qu'il en est de même de Q.

Enfin par construction

$$\begin{aligned}\int_{]s,t]\times\Omega}\operatorname{Tr} Q\,\lambda&=\operatorname{Tr}\Big(\int_{]s,t]\times\Omega} Q\,\lambda\Big)=\operatorname{Tr} E(1_F\cdot(M_t^{\otimes 2}-M_s^{\otimes 2}))=E(1_F\,\|M\|_t^2-\|M_s\|^2)\\ &=\lambda(]s,t]\times F).\end{aligned}$$

Ceci implique $\operatorname{Tr} Q=1$ λ.p.p.

Proposition 1. *Soit Q un processus fortement prévisible à valeurs dans le cône des éléments positifs de $\mathbb{H}\hat{\otimes}_1\mathbb{H}$, et soit Λ_t^2 l'ensemble des processus à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathbb{H};\mathbb{G})$, tels que, pour tout $h\in\mathbb{H}$, le processus Xh, à valeurs dans $\mathbb{G}$, est fortement*

[1] A désigne l'algèbre booléenne engendrée par $\mathscr{R}$.

prévisible, et tels que $\int_{]0,t]\times\Omega} \operatorname{Tr}(X\tilde{Q}X^*)\,d\lambda < +\infty$. *Alors*

$$(X, Y) \rightsquigarrow [\int_{]0,t]\times\Omega} \operatorname{Tr}(Y\tilde{Q}X^*)\,d\lambda]^{1/2}$$

est une forme bilinéaire symétrique positive, définissant une semi-norme pré-hilbertienne sur Λ_t^2, *et pour laquelle* $\mathscr{E}$ *est dense dans* Λ_t^2.

Démonstration. En vertu de la prévisibilité de Q et de la séparabilité de $\mathbb{H}\hat{\otimes}_1\mathbb{H}$ on peut trouver une suite Q_n d'éléments de la forme $Q_n(s,\omega)=\sum_i 1_{A_i}(s,\omega)\cdot q_i$ où $q_i\in\mathbb{H}\otimes\mathbb{H}$ et A_i est un rectangle prévisible, telle que $Q_n(s,\omega)$ converge vers $Q(s,\omega)$ dans $\mathbb{H}\hat{\otimes}_1\mathbb{H}$ pour λ-presque tout ω. Comme l'hypothèse de mesurabilité sur X et Y implique $\operatorname{Tr}(X\otimes Y, h_1\otimes h_2)=(Xh_1, Yh_2)$ prévisible, le processus réel

$$\operatorname{Tr}(X\otimes Y(Q_n))=\operatorname{Tr}(Y\tilde{Q}_n X^*)$$

est prévisible.

Il est immédiat que $\int_{]0,t]\times\Omega}\operatorname{Tr}(X\circ\tilde{Q}\circ X^*)\,d\lambda$ est une forme bilinéaire symétrique positive sur Λ_t.

Montrons que $\mathscr{E}$ est dense dans Λ_t^2. On sait que tout processus X à valeurs dans l'espace de Banach $\mathscr{L}(\mathbb{H};\mathbb{G})$ (muni de la norme uniforme) fortement prévisible, et tel que $\sup_{s\leq t,\omega}\|X(s,\omega)\|\leq K<\infty$ est limite λ presque partout d'une suite (X_n) extraite de $\mathscr{E}$ telle que $\|X_n\|\leq K$, et pour laquelle on a donc

$$\lim_{n\to\infty}[\int_{]0,t]\times\Omega}\|(X-X_n)\cdot\tilde{Q}^{1/2}\|_{H\cdot S}^2\,d\lambda]^{1/2}=0.$$

Si maintenant $X\in\Lambda_t^2$, on a

$$\lim_n\|1_{[\|X\|\leq n]}X(s,\omega)-X(s,\omega)\|=0 \qquad \text{pour tout } (s,\omega).$$

D'où

$$\lim_n\|(1_{[\|X\|\leq n]}X(s,\omega)-X(s,\omega))\circ\tilde{Q}^{1/2}(s,\omega)\|_{H\cdot S}=0 \qquad \forall\,(s,\omega)$$

avec

$$\|(1_{\|X\|\leq n}\cdot X(s,\omega)-X(s,\omega))\circ\tilde{Q}^{1/2}(s,\omega)\|_{H\cdot S}=1_{[\|X\|>n]}\|X(s,\omega)\circ\tilde{Q}^{1/2}(s,\omega)\|_{H\cdot S}$$

et par suite

$$\lim_{n\to\infty}\int_{]0,t]\times\Omega}\|(1_{[\|X\|\leq n]}X-X)\,\tilde{Q}^{1/2}\|_{H\cdot S}^2\,d\lambda=0.$$

Nous avons donc seulement à montrer que tout $X\in\Lambda_t^2$ avec $\|X\|\leq K$ est limite pour la semi-norme considérée sur Λ_t d'une suite de processus fortement prévisibles X_n.

Or considérons une base orthonormée (e_i) dans $\mathbb{H}$ et (g_i) dans $\mathbb{G}$, et les projections orthogonales Π_1^n dans $\mathbb{H}$ sur le sous espace engendré par $\{e_1 \dots e_n\}$ et Π_2^n dans G, sur le sous espace engendré par $\{g_1 \dots g_n\}$.

Posons $X_n=\Pi_2^n\circ X\circ\Pi_1^n$.

Pour tout i on a pour tout $(s,\omega)\in]0,t]\times\Omega$.

(1) $\lim_n\|(\Pi_2^n\circ X\circ\Pi_1^n-X)\circ\tilde{Q}^{1/2}e_i\|_{\mathbb{G}}^2=0$

(2) avec $\|(\Pi_2^n\circ X\circ\Pi_1^n-X)\circ\tilde{Q}^{1/2}e_i\|_{\mathbb{G}}^2\leq 4K^2\|\tilde{Q}^{1/2}e_i\|_{\mathbb{H}}^2$

(3) et $\sum_i\|\tilde{Q}^{1/2}e_i\|_{\mathbb{H}}^2=\|\tilde{Q}^{1/2}\|_{H\cdot S}^2<\infty$

Des trois précédentes relations, on déduit:

$$0=\lim_n \sum_{i\in\mathbb{N}} \|(\Pi_2^n \circ X \circ \Pi_1^n - X)\circ \tilde{Q}^{1/2} e_i\|_G^2 = \lim_n \|(X_n - X)\circ \tilde{Q}^{1/2}\|_{H\cdot S}^2$$

sur $]0, t] \times \Omega$, d'où

$$\lim_n \int_{]0,t]\times\Omega} \|(X_n - X)\circ \tilde{Q}^{1/2}\|_{H\cdot S}^2 d\lambda = 0.$$

Comme les processus X_n sont de la forme

$$X_n(s,\omega)h = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(s,\omega)\langle h, e_i\rangle \cdot g_i$$

les a_{ij} étant prévisibles, il sont clairement fortement prévisibles, et la proposition est démontrée. □

Remarque. L'espace Λ_t^2 n'est pas complet lorsque $\mathbb{H}$ est de dimension infinie. Il suffit pour le voir de prendre un processus $\tilde{Q}^{1/2}$ constant avec

$$Q = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} e_i \otimes e_i$$

les e_i étant une base orthonormée de $\mathbb{H}$, et de considérer la suite de processus constants

$$X_n h = \sum_{i=1}^n \sqrt{i}\,\langle h, e_i\rangle g_i.$$

On a

$$\|(X_n - X_{n+k})\cdot \tilde{Q}^{1/2}\|_{H\cdot S}^2 = \sum_{i=n+1}^{n+k} \frac{i}{2^i}.$$

S'il existait un X limite de X_n pour la norme de Λ_t, on pourrait extraire une sous suite X_{n_k} telle que $X_{n_k}\circ \tilde{Q}^{1/2}$ tende vers $X\circ\tilde{Q}^{1/2}$ dans $\mathscr{L}_2(\mathbb{H};\mathbb{G})$, ce qui impliquerait

$$\lim_k \frac{1}{2^i} X_{n_k}\circ e_i = \frac{1}{2^i} X\circ e_i \qquad \text{d'où } X e_i = \sqrt{i}\, e_i.$$

Or il n'existe aucun opérateur borné dans $\mathbb{H}$ avec cette propriété!

On a par contre la

Proposition 2. *Si* $\mathbb{H}$ *est de dimension finie* Λ_t^2 *est complet.*

Démonstration. Montrons que Λ_t^2 est complet. Soit (X_n) une suite telle que

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_{]0,t]\times\Omega} \operatorname{Tr}((X_n - X_m)\tilde{Q}(X_n^* - X_m^*))\,d\lambda = 0.$$

Notons qu'on peut encore écrire ceci

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_{]0,t]\times\Omega} \|(X_n - X_m)\tilde{Q}^{1/2}\|_{H\cdot S}^2 d\lambda = 0.$$

Dans l'espace $L^2_{\mathscr{L}^2(\mathbb{H};\mathbb{G})}(\mathbb{R}^+ \times \Omega, P, \lambda)$ la suite $X_n\tilde{Q}^{1/2}$ converge donc vers un $Y \in L^2_{\mathscr{L}^2(\mathbb{H},\mathbb{G})}(\mathbb{R}^+\times\Omega, P, \lambda)$. D'où la possibilité d'extraire une sous-suite (X_{n_k}) telle que pour λ-presque tout (s,ω) $X_{n_k}(s,\omega)\tilde{Q}^{1/2}$ converge vers $Y(s,\omega)$. Il est clair que $\tilde{Q}^{1/2} f = 0 \Rightarrow Y(s,\omega) f = 0$, d'où la factorisation $Y(s,\omega) = X(s,\omega)\tilde{Q}^{1/2}$ où $X(s,\omega)$ est une application linéaire de $\tilde{Q}^{1/2}(\mathbb{H})$ dans $\mathbb{G}$. Comme $\mathbb{H}$ est de dimension finie $X(s,\omega) \in \mathscr{L}(\mathbb{H};\mathbb{G})$. □

La remarque ci-dessus conduit à se demander, lorsque $\mathbb{H}$ est de dimension infinie, si la complétion de Λ_t^2 peut se décrire en terme d'opérateurs linéaires (non nécessairement continus) de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{G}$. On notera Λ_t^* l'espace vectoriel des processus X avec les propriétés suivantes:

(i) $\forall (s, \omega)$ $X(s, \omega)$ est un opérateur linéaire de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{G}$, de domaine $\supset \tilde{Q}^{1/2}\mathbb{H}$,

(ii) $\forall (s, \omega)$ $X(s, \omega) \circ \tilde{Q}^{1/2}(s, \omega)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{G}$

(iii) $\forall$ $h \in \mathbb{H}$ $(s, \omega) \rightsquigarrow X(s, \omega) \circ \tilde{Q}^{1/2}(s, \omega) h$ est fortement prévisible, et

$\int_{]0, t] \times \Omega} \|X \circ \tilde{Q}^{1/2}\|_{H \cdot S}^2 d\lambda < \infty$.

Proposition 3. *Λ_t^* est complet pour la semi norme préhilbertienne*

$X \rightsquigarrow [\int_{]0, t] \times \Omega} \|X \circ \tilde{Q}^{1/2}\|_{H \cdot S}^2 d\lambda]^{1/2}$.

Démonstration. On peut reprendre mot pour mot la démonstration de la proposition 2, les applications linéaires $X_{n_k}(s, \omega)$ et $X(s, \omega)$ n'étant plus nécessairement continues, cette fois. □

Définition 1. On notera $\bar{\Lambda}_t^2$ l'adhérence de $\mathscr{E}$ dans Λ_t^*.

D'après la proposition 1, $\bar{\Lambda}_t^2$ est donc la complétion de Λ_t^2.

Proposition 4. *Si $X \in \bar{\Lambda}_T^2$ $X \circ \tilde{Q}^{1/2}$ (resp. $X \circ \tilde{Q} \circ X^*$) est λ-équivalent à un processus fortement prévisible à valeurs dans $\mathscr{L}_2(\mathbb{H}; \mathbb{G})$ (resp. $\mathscr{L}_1(\mathbb{H}; \mathbb{G})$).*

Démonstration. Soit (X_n) une suite dans $\mathscr{E}$ telle que

$\lim_n \int_{]0, T] \times \Omega} \mathrm{Tr}[(X - X_n) \tilde{Q} (X^* - X_n^*)] \, d\lambda = 0$.

Cette relation étant équivalente à

$\lim_n \int_{]0, T] \times \Omega} \|(X - X_n) \tilde{Q}^{1/2}\|_{H \cdot S}^2 d\lambda$,

on a immédiatement la forte prévisibilité de $X \tilde{Q}^{1/2}$ (à une λ-équivalence) considéré comme processus à valeurs dans $\mathscr{L}_2(\mathbb{H}; \mathbb{G})$. En outre

$$\begin{aligned}
&\int_{[0, T] \times \Omega} \|X \tilde{Q} X^* - X_n \tilde{Q} X_n^*\|_{\mathrm{Tr}} d\lambda \\
&\leqq \int_{[0, T] \times \Omega} \mathrm{Tr}[(X - X_n)\tilde{Q}(X^* - X_n^*)] \, d\lambda + \int_{[0, T] \times \Omega} \|(X - X_n) \tilde{Q} X^*\|_{\mathrm{Tr}} \, d\lambda \\
&+ \int_{[0, T] \times \Omega} \|X \tilde{Q}(X^* - X_n^*)\|_{\mathrm{Tr}} d\lambda \\
&\leqq \int_{[0, T] \times \Omega} \mathrm{Tr}[(X - X_n) \tilde{Q}(X^* - X_n^*)] \, d\lambda + 2 \int_{[0, T] \times \Omega} \|(X - X_n) \tilde{Q}^{1/2}\|_{H \cdot S} \\
&\cdot \|X \tilde{Q}^{1/2}\|_{H \cdot S} d\lambda.
\end{aligned}$$

D'où, puisque par hypothèse $\int \|X \tilde{Q}^{1/2}\|_{H \cdot S}^2 d\lambda < \infty$; la convergence de $X_n Q X_n^*$ vers $X Q X^*$ dans $\mathscr{L}^1_{\mathbb{H} \otimes_1 \mathbb{H}}([0, T] \times \Omega, P, \lambda)$. La forte prévisibilité de $X Q X^*$ (à une λ-équivalence), comme processus à valeurs dans $\mathscr{L}_1(\mathbb{H}; \mathbb{G})$ en résulte. □

Définition 2. Soit M une martingale à valeurs dans $\mathbb{H}$, de carré intégrable et continue à droite, Q le processus prévisible associé, à valeurs dans $\mathbb{H} \hat{\otimes}_1 \mathbb{H}$, d'après le théorème 1. On notera $\Lambda_t^2(M; \mathbb{H}, \mathbb{G})$ (resp. $\bar{\Lambda}_t^2(M; \mathbb{H}, \mathbb{G})$) l'espace Λ_t^2 (resp. $\bar{\Lambda}_t^2$) défini dans la proposition 1 (resp. la définition 1), associé à Q, $\mathbb{H}$ et $\mathbb{G}$.

Théorème 2. *L'application $X \rightsquigarrow \int_{]0, t] \times \Omega} X \, dM$ définie sur $\mathscr{E}$ se prolonge en une isométrie de $\bar{\Lambda}_t^2 [M, \mathbb{H}, \mathbb{G}]$ dans $L^2_{\mathbb{G}}(\Omega, \mathscr{F}_t, P)$.*

Démonstration. D'après la proposition 1, il suffit de prouver que

$$X \rightsquigarrow \int_{]0,t]\times\Omega} X\,dM$$

restreinte à $\mathscr{E}$ est une isométrie.
Soit donc

$$X = \sum_{i=1}^n 1_{]s_i\,t_i]\times F_i}\cdot\mu_i$$

les rectangles $]s_i, t_i] \times F_i$ étant disjoints

$$E\left\|\int_{]0,t]\times\Omega} X\,dM\right\|_G^2 = E\left\|\sum_{i=1}^n 1_{F_i}\cdot\mu_i(M_{t_i}-M_{s_i}\right\|_G^2.$$

La propriété de martingale de M et la linéarité de Tr impliquent

$$\begin{aligned} E\left\|\int_{]0,t]\times\Omega} X\,dM\right\|_G^2 &= E\sum_{i=1}^n \operatorname{Tr}\{1_{F_i}\cdot\mu_i\otimes\mu_i(M_{t_i}-M_{s_i}\otimes M_{t_i}-M_{s_i})\}\\ &= \sum_{i=1}^n \operatorname{Tr}\{\mu_i\otimes\mu_i(E\,1_{F_i}\cdot(M_{t_i}-M_{s_i})^{\otimes 2})\}. \end{aligned}$$

Ce qui d'après la définition de Q s'écrit

$$\begin{aligned} E\left\|\int_{]0,t]\times\Omega} X\,dM\right\|_G^2 &= \sum_{i=1}^n \operatorname{Tr}\{\mu_i\otimes\mu_i\int_{]s_i,t_i]\times F_i} Q\,d\lambda\\ &= \int\sum_{i=1}^n 1_{]s_i,t_i]\times F_i}\operatorname{Tr}(\mu_i\tilde{Q}\mu_i^*)\,d\lambda = \int_{]0,t]\times\Omega}\operatorname{Tr}(X\tilde{Q}X^*)\,d\lambda. \end{aligned}$$

D'où le théorème. □

Théorème 3. *Si X est un processus tel que pour tout t, $1_{]0,t]}\cdot X\in\bar{\Lambda}_t^2(M;\mathbb{H},\mathbb{G})$, le processus $(\int_{]0,t]\times\Omega} X\,dM)_{t\in\mathbb{R}^+}$ admet une version continue à droite qui est une martingale à valeur dans $\mathbb{G}$, relativement aux tribus $(\mathscr{F}_t)$, et de carré intégrable.*

Démonstration. Que $(Y_t)=(\int_{]0,t]\times\Omega} X\,dM)_{t\in[0,T]}$ soit une martingale est trivial pour $X\in\mathscr{E}$, et résulte, par densité, pour un X quelconque dans $\Lambda_T^2(M;\mathbb{H},\mathbb{G})$.

L'existence d'une version continue à droite, adaptée aux $\mathscr{F}_t$ euxmêmes, résulte, comme dans le cas réel, de la possibilité d'approcher Y uniformément par trajectoire, par une suite de Y_n intégrales de processus $X^n\in\mathscr{E}$. □

3. Intégrales L^0 par rapport à une martingale locale

Si M est seulement une martingale localement de carré intégrable, c'est-à-dire si existe une suite (σ_n) croissante de temps d'arrêt, telle que $\lim_n\sigma_n = +\infty$ p.s. et telle que

$$\forall\, n\ (M_{t\wedge\sigma_n})_{t\in\mathbb{R}^+}$$

soit une martingale de carré intégrable, le processus Q est défini exactement de la même manière; la mesure λ étant définie par sa restriction (finie) aux ensembles $]s,t]\times F\cap\,]0,\sigma_n]$.

Soit alors $\Lambda(M;\mathbb{H},\mathbb{G})$ (resp. $\bar{\Lambda}(M;\mathbb{H},\mathbb{G})$) l'ensemble des processus X tels qu'existe une suite croissante (τ_n) de temps d'arrêts, telle que

$$\begin{aligned} &\lim_n\tau_n = +\infty \text{ p.s.} \quad \tau_n\leqq\sigma_n \quad \text{et telle que}\\ &\forall\, n,t \quad X\in\Lambda_t^2((M_{s\wedge\tau_n});\mathbb{H},\mathbb{G}) \ (\text{resp.} \in\bar{\Lambda}_t^2((M_{s\wedge\tau_n});\mathbb{H},\mathbb{G})). \end{aligned}$$

Il est clair qu'on définit de façon unique à l'indistinguabilité près un processus Y, qui est une martingale locale à valeurs dans $\mathbb{G}$ en posant

$$\forall n \qquad Y_{t\wedge\tau_n}=\int_{]0,t\wedge\tau_n]} X\,dM.$$

On notera cette martingale locale $\int X\,dM$.

4. Variation quadratique et formule de Ito

Le processus naturel $\langle M\rangle$ d'une martingale locale M à valeurs dans $\mathbb{H}$ a été défini dans [5] et [6].

Nous rappelons également une expression du processus de variation quadratique $[M]$ de M: (cf. [3] et [6])

$$(4.1)\quad [M]_t=M_t^{\otimes 2}-M_0^{\otimes 2}+\int_0^t M_{u^-}\otimes dM_u+\int_0^t d\mathrm{M}_u\otimes M_{u^-}.$$

Ce dernier processus étant, ainsi que $\langle M\rangle$ un processus à valeurs dans $\mathbb{H}\hat{\otimes}_1\mathbb{H}$ et tel que, pour tout ω, la fonction d'intervalle $]s,t]\rightsquigarrow[M_t(\omega)]-[M_s(\omega)]$ s'étend en une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{H}\hat{\otimes}_1\mathbb{H}$, et à variation finie sur tout intervalle $[0,T]$. Les deux processus coïncident lorsque M est continue (cf. [6]).

Théorème. 1°) *Soient* $X\in\bar{\Lambda}[M;\mathbb{H},\mathbb{G}]$, $Y=\int X\,dM$ *et* Q_Y *le processus associé à* Y *par le théorème 1. Alors*

$$(4.2)\quad \tilde{Q}_Y=X\circ\tilde{Q}\circ X^* \qquad (\textit{ou encore } Q_Y=X\otimes X(Q)).$$

2°) *Si* $X\in L^2_{\mathscr{L}(\mathbb{H};\mathbb{G})}([0,T]\times\Omega,P,\lambda)\subset\Lambda^2_T(M;\mathbb{H},\mathbb{G})$, *on a sur* $[0,T]$

$$(4.3)\quad \langle Y\rangle_t=\int_{]0,t]}X_s\otimes X_s\,d\langle M\rangle_s \text{ à l'indistingabilité près,}$$

$$(4.4)\quad [Y]_t=\int_{]0,t]}X_s\otimes X_s\,d[M]_s \text{ à l'indistingabilité près.}$$

Dans ces deux expressions les intégrales sont à prendre sur chaque trajectoire ω par rapport aux mesures vectorielles à variation bornée $d\langle M(\omega)\rangle_s$ et $d[M(\omega)]_s$, les fonctions $s\rightsquigarrow X_s(\omega)\otimes X_s(\omega)$ étant pour presque tout ω fortement intégrables par rapport à ces mesures.

Démonstration. 1°) Remarquons que les formules du théorème étant des formules par trajectoire, la localisation est immédiate, et, par suite, nous pouvons supposer M de carré intégrable, et $X\in\bar{\Lambda}^2_T(M;\mathbb{H},\mathbb{G})$.

Supposons que $X=1_{]\alpha,\infty[\times F}\cdot\mu$ où $F\in\mathscr{F}_\alpha$ et $\mu\in\mathscr{L}(\mathbb{H};\mathbb{G})$. En se rappelant la définition de la mesure $A\rightsquigarrow\int_A Q\,d\lambda$, on a

$$\begin{aligned}E(1_G(Y_t-Y_s)^{\otimes 2})&=E\,1_{F\cap G}\cdot\mu\otimes\mu(M_{t\wedge\alpha}-M_{s\wedge\alpha})^{\otimes 2}\\&=\mu\otimes\mu\Big(\int_{]s,t]\cap]\alpha,\infty[\times F\cap G}Q\,d\lambda\Big)=\int_{]s,t]\times G}1_{]\alpha,\infty]\times F}\,\mu\otimes\mu(Q)\,d\lambda.\end{aligned}$$

Ceci exprime la formule (4.2) dans le cas du processus simple X considéré. On passe évidemment immédiatement au cas d'un processus de $\mathscr{E}$. Soit maintenant $X\in\bar{\Lambda}^2_T(M;\mathbb{H},\mathbb{G})$. Considérons une suite (X^n) extraite de $\mathscr{E}$ telle que

$$\lim_n\int\mathrm{Tr}(X-X_n)\,\tilde{Q}(X^*-X_n^*)\,d\lambda=0.$$

Posons $Y^n = \int X^n dM$. Les deux membres de l'égalité

$$E[1_G \cdot (Y_t^n - Y_s^n)^{\otimes 2}] = \int X^n \tilde{Q} X^{n*} d\lambda$$

convergent dans $G \hat{\otimes}_1 G$ vers $E(1_G \cdot (Y_t - Y_s)^{\otimes 2})$ (théorème 2) et vers $\int X \tilde{Q} X^* d\lambda$ (voir la preuve de la proposition 4) respectivement.

2°) La relation (4.3) est montrée dans [5], la relation (4.4) se montre de la même façon en montrant qu'elle est vraie pour les processus de la forme $X = 1_{]\alpha, \infty[\times F} \cdot \mu$ où $F \in \mathscr{F}_\alpha$ et $\mu \in \mathscr{L}(\mathbb{H}; \mathbb{G})$, et en prolongeant par linéarité et densité.

L'intégrabilité forte sur P-presque toute trajectoire de $X_s \otimes X_s$ par rapport à la variation de la mesure $d[M]_s$, résulte des remarques suivantes.

Pour tout $A \in P$

$$\lambda(A) = E(\int 1_A(s, \omega)\, d[[M]]_s)$$

où $[[M]]_t$ est le processus réel croissant continu à droite

$$[[M]]_t = \|M_t\|^2 - \|M_s\|^2 - 2\int_0^t \langle M_{\mu^-}, dM_\mu \rangle$$

(vérification immédiate pour $A \in \mathbb{R}$, en raison du caractère de martingale de $\|M_t\|^2 - [[M]]_t$; la propriété en résulte pour tout A dans $\mathscr{P}$ par prolongement par mesurabilité).

La mesure à valeurs dans $\mathbb{H} \hat{\otimes}_1 \mathbb{H}$:

$$A \rightsquigarrow m(A) = E \int 1_A(s, \omega)\, d[M]_s = E(\int 1_A(s, \omega)\, d\langle M \rangle_s)$$

a sa variation égale à λ (cf. [5]).

On en déduit alors facilement que si X_n converge vers X dans

$L^2_{\mathscr{L}(\mathbb{H}; \mathbb{G})}(]0, T] \times \Omega, P, \lambda)$, presque surement $X_n(., \omega)$ converge vers $X(., \omega)$

$L^2_{\mathscr{L}(\mathbb{H}; G)}(]0, T], d[[M(\omega)]]_s)$,

et par suite $X_n(., \omega) \otimes X_n(., \omega)$ converge vers $X(., \omega) \otimes X(., \omega)$ dans

$L^1_{\mathscr{L}(\mathbb{H} \hat{\otimes}_1 \mathbb{H}; \mathbb{G} \hat{\otimes}_1 \mathbb{G})}([0, T], d[[M(\omega)]]_s)$.

Or, la mesure positive $d[[M(\omega)]]_s$, majore presque surement la variation de $d[M_s(\omega)]$.

Montrons alors (4.4) pour un processus $X = 1_{]\alpha, \infty[\times F} \mu$. On a

$$Y_t = 1_F \cdot \mu(M_{\alpha \vee t} - M_\alpha)$$

d'où

$$\begin{aligned}
[Y]_t &= 1_F \mu \otimes \mu(M_{\alpha \vee t} - M_\alpha)^{\otimes 2} + \int_\alpha^{t \vee \alpha} 1_F \mu(M_{\alpha \vee t} - M_\alpha) \otimes \mu\, dM_s \\
&\quad + \int_\alpha^{t \vee \alpha} 1_F \cdot \mu\, dM_s \otimes \mu(M_{\alpha \vee s} - M_\alpha) \\
&= 1_F \mu \otimes \mu(M_{\alpha \vee t} - M_\alpha)^{\otimes 2} + \int_0^t 1_{]\alpha, \infty] \times F} \cdot \mu \otimes \mu M_{s^-} \otimes dM_s \\
&\quad + \int_0^t 1_{]\alpha, \infty] \times F} \mu \otimes \mu\, dM_{s^-} \otimes M_s \\
&\quad - 1_F(\mu \otimes \mu)[M_\alpha \otimes (M_{\alpha \vee t} - M_\alpha)] - 1_F(\mu \otimes \mu)[(M_{\alpha \vee t} - M_\alpha) \otimes M_\alpha] \\
&= 1_F \mu \otimes \mu(M_{\alpha \vee t}^{\otimes 2} - M_\alpha^{\otimes 2}) + \int_0^t X \otimes X(M_{s^-} \otimes dM_s + dM_s \otimes M_{s^-}) \\
&= \int_{]0, t]} X_s \otimes X_s\, d[M]_s.
\end{aligned}$$

Nous rappelons une «formule de Ito» d'un type très général (cf. [3]).

M étant une martingale à valeurs dans un espace de Hilbert $\mathbb{H}$, continue à droite, de carré intégrable, on note S le processus

$$S_t = [M]_t - \sum_{1 \leqq t} (M_s - M_{s^-})^{\otimes 2}$$

à valeurs dans $\mathbb{H} \hat{\otimes}_1 \mathbb{H}$. Ce processus est continu et de trajectoires à variation finie.

Soit V un processus à valeurs dans un espace de Banach $\mathbb{F}$, continu à droite, de trajectoires à variation finie.

Alors si φ est une application de $\mathbb{F} \times \mathbb{H}$ dans un espace de Hilbert $\mathbb{K}$, une fois continuement différentiable dans la première variable, de différentielle $D_x \varphi$ bornée sur tout borné de $\mathbb{F} \times \mathbb{H}$, deux fois continuement différentiable dans la deuxième variable, de différentielles $D_y^1 \varphi$ et $D_y^2 \varphi$ bornées sur tout borné de $\mathbb{F} \times \mathbb{H}$, le processus $\varphi(V_t, M_t) - \varphi(V_0, M_0)$ est égal, à l'indistingabilité près au processus

$$\begin{aligned}
&\sum_{1 \leqq t} \varphi(V_s, M_s) - \varphi(V_{s^-}, M_{s^-}) - D_x \varphi(V_{s^-}, M_{s^-})(V_s - V_{s^-}) \\
&- D_y \varphi(V_{s^-}, M_{s^-})(M_s - M_{s^-}) + \int_0^t D_x \varphi(V_{u^-}, M_{u^-})\, dV_u \\
&+ \int_0^t D_y \varphi(V_{u^-}, M_{u^-})\, dM_u + \tfrac{1}{2} \int_0^t D_y^2 \varphi(V_{u^-}, M_{u^-})\, dS_u.
\end{aligned}$$

Nous allons en déduire deux formules qui nous seront utiles dans la suite: une formule d'intégration par partie, et une formule d'énergie.

Proposition 5. *Soit M une martingale à valeurs dans l'espace de Hilbert séparable $\mathbb{H}$, continue à droite, de carré intégrable.*

Soit V un processus à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathbb{H}; \mathbb{G})$ $\mathbb{G}$ étant un espace de Hilbert séparable avec $\forall\, h \in \mathbb{H}$:

p.s. $\quad V_t(\omega) \cdot h = V_0 h + \int_0^t A_s(\omega) \cdot h\, ds \quad$ *(intégrale forte à valeurs dans $\mathbb{G}$)*

où $A_s(\omega) \in \mathscr{L}(\mathbb{H}; \mathbb{G})$ le processus $(s, \omega) \rightsquigarrow A_s(\omega)\, h$ étant prévisible pour tout h.

Alors on a, à l'indistingabilité près des processus

(4.5) $\quad V_t \cdot M_t = V_0 \cdot M_0 + \int_0^t A_s \cdot M_s\, ds + \int_0^t V_s \cdot dM_s$

Démonstration. Si on avait $V_t(\omega) = \int_0^t A_s(\omega)\, ds$ au sens d'une intégrale forte à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathbb{H}; \mathbb{G})$, la formule (4.5) serait une conséquence immédiate de la formule de Ito ci-dessus avec $\mathbb{F} = \mathscr{L}(\mathbb{H}; \mathbb{G})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\varphi(u, h) = u(h)$ (noté $u \cdot h$ dans l'énoncé de la proposition).

Considérons une base orthonormée $\{h_n\}$ de $\mathbb{H}$, notons $\mathbb{H}_n$ le sous espace engendré par $\{h_1, \ldots, h_n\}$ et Π^n la projection orthogonale de $\mathbb{H}$ sur $\mathbb{H}_n$. On a, puisque $(s, \omega) \rightsquigarrow A_s \circ \Pi^n$ est alors fortement prévisible, à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathbb{H}; \mathbb{G})$:

$$V_t \circ \Pi_n \cdot M_t = V_0 \circ \Pi_n \cdot M_0 + \int_0^t A_s \circ \Pi_n \cdot M_s + \int_0^t V_s \circ \Pi_n \cdot dM_s.$$

Comme pour tout ω, $A_s(\omega) \circ \Pi_n \cdot M_s(\omega)$ converge sur $]0, t]$ vers $A_s(\omega) \cdot M_s(\omega)$, en étant majoré en norme par $\|A_s \cdot M_s(\omega)\|_{\mathbb{G}}$, et comme $V_s \circ \Pi_n$ converge clairement vers V_s dans $\Lambda_t^2(M; \mathbb{H}, \mathbb{G})$, on a la formule (4.5) par passage à la limite.

Proposition 6. *Soit M une martingale à valeurs dans un espace de Hilbert séparable $\mathbb{H}$, continue à droite, de carré intégrable.*

Soit V un processus à valeurs dans $\mathbb{H}$, tel que sur toute trajectoire

$V_t=\int_0^t A_s ds$ *(intégrale forte).*

A étant un processus à trajectoires dans $L^1_{\mathbb{H}}[0, T]$ pour tout T. Alors on a, à l'indistingabilité près des processus

$$\|M_t+V_t\|^2=\|M_0+V_0\|^2+2\int_0^t (M_s+V_s|dM_s)+2\int_0^t (M_s+V_s|A_s)\,ds+\operatorname{Tr}[M]_t.$$

Démonstration. On applique tout simplement la formule de Ito, telle qu'énoncée ci-dessus à la fonction $\varphi(x, y)=(x+y|x+y)_{\mathbb{H}}$ et en notant que

$$D_x\varphi(x, y)\cdot h=D_y\varphi(x, y)\cdot h=2(x+y|h),$$

$$D_y^2\varphi(x, y)\cdot h\otimes g=2(h|g)=2\operatorname{Tr}(h\otimes g).$$

On obtient alors, puisque V est à trajectoires continues

$$\|V_t+M_t\|^2=\|V_0+M_0\|^2+\sum_{s\leqq t}\|M_s-M_{s^-}\|^2+2\int_0^t (V_s+M_s|dV_s)$$
$$+2\int_0^t (V_s+M_s|dM_s)+\operatorname{Tr}\cdot S_t.$$

Si l'on remarque que

$$\operatorname{Tr} S_t=\operatorname{Tr}[M]_t-\sum_{s\leqq t}\operatorname{Tr}(M_s-M_{s^-})^{\otimes 2}=\operatorname{Tr}[M]_t-\sum_{s\leqq t}\|M_s-M_{s^-}\|^2$$

on a la formule de la proposition.

5. Application à certaines équations d'évolution stochastiques linéaires

(5.1) **Hypothèses générales – Problème.** *Nous considérons un sous-espace vectoriel $\mathbb{D}$ d'un espace de Hilbert $\mathbb{H}$. Sur $\mathbb{D}$ est donnée une structure hilbertienne pour laquelle l'injection $\mathbb{D}\to\mathbb{H}$ est continue. On suppose donnée une famille $(A_t)_{t\in[0, T]}$ d'opérateurs linéaires dans $\mathbb{H}$, de domaines $\mathbb{D}_t\supset\mathbb{D}$, tels que la restriction de A_t à $\mathbb{D}$ appartient à $\mathscr{L}(\mathbb{D}; \mathbb{H})$, et tels que $\forall\, h\in\mathbb{D}$, $u\rightsquigarrow A_{u(h)}$ soit mesurable à valeurs dans $\mathbb{H}$.*

M désignera une martingale à valeurs dans $\mathbb{H}$, continue à droite, de carré intégrable telle que $M_0=0$.

A $(A_t)_{t\in[0, T]}$ et à M nous associons l'équation d'«évolution stochastique».

$$dX_t=A_tX_t\,dt+dM_t. \tag{5.1.1}$$

Définition. Soit $\xi\in L^0_H(\Omega, \mathscr{F}_s, P)$. On appelle solution de (5.1.1) sur $[s, T]$, de condition intiale ξ, tout processus X à valeurs dans $\mathbb{H}$, tel que pour tout ω la trajectoire $u\rightsquigarrow X_u(\omega)$ prenne presque partout (en u, pour la mesure de Lebesgue sur $[s, T]$) ses valeurs dans $\mathbb{D}$ et

$$\forall\, t\in[s, T] \qquad X_t=\xi+\int_s^t A_u\cdot X_u\,du+M_t \qquad \text{p.s.} \tag{5.1.2}$$

A la différence de [1] et dans le même esprit que [2], nous donnons dans ce § des théorèmes d'existence et unicité sans hypothèse de coercivité sur (A_t).

(5.2) *Cas homogène.* Nous supposons ici que $A_t=A$ où A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe équicontinu de classe C_0, $(R_t)_{t\geqq 0}$ de H dans H. Autrement dit: $\forall t\ R_t \in \mathscr{L}(\mathbb{H};\mathbb{H})$, $\sup_{t\leqq T}\|R_t\|_{\mathscr{L}(\mathbb{H};\mathbb{H})}<\infty$, $\lim_{t\to 0}\|R_t h-h\|_{\mathbb{H}}=0$ pour tout $h\in\mathbb{H}$, et quels que soient $s>0$ et $t>0$ $R_{s+t}=R_t\circ R_s$.

On note ici $\mathbb{D}$ le domaine du générateur infinitésimal A, muni de la norme hilbertienne associée au produit scalaire $(x,y)_{\mathbb{D}}=(x,y)_{\mathbb{H}}+(Ax,Ay)_{\mathbb{H}}$.

On rappelle que $\forall t\geqq 0$, R_t applique $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ de façon continue. Comme en outre pour tout $h\in\mathbb{D}$ on a $A\circ R_t h=R_t\circ Ah$ on a

$$\begin{aligned}\|R_t\|^2_{\mathscr{L}(\mathbb{D};\mathbb{D})}&=\sup\{\|A\circ R_t h\|^2_{\mathbb{H}}+\|R_t h\|^2_{\mathbb{H}}\colon h\in\mathbb{D},\ \|h\|^2_{\mathbb{H}}+\|Ah\|^2_{\mathbb{H}}\leqq 1\}\\ &\leqq \|R_t\|^2_{\mathscr{L}(\mathbb{H};\mathbb{H})}.\end{aligned}$$

D'où également $\sup_{t\leqq T}\|R_t\|^2_{\mathscr{L}(\mathbb{D};\mathbb{D})}<+\infty$.

Théorème 5. 1°) *Soit* $(M_t)_{0\leqq t_1\leqq T}$ *une martingale à valeurs dans* $\mathbb{D}$, *à trajectoires dans* $C^d([0,T];H)\cap L^1([0,T];\mathbb{D})$.[2]

Alors pour tout $\xi\in L^0_{\mathbb{D}}(\Omega,\mathscr{F}_s,P)$ *l'équation* (5.1.1) *a une solution dans* $[s,T]$, *à valeurs dans* $\mathbb{H}$, *continue à droite, de condition initiale* $X_s=\xi$, *unique à l'indistingabilité près, donnée par*

$$X_t=R_{t-s}(\xi+M_s)+\int_s^t R_{t-u}\,dM_u, \tag{5.2.1}$$

Si $\xi\in L^2_H(\Omega,\mathscr{F}_s,P)$, $E(\|X_t\|^2_H)<\infty$ *pour tout* $t\in[s,T]$.

2°) *On suppose que la martingale* $(M_t)_{0\leqq t\leqq T}$ *a ses trajectoires dans*

$$C^d([0,T];\mathbb{H})\cap L^1([0,T];\mathbb{H}),$$

et que pour tout $t>0$, $R_t(\mathbb{H})\subset\mathbb{D}$.

Alors pour tout $\xi\in L^0_H(\Omega,\mathscr{F}_s,P)$ *l'équation* (5.1.1) *a une solution dans* $[s,T]$, *à valeurs dans* $\mathbb{H}$, *continue à droite, de condition initiale* $X_s=\xi$, *unique à l'indistingabilité près, donnée par* (5.2.1).

Démonstration. 1°) L'unicité résulte immédiatement de l'unicité de la solution du problème de Cauchy déterministe

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx(t)}{dt}=A\cdot x(t)\qquad t\in[s,T]\\ &\lim_{t\downarrow s}x(t)=\xi\qquad \xi\in\mathbb{D}\end{aligned}\right. \tag{5.2.2}$$

(cf. [14], p. 621).

La solution est d'ailleurs donnée par

$$x(t)=R_{t-s}\cdot\xi.$$

Nous rappelons en particulier la formule

$$\begin{aligned}&\forall s<t\quad \forall \xi\in\mathbb{D}\\ &R_{t-s}\xi=\xi+\int_s^t A\circ R_{u-s}\xi\,du=\xi+\int_s^t R_{u-s}\circ A\xi\,du.\end{aligned} \tag{5.2.3}$$

Passons à l'existence de la solution. Pour cela nous montrons directement que (5.2.1) définit un processus, admettant une version continue à droite, solution de

---

[2] $C^d([0,T];\mathbb{H})$ désigne l'ensemble des applications continues à droite de $[0,T]$ dans $\mathbb{H}$.

(5.1.2). L'intégrale stochastique est parfaitement définie puisque

$$\sup_{u \leqq t} \|R_{t-u}\|_{\mathscr{L}(\mathbb{D};\mathbb{H})} \leqq \sup_{u \leqq t} \|R_{t-u}\|_{\mathscr{L}(\mathbb{D};\mathbb{D})} < +\infty .$$

Pour simplifier l'écriture, nous supposons, sans restreindre la généralité de la démonstration: $s=0$, $M_s=0$. On définit donc

$$X_t = R_t \xi + \int_0^t R_{t-u}\, dM_u. \tag{5.2.4}$$

Considérons alors pour chaque t le processus V à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathbb{D};\mathbb{H})$ tel que $\forall\, h \in \mathbb{D}$, $\forall\, \omega \in \Omega$, $\tau \leqq t$

$$V_\tau(\omega)h = R_{t-\tau}h = R_t h - \int_0^\tau R_{t-u} \circ A h\, du.$$

La proposition 5 appliquée à V et M donne:

$$X_t = R_t \xi + M_t + \int_0^t R_{t-u} \circ A \cdot M_u\, du = R_t \xi + M_t + \int_0^t A \circ R_{t-u} M_u\, du \qquad p.s. \tag{5.2.5}$$

L'application $u \rightsquigarrow R_{t-u} \cdot M_u(\omega)$ étant fortement intégrable à valeurs dans $\mathbb{D}$ (par hypothèse, puisque $u \rightsquigarrow M_u(\omega) \in L^1([0, T]; \mathbb{D})$ on peut écrire

$$X_t = R_t \xi + M_t + A\left(\int_0^t R_{t-u} M_u\, du\right) \qquad \text{p.s.}$$

Cette expression montre immédiatement que X à valeurs dans $\mathbb{H}$ défini par (5.2.4) admet une version continue à droite.

Si nous appliquons la formule (5.2.3) à nouveau:

$$X_t = \xi + \int_0^t A \circ R_{t-s} \xi\, ds + M_t + A\left(\int_0^t \left(\int_u^t A \circ R_{s-u} M_u\, ds\right) + M_u\, du\right).$$

La fonction $(u, s) \rightsquigarrow A \circ R_{u-s} M_s(\omega)$ à valeurs dans $\mathbb{H}$ est fortement intégrable, donc en intervertissant les intégrations dans la dernière intégrale

$$X_t = \xi + M_t + \int_0^t A \circ R_s \xi\, ds + A \int_0^t M_s + \left(\int_0^s A R_{s-u} M_u\, du\right) ds = \xi + M_t + \int_0^t A X_s\, ds.$$

Ceci prouve que X_t est solution.

Si $\xi \in L^2_{\mathbb{H}}(\Omega, \mathscr{F}_0, P)$ le fait que $\sup_{u \in [0,t]} \|R_{t-u}\|_{\mathscr{L}(\mathbb{H};\mathbb{H})} < \infty$ implique immédiatement, à partir de (5.2.3) que

$$E\|X_t\|_H^2 < \infty .$$

2°) Comme dans 1°), l'unicité résulte de ce que le problème de Cauchy déterministe

$$\frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t) \qquad t \in [s, T]$$

$$\lim_{t \downarrow s} x(t) = \xi \qquad \xi \in \mathbb{H}$$

admet dans ce cas encore une solution unique donnée par la formule

$$x(t) = R_{t-s} \xi .$$

Rappelons également que l'hypothèse faite sur (R_t), implique pour l'application $t \rightsquigarrow R_t$ d'être infiniment différentiable sur $]0, +\infty]$ comme application à valeurs dans l'espace de Banach $\mathscr{L}(\mathbb{H};\mathbb{H})$, de dérivée $n^{\text{ième}}$:

$$\frac{d^n}{dt^n} R_t = A^n \circ R_t \in \mathscr{L}(\mathbb{H};\mathbb{H})$$

(cf. [4] sec. 10−4, p. 311).

Il est par ailleurs clair que pour tout n

$$A^n \circ R_t = R_{t/n+1} \circ (A \circ R_{t/n+1})^n \in \mathscr{L}(\mathbb{H};\mathbb{D}).$$

On vérifie alors facilement que le raisonnement du 1°) s'applique à nouveau pour montrer directement que la formule (5.2.1) donne la solution.

(5.3) *Cas non homogène.* Dans ce paragraphe, nous revenons à la situation générale du (5.1) ci-dessus. Comme dans [2] nous nous plaçons dans des hypothèses qui sont vérifiées dans le cas de la théorie de *W.* Tanabe pour le problème de Cauchy déterministe (cf. [9] ch. XIV).

En ce qui concerne la perturbation représentée par la martingale (M_t) nos hypothèses sont clairement plus générales que dans [2].

Le rôle joué par le semi-groupe en (5.2) sera joué ici par l'opérateur de Green $G(t,s)$ dont nous rappelons la définition.

Définition. Nous dirons que $(A_t)_{t\in[0,t]}$ admet un opérateur de Green $G = \{G(t,s)\colon 0\leqq s\leqq t\leqq T,\ G(s,t)\in\mathscr{L}(\mathbb{H};\mathbb{H})\}$ si

(i) $G(s,s)=I$ (opérateur identique dans $\mathbb{H}$) pour tout $s\in[0,T]$,

(ii) $\forall\, 0\leqq s\leqq t\leqq u\leqq T \quad G(u,s)=G(u,t)\circ G(t,s)$,

(iii) $\forall\, h\in\mathbb{H} \quad t \rightsquigarrow G(t,s)h$ est continue de $[s,T]$ dans $\mathbb{H}$,

(iv) $\forall\, h\in\mathbb{H}$ le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t)=A_t x(t) \qquad t\geqq s\\ &x(s)=h \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

a une solution unique dans $L^2([0,T])\cap C([0,T];\mathbb{H})$ donnée par $x(t)=G(t,s)h$. (i.e.: $x(t)=h+\int_s^t A_u x(u)\,du$).

Théorème 5′. *Nous supposons que $(A_t)_{t\in[0,T]}$ admet un opérateur de Green avec les propriétés suivantes*

(i) $\{G(s,t)\colon 0\leqq s\leqq t\leqq T\}$ *est borné dans* $\mathscr{L}(\mathbb{H};\mathbb{H})$ *et* $\forall\, h\in\mathbb{H}$ $(s,t)\rightsquigarrow G(s,t)\cdot h$ *est continue de* $\{(s,t)\colon 0\leqq s\leqq t\leqq T\}$ *dans* $\mathbb{H}$,

(ii) $\forall\, 0\leqq s\leqq t\leqq T$ $G(s,t)\,\mathbb{D}\subset\mathbb{D}$, *la restriction de* $G(s,t)$ *à* $\mathbb{D}$ *étant continue de* $\mathbb{D}$ *dans* $\mathbb{D}$ *(pour la norme de Hilbert sur* $\mathbb{D}$*)*,

(iii) $\forall\, h\in\mathbb{D}$ $u\rightsquigarrow A_u\cdot h\in\mathbb{H}$ *est continue de* $[s,T]$ *dans* $\mathbb{H}$,

(iv) *si* $u>\alpha$ $A_u\circ G(u,s)\in\mathscr{L}(\mathbb{H};\mathbb{H})$ *pour tout* $s\leqq\alpha$ *et*

$$\sup_{s\leqq\alpha}\|A_u\circ G(u,s)\|_{\mathscr{L}(\mathbb{H};\mathbb{H})}<\infty.$$

Nous supposons que M *prenne ses valeurs dans* $\mathbb{D}$ *et soit continu à droite (pour la norme de* $\mathbb{D}$*).*

Alors pour tout $\xi\in L^2_{\mathbb{H}}(\Omega,\mathscr{F}_s,P)$ *l'équation* (5.1.1) *a une solution continue à droite à valeurs dans* $\mathbb{H}$, *de condition initiale* $X_s=\xi$, *unique à l'indistingabilité près,* *donné par*

$$X_t = G(t, s)\xi + \int_s^t G(t, u)\, dM_u. \tag{5.3.2}$$

Démonstration. L'unicité à l'indistingabilité près, résulte immédiatement de l'unicité de la solution du problème de Cauchy déterministe (5.2.1) puisque la différence de deux processus solution de (5.1.2) est presque surement solution de ce problème.

Comme on ne restreint pas la généralité du raisonnement en supposant $\xi = 0$, $s = 0$, nous allons montrer directement que le processus X défini sur $[0, T]$ pour chaque t par

$$X_t = \int_0^t G(t, u)\, dM_u \quad \text{p.s.} \tag{5.3.3}$$

a une version continue à droite qui est solution de (5.1.2) de condition initiale $X_0 = 0$.

Remarquons d'abord que, par définition de G, pour tout $h \in \mathbb{D}$

$$G(t, s)\, h = h + \int_s^t A_u \circ G(u, s) \cdot h\, du. \tag{5.3.5}$$

L'hypothèse (iii) implique alors la différentiabilité continue de $t \rightsquigarrow G(t, s) \cdot h$ sur $[s, T]$ avec

$$\frac{\partial}{\partial t}[G(t, s)\, h] = A_t \circ G(t, s)\, h.$$

Notons aussi qu'en raison de (i) et de

$$G(t, s+\sigma) - G(t, s) = G(t, s+\sigma) \circ (I - G(s+\sigma, s)) = -G(t, s+\sigma) \circ (G(s+\sigma, s) - G(s, s))$$

la différentiabilité de $t \rightsquigarrow G(t, s)h$ pour $h \in \mathbb{D}$, implique la différentiabilité à droite de $s \rightsquigarrow G(t, s)\, h$ (fonction à valeurs dans H), et puisque $s \rightsquigarrow -G(t, s) \circ A_s h$ est continue, on a la différentiabilité avec

$$\frac{\partial}{\partial s}[G(t, s)h] = -G(t, s) \circ A_s \cdot h = U(t, s)h, \tag{5.3.6}$$

où $\quad U(t, s) = -G(t, s) \circ A_s \in \mathscr{L}(\mathbb{D}; \mathbb{H}).$ (5.3.7)

Si nous appliquons alors la proposition 5, au processus V défini par $V(s) = G(t, s) \in \mathscr{L}(\mathbb{D}; \mathbb{H})$ la formule (5.3.4) donne

$$\forall\, t \leqq T, \quad X_t = M_t - \int_0^t U(t, s) \cdot M_s\, ds \quad \text{p.s.} \tag{5.3.8}$$

En évaluant $A_u \circ (G(u, s+\sigma) - A_u \circ G(u, s)$, en raisonnant comme précédemment et en utilisant (iv), on voit que $\forall\, h \in D$, $s \rightsquigarrow A_u \circ G(u, s) \cdot h$ est différentiable comme fonction à valeurs dans $\mathbb{H}$, sur $[0, u[$, de dérivé

$$\frac{\partial}{\partial s}(A_u \circ G(u, s) \cdot h) = -A_u \circ G(u, s) \circ A_s \cdot h \tag{5.3.9}$$

avec d'après (iv)

$$-A_u \circ G(u, s) \circ A_s = A_u \circ U(t, s) \in \mathscr{L}(\mathbb{D}; \mathbb{H}). \tag{5.3.10}$$

On peut alors, pour tout $h \in \mathbb{D}$ différencier les deux membres de la relation (5.3.5) par rapport à s. Pour $s<t$, on a

$$U(t,s)h = -A_s h + \int_s^t A_u \circ U(u,s) \cdot h\,du. \tag{5.3.11}$$

En raison de (5.3.11) le processus X défini sur toute trajectoire ω par la formule (5.3.8) vérifié, puisque $M_s(\omega) \in \mathbb{D}$:

$$\begin{aligned} X_t(\omega) &= M_t(\omega) + \int_0^t A_s M_s(\omega)\,ds - \int_0^t \left(\int_s^t A_u \circ U(u,s) \cdot M_s(\omega)\,du\right) ds \\ &= M_t(\omega) + \int_0^t A_s M_s(\omega)\,ds - \int_0^t A_u \circ \left(\int_0^u U(u,s)\, M_s(\omega)\,ds\right) du. \end{aligned}$$

(Noter que, puisque $U(u,s) \in \mathscr{L}(\mathbb{D};\mathbb{D})$, on peut effectivement sortir $A_u \in \mathscr{L}(\mathbb{D};\mathbb{H})$ du signe d'intégration.)

Cette dernière relation s'écrit:

$$X_t(\omega) = M_t(\omega) + \int_0^t A_s X_s(\omega)\,ds.$$

Le processus (X_t) défini par (5.3.8) pour toute trajectoire est solution du problème. Comme c'est une version continue à droite du processus (5.3.4) le théorème est démontré.

Théorème 6. *On suppose que $(A_t)_{t \leqq T}$ admet un opérateur de Green, avec les propriétés du théorème 5' et en outre*

(v) $\forall s<t \quad G(t,s)\mathbb{H} \subset \mathbb{D}$ et $G(t,s) \in \mathscr{L}(\mathbb{H};\mathbb{D})$,

(vi) $\forall h \in \mathbb{D} \quad \forall t \quad (A_t h | h) \leqq 0$.

La martingale M prend ses valeurs dans $\mathbb{H}$ et est continue à droite. Si on note μ la mesure positive sur $[0,T]$ définie par

$$\mu(]0,t]) = E\|M_t\|^2_{\mathbb{H}})$$

on suppose que

(vii) $\sup_{t \leqq T} \int_0^t \|G(t,s)\|^2_{\mathscr{L}(\mathbb{H};\mathbb{D})}\, \mu(ds) < \infty$.

Alors, pour tout $\xi \in L^2_{\mathbb{H}}(\Omega, \mathscr{F}, P)$ l'équation (5.1.1) *a encore une solution continue à droite, à valeurs dans $\mathbb{H}$, de condition initiale $X_s = \xi$, unique à l'indistingabilité près, donnée par* (5.3.2).

Démonstration. $\mathbb{D}$ étant dense dans $\mathbb{H}$, on peut considérer une base orthonormale $\{e_n\}$ de $\mathbb{H}$, telle que $e_n \in \mathbb{D}$ pour tout n. Soit alors Π_n la projection dans $\mathbb{H}$ sur le sous-espace $\mathbb{H}_n$ engendré par $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Considérons la martingale $M^n = \Pi_n(M)$, à valeurs dans $\mathbb{H}_n \subset \mathbb{D}$ M étant continue à droite il en est de même de M^n. Appliquons le théorème 5' à l'équation

$$dX_t = A_t \cdot X_t + M_t^n$$

et considérons le processus solution

$$X_t^n = G(t,s)\,\xi + \int_s^t G(t,u)\,dM_u^n. \tag{5.3.12}$$

Comme $G(t,s) \in \mathscr{L}(\mathbb{H};\mathbb{D})$ en raison de (vii) on peut définir

$$X_t = G(t,s)\,\xi + \int_s^t G(t,u)\,dM_u. \tag{5.3.13}$$

En introduisant la matrice Q associée à M (cf. § 1)

$$E(\|X_t - X_t^n\|_D^2) = \int_{]s,t]\times\Omega} \|G(t,u)\circ(I-\Pi^n)\,\tilde{Q}^{1/2}(u,\omega)\|_{H\cdot S}^2\,\lambda(du,d\omega).$$

La convergence vers zero de $\|(I-\Pi^n)\cdot\tilde{Q}^{1/2}(u,\omega)\|_{H\cdot S}$ la majoration

$$\|G(t,u)\circ(I-\Pi^n)\,\tilde{Q}^{1/2}(u,\omega)\|_{H\cdot S}^2 \leqq \|G(t,u)\|_{\mathscr{L}(\mathbb{H};\mathbb{D})}^2$$

et la propriété (vii) montrent que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T E\|X_t - X_t^n\|_{\mathbb{D}}^2\,dt = 0.$$

On peut donc extraire une sous suite (X^{n_k}) de la suite (X^n) telle que pour P presque tout ω

$$\lim_{n\to\infty}\|X_t^{n_k}(\omega) - X_t(\omega)\|_{\mathbb{D}} = 0 \qquad \text{presque partout sur } [0,T].$$

Nous allons montrer qu'on peut extraire une sous-suite telle également que pour P presque tout ω les trajectoires $t \rightsquigarrow X_t^{n_k}(\omega)$ convergent uniformément sur $[0,T]$, comme applications à valeurs dans $\mathbb{H}$. Il en résultera que X admet une version continue à droite dans $\mathbb{H}$, dont les trajectoires prennent presque partout leurs valeurs dans $\mathbb{D}$. Notons encore X cette version. Comme en outre, p.s., les deux membres de

$$X_t^n(\omega) = \xi + \int_0^t A_s X_s^n(\omega)\,ds + M_t^n(\omega) \tag{5.3.14}$$

convergent pour tout t dans $\mathbb{H}$ vers $X_t(\omega)$ et $\xi + \int_0^t A_s X_s(\omega)\,ds + M_t(\omega)$ respectivement.

On a donc pour P presque tout ω

$$\forall\, t \leqq T \qquad X_t(\omega) = \xi + \int_0^t A_s X_s(\omega)\,ds + M_t(\omega).$$

Le théorème sera donc démontré, l'unicité étant immédiate en vertu du même argument que dans le théorème précédent.

Evaluons $\|X_t^n - X_t^m\|_{\mathbb{H}}^2$ en utilisant la proposition 6 et la formule (5.3.14). On obtient (en supposant pour simplifier l'écriture: $s=0$)

$$\|X_t^n - X_t^m\|_{\mathbb{H}}^2 = \int_0^t (X_u^m - X_u^n \,|\, A(X_u^m - X_u^n))_{\mathbb{H}}\,ds + \int_s^t (X_u^m - X_u^n \,|\, d(M_u^m - M_u^n))_{\mathbb{H}} + \mathrm{Tr}\,[M^m - M^n]_t.$$

On utilise alors l'hypothèse (vi) et le fait que

$$\left(\int_0^t (X_u^m - X_u^n \,|\, d(M_u^m - M_u^n))_{\mathbb{H}}\right)_{t\leqq T}$$

étant une martingale

$$E\left|\sup_{t\leqq T}\int_0^t (X_u^m - X_u^n \,|\, d(M_u^m - M_u^n))_{\mathbb{H}}\right|^2 \leqq 2E\left|\int_0^T (X_u^m - X_u^n \,|\, d(M_u^m - M_u^n))_{\mathbb{H}}\right|^2$$

pour écrire

$$E(\sup_{t\leqq T}\|X_t^m - X_t^n\|_{\mathbb{H}}^2) \leqq 4\int_{]0,T]\times\Omega} \|(\Pi^m - \Pi^n)\,\tilde{Q}^{1/2}(X_u^m - X_u^n)\|_{\mathbb{H}}^2\,d\lambda + 2E(\|(\Pi^m - \Pi^n)M_T\|_{\mathbb{H}}^2.$$

De l'hypothèse (vii) et de la convergence pour tout (u,ω) vers zero de

$$\|(\Pi^m - \Pi^n)\,\tilde{Q}^{1/2}(X_u^m - X_u^n)\|_{\mathbb{H}}^2$$

et pour tout ω de $\|(\Pi^m - \Pi^n) M_T(\omega)\|_{\mathbb{H}}^2$ on déduit

$$\lim_{m, n \to \infty} E(\sup_{t \leqq T} \|X_t^m - X_t^n\|_{\mathbb{H}}^2) = 0$$

d'où, immédiatement la possibilité d'extraire une sous-suite $X_t^{n_k}$ telle que pour P-presque tout ω

$$\lim_{h, r \to \infty} (\sup_{t \leqq T} \|X_t^{n_k} - X_t^{n_r}\|_{\mathbb{H}}) = 0.$$

Ceci achève la démonstration du théorème.

Références

1. Bensoussan, A.: Filtrage optimal des systèmes linéaires. Paris: Dunod 1971
2. Curtain, R.F., Falb, P.L.: Stochastic differential equations in Hilbert spaces. J. Different. Equations **10**, 412–430 (1971)
3. Gravereaux, J.B., Pellaumail, J.: Formule de Ito pour des processus non continus à valeurs dans des espaces de Banach (à paraître, Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B)
4. Hille, E., Philips, R.S.: Functional Analysis and Semi-groups. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications vol. XXXI
5. Métivier, M.: Intégrale stochastique par rapport à des processus à valeurs dans un espace de Banach réflexif. Theor. Probability Appl. **XIX**, 577–606 (1974)
6. Métivier, M.: Advances in the theory of stochastic integration and applications. Proc. 7th Prague Conference. To appear
7. Pellaumail, J.: Sur l'intégrale stochastique et la décomposition de Doob-Meyer, Astérisque **9**, 125 (1973)
8. Pistone, G.: Thèse de 3ème cycle, Université de Rennes
9. Yosida, K.: Functional Analysis, Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1968
10. Kunita, H.: Stochastic Integrals based on Martingales taking values in Hilbert space. Nagoya Math. J. **38**, 41–52 (1970)

Reçu le 5 mars 1975