Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
63, 147–235 (1983)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Calcul des variations stochastique et processus de sauts

Jean-Michel Bismut

Université de Paris-Sud, Département de Mathématique, Bât. 425,
F-91405 Orsay, France

Summary. The purpose of this paper is to develop a stochastic calculus of variations for R^n-valued strong Markov processes with jumps x_t, which is the analogous of the Malliavin calculus of variations on diffusions. An integration by parts formula is established on a non Gaussian infinite dimensional probability space, in order to prove regularity of the probability law on R^n of x_t, for fixed time t. Diffusions with jumps are also considered. The connection between the calculus of variations and the representations of martingales for jump process is exhibited.

0. Introduction

Dans [14, 15], Malliavin a introduit des techniques permettant d'effectuer des intégrations par parties sur l'espace de probabilité (Ω, P) du mouvement Brownien r-dimensionnel w, et ceci en vue d'obtenir un résultat d'hypoellipticité sur un opérateur différentiel écrit sous la forme de Hörmander [10]

$$\frac{\partial}{\partial t}+X_0+\tfrac{1}{2}\sum_1^r X_i^2 \tag{0.1}$$

où $X_0, X_1, \dots X_r$ sont des champs de vecteurs sur R^n. Ces techniques ont été reprises et étendues par Stroock dans [19, 20], qui donne également diverses applications. La technique de Malliavin [14, 15] et Stroock [19, 20] repose sur l'utilisation adéquate de l'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck $\mathscr{A}$ qui opère comme opérateur autoadjoint sur l'espace de Hilbert $L_2(\Omega, P)$. On considère en effet l'équation différentielle stochastique

$$dx=X_0(x)\,dt+\sum_1^r X_i(x)\cdot dw^i;\qquad x(0)=x_0 \tag{0.2}$$

et pour $T>0$, on considère $x_T(\omega)$, auquel on montre qu'on peut appliquer l'opérateur $\mathscr{A}$.

Une approche différente du calcul de Malliavin a été proposée par nous dans [3]. Elle repose essentiellement sur une utilisation adéquate de la formule de Girsanov [21] - 6 et est étroitement liée à des résultats de représentation de martingales de Haussmann [8, 9]. Cette approche a été utilisée par Bismut-Michel [4, 5] pour obtenir divers résultats en théorie du filtrage.

Une présentation simple des deux points de vue est exposée par Williams dans [24]. Par ailleurs un point clé de la démonstration d'hypoellipticité de l'opérateur (0.1) est montrée dans Malliavin [15] et Ikeda et Watanabe [11] pour retrouver le résultat de Hörmander [10].

L'objet du présent article est de montrer qu'on peut étendre les techniques de [3] à certains espaces de probabilité non gaussiens dès lors qu'on peut utiliser une propriété de quasi-invariance de la mesure de probabilité comparable à la formule de Girsanov. On peut ainsi étudier le semi-groupe engendré par un opérateur intégrodifférentiel $\mathscr{L}$ qui opère sur $C_b^\infty(R^n)$ par

$$\begin{aligned}\mathscr{L}f=X_0 f+&\int_{|y|\leqq 1}(f(x+y)-f(x)-\langle f'(x), y\rangle)\, M(x, dy) \\ +&\int_{|y|>1}(f(x+y)-f(x))\, M(x, dy)\end{aligned} \tag{0.3}$$

où X_0 est un champ de vecteurs et $M(x,dy)$ un noyau de Lévy, et plus généralement si $\mathscr{L}'$ est un opérateur différentiel du type

$$\mathscr{L}'=\tfrac{1}{2}\sum_1^r X_i^2. \tag{0.4}$$

on étudie le semi-groupe engendré par $\mathscr{L}+\mathscr{L}'$.

Avant de présenter les résultats obtenus dans l'article, il nous paraît utile de développer la technique utilisée en dimension finie. Supposons en effet que l'espace de probabilité Ω est égal à R^d, et est muni d'une mesure de probabilité P du type $g(x)\,dx$, où $g\in C_b^\infty(R^d)$. Soit Φ une fonction C^∞ de Ω dans R^k ($k\leqq d$), telle que p.s., $\Phi'(x)$ est de rang maximal k. La loi μ de $\Phi(x)$ sur R^k a alors une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Pour montrer que cette densité est C^∞, il suffit de montrer que les dérivées de μ au sens des distributions sont des mesures bornées (c'est évident par l'étude de la transformée de Fourier de μ), d'où l'utilité d'intégrer par parties sur Ω. Soit $f\in C_b^\infty(R^k)$, et $h(x)$ une fonction C^∞ définie sur R^d à valeurs dans R^d à support compact. On a trivialement (par intégration par parties sur Ω)

$$\int_\Omega \langle f'(\Phi(x)), \Phi'(x)\, h(x)\rangle\, dP(x)+\int_\Omega f(\Phi(x))\frac{\operatorname{div}(g(x)\, h(x))}{g(x)}\, dP(x)=0. \tag{0.5}$$

Pour montrer que la dérivée première de μ au sens des distributions est une mesure bornée, il suffit de montrer qu'on peut choisir h de telle sorte que $\Phi'(x)\, h(x)=\frac{\partial}{\partial y^l}$ ($l=1\ldots k$) dans (0.5).

a) Si Ω est muni naturellement d'une structure d'espace de Hilbert, un choix naturel de $h(x)$ est celui qui minimise la norme $\|k\|$ parmi les k tels que

$\Phi'(x)\,k=\dfrac{\partial}{\partial y^l}$ (l'espace des k qui conviennent est p.s. non vide puisque $\Phi'(x)$ est p.s. de range maximal). Comme $\Phi'(x)$ applique R^d dans $T_x(R^k)$, l'opérateur adjoint $\Phi'^*(x)$ applique $T_x^*(R^k)$ dans l'espace dual R^{d*} qu'on peut identifier à R^d grâce à la structure Hilbertienne. Ainsi $\Phi'^*(x)$ applique $T_x^*(R^k)$ dans R^d, et $\Phi'\Phi'^*(x)$ est un opérateur p.s. inversible de $T_x^*(R^k)$ dans $T_x(R^k)$. Le choix «naturel» de h est ainsi

$$h(x)=\Phi'^*(x)\,[\Phi'\Phi'^*]^{-1}(x)\frac{\partial}{\partial y^l}. \tag{0.6}$$

Dans le problème originellement considéré dans [3, 14, 19], on considère le mouvement Brownien $w=(w^1\dots w^r)$ en tant que mesure cylindrique sur l'espace de Hilbert $\Omega=[L_2(R^+,dt)]^r$. Naturellement Ω est de mesure nulle pour w. Toutefois en raisonnant comme dans [3], si dans (0.2), Φ est la variable aléatoire $x_T(\omega)$ $(T>0)$, on peut dériver Φ dans les directions de Ω et utiliser la quasiinvariance de la mesure Brownienne pour obtenir une formule du type (0.5) (plus exactement, on utilise la formule de Girsanov pour effectuer des translations non anticipatives). Ω ayant une structure Hilbertienne naturelle, on construit $\Phi'\Phi'^*$, soit indirectement dans [14, 19] en utilisant l'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck $\mathscr{A}$, soit directement dans [3].

b) Si Ω n'a pas de structure Hilbertienne «naturelle», le choix de h n'est plus évident. Dans le cas qui nous occupe ici, Ω est l'espace $D(R^n)$ des fonctions continues à droite à limites à gauche définies sur R^+ à valeurs dans R^n. x_t est le processus de Markov associé au générateur $\mathscr{L}$ donné par (0.3), et est solution d'une équation différentielle stochastique du type

$$dx=X_0(x)\,dt+dy; \qquad x(0)=x \tag{0.7}$$

où y est un processus à valeurs dans R^n (dont la loi est liée à la loi de x !). Φ est ici la variable aléatoire $x_T\,(T>0)$. Sous certaines hypothèses, on montre que Φ est dérivable dans certaines directions de $l_1(R^n)\subset D(R^n)$, où $l_1(R^n)$ est l'ensemble des processus de sauts purs à variation finie. $\Phi'(y)$ applique donc $l_1(R^n)$ dans R^n, et $\Phi'^*(y)$ applique R^n dans l'espace dual $l_\infty(R^n)$ des fonctions bornées définies sur R^+ à valeurs dans R^n (dans le cas traité ici $\Phi'^*(y)$ applique R^n dans $C_b(R^n)$). On ne peut donc plus former $\Phi'\Phi'^*$. La solution de remplacement que nous utilisons est de remarquer que si $v\in l_1(R)$, $H\in l_\infty(R^n)$, alors $vH\in l_1(R^n)$. On peut donc former l'opérateur $(\Phi' v\Phi'^*)(y)$ qui applique ainsi R^n dans R^n. Sous des conditions «naturelles», on montre alors que $\Phi' v\Phi'^*$ est effectivement p.s. inversible, ce qui permet de poursuivre comme dans [3, 14, 19]. De simples considérations d'analyse fonctionnelle nous indiquent l'existence de difficultés techniques qui n'apparaissent pas avec le mouvement Brownien.

Dans la section 1 de l'article, nous construisons brièvement le processus x_t, en utilisant les techniques exposées dans Jacod [12]. Nous supposons que y est un processus à accroissements indépendants, résolvons (0.7) et modifions la loi de x à l'aide d'une densité exponentielle de Doléans-Dade [28]. Nous nous sommes abstenu d'utiliser les équations différentielles stochastiques générales de [12], essentiellement parce que nous avons cherché dans la suite à obtenir des résultats qui s'expriment facilement à l'aide du générateur infinitésimal du processus de Markov considéré.

A la section 2, on fait l'hypothèse que le noyau de Lévy $M(x, dy)$ majore un noyau de Lévy $M^1(x, dy)$ qui est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue sur un sous-espace vectoriel de R^n avec une densité de classe C^1. On montre que la loi de la solution x_t^l de l'équation différentielle perturbée

$$dx_t^l = X_0(x_t^l)\,dt + d(y_t + \sum_{s \leqq t} \Lambda_s(\Delta y_s)) \tag{0.8}$$

(où $\Lambda_s(\Delta y_s)$ n'est $\neq 0$ que pour un nombre fini de $s \leqq t$) est absolument continue par rapport à la loi de x. La dérivation en $l=0$ de l'égalité obtenue à partir des considérations précédentes nous permet d'obtenir une égalité du type (0.5). Cette égalité exprime deux phénomènes distincts:

a) Une intégration par parties à l'intérieur du noyau de Lévy $M_1(x, dy)$.

b) Une propagation dans le temps de l'intégration par parties décrite en a).

Cette section est proche des techniques de notre article [3] et de Haussmann [9] qui s'appliquaient aux diffusions continues. Elle montre que comme dans [3, 14, 19] le calcul stochastique classique est l'instrument par lequel s'expriment des identités de type fonctionnel.

A la section 3, on applique les résultats de la section 2 à la représentation des martingales et on obtient ainsi un résultat parallèle à celui de Haussmann [8, 9] (voir aussi [3]).

A la section 4, on applique les résultats des sections précédentes à la régularité du semi-groupe engendré par l'opérateur $\mathscr{L}$. Notons tout de suite qu'il est bien connu par les travaux de Kesten [13] (voir aussi Bretagnolle [6]) que même en dimension 1, les processus de sauts à accroissements indépendants peuvent avoir une théorie du potentiel «pathologique». Il est aussi bien connu que les semi-groupes de convolution sur R (par exemple le semi-groupe hypergéométrique) peuvent n'être que lentement régularisant ou même avoir une densité qui n'est pour aucun $t>0$ de classe C^1. On va retrouver ce type de phénomène ici. On suppose en effet que le noyau de Lévy $M^1(x, dy)$ est une somme $\sum_1^q M_i^1(x, dy)$ de noyaux de Lévy $M_i^1(x, dy)$ portés respectivement par des sous-espaces $E_1 \dots E_q$ engendrant R^n et ayant une densité de classe C^1 par rapport à la mesure de Lebesgue sur $E_1 \dots E_q$. Si le processus x saute une infinité de fois dans les directions $E_1 \dots E_q$, on montre, sous certaines hypothèses que pour T assez grand, la dérivée première au sens des distributions de la loi de x_T est une mesure. On peut alors itérer la formule d'intégration par parties ainsi obtenue, et obtenir le même type de résultats pour les dérivées d'ordre quelconque de la loi de x_T.

Notons ici qu'en général, si x est un processus à accroissements indépendants, on connaît sa fonction caractéristique. Des résultats de types abélien et taubérien permettent, sous certaines conditions, de relier la concentration de la mesure de Lévy autour de 0 et la régularité de la loi de $x_T (T>0)$, sans qu'intervienne la régularité de la mesure de Lévy. De tels résultats nous étant nécessaires pour les besoins propres de la section 4, nous en donnons une démonstration rapide. Toutefois, on voit tout de suite que les techniques de la section 4 ne donnent que des résultats très insuffisants pour les processus à accroissements indépendants. La raison en est que pour «commencer» infinitésimalement une intégration par parties relativement à la loi de x_T, on utilise ici le fait que x_T est somme de variables ayant une «loi» de classe C^1, ce qui est impossible par exemple lorsque la mesure de Lévy de x ne comporte que des mesures de Dirac.

Les techniques de cet article sont par contre bien adaptées à l'étude des lois de processus de Markov décrits par une équation du type (0.7), qui sont associés à des générateurs du type (0.3).

Enfin à la section 5, nous donnons diverses applications à l'étude du semigroupe engendré par $\mathscr{L}+\mathscr{L}'$ (où $\mathscr{L}$ est donné par (0.3) et $\mathscr{L}'$ par (0.4)).

Pour l'introduction et l'utilisation des sommes compensées de sauts, systèmes de Lévy, etc. ..., nous renvoyons à Meyer [16], Stroock [18], et Jacod [12] pour un exposé très complet. La lecture préalable de [3] peut aussi être utile au lecteur. Notons enfin que dans [33] nous avons utilisé certaines techniques du présent article pour étudier les processus de bord d'une classe de diffusions. Les résultats contenus ici ont été annoncés dans [34].

Dans tout le texte, les constantes utilisées dans les majorations sont notées C.

1. Processus de sauts à valeurs dans R^n

Dans cette section, nous rappelons brièvement la construction des lois de processus de Markov à valeurs dans R^n dont le générateur infinitésimal $\mathscr{L}$ est du type (0.3).

Pour des raisons techniques, nous supposerons systématiquement que le moyau de Lévy $M(x,dy)$ est décomposé en la somme de deux noyaux

$$M(x,dy)=M^1(x,dy)+M^2(x,dy) \tag{1.1}$$

de manière à nous permettre de faire un calcul des variations sur une partie $M^1(x,dy)$ du noyau de Lévy $M(x,dy)$.

Par ailleurs, nous supposerons que les noyaux $M(x,dy)$, $M^1(x,dy)$, $M^2(x,dy)$ sont absolument continus par rapport à des mesures fixes.

La technique de construction étant étroitement liée au calcul des variations, nous la rappelons complètement. Pour plus de détails nous renvoyons à Jacod [12].

a) Notations et définitions

$D(R^n)$ désigne l'expace des fonctions définies sur R^+ à valeurs dans R^n, qui sont continues à droite et à limites à gauche (en abrégé cadlag). Si y est l'élément générique de $D(R^n)$, $\{F_t^y\}_{t\geq 0}$ désigne la filtration canonique $\{\mathscr{B}(y_s\,|\,s\leqq t)\}_{t\geqq 0}$, éventuellement régularisée à droite et complétée au sens de Dellacherie-Mayer [7].

De même si $D(R^n)\times D(R^n)$ a pour point générique (y^1, y^2), on munit $D(R^n)\times D(R^n)$ de la filtration canonique

$$\{F_t^{y^1, y^2}\}_{t\geqq 0}=\{\mathscr{B}(y_s^1, y_s^2 \,|\, s\leqq t)\}_{t\geqq 0},$$

éventuellement régularisée à droite et complétée.

μ^1 et μ^2 sont deux mesures $\geqq 0$ σ-finies sur $R^n/\{0\}$ telles que

$$\int_{|x|\leqq 1} |x|^2\, d\mu^j(x)+\int_{|x|>1} d\mu^j(x)<+\infty \qquad j=1,2. \tag{1.2}$$

Définition 1.1. Pour $j=1,2$, y_t^j est le processus à accroissements indépendants à valeurs dans R^n et cadlag dont la fonction caractéristique $\psi_t^j(\alpha)=E\exp(-i\langle\alpha, y_t^j\rangle)$ est donnée par

$$\begin{aligned}\psi_t^j(\alpha)=\exp\Big[&\int_{|x|\leqq 1} t(\exp(-i\langle\alpha, x\rangle)-1+i\langle\alpha, x\rangle)\, d\mu^j(x)\\ &+\int_{|x|>1} t(\exp(-i\langle\alpha, x\rangle)-1)\, d\mu^j(x)\Big].\end{aligned} \tag{1.3}$$

Soit Π^j la loi de y^j sur $D(R^n)$. Sur $(D(R^n)\times D(R^n), \Pi^1\otimes\Pi^2)$, on définit le processus y_t par

$$y_t=y_t^1+y_t^2. \tag{1.4}$$

y_t est un processus à accroissements indépendants dont la fonction caractéristique $\psi_t(\alpha)$ est donnée par

$$\psi_t(\alpha)=\psi_t^1(\alpha)\,\psi_t^2(\alpha).$$

$X_0(x)$ est une fonction définie sur R^n à valeurs dans R^n, C^∞ bornée à dérivées de tous ordres bornées.

Définition 1.2. Pour $x_0\in R^n$, $y\in D(R^n)$, on note x_t la solution unique de l'équation

$$x_t=x_0+\int_0^t X_0(x_s)\, ds+y_t-y_0. \tag{1.5}$$

Pour alléger les notations, nous n'avons pas noté explicitement que x dépend de x_0 et y. Notons aussi que $\bar{x}_t=x_t-y_t+y_0$ est solution de l'équation différentielle ordinaire

$$d\bar{x}_t=X_0(\bar{x}_t+y_t-y_0)\, dt. \tag{1.6}$$

Par abus de notation, on écrira (1.5) sous la forme

$$dx_t=X_0(x_t)\, dt+dy.$$

Dans la suite sur $(D(R^n)\times D(R^n), \Pi^1\otimes\Pi^2)$, y_t étant donné par (1.4), x est le processus donné par (1.5) (ici $y_0=0$).

Pour $j=1,2$, $b^j(x', y)$ est une fonction définie sur $R^n\times R^n/\{0\}$ à valeurs dans $[-1, +\infty[$, qui est mesurable et telle que

$$\int_{R^n/\{0\}} |b^j(x', y)|^2 \, d\mu^j(y) \tag{1.7}$$

est une fonction bornée sur R^n.

Dans ce qui suit, $x_0 \in R^n$ est provisoirement fixé.

Définition 1.3. Sur $(D(R^n) \times D(R^n), \Pi^1 \otimes \Pi^2)$, pour $j=1,2$, on note $\overset{c}{S}_{s \leqq t} b^j(x_{s^-}, \Delta y_s^j)$ la martingale de carré intégrable somme compensée des sauts

$$1_{\Delta y_s^j \neq 0} \, b^j(x_{s^-}, \Delta y_s^j).$$

Pour alléger les notations, nous avons omis d'écrire que $\overset{c}{S} b^j$ dépend aussi de $x_0 \in R^n$. De plus les sauts de y^1 et y^2 sont disjoints, de telle sorte que si $y_s^j \neq y_{s^-}^j$, $\Delta x_s = \Delta y_s^j$. D'après Meyer [16], Jacod [12], $\overset{c}{S} b^j$ existe et peut être définie par

$$\begin{aligned} \overset{c}{S}_{s \leqq t} b_j(x_{s^-}, \Delta y_s^j) = \lim_{\varepsilon \downarrow \downarrow 0} \Big\{ & \sum_{\substack{s \leqq t \\ |\Delta y_s^j| \geqq \varepsilon}} b^j(x_{s^-}, \Delta y_s^j) \\ & - \int_0^t ds \int_{|y| \geqq \varepsilon} b^j(x_s, y) \, d\mu^j(y) \Big\} \end{aligned} \tag{1.8}$$

où la limite dans (1.8) est prise en probabilité, et uniformément en $t \leqq T < +\infty$.

Définition 1.4. Sur $(D(R^n) \times D(R^n), \Pi^1 \otimes \Pi^2)$, pour $j=1, 2$, on note Z_t^j la martingale $\geqq 0$ et de carré intégrable

$$\begin{aligned} Z_t^j = & \exp(\overset{c}{S} b^j(x_{s^-}, \Delta y_s^j)) \\ & \cdot \prod_{\substack{s \leqq t \\ \Delta y_s^j \neq 0}} [\exp(-b^j(x_{s^-}, \Delta y_s^j))(1 + b^j(x_{s^-}, \Delta y_s^j))]. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Z_t^j est exactement l'exponentielle de Doléans-Dade [28], solution unique de l'équation différentielle stochastique

$$Z_t^j = 1 + \int_0^t Z_{s^-}^j \, d\overset{c}{S} b^j. \tag{1.10}$$

Pour vérifier que Z_t^j est effectivement une martingale de carré intégrable, on note T_k^j le temps d'arrêt

$$T_k^j = \inf\{t \geqq 0; Z_t^j \geqq k\}.$$

Alors

$$E[Z_{t \wedge T_k^j}^j]^2 = 1 + E \int_0^{t \wedge T_k^j} (Z_s^j)^2 \, ds \int_{R^n/\{0\}} |b^j(x_s, y)|^2 \, d\mu^j(y).$$

Comme $\int_{R^n/\{0\}} |b^j(x', y)|^2 \, d\mu^j(y)$ est borné, on a

$$E[Z_{t \wedge T_k^j}^j]^2 \leqq 1 + C \int_0^t E[Z_{s \wedge T_k^j}^j]^2 \, ds.$$

Par le lemme de Gronwall, on trouve que $E[Z^j_{t\wedge T^j_k}]^2$ est uniformément borné, d'où il résulte sans difficulté que Z^j_t est bien une martingale de carré intégrable.

Comme y^1 et y^2 ont des sauts disjoints, $\overset{c}{S} b^1$ et $\overset{c}{S} b^2$ ont des sauts disjoints. $Z_t = Z^1_t Z^2_t$ est donc l'exponentielle de Doléans-Dade associée à la martingale $\overset{c}{S} b^1 + \overset{c}{S} b^2$, et Z_t est encore une martingale $\geqq 0$ de carré intégrable.

b) Un probléme de martingales

Définition 1.5. On note $\mathscr{L}^{b^1,b^2}$ l'opérateur qui agit sur $f \in C^\infty_b(R^n)$ par

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{b^1,b^2} f = X^k_0(x) \frac{\partial}{\partial x^k} f(x) + \sum_{j=1}^{2} \Big\{ &\int_{|y|\leqq 1} y^l b^j(x,y)\, d\mu^j(y) \frac{\partial}{\partial x^l} f(x) \\ &+ \int_{|y|\leqq 1} \left[f(x+y) - f(x) - y^l \frac{\partial f}{\partial x^l}(x) \right] (1 + b^j(x,y))\, d\mu^j(y) \\ &+ \int_{|y|>1} [f(x+y) - f(x)](1 + b^j(x,y))\, d\mu^j(y) \Big\}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Grâce aux hypothèses faites sur b^1, b^2, (1.11) est bien défini.

Définition 1.6. On dit qu'une mesure de probabilité Q sur $D(R^n)$ est solution du problème des martingales associé à (x_0, b^1, b^2), si

a) $Q(x(0) = x_0) = 1$

b) Pour tout $f \in C^\infty_b(R^n)$,

$$f(x_t) - \int_0^t (\mathscr{L}^{b^1,b^2} f)(x_s)\, ds \tag{1.12}$$

est une martingale.

On a alors le résultat suivant.

Théorème 1.7. *Il existe une et une seule solution $Q^{b^1,b^2}_{x_0}$ du problème des martingales associé à (x_0, b^1, b^2). Si P est la mesure de probabilité sur $D(R^n) \times D(R^n)$ dont la densité par rapport à $\Pi^1 \otimes \Pi^2$ sur chaque F^{y^1,y^2}_t est donnée par Z_t, i.e.*

$$\frac{dP(y^1, y^2)}{d\Pi^1(y^1)\, d\Pi^2(y^2)} \bigg| F^{y^1,y^2}_t = Z_t \tag{1.13}$$

alors sur $(D(R^n) \times D(R^n), P)$, la loi de x donné par (1.5) est égale à $Q^{b^1,b^2}_{x_0}$. La famille $Q^{b^1,b^2}_{x_0} (x_0 \in R^n)$ définit un processus fortement markovien.

Peuve. Si $b^1 = b^2 = 0$, le résultat est vrai. En effet pour la mesure $\Pi^1 \otimes \Pi^2$, comme $x_t - x - \int_0^t X_0(x_s)\, ds = y_t$, pour tout $\alpha \in R^n$, si $\mu = \mu^1 + \mu^2$

$$\begin{aligned}\exp\Big\{ -i \left\langle \alpha, x_t - \int_0^t X_0(x_s)\, ds \right\rangle - \int_{|z|\leqq 1} t(\exp(-i\langle \alpha, z\rangle) - 1 \\ + i\langle \alpha, z\rangle)\, d\mu(z) - \int_{|z|>1} t(\exp(-i\langle \alpha, z\rangle) - 1)\, d\mu(z) \Big\}\end{aligned} \tag{1.14}$$

est une martingale, et donc par [18]-Théorème 1.1 la loi de x pour $\Pi^1 \otimes \Pi^2$ est solution du problème des martingales associé à $(x_0, 0, 0)$. Inversement si Q est solution du problème des martingales associé à $(x_0, 0, 0)$, par [18]-Théorème 1.1, pour tout $\alpha \in R^n$, (1.14) est une martingale, et donc $x_t - x_0 - \int_0^t X_0(x_s)\, ds$ a pour loi la loi de y pour $\Pi^1 \otimes \Pi^2$, ce qui montre que Q est bien unique.

Si P est la mesure de probabilité définie par (1.13), nous renvoyons à Jacod [12] pour montrer que la loi de x pour P est solution du problème des martingales associé à (x_0, b^1, b^2).

Montrons maintenant l'unicité dans le cas général. Soit μ la mesure $\mu^1 + \mu^2$, et a^1 et a^2 les densités de μ^1 et μ^2 par rapport à μ. Si $b(x', y)$ est défini par

$$b(x', y) = a^1(y)\, b^1(x', y) + a^2(y)\, b^2(x', y) \tag{1.15}$$

pour $f \in C_b^\infty(R^n)$, on a

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{b^1, b^2} f = {} & X_0^l \frac{\partial}{\partial x^l} f(x') + \int_{|y| \leqq 1} y^l b(x', y)\, d\mu(y) \frac{\partial}{\partial x^l} f(x') \\ & + \int_{|y| \leqq 1} \left(f(x'+y) - f(x') - y^l \frac{\partial}{\partial x^l} f(x')\right)(1 + b(x', y))\, d\mu(y) \\ & + \int_{|y| > 1} (f(x'+y) - f(x'))(1 + b(x', y))\, d\mu(y).\end{aligned} \tag{1.16}$$

Supposons tout d'abord qu'il existe $\beta > 0$ tel que $1 + b \geqq \beta$. Si

$$d(x', y) = \frac{-b(x', y)}{1 + b(x', y)}$$

on a

$$\begin{aligned}\int_{R^n/\{0\}} |d(x', y)|^2 (1 + b(x', y))\, d\mu(y) & \leqq \frac{1}{\beta} \int |b(x', y)|^2\, d\mu(y) \\ & \leqq \frac{1}{\beta} \sum_{j=1}^{2} \int |b^j(x', y)|^2\, d\mu^j(y).\end{aligned} \tag{1.17}$$

(1.17) est donc uniformément borné. Si Q est une mesure de probabilité sur $D(R^n)$ solution du problème des martingales associé à (x_0, b^1, b^2) sur $(D(R^n), Q)$, on peut définir la somme compensée $\overset{c'}{S} d$ qui est la martingale somme compensée des sauts $1_{\Delta x_s \neq 0}\, d(x_{s^-}, \Delta x_s)$. En utilisant (1.17), on voit que si Z'_t est l'exponentielle de Doléans-Dade associée à $\overset{c'}{S} d$, Z'_t est une martingale de carré intégrable. Comme $1 + d > 0$, $Z'_t > 0$.

Par les techniques de Jacod [12], on voit que la mesure de probabilité Q^0 dont la densité relativement à Q sur chaque F_t^x est égale à Z'_t est solution du problème des martingales associé à $(x_0, 0, 0)$ et est donc unique. Comme $Z'_t > 0\, Q$ p.s. et Q^0 p.s., Q est unique.

Dans le cas général, on pose

$$b'(x', y) = 1_{b(x', y) \geqq -\frac{1}{2}}\, b(x', y). \tag{1.18}$$

Comme

$$\int_{R^n/\{0\}} |b'(x',y)|^2 d\mu(y) \leqq \int_{R^n/\{0\}} |b(x',y)|^2 d\mu(y) \leqq \sum_{j=1}^{2} \int_{R^n/\{0\}} |b^j(x',y)|^2 d\mu^j(y) \tag{1.19}$$

et comme $1+b' \geqq \frac{1}{2}$, les arguments précédents montrent qu'il existe une et une seule mesure de probabilité Q' sur $D(R^n)$ solution du problème des martingales associé au point de départ x_0 et au générateur obtenu en remplaçant b par b' à droite de (1.16).

Soit Q une mesure de probabilité sur $D(R^n)$ solution du problème des martingales associé à (x_0, b^1, b^2). Soit $T_0, \ldots, T_n$ les temps d'arrêt définis par récurrence par

$$T_0 = 0; \qquad T_{n+1} = \inf\{t \geqq T_n;\, b(x_{t^-}, \Delta x_t) < -\tfrac{1}{2}\}.$$

Notons alors que comme

$$\int_{R^n/\{0\}} 1_{b(x',y) < -\frac{1}{2}} (1 + b(x',y))\, d\mu(y) \leqq \frac{1}{2} \int_{R^n/\{0\}} 1_{b(x',y) < -\frac{1}{2}} d\mu(y) \leqq 2 \int_{R^n/\{0\}} |b(x',y)|^2 d\mu(y) \tag{1.20}$$

en utilisant (1.19), on voit que le membre de droite de (1.20) est uniformément borné. Donc sur $(D(R^n), Q)$ $S_{s \leqq t} 1_{b(x_{s^-}, \Delta x_s) < -\frac{1}{2}}$ est $< +\infty$ p.s., ce qui implique que $T_n \to +\infty\, Q$ p.s. On peut alors refaire le raisonnement de Stroock [18] -3. En effet on voit que pour la loi Q, le processus x'_t coïncidant avec x_t pour $t < T_1$ et tué au temps T_1 a même loi que le processus $\tilde{x}_t$ qui suit la loi Q' et est tué suivant le taux $\int 1_{b(x',y) < -\frac{1}{2}} (1 + b(x',y))\, d\mu(y)$. De plus sur $(D(R^n), Q)$, conditionnellement à $\mathscr{B}(x'_s; s < +\infty)$, sur $(T_1 < +\infty)$, la loi de Δx_{T_1} est donnée par

$$\frac{1_{b(x'_{T_1^-}, y) < -\frac{1}{2}} (1 + b(x'_{T_1^-}, y))\, d\mu(y)}{\int_{R^n/\{0\}} 1_{b(x'_{T_1^-}, z) < -\frac{1}{2}} (1 + b(x'_{T_1^-}, z))\, d\mu(z)}. \tag{1.21}$$

Comme Q' est unique, on voit que Q est déterminée de manière unique sur $[0, T_1]$. On itère le raisonnement sur $[T_1, T_2] \ldots [T_n, T_{n+1}] \ldots$ en considérant les lois conditionnelles de Q relativement à $F^x_{T_1}, F^x_{T_2}, \ldots$ et en notant qu'elles sont aussi solutions d'un problème de martingales. Comme $T_n \to +\infty\, Q$ p.s., on a montré l'unicité de Q dans le cas général.

De l'unicité, on déduit la propriété de Markov forte des $\{Q_{x_0}\}_{x_0 \in R^n}$ en raisonnant comme Stroock et Varadhan [21] et Stroock [18]. □

2. Calcul des variations stochastique sur un processus de sauts

L'objet de cette section est d'obtenir une formule d'intégration par parties sur l'espace de probabilité de certains processus de sauts qui étende la formule (0.5) d'intégration par parties sur un espace de dimension finie.

Dans l'ensemble de cette section, on reprend l'ensemble des hypothèses et notations de la section 1. Ces hypothèses sont complétées au paragraphe a). Au paragraphe b), on donne certains rappels d'analyse fonctionelle. Enfin au paragraphe c), on montre une formule d'intégration par parties.

a) Hypothèses et notations

Pour alléger les notations, on supposera que dans la suite, si on intègre (sur un espace quelconque) une expression du type $\frac{F}{G}$, on limite l'intégration aux points où $G \neq 0$, i.e.

$$\int \frac{F}{G} = \int 1_{G \neq 0} \frac{F}{G}. \tag{2.1}$$

On suppose que n_1 est un entier tel que $1 \leqq n_1 \leqq n$. Pour $y \in R^n$, on écrit

$$y = (z, z')\; z \in R^{n_1}, \qquad z' \in R^{n-n_1}.$$

On fait maintenant l'hypothèse suivante:

$\mathbb{H}$ 2.1: La mesure μ^1 sur $R^n/\{0\}$ est telle que

$$d\mu^1(z, z') = g(z)\, dz\, \delta_{z' = \rho(z)} \tag{2.2}$$

où

a) $g(z)$ est une fonction $\geqq 0$ de classe C^1 sur $R^{n_1}/\{0\}$ telle que

$$\int_{|z| \leqq 1} |z|^2 g(z)\, dz + \int_{|z| > 1} g(z)\, dz < +\infty \tag{2.3}$$

et que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\int_{|z| \geqq \varepsilon} \frac{|g_z(z)|^2}{g(z)}\, dz < +\infty. \tag{2.4}$$

b) $\rho(z)$ est une fonction définie sur $R^{n_1}/\{0\}$ à valeurs dans R^{n-n_1} que l'on suppose de classe C^1 à dérivée uniformément bornée et telle que

$$\int_{R^{n_1}/\{0\}} |\rho(z)|^2 g(z)\, dz < +\infty. \tag{2.5}$$

L'hypothèse $\mathbb{H}$2.1 indique que les sauts du processus $y_t^1 = (z_t^1, z_t'^1)$ pour la mesure Π^1 sont tels que z_t^1 est un processus à accroissements indépendants qui saute suivant la mesure de Lévy $g(z)\, dz$, et que $z_t'^1$ saute en «suivant» les sauts de z_t^1, i.e. si z_t^1 saute de Δz^1, z'^1 saute de $\rho(\Delta z^1)$.

Π'^1 désigne la loi du processus z_t^1 sur $D(R^{n_1})$ pour la mesure Π^1.

Dans la suite, on peut supposer sans inconvénient que b^1 est définie sur $R^n \times R^{n_1}/\{0\}$ (au lieu d'être définie sur $R^n/\{0\}$) et on écrit $b^1(x, z)$ au lieu de $b^1(x, y)$.

On fait ensuite les hypothèses:

$\mathbb{H}$ 2.2: La fonction $b^1(x,z)$ définie sur $R^n \times R^{n_1}/\{0\}$ est de classe C^1, telle que

a) Pour tout $\varepsilon>0$, pour $|z|\geqq\varepsilon$, les fonctions

$$b^1(x,z),\ b^1_x(x,z),\ b^1_z(x,z) \tag{2.6}$$

sont uniformément bornées.

b) Les fonctions

$$\int_{R^{n_1}/\{0\}} |b^1(x,z)|^2\, g(z)\, dz, \qquad \int_{R^{n_1}/\{0\}} \frac{|b^1_x(x,z)|^2}{1+b^1(x,z)}\, g(z)\, dz \tag{2.7}$$

sont uniformément bornées.

c) Pour tout $\varepsilon>0$, la fonction

$$\int_{|z|\geqq\varepsilon} \frac{|b^1_z(x,z)|^2}{1+b^1(x,z)}\, g(z)\, dz \tag{2.8}$$

est uniformément bornée.

$\mathbb{H}$ 2.3: La fonction $b^2(x,y)$ *est de classe* C^1 en la variable $x\in R^n$, et telle que

a) Pour tout $\varepsilon>0$, si $|y|\geqq\varepsilon$, les fonctions

$$b^2(x,y), \qquad b^2_x(x,y) \tag{2.9}$$

sont uniformément bornées.

b) Les fonctions

$$\int_{R^n/\{0\}} |b^2(x,y)|^2\, d\mu^2(y), \qquad \int_{R^n/\{0\}} \frac{|b^2_x(x,y)|^2}{1+b^2(x,y)}\, d\mu^2(y) \tag{2.10}$$

sont uniformément bornées.

Nous faisons maintenant quelques remarques sur les hypothèses précédentes. Tout d'abord on applique la convention (2.1) dans les formules (2.4), (2.7), (2.8), (2.10). Notons aussi que comme $g\geqq 0$, $1+b^1\geqq 0$, $1+b^2\geqq 0$, dès que l'une de ces expressions est nulle, sa dérivée première est aussi nulle. De plus b) dans $\mathbb{H}$ 2.2 et b) dans $\mathbb{H}$ 2.3 contiennent un rappel de (1.7).

Si $\mathcal{O}$ est un ouvert de R^{n_1}, $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathcal{O}$ à valeurs dans R, qui sont C^∞ à support compact dans $\mathcal{O}$.

Notons alors que si $f\in\mathcal{D}(R^{n_1}/\{0\})$, $g=f^2$ vérifie (2.4). Cette remarque nous sera utile pour étudier les cas où g peut s'annuler.

Définition 2.1. $m^1(x,z)$ (resp. $m^2(x,y)$) est la fonction définie sur $R^n\times R^{n_1}/\{0\}$ (resp. $R^n\times R^n/\{0\}$) par

$$m^1(x,z)=(1+b^1(x,z))\, g(z) \tag{2.11}$$

(resp. (2.11′) $m^2(x,y)=1+b^2(x,y)$). $M^1(x,dz)$ (resp. $M^2(x,dy)$) est le noyau sur $R^n \times R^{n_1}/\{0\}$ (resp. sur $R^n\times R^n/\{0\}$)

$$M^1(x,dz)=m^1(x,z)\, dz \tag{2.12}$$

(resp. (2.12′) $M^2(x,dy)=m^2(x,y)\, d\mu^2(y)$).

Si $M(x, dy)$ est le noyau de Lévy du processus de Markov associé aux lois $Q_x^{b_1, b_2}$ construites au Théorème 1.7, on a en posant $y=(z, z')$

$$M(x, dy) = M^1(x, dz)\, \delta_{z'=\rho(z)} + M^2(x, dy). \tag{2.13}$$

Notons aussi que comme

$$\frac{|m_z^1|^2}{m^1} \leqq C\left[\frac{|b_z^1|^2 g}{1+b^1} + \frac{(1+b^1)\,|g_z|^2}{g}\right].$$

grâce à (2.4), (2.6), (2.8), pour tout $\varepsilon > 0$

$$\int_{|z| \geqq \varepsilon} \left|\frac{m_z^1}{m^1}\right|^2 (x, z)\, M^1(x, dz) \tag{2.14}$$

est une fonction uniformément bornée.

De même par (2.7), (2.10)

$$\int_{R^{n_1}/\{0\}} \left|\frac{m_x^1}{m^1}\right|^2 (x, z)\, M^1(x, dz), \qquad \int_{R^n/\{0\}} \left|\frac{m_x^2}{m^2}\right|^2 (x, z)\, M^2(x, dy) \tag{2.15}$$

sont uniformément bornées.

Des hypothèses $\mathbb{H}$ 2.1, $\mathbb{H}$ 2.2, $\mathbb{H}$ 2.3, ont peut donc tirer des conclusions globales sur la fonction m^1 ou le noyau M^2 qui ne dépendent plus de la factorisation (2.11) ou de l'écriture (2.12').

b) Rappels d'analyse fonctionnelle

T désigne un réel >0, et $D_T(R^n)$ l'ensemble des fonctions cadlag définies sur $[0, T]$ à valeurs dans R^n.

On munit $D_T(R^n)$ d'une structure d'espace de Banach, en définissant la norme $\|x\|$ de $x \in D_T(R^n)$ par

$$\|x\| = \sup_{0 \leqq t \leqq T} |x_t|. \tag{2.16}$$

Il est bien connu – voir Billingsley [29], chapitre 3 – que, muni de la topologie associée à la norme (2.16), $D_T(R^n)$ n'est pas séparable, et n'est donc pas polonais.

Si $\{F_t^T\}_{0 \leqq t \leqq T}$ est la filtration canonique sur $D_T(R^n)$ $\{\mathscr{B}(x_s | s \leqq t)\}_{0 \leqq t \leqq T}$, il est classique F_T^T est exactement la tribu borélienne de l'espace polonais $D_T(R^n)$ muni de la topologie de Skorokhod (voir [29], chapitre 3).

H désigne une fonction définie sur $D_T(R^n)$ à valeurs dans R, qui est F_T^T-mesurable, bornée, continue et différentiable (au sens de Fréchet) pour la topologie de la norme (2.16), et qui est enfin uniformément lipschitzienne relativement à la norme (2.16).

Notons que comme la tribu borélienne de l'espace de Banach $D_T(R^n)$ contient strictement F_T^T (voir [29], chapitre 3), une fonction continue pour la topologie de la norme n'est pas nécessairement F_T^T-mesurable.

Soit $D'_T(R^n)$ le dual de l'espace de Banach $D_T(R^n)$. Comme h est uniformément lipschitzienne, les dérivées $\{dh(x)\}_{x\in D_T(R^n)}$ forment un ensemble borné dans $D'_T(R^n)$. En utilisant un résultat de Meyer [16] dans un cas particulièrement simple, on sait décrire l'espace $D'_T(R^n)$. En effet $D'_T(R^n)$ s'identifie à l'ensemble des couples de mesures finies $C=(A,B)$ sur $[0,T]$ à valeurs dans R^n telles que B est purement discontinu et ne charge pas 0, qui opèrent sur $D_T(R^n)$ par

$$y\in D_T(R^n)\to\langle C,y\rangle=\int_{[0,T]}\langle y_t, dA_t\rangle+\int_{]0,T]}\langle y_{t^-}, dB_t\rangle.$$

De plus une norme $\|C\|'$ de C dans $D'_T(R^n)$ est donnée par

$$\|C\|'=\int_{[0,T]}|dA_t|+\int_{]0,T]}|dB_t|.$$

Pour $u>0$, l'application $(x,y)\in D_T(R^n)\times D_T(R^n)\to\dfrac{H(x+uy)-H(x)}{u}$ est mesurable (nous ne précisons plus que $D_T(R^n)$ est muni de la tribu F_T^T). Donc $(x,y)\to\langle dH(x),y)\rangle$ est mesurable. Ainsi

$$(x,y)\in D_T(R^n)\times D_T(R^n)\to\int_0^T\langle y_t, dA_t^x\rangle+\int_0^T\langle y_{t^-}, dB_t^x\rangle$$

est mesurable. Il est probable que ceci n'implique pas que $x\to A^x$, $x\to B^x$ sont mesurables de $D_T(R^n)$ dans l'espace $\mathscr{M}$ des mesures bornées. Ceci n'a aucune importance pour la suite puisqu'on considèrera toujours globalement des expressions du type $\int_0^T\langle y_t, dA_t^x\rangle+\int_0^T\langle y_{t^-}, dB_t^x\rangle$. Le lecteur peut, s'il de désire, faire l'hypothèse que A^x et B^x sont mesurables, ce qui sera effectivement le cas à partir de la section 4.

Dans la suite, si $x\in D(R^n)$, on note encore x la restriction à $[0,T]$ de x.

c) *Une formule d'intégration par parties*

Avant de montrer la formule d'intégration par parties, nous donnons encore quelques définitions.

Définition 2.2. Pour $x_0\in R^n$, $y\in D(R^n)$, on désigne par $\varphi_t(x_0)$ la solution x_t de l'équation (1.5).

On omet encore la dépendance de $\varphi_t(x_0)$ en y.

Grâce à (1.6), il est clair que pour $y\in D(R^n)$ fixé, pour tout $t\geqq 0$, $x_0\to\varphi_t(x_0)$ est un difféomorphisme C^∞ de R^n sur R^n. De plus pour $y\in D(R^n)$, $x_0\in R^n$ fixés, $Z_t=\dfrac{\partial\varphi_t(x_0)}{\partial x}$ est solution de l'équation différentielle

$$dZ = \frac{\partial X_0}{\partial x}(x_t)\, Z\, dt$$

$$Z(0) = I \tag{2.17}$$

et $Z'_t = \left(\frac{\partial \varphi_t(x_0)}{\partial x}\right)^{-1}$ est solution de

$$dZ' = -Z' \frac{\partial X_0}{\partial x}(x_t)\, dt; \qquad Z'(0) = I. \tag{2.17'}$$

De (2.17), il résulte que pour tout $y \in D(R^n)$ fixé, pour tout multiindice m tel que $|m| \geqq 1$, $(t, x_0) \to \frac{\partial^m \varphi_t}{\partial x^m}(x_0)$ est continu sur $R^+ \times R^n$.

On rappelle que R^{n_1} est identifié au sous-espace $R^{n_1} \times \{0\}$ dans R^n, et R^{n-n_1} à $\{0\} \times R^{n-n_1}$. Ainsi $\Lambda \in R^{n_1}$ est identifié à $(\Lambda, 0) \in R^n$, et $\rho_z(z)\,\Lambda \in R^{n-n_1}$ est identifié à $(0, \rho_z(z)\,\Lambda) \in R^n$.

Définition 2.3. On note Ω l'espace $D(R^n) \times D(R^n)$, et ω son point général. $\mathscr{P}$ désigne la tribu prévisible sur $R^+ \times \Omega$. Π est la mesure $\Pi^1 \otimes \Pi^2$ sur Ω. E^Π (resp. E^P) est l'opérateur d'espérance pour Π (resp. P).

Pour la définition et l'utilisation de la tribu prévisible, nous renvoyons à Dellacherie-Meyer [7], Meyer [16], Jacod [12]. On trouvera de même dans [16], [12] la définition des opérations suivantes (voir aussi (1.8)).

Définition 2.4. S désigne l'opération de somme (non compensée) de sauts sur (Ω, Π) ou (Ω, P). $\overset{c}{S}$ (resp. $\overset{c'}{S}$) désigne l'opération de somme compensée de sauts sur (Ω, Π) (resp. (Ω, P)).

$S_{s \leqq t}$, $S_{s<t}$ indique l'opération de somme de sauts jusqu'à l'instant t inclus, et jusqu'à l'instant t exclu. On utilise la même notation pour $\overset{c}{S}, \overset{c'}{S}$.

Si $\lambda_t(\omega, z)$ est une fonction définie sur $(R^+ \times \Omega) \times R^{n_1}$, on omettra (t, ω), i.e., on écrit $\lambda(z)$. $S_{s \leqq t}\, \lambda(\Delta z_s^1)$ désigne la somme des sauts $1_{\Delta z_s^1 \neq 0}\, \lambda_s(\omega, \Delta z_s^1)$ pour $s \leqq t$ (quand cette somme existe!). On utilise des notations du même type pour les sommes S sur le processus y^2.

On a alors le résultat fondamental de cette section qui sera utilisé dans toute la suite, et qui étend [8, 9] et le théorème 2.1 de [3].

Théorème 2.5. *Soit $\Lambda_t(\omega, z)$ une fonction définie sur $(R^+ \times \Omega) \times R^{n_1}/\{0\}$ à valeurs dans R^{n_1}, qui est bornée, $\mathscr{P} \otimes \mathscr{B}(R^{n_1}/\{0\})$ mesurable, et telle que*

a) *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $|z| \leqq \varepsilon$, $\Lambda_t(\omega, z) = 0$.*

b) *Λ est de classe C^1 en la variable $z \in R^{n_1}/\{0\}$, et la dérivée Λ_z est uniformément bornée.*

Alors si $x_0 \in R^n$, si x_t est le processus $\varphi_t(x_0)$, et φ_t^* le processus continu prévisible $\frac{\partial \varphi_t}{\partial x}(x_0)$, on a l'égalité

$$E^P\Big[\int_{[0,T]} \langle dA_t^x, \varphi_t^* S_{s\leqq t}\{\varphi_s^{*-1}(A(\Delta z_s^1)+\rho_z(\Delta z_s^1)\,A(\Delta z_s^1))\}\rangle$$
$$+\int_{]0,T]} \langle dB_t^x, \varphi_t^* S_{s<t}\{\varphi_s^{*-1}(A(\Delta z_s^1)+\rho_z(\Delta z_s^1)\,A(\Delta z_s^1))\}\rangle\Big]$$
$$+E^P\Bigg[H(x)\Bigg(\overset{c'}{S}_{s\leqq T}\left\{\frac{\operatorname{div}_{z=\Delta z_s^1}(m^1(x_{s-},z)\,A_s(z))}{m^1(x_{s-},\Delta z_s^1)}\right\}$$
$$+\overset{c'}{S}_{s\leqq T}\left\langle\frac{m_x^1}{m^1}(x_{s-},\Delta z_s^1)+\frac{m_x^2}{m^2}(x_{s-},\Delta y_s^2),\ \varphi_s^* S_{u<s}\right.$$
$$\left.\cdot\,\{\varphi_u^{*-1}(A(\Delta z_u^1)+\rho_z(\Delta z_u^1)\,A(\Delta z_u^1))\}\right\rangle\Bigg)\Bigg]=0. \tag{2.18}$$

Preuve. L'idée essentielle de la preuve est d'utiliser une perturbation du type (0.8) et d'établir la formule quand g, b^1, b^2 vérifient des conditions qui rendent très simple d'établir (2.18) puis de passer à la limite. Notons tout de suite que le fait que g, $1+b^1$, $1+b^2$ puissent s'annuler est un facteur supplémentaire de complications.

On va procéder en plusieurs étapes.

A. La formule (2.18) a bien un sens

En effet par (2.17), (2.17'), $\frac{\partial\varphi_t}{\partial x}(x)$ et $\left[\frac{\partial\varphi_t}{\partial x}(x)\right]^{-1}$ sont des processus continus et uniformément bornés. De plus:

a) La somme U_t donnée par

$$\begin{aligned}U_t&=S_{s\leqq t}\,\varphi_s^{*-1}(A(\Delta z_s^1)+\rho_z(\Delta z_s^1)\,A(\Delta z_s^1))\\&=\sum_{\substack{s\leqq t\\|\Delta z_s^1|\geqq\varepsilon}}\varphi_s^{*-1}(A(\Delta z_s^1)+\rho_z(\Delta z_s^1)\,A(\Delta z_s^1))\end{aligned} \tag{2.19}$$

existe bien puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de $s\leqq t$ tels que $|\Delta z_s^1|\geqq\varepsilon$. De plus

$$\begin{aligned}E^P[\sup_{0\leqq t\leqq T}|U_t|]&\leqq CE^P\int_0^T ds\int_{R^{n_1}/\{0\}}|A(z)|\,m^1(x_s,z)\,dz\\&\leqq CT\sup_{x'\in R^n}\int_{|z|\geqq\varepsilon}m^1(x',z)\,dz.\end{aligned} \tag{2.20}$$

De (2.3), (2.7), on tire que le membre de droite de (2.20) est $<+\infty$. Comme dA_t^x, dB_t^x sont uniformément bornés, le premier terme à gauche de (2.18) est bien défini.

b) Sur (Ω, P), les processus

$$S_{s\leqq t}\,1_{m^1(x_{s-},\,\Delta z_s^1)=0};\qquad S_{s\leqq t}\,1_{m^2(x_{s-},\,\Delta y_s^2)=0} \tag{2.21}$$

sont p.s. le processus nul. En effet, on a par exemple

$$E^P[S_{s\leqq t}\,1_{m^1(x_{s-},\,\Delta z_s^1)=0}]=E^P\int_0^T ds\int_{R^{n_1}/\{0\}}1_{m^1(x_s,z)=0}\,m^1(x_s,z)\,dz=0. \tag{2.22}$$

Les dénominateurs des termes apparaissant dans les sommes compensées $\overset{c'}{S}$ sont donc P p.s. non nuls.

c) On va vérifier que les sommes compensées existent bien et définissent ainsi des martingales de carré intégrable. On a

$$\begin{aligned} E^P \int_0^T ds \int_{R^{n_1}/\{0\}} & \left|\frac{\operatorname{div}_z m^1(x_s, z)\, A(z)}{m^1(x_s, z)}\right|^2 m^1(x_s, z)\, dz \\ & \leqq CT \left[\sup_{x' \in R^n} \int_{|z| \geqq \varepsilon} \left|\frac{m_z^1}{m^1}\right|^2 (x', z)\, m^1(x', z)\, dz \right. \\ & \quad \left. + \sup_{x' \in R^n} \int_{|z| \geqq \varepsilon} m^1(x', z)\, dz \right]. \end{aligned} \tag{2.23}$$

En utilisant (2.14) et (2.20), on voit que (2.23) est $< +\infty$. On a obtenu le résultat cherché pour la première somme compensée. De plus, par (2.15) on a:

$$\begin{aligned} E^P \int_0^T ds \int_{R^{n_1}/\{0\}} & \left|\frac{m_x^1}{m^1}\right|^2 (x_s, z)\, m^1(x_s, z)\, dz \\ & \cdot |\varphi_s^* S_{u<s} \{\varphi_u^{*-1} (A(\Delta z_u^1) + \rho_z(\Delta z_u^1)\, A(\Delta z_u^1))\}|^2 \\ & \leqq C E^P \int_0^T |S_{u \leqq s} |A(\Delta z_u^1)||^2\, ds. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Or on voit sans difficulté que le processus

$$\exp\left[S_{u \leqq t} |A(\Delta z_u^1)| - \int_0^t ds \int_{|z| \geqq \varepsilon} (\exp(|A_s(z)|) - 1)\, m^1(x_s, z)\, dz\right] \tag{2.25}$$

est une martingale sur (Ω, P). De (2.20), on tire facilement que

$$E^P \exp[S_{u \leqq t} |A(\Delta z_u^1)|] \leqq \exp Ct \tag{2.26}$$

de telle sorte que

$$E^P [S_{u \leqq t} |A(\Delta z_u^1)|]^2 \leqq Ct. \tag{2.27}$$

Ainsi (2.24) est $< +\infty$. La deuxième somme compensée de sauts définit donc bien une martingale de carré intégrable. On utilise la deuxième partie de (2.15) pour montrer le même résultat pour la troisième somme.

Notons que comme $\int_{|z| \geqq \varepsilon} m^1(x', z)\, dz$ est uniformément bornée, on voit en raisonnant comme en (2.23) et en utilisant l'inégalité de Schwarz que $\int_{R^{n_1}/\{0\}} |\operatorname{grad}_z (m^1(x', z)\, A(z))|\, dz$ est uniformément borné, et donc que comme $\int_{R^{n_1}/\{0\}} m^1(x', z)\, |A(z)|\, dz$ est uniformément borné, on a

$$\int_{R^{n_1}/\{0\}} \operatorname{div}_z (m^1(x', z)\, A(z))\, dz = 0 \tag{2.28}$$

La première somme compensée $\overset{c'}{S}$ dans (2.18) est donc égale à une somme de sauts purs, i.e. le compensateur est nul.

B. Démonstration de (2.18)

On va montrer maintenant (2.18). Pour en suivre les détails, il peut être utile au lecteur de «démontrer» parallèlement la formule (0.5) sans utiliser l'existence de la mesure de Lebesgue sur R^n, qui n'a pas d'analogue sur Ω.

La formule (2.18) étant linéaire en Λ, on peut sans inconvénient supposer dans toute la suite que

$$|\Lambda| \leqq \tfrac{1}{2}; \quad |\Lambda_z| \leqq \tfrac{1}{2}.$$

On considère les quatre conditions supplémentaires.

1. g est >0 sur $R^{n_1}/\{0\}$.
2. Il existe $\beta > 0$ tel que $1+b^1 \geqq \beta$, $1+b^2 \geqq \beta$.
3. Il existe $\eta > 0$, $M > 0$ $(\eta < M)$ tel que si $|z| \leqq \eta$ ou $|z| \geqq M$, $b^1(x,z) = 0$ et que si $|y| \leqq \eta$ ou $|y| \geqq M$, $b^2(x,y) = 0$.
4. Il existe $M' > 0$ tel que si $|z| \geqq M'$, $\Lambda(z) = 0$.

On supprimera l'une après l'autre ces conditions.

a) Preuve de (2.18) *sous les conditions 1, 2, 3, 4*

On peut supposer $\eta \leqq \varepsilon$, $M \geqq M'$.
Sur (Ω, P), on a

$$x_t = x_0 + \int_0^t X_0(x_s)\, ds + y_t^1 + y_t^2. \tag{2.29}$$

Pour $l \in R$ tel que $|l| \leqq \eta \Lambda 1$ on note x_t^l la solution de l'équation

$$x_t^l = x_0 + \int_0^t X_0(x_s^l)\, ds + y_t^1 + S_{s \leqq t} \begin{bmatrix} l\Lambda(\Delta z_s^1) \\ \rho(\Delta z_s^1 + l\Lambda(\Delta z_s^1)) - \rho(\Delta z_s^1) \end{bmatrix} + y_t^2 \tag{2.30}$$

où dans la formule (2.30), la somme $S_{s \leqq t}$ a été exprimée suivant R^{n_1} et R^{n-n_1}. Cette somme existe, puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de termes, et que si $|\Delta z_s^1| \geqq \varepsilon$, $|\Delta z_s^1 + l\Lambda(\Delta z_s^1)| \geqq \frac{\varepsilon}{2}$, de telle sorte que $\rho(\Delta z_s^1 + l\Lambda(\Delta z_s^1))$ est bien défini.

Sur (Ω, P), la mesure de Lévy $d\tilde{\mu}_t^{1,l}(z)$ du processus

$$z_t^{1,l} = z_t^1 + S_{s \leqq t}\, l\Lambda(\Delta z_s^1) \tag{2.31}$$

est donnée par la relation vérifiée pour toute fonction $k \geqq 0$ borélienne sur $R^{n_1}/\{0\}$

$$\int_{R^{n_1}/\{0\}} k(z)\, d\tilde{\mu}_t^{1,l}(z) = \int_{R^{n_1}/\{0\}} k(z + l\Lambda_t(z))\, m^1(x_t, z)\, dz. \tag{2.32}$$

Fixons temporairement $(t, y^1, y^2) \in R^+ \times \Omega$. La fonction $h_t^l(z)$ définie par

$$z \in R^{n_1}/\{0\} \to h_t^l(z) = z + l\Lambda_t(z) \tag{2.33}$$

applique $R^{n_1}/\{0\}$ dans $R^{n_1}/\{0\}$, puisque $\Lambda_t(z)$ est nul pour $|z| \leqq \varepsilon$, que $|l| \leqq \varepsilon$ et que $|\Lambda| \leqq \frac{1}{2}$. De plus h_t^l est un difféomorphisme de classe C^1 de $R^{n_1}/\{0\}$ sur $R^{n_1}/\{0\}$. En effet h_t^l coïncide avec l'identité pour $|z| \leqq \varepsilon$. De plus h_t^l envoie

$\left\{z;|z|\geqq\frac{\varepsilon}{2}\right\}$ dans lui-même. Comme la dérivée de $z\to l\Lambda_t(z)$ est en norme $\leqq\frac{1}{2}$, on peut sans difficulté appliquer le théorème du point fixe sur le fermé $\left\{z;|z|\geqq\frac{\varepsilon}{2}\right\}$ et en déduire l'injectivité et la surjectivité de $h_t^l\cdot\frac{\partial h_t^l}{\partial z}(z)$ est ainsi inversible et continue en z, de telle sorte que $[h_t^l]^{-1}$ est bien de classe C^1.

Pour $z\in R^{n_1}/\{0\}$, on pose

$$c_t^l(z)=\left|\det\frac{\partial h_t^l(z)}{\partial z}\right|\frac{m^1(x_{t^-}^l,h_t^l(z))}{m^1(x_{t^-},z)}-1 \tag{2.34}$$

(grâce aux hypothèses 1, 2, 3, 4, m^1 est >0).

On a, pour k borélienne $\geqq 0$ sur $R^{n_1}/\{0\}$

$$\int_{R^{n_1}/\{0\}} k(h_t^l(z))(1+c_t^l(z))\,m^1(x_{t^-},z)\,dz=\int_{R^{n_1}/\{0\}} k(z)\,m^1(x_{t^-}^l,z)\,dz. \tag{2.35}$$

Si $|z|<\eta$, ou si $|z|>M$, $h_t^l(z)=z$, et pour tout $x'\in R^n$, $m^1(x',z)=g(z)$, et ainsi $c_t^l(z)=0$. Enfin pour $\eta\leqq|z|\leqq M$, $\frac{\eta}{2}\leqq|h_t^l(z)|\leqq M+\frac{\eta}{2}$. Grâce à (2.6), et aux conditions 1 et 2, on voit que $c_t^l(z)$ est une fonction uniformément bornée.

On pose de même, pour $y\in R^n/\{0\}$

$$d_t^l(y)=\frac{m^2(x_{t^-}^l,y)}{m^2(x_{t^-},y)}-1. \tag{2.36}$$

Pour k' borélienne $\geqq 0$ sur $R^n/\{0\}$, on a

$$\int_{R^n/\{0\}} k'(y)(1+d_t^l(y))\,m^2(x_{t^-},y)\,d\mu^2(y)=\int_{R^n/\{0\}} k'(y)\,m^2(x_{t^-}^l,y)\,d\mu^2(y). \tag{2.37}$$

Grâce à la condition 3, si $|y|\leqq\eta$, ou si $|y|\geqq M$, $d_t^l(y)=0$ et pour $|y|\geqq\eta$, par (2.9) et la condition 2, d_t^l est uniformément borné.

Alors, on a par (2.20) et son analogue pour m^2:

$$\begin{aligned}&\int_{R^{n_1}/\{0\}} |c_t^l(z)|^2\,m^1(x_{t^-},z)\,dz\leqq C\int_{|z|\geqq\eta} m^1(x_{t^-},z)\,dz\leqq C\\&\int_{R^n/\{0\}} |d_t^l(y)|^2\,m^2(x_{t^-},y)\,d\mu^2(y)\leqq C\int_{|y|\geqq\eta} m^2(x_{t^-},y)\,d\mu^2(y)\leqq C.\end{aligned} \tag{2.38}$$

Sur (Ω,P), on voit par (2.38) qu'on peut définir les martingales de carré intégrable $\overset{c'}{S}_{s\leqq t}\,c_s^l(\Delta z_s^1)$ et $\overset{c'}{S}_{s\leqq t}\,d_t^l(\Delta y_s^2)$; notons que ces martingales n'ont qu'un nombre fini de sauts.

Soit $Z_t^{1,l}$ et $Z_t^{2,l}$ les exponentielles de Doléans-Dade [28] associées aux martingales $\overset{c'}{S}c_s^l(\Delta z_s^1)$ et $\overset{c'}{S}d_s^l(\Delta y_s^2)$. En utilisant (2.38) et en raisonnant comme on l'a fait après la définition 1.4, on voit que $Z_t^{1,l}$, $Z_t^{2,l}$ sont des martingales de carré intégrable. Les sauts de z^1 et y^2 étant disjoints, $Z_t^l=Z_t^{1,l}Z_t^{2,l}$ est la martingale de carré intégrable exponentielle de Doléans-Dade associée à $\overset{c'}{S} c_s^l(\Delta z_s^1) + \overset{c'}{S} d_s^l(\Delta y_s^2)$. On a:

$$\begin{aligned} Z_T^l = \exp\Big\{ & -\int_0^T ds \int_{\eta \leqq |z| \leqq M} c_s^l(z)\, m^1(x_{s^-}, z)\, dz \\ & -\int_0^T ds \int_{\eta \leqq |y| \leqq M} d_s^l(y)\, m^2(x_{s^-}, y)\, d\mu^2(y) \Big\} \\ & \cdot \prod_{\substack{s \geqq T \\ \eta \leqq |\Delta z_s^1| \leqq M}} (1 + c_s^l(\Delta z_s^1)) \prod_{\substack{s \leqq T \\ \eta \leqq |\Delta y_s^2| \leqq M}} (1 + d_s^l(\Delta y_s^2)) \end{aligned} \tag{2.39}$$

(où dans (2.39) chaque produit Π n'a qu'un nombre fini de termes).

Soit $\bar{R}^l$ la mesure de probabilité sur Ω dont la densité sur chaque $F_t^{y^1, y^2}$ par rapport à P est égale à Z_t^l, i.e.:

$$\frac{d\bar{R}^l}{dP}\, F_t^{y^1, y^2} = Z_t^l. \tag{2.40}$$

Or, des relations (2.32), (2.35) et (2.37), et par les propriétés classiques de la transformation de Girsanov sur les processus de sauts [12], il résulte que, pour la mesure $\bar{R}^l$, la mesure de Lévy du processus $(z_t^{1,l}, y_t^2)$ est égale à:

$$1_{z \neq 0}\, m^1(x_{t^-}^l, z)\, dz + m^2(x_{t^-}^l, y)\, d\mu^2(y). \tag{2.41}$$

De (2.30)–(2.41), on tire sans difficulté que la loi du processus x^l pour la mesure $\bar{R}^l$ est égale à $Q_{x_0}^{b^1, b^2}$, i.e. ne dépend pas de l.

On a donc la relation fondamentale:

$$E^P[Z_T^l H(x^l)] = E^P[H(x)] \tag{2.42}$$

(nous avons emprunté ici une idée de Williams [24] qui avait simplifié notre preuve dans [3] pour les diffusions).

On va maintenant dériver (2.42) en $l=0$ pour obtenir (2.18). On a en effet:

$$\frac{d}{dl} E^P[Z_T^l H(x^l)]_{l=0} = 0. \tag{2.43}$$

Or, pour $l \neq 0$:

$$\frac{1}{l} E^P[Z_T^l H(x^l) - H(x)] = E^P\left[Z_T^l\, \frac{H(x^l) - H(x)}{l} \right] + E^P\left[H(x)\, \frac{Z_T^l - 1}{l} \right] \tag{2.44}$$

$\sup\limits_{|l| \leqq \eta \wedge 1} Z_T^l$ est dans tous les $L_p(\Omega, P)$ $(1 \leqq p < +\infty)$. En effet, comme

$$\int_{\eta \leqq |z| \leqq M} c_s^l(z)\, m^1(x_{s^-}, z)\, dz \quad \text{et} \quad \int_{\eta \leqq |y| \leqq M} d_s^l(y)\, m^1(x_{s^-}, y)\, d\mu^2(y)$$

restent uniformément bornés (on raisonne pour cela comme en (2.38)), en utilisant (2.39) et le fait que c_s^l et d_s^l sont uniformément bornés, on a, pour C assez grand:

$$Z_T^l \leqq C \exp C\{ S_{s \leqq T} 1_{\eta \leqq |\Delta z_s^1| \leqq M} + S_{s \leqq T} 1_{\eta \leqq |\Delta y_s^2| \leqq M} \}. \tag{2.45}$$

Or, comme en (2.25), on sait que pour tout $\theta \in R^+$:

$$\begin{aligned}\exp[\theta\{S_{s\leqq t} 1_{\eta\leqq|\Delta z_s^1|\leqq M} + S_{s\leqq t} 1_{\eta\leqq|\Delta y_s^2|\leqq M}\}\\ -\int_0^t(\exp\theta-1)\,ds(\int_{\eta\leqq|z|\leqq M} m^1(x_{s^-}, z)\,dz\\ +\int_{\eta\leqq|y|\leqq M} m^2(x_{s^-}, y)\,d\mu^2(y))]\end{aligned} \tag{2.46}$$

est une martingale sur (Ω, P). En raisonnant comme en (2.38), on voit que

$$\exp\theta[S_{s\leqq T} 1_{\eta\leqq|\Delta z_s^1|\leqq M} + S_{s\leqq T} 1_{\eta\leqq|\Delta y_s^2|\leqq M}]$$

est intégrable. De (2.45), on tire bien que $\sup_{|l|\leqq\eta\Lambda 1} Z_T^l$ est dans tous les $L_p(\Omega, P)$ $(1\leqq p<+\infty)$.

En utilisant la transformation (1.5)-(1.6) et la continuité de ρ, on voit très simplement que, quand $l\to 0$, $x^l\to x$ uniformément sur $[0, T]$. Par (2.34), (2.36), on en déduit que, quand $l\to 0$, $c_t^l\to 0$, $d_t^l\to 0$ et par ailleurs ces fonctions restent bornées. Par (2.39), on voit donc que, quand $l\to 0$, $Z_T^l\to 1$.

La transformation (1.5)-(1.6) montre très facilement que l'application $l\to x^l$ est dérivable pour $|l|\leqq\eta\Lambda 1$ à valeurs dans l'espace de Banach $D_T(R^n)$ muni de la norme (2.16). Un calcul très simple sur (1.6) montre que cette dérivée est l'élément (aléatoire!) G de $D_T(R^n)$:

$$t\to G_t=\varphi_t^* S_{s\leqq t}\varphi_s^{*-1}[A(\Delta z_s^1)+\rho_z(\Delta z_s^1)\,A(\Delta z_s^1)]. \tag{2.47}$$

Donc, comme H est dérivable, on voit que, quand $l\to 0$:

$$Z_T^l\,\frac{H(x^l)-H(x)}{l}\to\langle dH(x), G\rangle. \tag{2.48}$$

Pour montrer que les espérances convergent, il suffit de montrer que les variables aléatoires de (2.48) sont bornées dans $L_2(\Omega, P)$. Comme les Z_T^l sont bornés dans $L_4(\Omega, P)$, il suffit de montrer que les variables $\dfrac{H(x^l)-H(x)}{l}$ sont bornées dans $L_4(\Omega, P)$. H étant lipschitzienne, il suffit de borner uniformément

$$\frac{1}{l^4}\,E\,\|x^l-x\|^4. \tag{2.49}$$

Or, comme ρ_z est borné, on a:

$$E^P|x_t^l-x_t|^4\leqq C\left[E^P\int_0^t|X_0(x_s^l)-X_0(x_s)|^4\,ds+l^4\,E^P(S_{s\leqq t}A(\Delta z_s^1))^4\right]. \tag{2.50}$$

De (2.26), on tire que:

$$E^P|x_t^l-x_t|^4\leqq C\left[\int_0^t E^P|x_s^l-x_s|^4\,ds+l^4\,t\right]. \tag{2.51}$$

Du lemme de Gronwall, on tire que:

$$E^P |x_t^l - x_t|^4 \leqq C l^4 t. \tag{2.52}$$

Comme

$$E^P \|x^l - x\|^4 \leqq C\left[\int_0^T E^P |x_s^l - x_s|^4 \, ds + l^4 E^P (S_{s \leqq T} |A(\Delta z_s^1)|)^4\right], \tag{2.53}$$

on a:

$$E^P \|x^l - x\|^4 \leqq C l^4. \tag{2.54}$$

On a bien borné (2.49). Les espérances convergent donc dans (2.48). En exprimant $\langle dH(x), G.\rangle$ à l'aide de (A^x, B^x), on obtient le premier terme de (2.18).

On considère maintenant le deuxième terme à droite de (2.44). Notons d'abord que $\det \frac{\partial h^l}{\partial z}$ est >0 et que de plus:

$$\frac{\partial}{\partial l}\left[\det \frac{\partial h^l}{\partial z}\right]_{l=0} = Tr \frac{\partial A}{\partial z} = \operatorname{div}_z A. \tag{2.55}$$

On voit donc immédiatement que $l \to c_t^l(z)$ est dérivable et que de plus

$$\left.\frac{\partial c_t^l(z)}{\partial l}\right|_{l=0} = \frac{\operatorname{div}_z [m^1(x_{t-}, z) A(z)]}{m^1(x_{t-}, z)} + \left\langle \frac{m_x^1(x_{t-}, z)}{m^1(x_{t-}, z)}, G_{t-}\right\rangle. \tag{2.56}$$

De même:

$$\left.\frac{\partial d_t^l(y)}{\partial l}\right|_{l=0} = \left\langle \frac{m_x^2(x_{t-}, y)}{m^2(x_{t-}, y)}, G_{t-}\right\rangle. \tag{2.57}$$

Montrons que les fonctions:

$$\begin{aligned} &l \to \int_0^T ds \int_{\eta \leqq |z| \leqq M} c_s^l(z)\, m^1(x_s, z)\, dz \\ &l \to \int_0^T ds \int_{\eta \leqq |y| \leqq M} d_s^l(y)\, m^2(x_s, y)\, dy \end{aligned} \tag{2.58}$$

sont dérivables. m^1 étant de classe C^1 sur $R^n \times R^{n_1}/\{0\}$, m_x^1 et m_z^1 sont uniformément bornés sur les compacts de $R^n \times R^{n_1}/\{0\}$. Pour appliquer les résultats de dérivation sous le signe d'intégration aux fonctions de (2.58), il suffit de montrer que, pour l assez petit, les processus $G_t^l = \frac{\partial x_t^l}{\partial l}$ $(0 \leqq t \leqq T)$ sont uniformément bornés. Or, G_t^l est solution de l'équation

$$G_t^l = 1 + \int_0^t \frac{\partial X_0}{\partial x}(x_s^l)\, G_s^l\, ds + S_{s \leqq t}\left[\frac{A(\Delta z_s^1)}{\rho_z(\Delta z_s^1 + l A(\Delta z_s^1))\, A(\Delta z_s^1)}\right] \tag{2.59}$$

de telle sorte que:

$$|G_t^l| \leqq C(S_{s \leqq T} |A(\Delta z_s^1)| + 1) \tag{2.60}$$

Les dérivées en $l=0$ des fonctions de (2.58) sont donc égales à:

$$\begin{aligned}&\int_0^T ds \int_{\eta\leqq|z|\leqq M} \frac{\partial c_s^l}{\partial l}\bigg|_{l=0}(z)\, m^1(x_{s^-}, z)\, dz\\ &\int_0^T ds \int_{\eta\leqq|y|\leqq M} \frac{\partial d_s^l}{\partial l}\bigg|_{l=0}(y)\, m^2(x_{s^-}, y)\, d\mu^2(y).\end{aligned} \tag{2.61}$$

En dérivant terme à terme dans (2.39), on voit que $l\to Z_T^l$ est dérivable, et que la dérivée en 0 est donnée par:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z_T^l}{\partial l}\bigg|_{l=0} &= S_{s\leqq T}\frac{\partial c_s^l}{\partial l}\bigg|_{l=0}(\Delta z_s^1)\\ &-\int_0^T ds \int_{\eta\leqq|z|\leqq M} \frac{\partial c_s^l}{\partial l}\bigg|_{l=0}(z)\, m^1(x_{s^-}, z)\, dz + S_{s\leqq T}\frac{\partial d_s^l}{\partial l}\bigg|_{l=0}(\Delta y_s^2)\\ &-\int_0^T ds \int_{\eta\leqq|y|\leqq M} \frac{\partial d_s^l}{\partial l}\bigg|_{l=0}(y)\, m^2(x_{s^-}, y)\, d\mu^2(y).\end{aligned} \tag{2.62}$$

En utilisant (2.56), (2.57), les majorations (2.23)-(2.27), on voit que $\frac{\partial Z_T^l}{\partial l}\Big|_{l=0}$ est la martingale de carré intégrable:

$$\frac{\partial Z_T^l}{\partial l}\bigg|_{l=0} = \overset{c'}{S}_{s\leqq T}\left[\frac{\partial c^l}{\partial l}\bigg|_{l=0}(\Delta z_s^1)\right] + \overset{c'}{S}_{s\leqq T}\left[\frac{\partial d^l}{\partial l}\bigg|_{l=0}(\Delta y_s^2)\right]. \tag{2.63}$$

Donc, quand $l\to 0$:

$$H(x)\,\frac{Z_T^l-1}{l} \to H(x)\,\frac{\partial Z_T^l}{\partial l}\bigg|_{l=0}. \tag{2.64}$$

Il reste à montrer que les espérances convergent dans (2.64) pour obtenir (2.18). Pour cela, on va montrer qu'il existe U_T dans $L_1(\Omega, P)$ tel que $\left|\frac{\partial Z_T^l}{\partial l}\right| \leqq U_T$. Par (2.39), on a:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z_T^l}{\partial l} = Z_T^l\Bigg[&-\int_0^T ds \int_{\eta\leqq|z|\leqq M} \frac{\partial c_s^l}{\partial l}(z)\, m^1(x_{s^-}, z)\, dz\\ &-\int_0^T ds \int_{\eta\leqq|y|\leqq M} \frac{\partial d_s^l}{\partial l}(y)\, m^2(x_{s^-}, y)\, d\mu^2(y)\\ &+S_{s\leqq T}\frac{\frac{\partial c_s^l}{\partial l}(\Delta z_s^1)}{1+c_s^l(\Delta z_s^1)} + S_{s\leqq T}\frac{\frac{\partial d_s^l}{\partial l}(\Delta y_s^2)}{1+d_s^l(\Delta y_s^2)}\end{aligned} \tag{2.65}$$

(on utilise en particulier le fait que $1+c^l>0$, $1+d^l>0$).

Alors, on a:

$$\int_0^T ds \int_{\eta\leqq|z|\leqq M} \frac{\partial c^l}{\partial l}(z)\, m^1(x_{s^-}, z)\, dz$$
$$= \int_0^T ds \int_{\eta\leqq|z|\leqq M} \frac{\partial}{\partial l}\left[\det \frac{\partial}{\partial z} h_s^l(z)\right] m^1(x_{s^-}^l, h_s^l(z))\, dz$$
$$+ \int_0^T ds \int_{\eta\leqq|z|\leqq M} \left(\det \frac{\partial h_s^l(z)}{\partial z}\right)$$
$$\cdot \left[\langle m_x^1(x_{s^-}^l, h_s^l(z)), G_{s^-}^l\rangle + \langle m_z^1(x_{t^-}^l, h_t^l(z)), \Lambda(z)\rangle\right] dz. \tag{2.66}$$

Alors, comme pour $\eta\leqq|z|\leqq M$, $\eta/2\leqq h_t^l(z)\leqq M+\eta/2$, de (2.6), il résulte que $m^1(x', h_t^l(z))$ est uniformément borné. Sous les mêmes conditions, $\frac{\partial}{\partial l}\left[\det \frac{\partial h_t^l(z)}{\partial z}\right]$ est uniformément borné. Le premier terme à droite de (2.66) est donc borné. De plus on a trivialement:

$$\int_{\eta\leqq|z|\leqq M} \left(\det \frac{\partial h_t^l}{\partial z}\right) \left[|m_x^1(x', h_t^l(z))| + |m_z^1(x', h_t^l(z))|\right] dz$$
$$\leqq \int_{\eta/2\leqq|z|\leqq M+\eta/2} C(|m_x^1(x', z)| + |m_z^1(x', z)|)\, dz$$
$$\leqq C\left\{\left[\int_{\eta/2\leqq|z|\leqq M+\eta/2} \left|\frac{m_x^1}{m^1}\right|^2 (x', z)\, m^1(x', z)\, dz\right]^{\frac{1}{2}}\right.$$
$$\left. + \left[\int_{\eta/2\leqq|z|\leqq M+\eta/2} \left|\frac{m_z^1}{m^1}\right|^2 (x', z)\, m^1(x', z)\, dz\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$
$$\cdot \Big(\int_{\eta/2\leqq|z|\leqq M+\eta/2} m^1(x', z)\, dz\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.67}$$

Par (2.14), (2.15), (2.20), on voit que le membre de droite de (2.67) est uniformément borné. Grâce à (2.60), on peut majorer en module les deux derniers termes à droite de (2.66) par:

$$C(1 + S_{s\leqq T}|\Lambda(\Delta z_s^1)|). \tag{2.68}$$

De même

$$\int_0^T ds \int_{\eta\leqq|y|\leqq M} \frac{\partial d^l}{\partial l}(y)\, m^2(x_{s^-}, y)\, d\mu^2(y)$$
$$= \int_0^T ds \int_{\eta\leqq|y|\leqq M} \langle m_x^2(x_{s^-}^l, y), G_{s^-}^l\rangle\, d\mu^2(y). \tag{2.69}$$

En utilisant (2.15), on peut majorer en module (2.69) par (2.68).

De plus, si $\eta\leqq|z|\leqq M$, par (2.6), $m^1(x', z)$ est uniformément borné, et comme $|h_t^l(z)|\geqq\frac{\eta}{2}$, grâce aux conditions 1 et 2, $m^1(x_{t^-}^l, h_t^l(z))$ est uniformément minoré par une constante >0, de telle sorte que $1 + c_t^l(z)\geqq\gamma>0$. De même, $1 + d_t^l(y)\geqq\gamma'>0$.

De plus, en utilisant (2.6) et les conditions 1 et 2, on peut majorer en module $\frac{\partial c_t^l}{\partial l}(z)$ par $C|G_{t^-}^l|$. En utilisant (2.60), on a:

$$\left| S_{s \leq T} \frac{\frac{\partial c_s^l}{\partial l}(\Delta z_s^1)}{1 + c_s^l(\Delta z_s^1)} \right| \leq C(1 + S_{s \leq T} |A(\Delta z_s^1)|)(S_{s \leq T} 1_{\eta \leq |\Delta z_s^1| \leq M}). \tag{2.70}$$

De même, en utilisant (2.9) et les conditions 1 et 2, on a:

$$\left| S_{s \leq T} \frac{\frac{\partial d_s^l}{\partial l}(\Delta y_s^2)}{1 + d_s^l(\Delta y_s^2)} \right| \leq C(1 + S_{s \leq T} |A(\Delta z_s^1)|)(S_{s \leq T} 1_{\eta \leq |\Delta y_s^2| \leq M}). \tag{2.71}$$

Par (2.45), (2.65)-(2.71), on a donc la majoration uniforme:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial Z_T^l}{\partial l} \right| \leq C \exp C\{ & S_{s \leq T} 1_{\eta \leq |\Delta z_s^1| \leq M} + S_{s \leq T} 1_{\eta \leq |\Delta y_s^2| \leq M}\} \\ & \cdot (1 + S_{s \leq T} 1_{\eta \leq |\Delta z_s^1| \leq M}) \\ & \cdot (1 + S_{s \leq T} 1_{\eta \leq |\Delta z_s^1| \leq M} + S_{s \leq T} 1_{\eta \leq |\Delta y_s^2| \leq M}). \end{aligned} \tag{2.72}$$

Comme le membre de droite de (2.45) est dans tous les $L_p(\Omega, P)$ $(1 \leq p < +\infty)$, on voit que le membre de droite de (2.72) est intégrable.

(2.18) est bien démontré.

b) Preuve de (2.18) *sous les conditions 2, 3, 4*

On suppose encore $\eta \leq \varepsilon$, $M' \leq M$.

Soit $\sigma(z)$ la fonction

$$\sigma(z) = \exp -(z_1^2 + \ldots + z_{n_1}^2). \tag{2.73}$$

On a clairement

$$\int_{R^{n_1}/\{0\}} \frac{|\sigma_z(z)|^2}{\sigma(z)} dz < +\infty. \tag{2.74}$$

Pour $\delta > 0$, on pose

$$g^\delta(z) = g(z) + \delta \sigma(z). \tag{2.75}$$

On vérifie très simplement que l'hypothèse IH 2.1 est vérifiée quand on remplace g par g^δ. En effet, (2.3) et (2.4) sont vérifiés, en particulier par (2.74). De plus, comme ρ_z est bornée, on a $|\rho(z)| \leq C(1 + |z|)$ de telle sorte que (2.5) est vérifié pour g^δ. De même, comme $b^1(x, z)$, $b_x^1(x, z)$, $b_z^1(x, z)$ sont uniformément bornés, ceci par (2.6) et la condition 3, comme par la condition 2, $1 + b^1 \geq \beta > 0$, (2.7) et (2.8) sont aussi vérifiés pour g^δ. Enfin, g^δ est >0, i.e. g^δ vérifie la condition 1.

Soit $\tilde{y}_t^1$ le processus à accroissements indépendants à valeur dans R^n de fonction caractéristique

$$\tilde{\psi}_t(\alpha) = \exp(t[\int_{R^{n_1}/\{0\}} (e^{-i\langle \alpha, (z, \rho(z)) \rangle} - 1)\, \sigma(z)\, dz. \tag{2.76}$$

$\tilde{y}_t^1 = (\tilde{z}_t^1, \tilde{z}_t'^1)$ est un processus de sauts purs dont la première composante saute suivant la mesure de Lévy $\sigma(z)\,dz$ et la seconde composante $\tilde{z}_t'^1$ est égale à $S_{s \leq t}\, \rho(\Delta \tilde{z}_s^1)$. Soit $\tilde{\Pi}^1$ la loi de $\tilde{y}_t^1$ sur $D(R^n)$.

Soit $(y^1, \tilde{y}^1)$ l'élément général de $D(R^n) \times D(R^n)$. Alors, sur $(D(R^n) \times D(R^n), \Pi^1 \otimes \tilde{\Pi}^1)$, le processus $y^{1,\delta}$ donné par

$$y_t^{1,\delta} = y_t^1 + \tilde{y}_{\delta t}^1 \tag{2.77}$$

est un processus à accroissements indépendants dont la mesure de Lévy est égale à

$$g^\delta(z)\,dz\,\delta_{z' = \rho(z)}. \tag{2.78}$$

Notons de plus que sur chaque intervalle compact, $\tilde{y}_t^1$ n'a qu'un nombre fini de sauts car σ est intégrable. On voit donc que quand $\delta \to 0$, $\tilde{y}_{\delta t}^1 \to 0$ uniformément sur tout compact; de plus, sur tout compact, pour δ assez petit, $\tilde{y}_{\delta t}^1 = 0$.

Sur $\tilde{\Omega} = D(R^n) \times D(R^n) \times D(R^n)$, d'élément général $(y^1, \tilde{y}^1, y^2)$, muni de la mesure $\tilde{\Pi} = \Pi^1 \otimes \tilde{\Pi}^1 \otimes \Pi^2$, soit x^δ la solution de (1.5) calculée pour $y = y^\delta$ donné par:

$$y_t^\delta = y_t^{1,\delta} + y_t^2. \tag{2.79}$$

Soit Z_T^δ la densité construite après la définition 1.4 calculée sur $(y^{1,\delta}, y^2)$, i.e.

$$\begin{aligned} Z_T^\delta = \exp\Bigg(&-\int_0^T ds \int_{\eta \leq |z| \leq M} b^1(x_{s-}^\delta, z)\, g^\delta(z)\,dz \\ &-\int_0^T ds \int_{\eta \leq |y| \leq M} b^2(x_{s-}^\delta, y)\,d\mu^2(y)\Bigg) \\ &\cdot \prod_{\substack{s \leq T \\ \eta \leq |\Delta z_s^{1,\delta}| \leq M}} (1 + b^1(x_{s-}^\delta, \Delta z_s^{1,\delta})) \\ &\cdot \prod_{\substack{s \leq T \\ \eta \leq |\Delta y_s^2| \leq M}} (1 + b^2(x_{s-}^\delta, \Delta y_s^2)), \end{aligned} \tag{2.80}$$

où $z^{1,\delta}$ est la composante sur R^{n_1} de $y^{1,\delta}$.

Comme g^δ est >0, la formule (2.18) est déjà démontrée relativement à x^δ, $y^{1,\delta}$, y^2. On peut sans inconvénient l'exprimer sur l'espace $(D(R^n) \times D(R^n) \times D(R^n), \tilde{\Pi})$, i.e. on a:

$$\begin{aligned} E^{\tilde{\Pi}}\Big[Z_T^\delta\Big(&\int_{[0,T]} \langle dA_t^{x^\delta}, \varphi_t^{\delta *} S_{s \leq t}\{\varphi_s^{\delta * -1}(A(y^{1,\delta}, y^2, \Delta z_s^{1,\delta}) \\ &+ \rho_z(\Delta z_s^{1,\delta})\, A(y^{1,\delta}, y^2, \Delta z_s^{1,\delta}))\}\rangle \\ &+ \int_{]0,T]} \langle dB_t^{x^\delta}, \varphi_t^{\delta *} S_{s<t}\{\varphi_s^{\delta * -1}(A(y^{1,\delta}, y^2, \Delta z_s^{1,\delta}) \\ &+ \rho_z(\Delta z_s^{1,\delta})\, A(y^{1,\delta}, y^2, \Delta z_s^{1,\delta}))\}\rangle\Big] \\ + E^{\tilde{\Pi}}\Bigg[Z_T^\delta H(x^\delta)\Bigg(&\overset{c'}{S}{}'^{\delta}_{s \leq T}\Bigg\{\frac{\operatorname{div}_{z = \Delta z_s^{1,\delta}}}{m^{1,\delta}(x_{s-}^\delta, \Delta z_s^{1,\delta})}\,(m^{1,\delta}(x_{s-}^\delta, z)\, A(y^{1,\delta}, y^2, z)) \\ &+ \Bigg\langle \frac{m_x^{1,\delta}}{m^{1,\delta}}(x_{s-}^\delta, \Delta z_s^{1,\delta}) + \frac{m_x^2}{m^2}(x_{s-}^\delta, \Delta y_s^2),\, \varphi_s^{\delta *} S_{u<s}\, \varphi_u^{\delta * -1}(A(y^{1,\delta}, y^2, \Delta z_u^{1,\delta}) \\ &+ \rho_z(\Delta z_u^{1,\delta})\, A(y^{1,\delta}, y^2, \Delta z_u^{1,\delta}))\Bigg\rangle\Bigg\}\Bigg)\Bigg] = 0, \end{aligned} \tag{2.81}$$

où dans (2.81) on utilise les notations suivantes:

- $m^{1,\delta}(x', z)$ est la fonction $(1+b^1(x', z))\, g^\delta(z)$.
- φ_t^δ est le flot $\varphi_t(y^\delta, x)$.
- $\Lambda_t(y^{1,\delta}, y^2, \cdot)$ est calculé sur la trajectoire de $(y^{1,\delta}, y^2)$.
- $\overset{c'}{S'^\delta}$ est l'opération de somme compensée de sauts pour les mesures de Lévy

$$m^{1,\delta}(x_{s^-}^\delta, z)\, dz + m^2(x_{s^-}^\delta, y)\, d\mu^2(y).$$

On va faire alors tendre δ vers 0 dans (2.81). Comme b^1 et b^2 sont bornés, on a trivialement:

$$Z_T^\delta \leqq C \exp C(S_{s \leqq T} 1_{\eta \leqq |\Delta z_s^{1,\delta}| \leqq M} + S_{s \leqq T} 1_{\eta \leqq |\Delta y_s^2| \leqq M}).$$

Or, les sauts de z^1 et $\tilde{z}^1$ sont distincts. De plus, sur $[0, T]$, pour $\delta < 1$, $\tilde{z}_{\delta t}^1$ a moins de sauts que $\tilde{z}^1$. Donc

$$Z_T^\delta \leqq C \exp C(S_{s \leqq T} 1_{\eta \leqq |\Delta z_s^1| \leqq M} + S_{s \leqq T} 1_{\eta \leqq |\Delta \tilde{z}^1| \leqq M} + S_{s \leqq T} 1_{\eta \leqq |\Delta y_s^2| \leqq M}). \quad (2.82)$$

En raisonnant comme en (2.46), on voit facilement que le membre de droite de (2.82) est dans tous les $L_p(\tilde{\Omega}, \tilde{\Pi})$ $(1 \leqq p < +\infty)$. De plus, par (2.80), on voit que, quand $\delta \to 0$, $Z_T^\delta \to Z_T^0$ (Z_T^0 est calculé avec $\delta = 0$). En effet, nous avons vu que pour δ assez petit, $z_t^{1,\delta} = z_t^1$ pour $0 \leqq t \leqq T$, de telle sorte que pour δ assez petit, $x_t^\delta = x_t^0$ pour $0 \leqq t \leqq T$. On passe ainsi à la limite sans difficulté sur le premier terme à gauche de (2.81), qui converge vers le même terme calculé avec $\delta = 0$.

De même, comme la première somme compensée n'a qu'un nombre fini de sauts, on a, en utilisant (2.28)

$$\begin{aligned} \overset{c'}{S'^\delta_{s \leqq T}} &\left\{ \frac{\operatorname{div}_{z = \Delta z_s^{1,\delta}} (m^{1,\delta}(x_{s^-}^\delta, z)\, \Lambda(y^{1,\delta}, y^2, z))}{m^{1,\delta}(x_{s^-}^\delta, \Delta z_s^{1,\delta})} \right\} \\ &= S_{s \leqq T} \frac{\operatorname{div}_{z = \Delta z_s^{1,\delta}} [m^{1,\delta}(x_{s^-}^\delta, z)\, \Lambda(y^{1,\delta}, y^2, z)]}{m^{1,\delta}(x_{s^-}^\delta, \Delta z_s^{1,\delta})}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Alors, en raisonnant comme en (2.21)-(2.22), on sait que $S_{s \leqq T} 1_{g(\Delta z_s^1) = 0} = 0 \tilde{\Pi}$ p.s. De plus, $g^\delta \to g$ quand $\delta \to 0$ uniformément sur les compacts de $R^{n_1}/\{0\}$, et $g_z^\delta \to g_z$ uniformément sur les compacts de $R^{n_1}/\{0\}$. Comme $1 + b^1 \geqq \beta$, on voit donc très facilement que, quand $\delta \to 0$, sur $(\tilde{\Omega}, \tilde{\Pi})$, si V_T^δ est la variable aléatoire (2.83), alors quand $\delta \to 0$:

$$\begin{aligned} V_T^\delta \to V_T^0 &= S_{s \leqq T} \operatorname{div}_{z = \Delta z_s^1} \frac{[m^1(x_{s^-}^0, z)\, \Lambda(y^1, y^2, z)]}{m^1(x_{s^-}^0, \Delta z_s^1)} \\ &= \overset{c'}{S}_{s \leqq T} \frac{\operatorname{div}_{z = \Delta z_s^1} [m^1(x_{s^-}^0, z)\, \Lambda(y^1, y^2, z)]}{m^1(x_{s^-}^0, \Delta z_s^1)}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

On va maintenant montrer que $\{Z_T^\delta V_T^\delta\}_{\delta < 1}$ est un ensemble uniformément intégrable dans $L_1(\tilde{\Omega}, \tilde{\Pi})$. Soit en effet $a > 0$. Alors

$$\begin{aligned}
&\int Z_T^\delta |V_T^\delta|\, 1_{|Z_T^\delta V_T^\delta| \geqq a}\, d\tilde{\Pi} \\
&\quad \leqq \int_{Z_T^\delta \geqq a^{\frac{1}{2}}} Z_T^\delta |V_T^\delta|\, d\tilde{\Pi} + \int_{|V_T^\delta| \geqq a^{\frac{1}{2}}} Z_T^\delta |V_T^\delta|\, d\tilde{\Pi} \\
&\quad \leqq \Big[\int_{Z_T^\delta \geqq a^{\frac{1}{2}}} Z_T^\delta\, d\tilde{\Pi}\Big]^{\frac{1}{2}} \Big[\int Z_T^\delta |V_T^\delta|^2\, d\tilde{\Pi}\Big]^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} \int Z_T^\delta |V_T^\delta|^2\, d\tilde{\Pi}.
\end{aligned} \tag{2.85}$$

Grâce à (2.82), $\int_{Z_T^\delta \geqq a^{\frac{1}{2}}} Z_T^\delta\, d\tilde{\Pi}$ tend vers 0 quand $a \to +\infty$ uniformément en δ. De plus, on a:

$$\int Z_T^\delta |V_T^\delta|^2\, d\tilde{\Pi} = \int Z_T^\delta \left[\int_0^T ds \int_{\varepsilon \leqq |z| \leqq M'} \frac{|\mathrm{div}_z(m^{1,\delta}(x_{s^-}^\delta, z)\, A(y^{1,\delta}, y^2, z))|^2}{m^{1,\delta}(x_{s^-}^\delta, z)}\, dz\right] d\tilde{\Pi}. \tag{2.86}$$

On majore sans difficulté (2.86) par:

$$C\left(1 + \sup_{x' \in R^n} \int_{\varepsilon \leqq |z| \leqq M'} \frac{|m_z^{1,\delta}(x', z)|^2}{m^{1,\delta}(x', z)}\, dz\right). \tag{2.87}$$

Comme par (2.6) b^1, b_z^1 sont uniformément bornés, et comme $1 + b^1 \geqq \beta$, on majore (2.87) par:

$$C\left(1 + \int_{\varepsilon \leqq |z| \leqq M'} \frac{|g_z^\delta(z)|^2}{g^\delta(z)}\, dz\right). \tag{2.88}$$

En utilisant la convention (2.1), on a:

$$\int_{\varepsilon \leqq |z| \leqq M'} \frac{|g_z^\delta(z)|^2}{g^\delta(z)}\, dz \leqq 2 \int_{\varepsilon \leqq |z| \leqq M'} \frac{|g_z(z)|^2}{g(z)}\, dz + 2\delta \int_{\varepsilon \leqq |z| \leqq M} \frac{|\sigma_z(z)|^2}{\sigma(z)}\, dz. \tag{2.89}$$

Par (2.4) et (2.74), on peut majorer uniformément le membre de droite de (2.89) en δ. Ainsi $\int Z_T^\delta |V_T^\delta|^2\, d\tilde{\Pi}$ est uniformément borné. Le membre de droite de (2.85) tend donc vers 0 quand $a \to +\infty$, et ceci uniformément en δ. Ainsi $\{Z_T^\delta V_T^\delta\}$ est uniformément intégrable dans $L_1(\tilde{\Omega}, \tilde{\Pi})$. Comme quand $\delta \to 0$, $Z_T^\delta V_T^\delta \to Z_T^0 V_T^0$, on a aussi

$$E^{\tilde{\Pi}}(Z_T^\delta V_T^\delta) \to E^{\tilde{\Pi}}(Z_T^0 V_T^0). \tag{2.90}$$

On peut raisonner de manière exactement semblable sur les derniers termes de (2.82), en notant en particulier que $\dfrac{m_x^{1,\delta}}{m^{1,\delta}} = \dfrac{m_x^1}{m^1}$. On a donc (2.81) avec $\delta = 0$, qui est exactement identique à (2.18).

c) Preuve de (2.18) *sous les conditions 3, 4*

On peut encore supposer $\eta \leqq \varepsilon$, $M \geqq M'$.

Soit τ^1 (resp. τ^2) une fonction $\in C_b^\infty(R^{n_1})$ (resp. $C_b^\infty(R^n)$) à valeurs dans $[0, 1]$ égale à 0 pour $|z| \leqq \eta/2$ ou $|z| \geqq 2M$ (resp. $|y| \leqq \eta/2$ ou $|y| \geqq 2M$) et à 1 pour $\eta \leqq |z| \leqq M$ (resp. $\eta \leqq |y| \leqq M$).

Pour $0 < \theta < 1$, on pose:

$$b^{1,\theta}(x, z) = b^1(x, z) + \theta\tau^1(z); \qquad b^{2,\theta}(x, y) = b^2(x, y) + \theta\tau^2(y). \tag{2.91}$$

Trivialement, grâce à la condition 3:

$$1+b^{1,\theta}\geqq\theta; \quad 1+b^{2,\theta}\geqq\theta. \tag{2.92}$$

On vérifie immédiatement que $b^{1,\theta}$, $b^{2,\theta}$ vérifient les hypothèses IH 2.1, IH 2.2, IH 2.3 ((2.8) est vérifiée grâce à (2.92) et au fait que $b_z^{1,\theta}$ est borné). De plus, les conditions 2, 3, 4 sont vérifiées pour $b^{1,\theta}$, $b^{2,\theta}$. On a donc (2.18) pour $b^{1,\theta}$, $b^{2,\theta}$.

On écrit (2.18) sur l'espace (Ω, Π) en faisant apparaître la densité Z_T^θ de (1.13) relativement à $(b^{1,\theta}, b^{2,\theta})$, i.e. sous la forme:

$$E^\Pi[Z_T^\theta \int_{[0,T]} \langle dA_t^x, \varphi_t^* S_{s\leqq T}\ldots] + E^\Pi[Z_T^\theta H(x)(\overset{c'}{S}{}'^{\theta}_{s\leqq T}\ldots)]=0 \tag{2.93}$$

où $\overset{c'}{S}{}'^{\theta}$ est l'opération de somme compensée pour $(b^{1,\theta}, b^{2,\theta})$. On va alors faire tendre θ vers 0 dans (2.93).

En utilisant une formule de type (2.80) pour Z_T^θ (g^δ est remplacé par g et b^1, b^2 par $b^{1,\theta}$, $b^{2,\theta}$, etc...), on peut encore majorer tous les Z_T^θ par un terme semblable au membre de droite de (2.82) qui est dans tous les $L_p(\Omega, \Pi)$. De plus, comme il n'y a qu'un nombre fini de sauts de norme $\geqq\eta$, on voit sans difficulté que quand $\theta\to 0$, $Z_T^\theta\to Z_T=Z_T^0$. On passe ainsi à la limite sans difficulté sur le premier terme à gauche de (2.93).

Soit R_T^θ la première somme compensée apparaissant dans le deuxième terme à gauche dans (2.93) (pour son écriture complète voir (2.18)). On va montrer que:

$$Z_T^\theta R_T^\theta \to Z_T^0 R_T^0 \quad \Pi \quad \text{p.s.}, \tag{2.94}$$

où, à droite dans (2.94):

- R_T^0 est la somme compensée $\overset{c'}{S}_{s\leqq T} \dfrac{\operatorname{div}_{z=\Delta z_s^1}(m^1(x_{s^-}, z))\,\Lambda(z))}{m^1(x_{s^-}, \Delta z_s^1)}$ calculée relativement à la mesure $Z_T d\Pi$, et n'est définie que $Z_T d\Pi$ p.s., i.e. Π p.s. sur $Z_T>0$.
- Par convention, on pose $Z_T^0 R_T^0=0$, si $Z_T^0=0$. On a, en utilisant (2.28)

$$R_T^\theta = S_{s\leqq T} \frac{\operatorname{div}_{z=\Delta z_s^1} m^{1,\theta}(x_{s^-}, z)\,\Lambda(z)}{m^{1,\theta}(x_{s^-}, \Delta z_s^1)} \tag{2.95}$$

où $m^{1,\theta}$ est la fonction m^1 calculée pour $b^{1,\theta}$. (Notons ici que, grâce à (2.92), Z_T^θ est p.s. >0; R_T^θ est définie sans ambiguité Π p.s. par (2.95) puisque le dénominateur $m^{1,\theta}(x_{s^-}, \Delta z_s^1)$ ne s'annule pas Π p.s.)

Comme $m^{1,\theta}=(1+b^{1,\theta})\,g$, on constate que dans le produit $Z_T^\theta R_T^\theta$, on peut simplifier les termes $(1+b^{1,\theta})$ dans Z_T^θ avec les termes $\dfrac{1}{1+b^{1,\theta}}$ apparaissant dans R_T^θ. Alors

- Si aucun des $1+b^1(x_{s^-}, \Delta z_s^1)$ n'est nul, trivialement

$$Z_T^\theta R_T^\theta \to Z_T^0 R_T^0. \tag{2.96}$$

- Si l'un des termes $1+b^1(x_{s^-}, \Delta z_s^1)$ est nul, alors le terme correspondant $\operatorname{div}_{z=\Delta z_s^1} m^1(x_{s^-}, z)\,\Lambda(z)$ est aussi nul, en particulier parce qu'alors $b_z^1(x_{s^-}, z)=0$.

Comme $Z_T^0=0$, en utilisant la simplification des termes décrites auparavant, on a encore (2.96), de telle sorte que (2.94) est démontré.

Pour montrer que les espérances par rapport à Π convergent dans (2.94), il suffit de montrer que $\{Z_T^\theta R_T^\theta\}$ est uniformément intégrable sur (Ω, Π). On raisonne pour cela comme en (2.85)–(2.86). On a en particulier:

$$\int Z_T^\theta |R_T^\theta|^2 \, d\Pi = \int Z_T^\theta \left[\int_0^T ds \int_{\substack{\eta \leqq |z| \leqq M \\ g(z) \neq 0}} \frac{|\operatorname{div}_z (m^{1,\theta}(x_{s-}, z) \Lambda(z))|^2}{m^{1,\theta}(x_{s-}, z)} \, dz\right] d\Pi.$$

Or, on a:

$$\int_{\substack{\eta \leqq |z| \leqq M \\ g(z) \neq 0}} \frac{|\operatorname{div}_z m^{1,\theta}(x', z) \Lambda(z)|^2}{m^{1,\theta}(x', z)} \, dz \leqq C\left[\int_{\eta \leqq |z| \leqq M} m^{1,\theta}(x', z) \, dz \right.$$

$$\left. + \int_{\eta \leqq |z| \leqq M} \frac{|g_z(z)|^2}{g(z)} (1 + b^{1,\theta}(x', z)) \, dz + \int_{\eta \leqq |z| \leqq M} \frac{|b_z^{1,\theta}(x', z)|^2}{1 + b^{1,\theta}(x', z)} g(z) \, dz\right]. \quad (2.98)$$

Comme $b^{1,\theta}$ est uniformément borné, le premier terme à droite de (2.98) est borné. De même, par (2.4), le second terme est borné. Comme, quand $\eta \leqq |z| \leqq M$, $\tau^\theta(z)=1$, comme de plus si $1+b^1(x', z)=0$ on a $b_z^1(x', z)=0$, on a:

$$\int_{\eta \leqq |z| \leqq M} \frac{|b_z^{1,\theta}(x', z)|^2}{1 + b^{1,\theta}(x', z)} g(z) \leqq \int_{\eta \leqq |z| \leqq M} 1_{1+b^1(x', z) \neq 0} \frac{|b_z^1(x', z)|^2}{1 + b^1(x', z)} g(z) \, dz. \quad (2.99)$$

Par (2.8), le membre de droite de (2.99) est uniformément borné. On a donc borné uniformément (2.97). Les espérances par rapport à Π convergent donc dans (2.94).

On peut faire le même raisonnement sur les autres sommes compensées de (2.93), en particulier parce que:

- Si $1+b^1(x', z)=0$, alors $b_x^1(x', z)=0$, et si $1+b^2(x', y)=0$, alors $b_x^2(x', y)=0$.
- Les fonctions dans (2.7) et (2.10) sont bornées. (2.18) est bien démontré.

d) Preuve de (2.18) *sous la condition 4*

Pour $\lambda \in N$, soit $\kappa^{1,\lambda}(z)$ (resp. $\kappa^{2,\lambda}(y)$) une fonction $\in C_b^\infty(R^{n_1})$ (resp. $C_b^\infty(R^n)$) à valeurs dans $[0, 1]$, égale à 1 pour $|z| \leqq \frac{1}{\lambda+1}$, $|z| \geqq \lambda+1$ $\left(\text{resp. } |y| \leqq \frac{1}{\lambda+1}, |y| \geqq \lambda+1\right)$, et à 0 pour $\frac{1}{\lambda} \leqq |z| \leqq \lambda$ $\left(\text{resp. } \frac{1}{\lambda} \leqq |y| \leqq \lambda\right)$. On pose:

$$\rho^{1,\lambda}(z) = 1 - (\kappa^{1,\lambda}(z))^2; \qquad \rho^{2,\lambda}(y) = 1 - (\kappa^{2,\lambda}(y))^2. \quad (2.100)$$

Alors, $\rho^{1,\lambda}(z)$ (resp. $\rho^{2,\lambda}(y)$) est un élément de $C_b^\infty(R^{n_1})$ (resp. $C_b^\infty(R^n)$) à valeurs dans $[0, 1]$, égal à 0 pour $|z| \leqq \frac{1}{\lambda+1}$, $|z| \geqq \lambda+1$ $\left(\text{resp. } |y| \leqq \frac{1}{\lambda+1}, |y| \geqq \lambda+1\right)$, à 1 pour $\frac{1}{\lambda} \leqq |z| \leqq \lambda$ $\left(\text{resp. } \frac{1}{\lambda} \leqq |y| \leqq \lambda\right)$.

De plus, on a:

$$\frac{|\rho_z^{1,\lambda}(z)|^2}{1-\rho^{1,\lambda}(z)}=4|\kappa_z^{1,\lambda}(z)|^2; \quad \frac{|\rho_y^{2,\lambda}(y)|^2}{1-\rho^{2,\lambda}(y)}=4|\kappa_y^{2,\lambda}(y)|^2. \tag{2.101}$$

Les fonctions à gauche de (2.101) sont donc prolongeables hors de leur domaine de définition en des fonctions C^∞ bornées sur R^{n_1} et R^n.

On pose:

$$b^{1,\lambda}(x',z)=\rho^{1,\lambda}(z)\,b^1(x',z); \qquad b^{2,\lambda}(x',y)=\rho^{2,\lambda}(y)\,b^2(x',y). \tag{2.102}$$

Clairement, $1+b^{1,\lambda}\geqq 0$, $1+b^{2,\lambda}\geqq 0$.

Vérifions $\mathbb{H}$2.2 pour $b^{1,\lambda}$. (2.6) est trivial, ainsi que la première partie de (2.7). Pour $\varepsilon'>0$:

$$\int_{\substack{|z|\geqq\varepsilon' \\ b^1(x',z)\geqq 0}} \frac{|b_z^{1,\lambda}(x',z)|^2}{1+b^{1,\lambda}(x',z)}\, g(z)\,dz \tag{2.103}$$

est trivialement uniformément borné. De plus, si $\rho^{1,\lambda}(z)=1$, $\rho_z^{1,\lambda}(z)=0$, et, si $b^1(x',z)=-1$, $b_z^1(x',z)=0$. Donc:

$$\begin{aligned}
&\int_{|z|\geqq\varepsilon'} 1_{1+b^{1,\lambda}(x',z)\neq 0,\, b^1(x',z)\leqq 0}\, \frac{|b_z^{1,\lambda}(x',z)|^2}{1+b^{1,\lambda}(x',z)}\, g(z)\,dz \\
&\quad\leqq C\Bigg[\int_{|z|\geqq\varepsilon'} 1_{\rho^{1,\lambda}(z)\neq 1}\, \frac{|b^1(x',z)\,\rho_z^{1,\lambda}(z)|^2}{1-\rho^{1,\lambda}(z)}\, g(z)\,dz \\
&\qquad + \int_{|z|\geqq\varepsilon'} 1_{1+b^1(x',z)\neq 0}\, \frac{|\rho^{1,\lambda}(z)\,b_z^1(x',z)|^2}{1+b^1(x',z)}\, g(z)\,dz\Bigg].
\end{aligned} \tag{2.104}$$

Comme (2.7) et (2.8) sont vérifiés par b^1, en utilisant le fait que les fonctions (2.101) sont bornées, on voit que le membre de droite de (2.104) est borné. $b^{1,\lambda}$ vérifie donc (2.8).

De plus, $\rho^{1,\lambda}(z)$ est nul pour $|z|\notin\left]\frac{1}{\lambda+1},\lambda+1\right[$ et, si $b^1(x',z)=-1$, $b_x^1(x',z)=0$. Donc:

$$\begin{aligned}
&\int_{R^{n_1}/\{0\}} 1_{1+b^{1,\lambda}(x',z)\neq 0}\, \frac{|b_x^{1,\lambda}(x',z)|^2}{1+b^{1,\lambda}(x',z)}\, g(z)\,dz \\
&\quad\leqq \int_{1/(\lambda+1)\leqq|z|\leqq\lambda+1} 1_{b^1(x',z)\geqq 0}\, |b_x^1(x,z)|^2\, g(z)\,dz \\
&\qquad + \int_{R^{n_1}/\{0\}} 1_{1+b^1(x',z)\neq 0}\, \frac{|b_x^1(x',z)|^2}{1+b^1(x',z)}\, g(z)\,dz.
\end{aligned} \tag{2.105}$$

Or, par (2.6), $b_x^1(x',z)$ est borné pour $\frac{1}{\lambda+1}\leqq|z|$. En utilisant (2.7), on voit que le membre de droite de (2.105) est borné. $b^{1,\lambda}$ vérifie donc (2.7), et donc l'hypothèse $\mathbb{H}$2.2. On montrera de même que $b^{2,\lambda}$ vérifie $\mathbb{H}$2.3. Enfin, $b^{1,\lambda}$, $b^{2,\lambda}$ vérifient par construction la condition 3.

On a donc la formule (2.18) relativement à $b^{1,\lambda}$, $b^{2,\lambda}$. On l'écrit encore sous la forme:

$$E^{\Pi}[Z_T^{\lambda} \int_{[0,T]} \langle dA_T^x, \ldots\rangle] + E^{\Pi}[Z_T^{\lambda} H(x)(\overset{c'}{S}{}'^{\lambda}\{\ldots\})] = 0, \tag{2.106}$$

où Z_T^{λ} est la densité (1.13) relativement à $b^{1,\lambda}$, $b^{2,\lambda}$. On va passer à la limite dans (2.106) quand $\lambda \to +\infty$.

Les suites $\rho^{1,\lambda}$, $\rho^{2,\lambda}$ croissent avec λ. Donc, si $1+b^{1,\lambda}(x', z)=0$, on a encore $1+b^{1,\lambda'}(x', z)=0$ pour tout $\lambda'>\lambda$ et aussi $1+b^1(x', z)=0$. En raisonnant de la même manière pour b^2, il résulte des formules (1.9) que si $Z_T^{\lambda}=0$, alors pour $\lambda'>\lambda$, $Z_T^{\lambda'}=0$ et aussi $Z_T=0$ (Z_T est la densité (1.13) relativement à b^1, b^2). Inversement, si $Z_T=0$, pour λ assez grand, $Z_T^{\lambda}=0$. En effet, par (1.9), si $Z_T=0$, l'un des termes $1+b^1(x_{s^-}, \Delta z_s^1)$ ou $1+b^2(x_{s^-}, \Delta y_s^2)$ est nul, et donc pour λ assez grand, $1+b^{1,\lambda}(x_{s^-}, \Delta z_s^1)=0$ ou $1+b^{2,\lambda}(x_{s^-}, \Delta y_s^2)=0$, ce qui implique $Z_T^{\lambda}=0$. De plus, on a:

$$Z_t^{\lambda} = 1 + \int_0^t Z_{u^-}^{\lambda}\, d[\overset{c}{S}_{s\leqq u} b^{1,\lambda}(x_{s^-}, \Delta z_s^1) + \overset{c}{S}_{s\leqq u} b^{2,\lambda}(x_{s^-}, \Delta y_s^2)]. \tag{2.107}$$

Or, trivialement, les fonctions

$$\int_{R^{n_1}/\{0\}} |b^{1,\lambda}(x', z)|^2\, g(z)\, dz, \qquad \int_{R^n/\{0\}} |b^{2,\lambda}(x', y)|^2\, d\mu^2(y) \tag{2.108}$$

sont uniformément bornées quand x' et λ varient. De plus, si X_t est un processus cadlag prévisible tel que $E(\|X\|^2) < +\infty$, alors, quand $\lambda \to +\infty$:

$$\begin{aligned} E^{\Pi} \int_0^T |X_s^2|\, ds [&\int_{R^{n_1}/\{0\}} |b^1(x_{s^-}, z) - b^{1,\lambda}(x_{s^-}, z)|^2\, g(z)\, dz \\ &+ \int_{R^{n_1}/\{0\}} |b^2(x_{s^-}, y) - b^{2,\lambda}(x_{s^-}, y)|^2\, d\mu^2(y)] \to 0 \end{aligned} \tag{2.109}$$

par (2.7) et le théorème de Lebesgue, de telle sorte que, quand $\lambda \to +\infty$:

$$\begin{aligned} E^{\Pi} \| &\int_0^{\cdot} X_t\, d(\overset{c}{S}_{s\leqq t} b^1(x_{s^-}, \Delta z_s^1) + \overset{c}{S}_{s\leqq t} b^2(x_{s^-}, \Delta y_s^2)) \\ &- \int_0^{\cdot} X_t\, d(\overset{c}{S}_{s\leqq t} b^{1,\lambda}(x_{s^-}, \Delta z_s^1) + \overset{c}{S}_{s\leqq t} b^{2,\lambda}(x_{s^-}, \Delta y_s^2))\|^2 \to 0. \end{aligned} \tag{2.110}$$

De (2.110) et par des inégalités du type de celles que nous avons obtenues après la définition 1.4 qui sont uniformes en λ par (2.108), on voit sans difficulté que, quand $\lambda \to +\infty$:

$$Z_T^{\lambda} \to Z_T \quad \text{dans } L_2(\Omega, \Pi). \tag{2.111}$$

En raisonnant comme en (2.26)-(2.27), on sait que $S_{s\leqq T}|A(\Delta z_s^1)|$ est dans tous les $L_p(\Omega, \Pi)$. On peut donc passer à la limite sur le premier terme de (2.106).

Considérons la première somme compensée dans (2.107) qui est égale à:

$$\overset{c'}{S}{}'^{\lambda}_{s\leqq T} \frac{\operatorname{div}_{z=\Delta z_s^1}(m^{1,\lambda}(x_{s^-}, z)\, A(z))}{m^{1,\lambda}(x_{s^-}, \Delta z_s^1)}, \tag{2.112}$$

où $m^{1,\lambda}=(1+b^{1,\lambda})g$. En utilisant (2.28), on voit que (2.112) est donné par

$$\underset{\substack{s\leqq T\\ \varepsilon\leqq|\Delta z_s^1|\leqq M'}}{S} \frac{\operatorname{div}_{z=\Delta z_s^1}(m^{1,\lambda}(x_{s^-}, z)\,A(z))}{m^{1,\lambda}(x_{s^-}, \Delta z_s^1)}. \tag{2.113}$$

Naturellement, (2.113) n'est défini que pour $Z_T^\lambda \neq 0$. Or, trivialement, pour $\lambda \geqq \frac{1}{\varepsilon} VM'$, l'expression (2.113) coincide avec l'expression où $m^{1,\lambda}$ est remplacée par m^1 qui est la première somme compensée dans (2.18). Grâce à (2.103), (2.104), (2.111), on peut refaire le raisonnement de (2.85)-(2.87). En particulier, le terme correspondant à (2.87) peut être uniformément borné. On peut donc passer à la limite sur le terme correspondant dans (2.106).

On va décomposer la deuxième somme compensée de sauts dans (2.106) sous la forme:

$$\begin{aligned}
&\overset{c'}{S}{}'^{\lambda}_{s\leqq T}\left\langle \frac{m_x^{1,\lambda}}{m^{1,\lambda}}(x_{s^-}, \Delta z_s^1), G_{s^-}\right\rangle \\
&\quad = \overset{c'}{S}{}'^{\lambda}_{s\leqq T}\left\langle 1_{1/\lambda\leqq|\Delta z_s^1|\leqq\lambda}\, \frac{m_x^{1,\lambda}}{m^{1,\lambda}}(x_{s^-}, \Delta z_s^1), G_{s^-}\right\rangle \\
&\qquad + \overset{c'}{S}{}'^{\lambda}_{s\leqq T}\left\langle 1_{|\Delta z_s^1|\notin[1/\lambda,\lambda]}\, \frac{m_x^{1,\lambda}}{m^{1,\lambda}}(x_{s^-}, \Delta z_s^1), G_{s^-}\right\rangle.
\end{aligned} \tag{2.114}$$

Or, à droite de (2.114), l'opération de compensation dans la première somme ne dépend pas de λ puisque $m^{1,\lambda}(x', z)=m^1(x', z)$ dès que $1/\lambda\leqq|z|\leqq\lambda$, de sorte que:

$$\overset{c'}{S}{}'^{\lambda}\left\langle 1_{1/\lambda\leqq|\Delta z_s^1|\leqq\lambda}\, \frac{m_x^{1,\lambda}}{m^{1,\lambda}}(x_{s^-}, \Delta z_s^1), G_{s^-}\right\rangle = \overset{c'}{S}\left\langle 1_{1/\lambda\leqq|\Delta z_s^1|\leqq\lambda}\, \frac{m_x^{1}}{m^{1}}(x_{s^-}, \Delta z_s^1), G_{s^-}\right\rangle \tag{2.115}$$

(l'égalité (2.115) est prise au sens naïf de (2.113) puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de sauts. Naturellement les dénominateurs dans (2.116) peuvent s'annuler sur (Ω, Π), mais nous laissons au lecteur le soin d'interpréter exactement l'égalité (2.115)).

De plus:

$$\begin{aligned}
&E^{\Pi} Z_T \left| \overset{c'}{S}_{s\leqq T}\left\{\left\langle 1_{1/\lambda\leqq|\Delta z_s^1|\leqq\lambda}\, \frac{m_x^1}{m^1}(x_{s^-}, \Delta z_s^1) - \frac{m_x^1}{m^1}(x_{s^-}, \Delta z_s^1), G_{s^-}\right\rangle\right.\right|^2 \\
&\quad \leqq E^P\left[\int_0^T ds \int_{|z|\notin[1/\lambda,\lambda]} \left|\frac{m_x^1}{m^1}\right|^2 (x_{s^-}, z)\, dz\, \|G\|^2\right].
\end{aligned} \tag{2.116}$$

En utilisant (2.15) et (2.27), on voit que, quand $\lambda\to+\infty$, (2.116) tend vers 0. Alors, quand $\lambda\to+\infty$:

$$Z_T^\lambda \overset{c'}{S}_{s\leqq T}\left\langle 1_{1/\lambda\leqq|\Delta z_s^1|\leqq\lambda}\, \frac{m_x^1}{m^1}, G_{s^-}\right\rangle \to Z_T \overset{c'}{S}_{s\leqq T}\left\langle \frac{m_x^1}{m^1}, G_{s^-}\right\rangle \tag{2.117}$$

en probabilité sur (Ω, Π), avec dans (2.117) la convention que à gauche (resp. à droite), on a la valeur 0 dès que $Z_T^\lambda=0$ (resp. $Z_T=0$).

En effet sur $(Z_T>0)$, tous les Z_T^λ sont $\neq 0\Pi$ p.s., et les sommes compensées dans (2.117) convergent en probabilité (pour Π!). Par (2.111), on a donc (2.117) sur $(Z_T>0)$. Sur $(Z_T=0)$, on sait que, pour λ assez grand, $Z_T^\lambda=0$ et on a encore (2.117). Pour obtenir la convergence des espérances dans (2.117), il suffit d'établir un résultat d'intégrabilité uniforme pour Π des variables (2.117). En utilisant (2.15), (2.111), (2.115) et la technique de (2.85)-(2.86), on a facilement cette intégrabilité uniforme.

Pour achever le passage à la limite sur la deuxième somme compensée, il suffit de montrer que:

$$E^\Pi Z_T^\lambda \left[\overset{c'}{S}_{s\leqq T}\left\langle 1_{|\Delta z_s^1|\notin[1/\lambda,\lambda]}\frac{m_x^{1,\lambda}}{m^{1,\lambda}}(x_{s^-},\Delta z_s^1), G_{s^-}\right\rangle\right]^2\to 0. \tag{2.118}$$

Or, le membre de gauche de (2.118) est donné par:

$$E^\Pi Z_T^\lambda \int_0^T ds \int_{|z|\notin[1/\lambda,\lambda]}\left|\left\langle\frac{m_x^{1,\lambda}}{m^{1,\lambda}}(x_{s^-},z), G_{s^-}\right\rangle\right|^2 m^{1,\lambda}(x_{s^-},z)\,dz. \tag{2.119}$$

Comme quand $b^1=-1$, $b_x^1=0$, on a:

$$\begin{aligned}
&\int_{\substack{|z|\notin[1/\lambda,\lambda]\\ 1+b^{1,\lambda}(x',z)\neq 0}}\frac{|b_x^{1,\lambda}(x',z)|^2}{1+b^{1,\lambda}(x',z)}g(z)\,dz\\
&=\int_{\substack{|z|\notin[1/\lambda,\lambda]\\ 1+b^{1,\lambda}(x',z)\neq 0}}\frac{|b_x^1(x',z)|^2|\rho^{1,\lambda}(z)|^2 g(z)\,dz}{1+b^1(x',z)\,\rho^{1,\lambda}(z)}\\
&\leqq\int_{|z|\notin[1/\lambda,\lambda]}1_{-1<b^1(x',z)\leqq 0}\frac{|b_x^1(x',z)|^2 g(z)}{1+b^1(x',z)}dz\\
&\quad+\int_{|z|\notin[1/\lambda,\lambda]}1_{b^1(x',z)\geqq 0}\frac{|b_x^1(x',z)|^2}{1+b^1(x',z)}\frac{(1+b^1(x',z))|\rho^{1,\lambda}(z)|^2}{1+b^1(x',z)\,\rho^{1,\lambda}(z)}g(z)\,dz.
\end{aligned}\tag{2.120}$$

Comme $0\leqq\rho^{1,\lambda}\leqq 1$, pour $u\geqq 0$, $\dfrac{(1+u)|\rho^{1,\lambda}(z)|^2}{1+u\rho^{1,\lambda}(z)}\leqq\rho^{1,\lambda}(z)$, de telle sorte qu'on peut majorer le membre de droite de (2.121) par:

$$\int_{|z|\notin[1/\lambda,\lambda]}\frac{|b_x^1(x',z)|^2}{1+b^1(x',z)}g(z)\,dz. \tag{2.121}$$

De plus, par (2.7), (2.121) est uniformément borné en x' et λ, et tend vers 0 quand $\lambda\to+\infty$. Alors, par le théorème de Lebesgue

$$\int_0^T ds\int_{|z|\notin[1/\lambda,\lambda]}\left|\left\langle\frac{m_x^{1,\lambda}}{m^{1,\lambda}}(x_{s^-},z), G_{s^-}\right\rangle\right|^2 m^{1,\lambda}(x_{s^-},z)\,dz \tag{2.122}$$

tend vers 0 quand $\lambda\to+\infty$, en restant majoré par $C\|G.\|^2$, qui par un calcul semblable à (2.26) est dans $L_2(\Omega,\Pi)$. La convergence vers 0 de (2.122) a donc aussi lieu dans $L_2(\Omega,\Pi)$. En utilisant (2.111), on voit donc que (2.118) est bien vrai.

On raisonne de la même manière sur la dernière somme compensée de (2.106). On a bien montré (2.18).

e) Preuve finale de (2.18)

Il reste à s'affranchir de la condition 4; c'est trivial par troncation de Λ et passage à la limite. □

3. Application à la représentation des martingales

Dans cette section, on fait toutes les hypothèses des sections 1 et 2.

On suppose de plus que $\mu^2=0$. On peut donc oublier ici tout ce qui concerne le processus y^2 (qui est ici nul) et la fonction b^2. Les filtrations engendrées par x et z^1 sont identiques.

$\mathscr{P}$ désigne la tribu prévisible sur $R^+ \times D(R^n)$ (il n'y a pas de risque de confusion avec la section 2).

$x_0 \in R^n$ est désormais fixé. On peut identifier les mesures $Q_{x_0}^{b^1,b^2}$ et P construites au Théorème 1.7. On écrira Q au lieu de $Q_{x_0}^{b^1,b^2}$.

Rappelons que par un résultat de Dellacherie, Jacod et Yor [30], les martingales de carré intégrable sur $(D(R^n), \{F_t^x\}_{t\geqq 0}, Q)$ sont des sommes compensées de sauts. Ainsi si M_t est une martingale de carré intégrable, il existe $a \in R$, et une fonction $N_t(x,z)$ définie sur $R^+ \times D(R^n) \times R^{n_1}/\{0\}$ m valeurs dans R, qui est $\mathscr{P}\otimes\mathscr{B}(R^{n_1}/\{0\})$ mesurable telle que pour tout t

$$E^Q \int_0^t ds \int_{R^{n_1}/\{0\}} |N_s(x,z)|^2 \, m^1(x_{s^-}, z)\, dz < +\infty \tag{3.1}$$

et que

$$M_t = a + \overset{c'}{S}_{s\leqq t} N_s(x, \Delta z_s^1). \tag{3.2}$$

De plus a et N sont (essentiellement) uniques.

Définition 3.1. M_t désigne la martingale bornée

$$M_t = E^{F_t^x} H \tag{3.3}$$

M_t est naturellement arrêtée en T. On peut donc représenter M_t sous la forme (3.2), où N vérifie (3.1), et est nulle pour $s>T$. Comme M est à sauts bornés, N peut être aussi choisi borné.

On a tout d'abord un résultat technique élémentaire.

Proposition 3.2. *Soit $U_t(x)$ un processus optionnel réel sur $(D(R^n), \{F_t^x\}_{t\geqq 0}, Q)$. Il existe une fonction $V_t(x,z)$ définie sur $R^+ \times D(R^n) \times R^{n_1}$ à valeurs dans R, qui est $\mathscr{P}\otimes\mathscr{B}(R^{n_1})$-mesurable, telle que les processus $U_t(x)$ et $V_t(x, \Delta z_t^1)$ sont indistinguables.*

Preuve. Supposons que $U_t(x)$ soit une martingale de carré intégrable. On peut représenter $U_t(x)$ sous la forme (3.2) (avec N' au lieu de N), et donc

$$U_t(x) = U_{t^-}(x) + 1_{\Delta z_t^1 \neq 0} N_t'(x, \Delta z_t^1). \tag{3.4}$$

Comme $U_{t^-}(x)$ est prévisible, (3.4) donne le résultat dans ce cas particulier. Or les processus prévisibles et les martingales de carré intégrable engendrent la tribu optionnelle. En effet, si T est un temps d'arrêt, par [7], on peut décomposer la surmartingale $1_{t<T}$ en la différence d'une martingale et d'un processus croissant prévisible. Une application du Théorème des classes monotones donne le résultat. □

Si A est une application linéaire, $\tilde{A}$ désigne sa transposée. Ainsi $\tilde{\rho}_z(z)$ est une application linéaire de R^{n-n_1} dans R^{n_1}.

$\bar{P}$ et $\bar{P}'$ sont les opérateurs de projection de R^n sur R^{n_1} et R^{n-n_1}.

Définition 3.3. R_t désigne la martingale de carré intégrable à valeurs dans R^n

$$R_t = \overset{c'}{S}_{s \leqq t} \tilde{\varphi}_s^* \left(\frac{m_x^1}{m^1} (x_{s-}, \Delta z_s^1) \right).$$

T_t et T_t' sont les processus à valeurs dans R^{n_1}

$$\begin{aligned} T_t = (\bar{P} + 1_{\Delta z_t^1 \neq 0} \tilde{\rho}_z(\Delta z_t^1) \bar{P}') \tilde{\varphi}_t^{*-1} \Big(& \int_{[t,T]} \tilde{\varphi}_u^* dA_u^x \\ & + \int_{]t,T]} \tilde{\varphi}_u^* dB_u^x + H(x)(R_T - R_t)\Big) \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} T_t' = (\bar{P} + 1_{\Delta z_t^1 \neq 0} \tilde{\rho}_z(\Delta z_t^1) \bar{P}') \tilde{\varphi}_t^{*-1} & \left(\int_{[t,T]} \tilde{\varphi}_u^* dA_u^x + \int_{]t,T]} \tilde{\varphi}_u^* dB_u^x \right. \\ & \left. + \int_t^T du \int_{R^{n_1}/\{0\}} \left(N_u(z) \tilde{\varphi}_u^* \frac{m_x^1}{m^1} (x_{u-}, z) \right) m^1(x_{u-}, z) \, dz \right). \end{aligned} \tag{3.5'}$$

Notons que grâce à (2.15) et (3.1), la dernière intégrale dans (3.5′) a bien un sens. Par l'inégalité de Doob, on sait que $\sup\limits_{0 \leqq t \leqq T} |T_t|$ est dans $L_2(D(R^n), Q)$ (dA^x et dB^x sont bornés). De même par (2.15) et (3.1) $\sup\limits_{0 \leqq t \leqq T} |T_t'| \in L_2(D(R^n), Q)$.

T_t et T_t' ont même projection optionnelle puisque le dernier terme dans (3.5′) est le crochet des martingales M et R entre t et T.

Définition 3.4. U_t est la projection optionnelle de T_t et T_t'.

Par l'inégalité de Doob, $\sup\limits_{0 \leqq t \leqq T} |U_t|$ est dans $L_2(D(R^n), Q)$. Par la Proposition 3.2, on peut trouver $V_t(x, z)$ sur $R^+ \times D(R^n) \times R^{n_1}$ $\mathscr{P} \otimes \mathscr{B}(R^{n_1})$-mesurable tel que $V_t(x, \Delta z_t^1)$ est indistinguable de U_t.

On a alors le résultat essentiel de cette section.

Théorème 3.5. *Sur l'espace* $([0, T] \times D(R^n), dt \otimes dQ)$, *p.s., les fonctions*

$$\begin{aligned} & z \in R^{n_1}/\{0\} \to m^1(x_t, z) \, V_t(x, z) \\ & z \in R^{n_1}/\{0\} \to m^1(x_t, z) \, N_t(x, z) \\ & z \in R^{n_1}/\{0\} \to N_t(x, z) \, \mathrm{grad}_z [m^1(x_t, z)] \end{aligned} \tag{3.6}$$

sont localement intégrables sur $R^{n_1}/\{0\}$. *De plus si* $m^1(x_t, z) \, \mathrm{grad}_z N_t(x, z)$ *est la distribution sur* $R^{n_1}/\{0\}$ *définie par*

$$m^1(x_t, z)\,\mathrm{grad}_z N_t(x, z) = \mathrm{grad}_z[m^1(x_t, z)\,N_t(x, z)] \\ - N_t(x, z)\,\mathrm{grad}_z[m^1(x_t, z)]$$

(*où* $\mathrm{grad}_z\ [m^1(x_t, z)\,N_t^1(x, z)]$ *est la distribution dérivée de* $m^1(x_t, z)\,N_t(x, z)\,dz$ *au sens des distributions*), *alors* $dt \otimes dQ$ *p.s., on a l'égalité au sens des distributions*

$$m^1(x_t, z)\,\mathrm{grad}_z N_t(x, z) = m^1(x_t, z)\,V_t(x, z). \tag{3.7}$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. On a par définition

$$E^Q \int_0^T dt \int_{|z| \geqq \varepsilon} |V_t(z)|\, m^1(x_t, z)\, dz = E^Q[S_{t \leqq T}(1_{|\Delta z_t^1| \geqq \varepsilon} |V_t(\Delta z_t^1)|)] \tag{3.8}$$

(les deux termes sont finis ou infinis simultanément).

Soit $L_1^\varepsilon \ldots L_k^\varepsilon \ldots$ les temps d'arrêt ordonnés par ordre croissant des sauts de z^1 en norme $\geqq \varepsilon$. Par définition de la projection optionnelle, on a

$$E^Q[1_{L_k^\varepsilon \leqq T} |V_{L_k^\varepsilon}|(\Delta z_{L_k^\varepsilon}^1)] \leqq E^Q[1_{L_k^\varepsilon \leqq T} |T_{L_k^\varepsilon}|]$$

et donc par sommation

$$E^Q(S_{t \leqq T}\, 1_{|\Delta z_t^1| \geqq \varepsilon} |V_t(\Delta z_t^1)|) \leqq E^Q[S_{t \leqq T}\, 1_{|\Delta z_t^1| \geqq \varepsilon} \sup_{0 \leqq t \leqq T} |T_t|]. \tag{3.9}$$

Or $\sup_{0 \leqq t \leqq T} |T_t|$ est dans $L_2(D(R^n), Q)$. En raisonnant comme en (2.26), on voit que la somme $S_{t \leqq T} 1_{|\Delta z_t^1| \geqq \varepsilon}$ est aussi dans $L_2(D(R^n), Q)$ de telle sorte que (3.9) est $< +\infty$. Ainsi (3.8) est $< +\infty$. On a donc le résultat cherché pour la première fonction de (3.6). On montre le même résultat pour la fonction $z \to m^1(x_t, z)\, N_t(z)$ en utilisant (3.1) et le fait que $\int_{|z| \geqq \varepsilon} m^1(x', z)\, dz < +\infty$. Enfin $N_t(z)\,\mathrm{grad}_z\, m^1(x_t, z)$ est localement intégrable sur $R^{n_1}/\{0\}$ par (2.14) et (3.1).

Soit $f_1 \ldots f_k \ldots$ une famille dénombrable dense dans $C_0^\infty(R^{n_1}/\{0\}; R^{n_1})$ (qui est l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact dans $R^{n_1}/\{0\}$ à valeurs dans R^{n_1}). Soit u_t un processus réel prévisible borné, et $f \in C_0^\infty(R^{n_1}/\{0\}, R^{n_1})$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $|z| \leqq \varepsilon$, $f(0) = 0$. On prend dans (2.18) $\Lambda_t(z) = u_t\, f(z)$. On définit $L_1^\varepsilon \ldots L_k^\varepsilon \ldots$ comme précédemment. Si G_t est le processus défini en (2.47), on a:

$$\begin{aligned} &E^Q\Big[\int_{[0,T]} \langle dA_t^x, G_t\rangle + \int_{]0,T]} \langle dB_t^x, G_{t^-}\rangle\Big] \\ &= E^Q\Bigg[\sum_{k=1}^{+\infty} 1_{L_k^\varepsilon \leqq T} \langle \Lambda_{L_k^\varepsilon}(\Delta z_{L_k^\varepsilon}^1), (\bar{P} + \tilde{\rho}_z(\Delta z_{L_k^\varepsilon}^1)\,\bar{P}') \\ &\quad \cdot \tilde{\varphi}_{L_k^\varepsilon}^{*-1}\Big(\int_{[L_k^\varepsilon, T]} \tilde{\varphi}_u^*\, dA_u^x + \int_{]L_k^\varepsilon, T]} \tilde{\varphi}_u^*\, dB_u^x\Big)\rangle\Bigg]. \end{aligned} \tag{3.10}$$

De même, on a

$$E^Q\left[H(x)\left(\overset{c'}{S}_{s\leq T}\frac{\operatorname{div}_{z=\Delta z_s^1}(m^1(x_{s^-},z)\,A(z))}{m^1(x_{s^-},z)}+\overset{c'}{S}_{s\leq T}\left\langle\frac{m_x^1}{m^1}(x_{s^-},\Delta z_s^1),G_{s^-}\right\rangle\right)\right]$$

$$=E^Q\int_0^T ds\int_{R^{n_1}|\{0\}} N_s(z)\,(\operatorname{div}_z(m^1(x_{s^-},z)\,A(z))+\langle m_x^1(x_{s^-},z),G_{s^-}\rangle)\,dz$$

$$=E^Q\int_0^T ds\int_{|z|\geq\varepsilon} N_s(z)\operatorname{div}_z(m^1(x_{s^-},z)\,A(z))\,dz+$$

$$+E^Q\left[\sum_{k=1}^{+\infty}1_{L_k^\varepsilon\leq T}\left\langle A_{L_k^\varepsilon}(\Delta z^1_{L_k^\varepsilon}),(\bar P+\tilde\rho_z(\Delta z^1_{L_k^\varepsilon})\,\bar P')\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\tilde\varphi^{*-1}_{L_k^\varepsilon}\int_{L_k^\varepsilon}^T du\int_{R^{n_1}/\{0\}} N_u(z)\,\tilde\varphi_u^* m_x^1(x_u,z)\,dz\right\rangle\right]. \tag{3.11}$$

A droite dans (3.10) et (3.11), on peut remplacer les termes devant $A_{L_k^\varepsilon}(\Delta z^1_{L_k^\varepsilon})$ par leurs espérances conditionnelles relativement à $F^x_{L_k^\varepsilon}$. Comme par (2.18), la somme de (3.10) et (3.11) est nulle, on a

$$E^Q\left[\sum_{k=1}^{+\infty}1_{L_k^\varepsilon\leq T}\langle A_{L_k^\varepsilon}(\Delta z^1_{L_k^\varepsilon}),V_{L_k^\varepsilon}(\Delta z^1_{L_k^\varepsilon})\rangle\right]$$

$$+E^Q\int_0^T ds\int_{|z|\geq\varepsilon} N_s(z)\operatorname{div}_z(m^1(x_{s^-},z)\,A(z))\,dz=0 \tag{3.12}$$

qui s'écrit aussi

$$E^Q\left[\int_0^T ds\int_{|z|\geq\varepsilon}[N_s(z)\operatorname{div}_z(m^1(x_{s^-},z)\,A(z))\right.$$
$$\left.+\langle A(z),V_s(z)\rangle\,m^1(x_{s^-},z)]\,dz\right]=0. \tag{3.13}$$

Fixons pour l'instant $f\in C_0^\infty(R^{n_1}/\{0\};R^{n_1})$. Comme (3.13) est vérifiée pour tout u prévisible borné, - rappelons qu'on a choisi $A_t(z)=u_t f(z)$ - on déduit de (3.13) qu'on a $dt\otimes dQ$ p.s.

$$\int_{R^{n_1}/\{0\}} N_t(z)\operatorname{div}_z(m^1(x_t,z)\,f(z))\,dz$$
$$+\int_{R^{n_1}/\{0\}}\langle f(z),V_t(z)\rangle\,m^1(x_t,z)\,dz=0. \tag{3.14}$$

Grâce à la première partie du Théorème, on sait que les deux membres de (3.14) définissent $dt\otimes dQ$ p.s. des distributions sur $R^{n_1}/\{0\}$ à valeurs dans R^{n_1}. En faisant parcourir à f l'ensemble $f_1\dots f_k\dots$ et en éliminant une famille dénombrable de $dt\otimes dQ$ négligeables, on voit que $dt\otimes dQ$ p.s., pour tout $f\in C_0^\infty(R^{n_1}/\{0\},R^{n_1})$, on a (3.14). En écrivant que

$$\int_{R^{n_1}/\{0\}} N_t(z)\operatorname{div}_z(m^1(x_t,z)\,f(z))\,dz$$
$$=\int_{R^{n_1}/\{0\}}(\operatorname{div}_z f(z))\,N_t(z)\,m^1(x_t,z)\,dz \tag{3.15}$$
$$+\int_{R^{n_1}/\{0\}}\langle f(z),\operatorname{grad}_z m^1(x_t,z)\rangle\,N_t(z)\,dz$$

et en utilisant (3.14), on obtient bien (3.7). □

Remarque 1. Il est normal que $m^1(x_t, z)$ apparaisse des deux côtés de (3.7), puisque les termes à droite de m^1 ne sont pas bien définis là où $m^1=0$.

Remarque 2. L'information obtenue sur N_t est de nature apparement très différente du résultat correspondant de Haussmann [8, 9] (voir aussi [3]) pour les diffusions continues, bien qu'il ait été obtenu par une méthode très semblable à [3, 9]. Si toutefois $N_t(z)$ est de la forme $\langle H_t, z\rangle$ où H_t est prévisible, (3.7) nous permet de calculer H_t. Si on interprète la représentation des martingales du mouvement brownien sous la forme d'intégrales stochastiques de Ito $\int_0^t H\,\partial w$ comme la limite de sommes $\sum H_{t_i} \Delta w_{t_i}$, on voit qu'au moins formellement, on est sous les hypothèses «linéaires» précédentes.

4. Régularité des semi-groupes des processus de sauts

Dans cette section, on va montrer que sous certaines hypothèses, le semi-groupe associé à un processus de sauts est suffisamment régulier.

Dans le paragraphe a), on va étendre le Théorème 2.5 en élargissant la classe des $\Lambda_t(z)$ qui conviennent. Dans le paragraphe b), on établit une formule d'intégration par parties plus précise que le Théorème 2.5, qui généralise le Théorème 3.1 de [3]. Au paragraphe c), on montre que sous des conditions d'«ellipticité» de la mesure de Lévy, on peut établir des résultats (encore très insuffisants) d'intégration par parties d'ordre 1 sur le semi-groupe convenablement «tronqué». Au paragraphe d), on étudie l'appartenance à certains $L_p(1 \leqq p < +\infty)$ d'une forme quadratique aléatoire K_T^{-1} (qui correspond à $[\Phi' \Phi'^*(x)]^{-1}$ dans (0.5)–(0.6)). On obtient une formule d'intégration par parties non tronquée à l'ordre 1 sur le semi-groupe. Au paragraphe e), on interprète les formules obtenues sur les processus à accroissements indépendants. Au paragraphe f) on établit certains résultats de type abélien et taubérien sur les mesures de Lévy et leurs transformées de Laplace et Fourier. Au paragraphe g), on établit une formule d'intégration par parties d'ordre 2 sur le semigroupe considéré, et au paragraphe h) une formule d'intégration par parties d'ordre quelconque.

Cette section est centrale dans l'article.

a) Extension du théorème 2.5

On reprend l'ensemble des notations et hypothèses des sections 1 et 2. En particulier, on suppose vérifiées les hypothèses $\mathbb{H}$ 2.1, $\mathbb{H}$ 2.2, $\mathbb{H}$ 2.3.

On va alors affaiblir considérablement la condition a) du Théorème 2.5.

Théorème 4.1. *Soit $\lambda(z)$ une fonction borélienne $\geqq 0$ sur $R^{n_1}/\{0\}$ telle que $\int_{|z| \leqq 1} \lambda^2(z)\, m^1(x', z)\, dz$ soit une fonction bornée sur R^n (on peut choisir $\lambda(z)=|z|$). Soit $\Lambda_t(\omega, z)$ une fonction définie sur $(R^+ \times \Omega) \times R^{n_1}/\{0\}$ à valeurs dans R^{n_1} qui est bornée, $\mathscr{P} \otimes \mathscr{B}(R^{n_1}/\{0\})$-mesurable et telle que*

a) *Il existe $C>0$ tel que pour $|z|\leqq 1$*

$$|A_t(\omega, z)| \leqq C\lambda(z)|z|. \tag{4.1}$$

b) *A est de classe C^1 en la variable $z\in R^{n_1}/\{0\}$, et la dérivée A_z est uniformément bornée.*

c) *La fonction*

$$\int_{|z|\leqq 1} \frac{|\mathrm{div}_z[m^1(x_t, z)\, A_t(\omega, z)]|^2\, dz}{m^1(x_t, z)} \tag{4.2}$$

est uniformément bornée.

Alors on a encore la formule (2.18).

Preuve. On peut bien choisir $\lambda(z)=|z|$ grâce à (2.3) et (2.7). On va raisonner par approximation à partir du Théorème 2.5.

Soit $\sigma(z)$ une fonction dans $C_b^\infty(R^{n_1})$ à valeurs dans $[0,1]$, égale à 0 pour $|z|\leqq 1/2$ et à 1 pour $|z|\geqq 1$. Pour $\varepsilon>0$, on pose

$$A_t^\varepsilon(\omega, z)=\sigma(z/\varepsilon)\, A_t(\omega, z). \tag{4.3}$$

A_t^ε vérifie les hypothèses du Théorème 2.5, et on a donc (2.18) relativement à A^ε. On va passer à la limite dans (2.18) quand $\varepsilon\to 0$. On a

$$\begin{aligned} &E^P[S_{s\leqq T}|A(\Delta u_s^1)-A^\varepsilon(\Delta z_s^1)|] \\ &=E^P\left[\int_0^T ds \int_{R^{n_1}/\{0\}} |A(z)-A^\varepsilon(z)|\, m^1(x_s, z)\, dz\right. \\ &\leqq E^P\int_0^T ds \int_{|z|\leqq\varepsilon} |A(z)|\, m^1(x_s, z)\, dz. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Or par (4.1), $|A(z)|\leqq\lambda(z)|z|$, et de plus par l'inégalité de Schwarz, $\int_{|z|\leqq 1} \lambda(z)|z|\, m^1(x', z)\, dz$ est trivialement borné sur R^n. Le membre de droite de (4.4) tend vers 0 avec ε. On passe ainsi facilement à la limite sur le premier terme de (2.18). De plus

$$\begin{aligned} &E^P\int_0^T ds \int_{R^{n_1}/\{0\}} \frac{|\mathrm{div}_z[m^1(x_s, z)(A-A^\varepsilon)(z)]|^2\, dz}{m^1(x_s, z)} \\ &\leqq C\left[E^P\int_0^T ds \int_{|z|\leqq\varepsilon} \frac{|\mathrm{div}_z[m^1(x_s, z)\, A(z)]|^2\, dz}{m^1(x_s, z)}\right. \\ &\left.+E^P\int_0^T ds \int_{|z|\leqq\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^2}\left|\sigma_z\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)\right|^2 |A(z)|^2\, m^1(x_s, z)\, dz\right]. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Par (4.2), le premier terme à droite de (4.5) tend vers 0 avec ε. Par (4.1), on majore le deuxième terme par

$$CE^P\int_0^T ds \int_{|z|\leqq\varepsilon} \lambda^2(z)\, m^1(x_s, z)\, dz \tag{4.6}$$

qui tend aussi vers 0 avec ε. Par (4.5), on voit que la première somme compensée dans (2.18) relative à Λ^ε converge dans $L_2(\Omega, P)$ vers la somme compensée relative à Λ, ce qui permet de passer à la limite sur ce terme. Pour passer à la limite sur les derniers termes, on voit, en utilisant (2.24), qu'il suffit de prouver que quand $\varepsilon \to 0$

$$E^P[S_{s \geqq T} |(\Lambda - \Lambda^\varepsilon)(\Delta z_s^1)|]^2 \to 0. \tag{4.7}$$

Or comme en (2.25)

$$\exp\left[S_{s \leqq T} |(\Lambda - \Lambda^\varepsilon)(\Delta z_s^1)| - \int_0^T ds \int_{|z| \leqq \varepsilon} (\exp|\Lambda - \Lambda^\varepsilon|(z) - 1)\, m^1(x_s, z)\, dz\right] \tag{4.8}$$

est une martingale (en T) d'espérance 1. Λ étant borné, on a

$$\begin{aligned} &\int_0^T ds \int_{|z| \leqq \varepsilon} (\exp|(\Lambda - \Lambda^\varepsilon)(z)| - 1)\, m^1(x_t, z)\, dz \\ &\quad \leqq C \int_0^T ds \int_{|z| \leqq \varepsilon} |\Lambda - \Lambda^\varepsilon|(z)\, m^1(x_t, z)\, dz \\ &\quad \leqq C \int_0^T ds \int_{|z| \leqq \varepsilon} \lambda(z)\, |z|\, m^1(x_t, z)\, dz \end{aligned} \tag{4.9}$$

de telle sorte que le membre de droite de (4.9) est uniformément borné. De (4.4), (4.8) et (4.9) (qui donne une intégrabilité uniforme), on déduit (4.7). □

Remarque 1. Si $l(z)$ est une fonction de classe C^1 sur $R^{n_1}/\{0\}$ à valeurs réelles, bornée à dérivée bornée, si Λ vérifie les hypothèses du Théorème 4.1, $\Lambda'(z) = l(z)\, \Lambda(z)$ les vérifie également.

Remarque 2. Le fait que $\lambda(z) = |z|$ convienne n'est pas «accidentel». En effet le Théorème 4.1 indique qu'une intégration par parties est possible si (avec d'autres hypothèses) la perturbation est de l'ordre de la variation quadratique du processus. Dans le cas «limite» du mouvement brownien, la perturbation utilisée dans [3] était absolument continue, i.e. de l'ordre de la variation quadratique du mouvement brownien.

Exemple. Supposons que

$$\lambda(z) = |z|^\alpha \qquad 0 \leqq \alpha \leqq 1.$$

Si $e \in R^{n_1}$, si Λ est tel que pour $|z| < 1$

$$\Lambda = |z|^{\alpha+1}\, e \tag{4.10}$$

(4.1) est vérifiée. Posons

$$f(x', z) = [|z|^{\alpha+1}\, m^1(x', z)]^{1/2} \tag{4.11}$$

(4.2) est alors équivalent au fait que

$$\int_{|z| \leqq 1} 1_{m^1(x', z) \neq 0}\, |z|^{\alpha+1}\, |\langle \mathrm{grad}_z f(x', z), e \rangle|^2\, dz \tag{4.12}$$

est uniformément borné. Or pour $m^1(x',z)\neq 0$, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}_z[|z|^{\frac{\alpha+1}{2}} f(x',z)] &= \frac{\alpha+1}{2}|z|^{\frac{\alpha-1}{2}} f(x',z)\frac{z}{|z|} + |z|^{\frac{\alpha+1}{2}} \operatorname{grad}_z f(x',z)\\ &= \frac{\alpha+1}{2}|z|^{\alpha}|m^1(x',z)|^{1/2}\frac{z}{|z|} + |z|^{\frac{\alpha+1}{2}} \operatorname{grad}_z f(x',z).\end{aligned} \tag{4.13}$$

Comme par hypothèse

$$\int_{|z|\leqq 1} |z|^{2\alpha} m^1(x',z)\,dz \tag{4.14}$$

est uniformément borné, pour que (4.12) soit vérifié pour tout $e\in R^{n_1}$, on voit, en utilisant (4.13), qu'il faut et il suffit que

$$\int_{|z|\leqq 1} 1_{m^1(x',z)\neq 0} |\operatorname{grad}_z(|z|^{\alpha+1}[m^1(x',z)]^{1/2})|^2\,dz \tag{4.15}$$

soit borné. Notons que si (4.14)–(4.15) sont vérifiées, on a aussi (4.14)–(4.15) pour tout $\alpha'\geqq\alpha$. En effet pour $\gamma>0$

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}_z(|z|^{\alpha+\gamma+1}(m^1(x',z))^{1/2}) &= \gamma|z|^{\alpha+\gamma}(m^1(x',z))^{1/2}\frac{z}{|z|}\\ &\quad + |z|^{\gamma}\operatorname{grad}_z(|z|^{\alpha+1}(m^1(x',z))^{1/2})\end{aligned} \tag{4.16}$$

de telle sorte qu'on a encore (4.14), (4.15) pour $\alpha'=\alpha+\gamma$. C'est donc vrai en particulier pour $\alpha'=1$.

En particulier, si on considère le processus stable d'indice $\beta(0\leqq\beta<2)$ dont la mesure de Lévy est $\frac{dz}{|z|^{\beta+n_1}}$, on a (4.14)–(4.15) si et seulement si $\alpha>\frac{\beta}{2}$.

Dans le cas où $n_1=1$, (4.15) implique que $\lim_{z\to 0^{\pm}} |z|^{\alpha+1}(m^1(x,z))^{1/2}$ existe et est égale à $C_{\pm}(x)$. A cause de (4.14), $C_{\pm}=0$. Donc en utilisant (4.15) et l'inégalité de Schwarz, on a $|z|^{\alpha+1}(m^1(x,z))^{1/2}\leqq C|z|^{1/2}$ c'est-à-dire

$$m^1(x,z)\leqq\frac{C}{|z|^{2\alpha+1}}. \tag{4.17}$$

b) Une formule d'intégration par parties généralisée

A partir de maintenant, on suppose pour simplifier que $\rho=0$.

$\lambda(z)$ est une fonction borélienne $\geqq 0$ sur $R^{n_1}/\{0\}$ telle que

$$\int_{|z|\leqq 1} \lambda^2(z)\, m^1(x',z)\,dz \tag{4.18}$$

est uniformément bornée.

Soit $v(z)$ une fonction définie sur $R^{n_1}/\{0\}$ à valeurs dans $[0,+\infty[$, qui est bornée, de classe C^1 à dérivée bornée, et telle que

a) Il existe $C>0$ tel que pour $|z|\leqq 1$

$$|v(z)|\leqq C\lambda(z)\,|z|. \tag{4.19}$$

b) La fonction

$$\int_{|z|\leqq 1} \frac{|\operatorname{grad}_z v(z)\, m^1(x',z)|^2\, dz}{m^1(x',z)} \tag{4.20}$$

est uniformément bornée.

Comme v est bornée, on a

$$\int_{R^{n_1}/\{0\}} v(z)\, m^1(x',z)\, dz \leqq C\Big[\int_{|z|\leqq 1} \lambda^2(z)\, m^1(x',z)\, dz\Big]^{\frac{1}{2}} \Big[\int_{|z|\leqq 1} |z|^2\, m^1(x',z)\, dz\Big]^{\frac{1}{2}} + C\int_{|z|>1} m^1(x',z)\, dz.$$

Grâce à (2.3), (2.7), (4.18), on voit que

$$\int_{R^{n_1}/\{0\}} v(z)\, m^1(x',z)\, dz \tag{4.21}$$

est uniformément borné. De plus

$$\int_{R^{n_1}/\{0\}} v(z)\,(\tfrac{1}{2}+1_{b^1(x',z)<-\frac{1}{2}}\, b^1(x',z))\, g(z)\, dz \leqq \int_{R^{n_1}/\{0\}} v(z)\, m^1(x',z)\, dz.$$

Par (2.7), $\int_{b^1(x',z)<-\frac{1}{2}} b^1(x',z)\, g(z)\, dz$ est borné. Comme v est bornée, on voit que

$$\int_{R^{n_1}/\{0\}} v(z)\, g(z)\, dz < +\infty. \tag{4.22}$$

De (4.21) et (4.22), on tire que la somme $S_{s\leqq T}\, v(\Delta z_s^1)$ est définie sur (Ω,Π) et (Ω,P). Comme v est bornée, on tire en utilisant l'équivalent de (4.8)–(4.9) que $S_{s\leqq T}\, v(\Delta z_s^1)$ est dans tous les $L_p(\Omega,\Pi)$ et $L_p(\Omega,P)$ $(1\leqq p<+\infty)$.

$\langle , \rangle$ est le produit scalaire ordinaire sur R^n.

$e_1,\dots,e_n$ désigne la base canonique de R^n.

Définition 4.2. On désigne par L_t le processus continu de formes quadratiques positives sur R^n défini par

$$(X,Y)\in R^n\times R^n \to L_t(X,Y)=\sum_1^{n_1} \langle X, \varphi_t^{*-1} e_i\rangle \langle Y, \varphi_t^{*-1} e_i\rangle. \tag{4.23}$$

On identifie L_t à l'opérateur linéaire de R^n dans R^n

$$X\in R^n \to L_t X = \sum_1^{n_1} \langle X, \varphi_t^{*-1} e_i\rangle\, \varphi_t^{*-1} e_i.$$

Si $B\in R^n\otimes R^n$, $\operatorname{Tr} B$ désigne la trace de B.

Enfin $k(x)=(k_1(x),\dots k_n(x))$ est une fonction définie sur $D_T(R^n)$ à valeurs dans R^n, dont les composantes $k^1\dots k^n$ ont les mêmes propriétés que la fonction $H(x)$, qui ont été énoncées au paragraphe 2b). En particulier la dérivée $dk(x)$ est donnée par un couple de mesures (A^x, B^x) sur $[0, T]$ à valeurs dans $R^n \otimes R^n$, dont les composantes ont les propriétés données en 2b), telles qui si $x, y \in D_T(R^n)$, alors

$$dk(x)\, y = \int_{[0,T]} dA_t^x(y_t) + \int_{]0,T]} dB_t^x(y_{t-}) \in R^n.$$

Dans le théorème qui suit, on considèrera les opérateurs (aléatoires) linéaires de R^n dans R^n:

$$l \in R^n \to \int_{[s,T]} dA_t^x\, \varphi_t^*(l) + \int_{]s,T]} dB_t^x\, \varphi_t^*(l).$$

On a alors l'analogue du Théorème 3.1 de [3].

Théorème 4.3. *Soit $f \in C_b^\infty(R^n)$. Alors pour tout $T > 0$, on a*

$$\begin{aligned}
&E^P[\langle f_x(x_T), \varphi_T^* S_{s \leq T}\{v(\Delta z_s^1)\, L_s\}\, k(x)\rangle] \\
&\quad + E^P[f(x_T)\, \mathrm{Tr}(S_{s \leq T}\{v(\Delta z_s^1)\, L_s(\int_{[s,T]} dA_t^x\, \varphi_t^* + \int_{]s,T]} dB_t^x\, \varphi_t^*)\})] \\
&\quad + E^P\left[f(x_T) \left\langle \overset{c'}{S}_{s \leq T} \left\{ L_s\, \tilde{\varphi}_s^* \frac{\mathrm{grad}_{z = \Delta z_s^1} (v(z)\, m^1(x_{s-}, z))}{m^1(x_{s-}, \Delta z_s^1)} \right\}, k(x) \right\rangle \right] \\
&\quad + E^P\left[f(x_T) \left\langle \overset{c'}{S}_{s \leq T} \left\{ (S_{u<s}\, v(\Delta z_u^1)\, L_u) \left(\tilde{\varphi}_s^* \frac{m_x^1}{m^1}(x_{s-}, \Delta z_s^1) \right.\right.\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\left.\left. + \tilde{\varphi}_s^* \frac{m_x^2}{m^2}(x_{s-}, \Delta y_s^2) \right) \right\}, k(x) \right\rangle \right] = 0.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Preuve. Grâce aux hypothèses faites sur v, on peut pour $l = 1 \dots n$, $i = 1 \dots n_1$, appliquer le Théorème 4.1, avec

$$A_t(\omega, z) = v(z)\, (\varphi_t^{*-1}\, e_i)^l\, e_i$$

$$H(x) = k_l(x)\, f(x_T)$$

(rappelons que $\varphi_t^{*-1}\, e_i$ est un processus adapté continu donc prévisible). En sommant les formules (2.18) en l, i, on obtient (4.24). □

c) *Intégration par partie tronquée d'ordre 1 sur le semi-groupe*

Dans ce paragraphe, et pour toute la suite, on va se placer sous des conditions légèrement plus générales que précédemment, i.e. on va considérer plusieurs processus de type z^1 qui «entrent» dans la construction de x. Nous ne l'avions pas fait auparavant pour ne pas compliquer les notations.

Soit $n_1 \dots n_q$ une famille de q entiers tels que $1 \leq n_i \leq n$. $E_1 \dots E_q$ sont q-sous-espaces vectoriels de R^n de dimension respective $n_1 \dots n_q$. On suppose que R^n est muni de sa structure euclidienne canonique.

Pour $1 \leq i \leq q$, $e_{i,1} \dots e_{i,n_i}$ désigne une base orthonormale de E_i. z_i est le point général de E_i, et $(z_i^1 \dots z_i^{n_i})$ sont ses composantes sur la base $(e_{i,1} \dots e_{i,n_i})$. dz_i est la mesure de Lebesgue sur E_i.

Pour $1 \leqq i \leqq q$, $g_i(z_i)$ est une fonction définie sur $E_i/\{0\}$ à valeurs dans R^+ vérifiant les mêmes hypothèses que g dans IH 2.1. $b_i^1(x, z_i)$ est une fonction définie sur $R^n \times E_i/\{0\}$ à valeurs dans $[-1, +\infty[$ vérifiant (relativement à g_i) l'hypothèse IH 2.2. On pose pour $(x, z_i) \in R^n \times E_i/\{0\}$

$$m_i^1(x, z_i) = (1 + b_i^1(x, z_i))\, g_i(z_i) \tag{4.25}$$

$\mu^{1,i}$ désigne la mesure sur $R^n/\{0\}$

$$d\mu_i^1(y) = 1_{y = z_i \in E_i}\, g_i(z_i)\, dz_i \tag{4.26}$$

(on suppose ici encore que les fonctions ρ_i sont nulles).

Enfin μ^2, b^2, m^2 sont choisies comme aux sections 1 et 2 et vérifient en particulier IH 2.3.

Pour $i = 1 \dots q$, $z_{i,t}^1$ est le processus à accroissements indépendants à valeurs dans R^n dont la fonction caractéristique est donnée par

$$\begin{aligned} \psi_t^{1,i}(\alpha) = \exp\Big[\int_{|z_i| \leqq 1} & t(\exp(-i\langle \alpha, z_i\rangle) - 1 + i\langle \alpha, z_i\rangle)\, g_i(z_i)\, dz_i \\ & + \int_{|z_i| > 1} t \exp(-i\langle \alpha, z_i\rangle) - 1)\, g_i(z_i)\, dz_i \Big]. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Clairement z_i^1 est un processus à valeurs dans E_i. Soit Π_i^1 la loi de z_i^1 sur $D(R^n)$.

y^2, Π^2 sont définis comme aux sections 1 et 2.

On veut construire le processus de Markov x_t à valeurs dans R^n dont le générateur infinitésimal $\mathscr{L}$ opère sur $f \in C_b^\infty(R^n)$ par

$$\begin{aligned} \mathscr{L} f(x) = \langle f_x(x), X_0(x)\rangle &+ \sum_{i=1}^{q} \Big[\int_{|z_i| \leqq 1} \langle f_x(x), z_i\rangle\, b_i^1(x, z_i)\, g_i(z_i)\, dz_i \Big] \\ &+ \int_{|y| \leqq 1} \langle f_x(x), y\rangle\, b^2(x, y)\, d\mu^2(y) \\ &+ \sum_{i=1}^{q} \Big[\int_{|z_i| \leqq 1} (f(x+z_i) - f(x) - \langle f_x(x), z_i\rangle)\, m_i^1(x, z_i)\, dz_i \\ &+ \int_{|z_i| > 1} (f(x+z_i) - f(x))\, m_i^1(x, z_i)\, dz_i \Big] \\ &+ \int_{|y| \leqq 1} (f(x+y) - f(x) - \langle f_x(x), y\rangle)\, m^2(x, y)\, d\mu^2(y) \\ &+ \int_{|y| > 1} (f(x+y) - f(x))\, m^2(x, y)\, d\mu^2(y). \end{aligned} \tag{4.28}$$

(Notons que la décomposition (4.28) n'est pas canonique).

On procède pour cela comme à la section 1. Ω désigne en effet l'espace $[D(R^n)]^{q+1}$, dont le point général est noté $\omega = (z_1^1 \dots z_q^1, y^2)$. $\{F_t\}_{t \geqq 0}$ désigne la filtration canonique (éventuellement complétée et régularisée à droite) engendrée par les processus $(z_1^1 \dots z_q^1, y^2)$. On pose alors

$$y_t = z_{1,t}^1 + \dots + z_{q,t}^1 + y_t^2. \tag{4.29}$$

Pour $x_0 \in R^n$ fixé, et y donné par (4.29), on considère l'équation (1.5) et on désigne par x_t la solution de (1.5).

Soit Π la mesure de probabilité sur $\Omega \Pi_1^1 \otimes \ldots \otimes \Pi_q^1 \otimes \Pi^2$. Sur (Ω, Π) on définit sans difficulté les martingales de carré intégrable $\overset{c}{S}_{s \leqq t} b_i^1(x_{s^-}, \Delta z_{i,s}^1)$ $(1 \leqq i \leqq q)$ et $\overset{c}{S}_{s \leqq t} b^2(x_{s^-}, \Delta y_s^2)$. Soient $Z_{i,t}^1$ $(1 \leqq i \leqq q)$, Z_t^2 les martingales de carré intégrable exponentielle de Doléans-Dade associées. Alors

$$Z_t = Z_{1,t}^1 \ldots Z_{q,t}^1 Z_t^2 \tag{4.30}$$

est la martingale de carré intégrable $\geqq 0$ qui est l'exponentielle de Doléans-Dade associée à la martingale de carré intégrable

$$\sum_{i=1}^{q} \overset{c}{S}_{s \leqq t} b_i^1(x_{s^-}, \Delta z_{i,s}^1) + \overset{c}{S}_{s \leqq t} b^2(x_{s^-}, \Delta y_s^2). \tag{4.31}$$

Alors comme au Théorème 1.7, on montre sans difficulté que si P est la mesure de probabilité sur Ω dont la densité par rapport à Π sur F_t est donnée par Z_t, i.e.

$$\left.\frac{dP}{d\Pi}\right|_{F_t} = Z_t \tag{4.32}$$

alors la loi du processus x pour la mesure P est exactement la mesure Q_{x_0} sur $D(R^n)$ solution unique du problème des martingales associé à l'opérateur $\mathscr{L}$ et telle que $Q_{x_0}(x(0) = x_0) = 1$.

On peut alors écrire sans difficulté des formules du type (2.18) pour des fonctions $A_t(\omega, z_i)$ définies sur $(R^+ \times \Omega) \times E_i/\{0\}$ à valeurs dans E_i qui sont $\mathscr{P} \otimes \mathscr{B}(E_i/\{0\})$ mesurables, et ceci pour $i = 1 \ldots q$.

On a également une extension naturelle du Théorème 4.1. En effet, pour $i = 1 \ldots q$, $\lambda_i(z_i)$ est une fonction borélienne $\geqq 0$ sur $E_i/\{0\}$ telle que

$$\int_{|z_i| \leqq 1} \lambda_i^2(z_i)\, m_i^1(x', z_i)\, dz_i \tag{4.33}$$

est une fonction uniformément bornée ($\lambda_i = |z_i|$ convient pour (4.33)). On peut alors énoncer pour $i = 1 \ldots q$ une extension du Théorème 4.3.

On va donner explicitement l'extension du Théorème 4.3.

On fait alors l'hypothèse suivante

IH 4.1: Pour $i = 1 \ldots p$, $v_i(z_i)$ est une fonction définie sur $E_i/\{0\}$ à valeurs dans $[0, +\infty[$, qui est bornée, continue de classe C^1 à dérivée bornée et telle que

a) Il existe $C > 0$ tel que si $|z_i| \leqq 1$

$$|v_i(z_i)| \leqq C \lambda_i(z_i)\, |z_i|. \tag{4.34}$$

b) La fonction

$$\int_{|z_i| \leqq 1} \frac{|\mathrm{grad}_{z_i}(v_i(z_i)\, m_i^1(x', z_i))|^2\, dz_i}{m_i^1(x', z_i)} \tag{4.35}$$

est bornée.

Par (4.21), (4.22),

$$\int_{E_i/\{0\}} v_i(z_i)\, m_i^1(x', z_i)\, dz_i \tag{4.36}$$

est uniformément bornée et

$$\int_{E_i/\{0\}} v_i(z_i)\, g_i(z_i)\, dz_i < +\infty \tag{4.37}$$

et ainsi la variable aléatoire $S_{s \leq T}\, v_i(\Delta z_{i,s}^1)$ est dans tous les $L_p(\Omega, \Pi)$ et $L_p(\Omega, P)$ $(1 \leq p < +\infty)$ par l'argument donné après (4.22).

Définition 4.4. Pour $i = 1 \dots q$, P_i est l'opérateur de projection orthogonale de R^n sur E_i. $L_{i,t}$ est le processus continu de formes quadratiques positives sur R^n défini par

$$X, Y \in R^n \times R^n \to L_{i,t}(X, Y) = \sum_{j=1}^{n_i} \langle X, \varphi_t^{*-1} e_{i,j}\rangle \langle Y, \varphi_t^{*-1} e_{i,j}\rangle.$$

On identifie $L_{i,t}$ à l'opérateur linéaire de R^n dans R^n

$$X \in R^n \to L_{i,t} X = \sum_{j=1}^{n_i} \langle X, \varphi_t^{*-1} e_{i,j}\rangle\, \varphi_t^{*-1} e_{i,j}.$$

Comme $(e_{i,j})_{1 \leq j \leq n_i}$ est une base orthonormale de E_i, on a

$$L_{i,t}(X, Y) = \langle P_i \tilde{\varphi}_t^{*-1} X, P_i \tilde{\varphi}_t^{*-1} Y\rangle$$

$$L_{i,t}(X) = \varphi_t^{*-1} P_i \tilde{\varphi}_t^{*-1} X \tag{4.38}$$

$k(x)$ est choisi comme en b).

Rappelons que si $f(z_i)$ est une fonction C^1 sur $E_i/\{0\}$, $\operatorname{grad}_{z_i} f(z_i)$ est un vecteur de E_i – puisque E_i est muni de la structure euclidienne induite par R^n – et donc un vecteur de R^n.

On a alors l'extension du Théorème 4.3.

Théorème 4.5. *Soit $f \in C_b^\infty(R^n)$. Alors pour tout $T > 0$, on a:*

$$\begin{aligned}
&E^P[\langle f_x(x_T), \varphi_T^* S_{s \leq T}\{v_i(\Delta z_{i,s}^1)\, L_{i,s}\}\, k(x)\rangle] \\
&+ E^P[f(x_T) \operatorname{Tr}(S_{s \leq T}\{v_i(\Delta z_{i,s}^1)\, L_{i,s}(\int_{[s,T]} dA_t^x\, \varphi_t^* + \int_{]s,T]} dB_t^x\, \varphi_t^*)\})] \\
&+ E^P\left[f(x_T)\left\langle \overset{c'}{S}_{s \leq T}\left\{L_{i,s}\, \tilde{\varphi}_s^* \frac{\operatorname{grad}_{z_i = \Delta z_{i,s}^1}(v_i(z_i)\, m_i^1(x_{s-}, z_i))}{m_i^1(x_{s-}, \Delta z_{i,s}^1)}, k(x)\right\rangle\right]\right. \\
&+ E^P\left[f(x_T)\left\langle \overset{c'}{S}_{s \leq T}\left\{(S_{u<s}\, v_i(\Delta z_{i,u}^1)\, L_{i,u})\right.\right.\right. \\
&\left.\left.\left.\cdot \left(\tilde{\varphi}_s^* \frac{m_{j,x}^1}{m_j^1}(x_{s-}, \Delta z_{j,s}^1) + \tilde{\varphi}_s^* \left(\frac{m_x^2}{m^2}(x_{s-}, \Delta y_s^2)\right)\right)\right\}, k(x)\right\rangle\right] = 0,
\end{aligned} \tag{4.39}$$

(où dans (4.39)) on somme sur les indices $1 \leq i, j \leq q$).

Preuve. Pour $i=1\dots q$ on écrit la formule (4.24) du Théorème 4.3 sur le nouvel espace (Ω, Π) relativement à v_i, et on somme en i. □

Définition 4.6. On désigne par K_t le processus optionnel de formes quadratiques positives sur $R^n \otimes R^n$

$$K_t = \sum_{i=1}^{q} S_{s \leqq t}\, v_i(\Delta z_{i,s}^1)\, L_{i,s}. \tag{4.40}$$

On identifie K_t à l'opérateur linéaire de R^n dans R^n

$$X \to K_t X = \sum_{i=1}^{q} S_{s \leqq t}\, v_i(\Delta z_{i,s}^1)\, L_{i,s} X. \tag{4.41}$$

Notons tout de suite que K_t est un processus croissant de formes quadratiques positives.

On fait alors l'hypothèse d'«ellipticité» qui joue le même rôle que l'hypothèse d'ellipticité d'un opérateur différentiel du second ordre dans le calcul de Malliavin sur les diffusions [3, 14, 19].

IH 4.2: Les espaces $E_1 \dots E_q$ engendrent R^n et de plus pour $i=1\dots q$

$$\int_{|z_i| \leqq 1} 1_{v_i(z_i)>0}\, g_i(z_i)\, dz_i = +\infty. \tag{4.42}$$

La condition (4.42) est équivalente à la condition que pour un $x' \in R^n$,

$$\int_{|z_i| \leqq 1} 1_{v_i(z_i)>0}\, m^{1,i}(x', z_i)\, dz_i = +\infty. \tag{4.43}$$

En effet

$$\begin{aligned} g_i(z_i)\left(\tfrac{1}{2} + 1_{b_i^1(x',z_i) < -\frac{1}{2}}\, b_i^1(x', z_i)\right) &\leqq m_i^1(x', z_i) \\ &\leqq g_i(z_i)\left(\tfrac{3}{2} + 1_{b_i^1(x',z_i) > \frac{1}{2}}\, b_i^1(x', z_i)\right). \end{aligned} \tag{4.44}$$

Comme

$$\int_{E_i/\{0\}} |b_i^1(x', z_i)|^2\, g_i(z_i)\, dz_i < +\infty, \qquad \int_{|b_i^1(x',z_i)| > \frac{1}{2}} b_i^1(x', z_i)\, g_i(z_i)\, dz_i$$

est aussi $< +\infty$. (4.44) montre l'équivalence de (4.42) et (4.43).

Grâce à (2.3) pour g_i, on sait que (4.42) est équivalent à la propriété que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\int_{|z_i| \leqq \varepsilon} 1_{v_i(z_i)>0}\, g_i(z_i)\, dz_i = +\infty \tag{4.42'}$$

(en fait g_i étant de classe C^1, (4.42′) est trivial).

On a alors l'analogue de la Proposition 4.1 de [3].

Théorème 4.7. *P p.s., pour $T>0$, la forme quadratique K_T est définie positive.*

Preuve. Comme K_T est un processus croissant de formes quadratiques, il suffit d'établir que pour tout $T>0$, K_T est p.s. définie positive. Or pour $\beta > 0$, on sait que pour $i=1\dots q$

$$\exp\left\{-\beta\Big(S_{s\le t}\, 1_{\substack{v_i(\Delta z^1_{i,s})>0\\ |\Delta z^1_{i,s}|\le 1}} |\Delta z^1_{i,s}|^2\Big)-\int_0^t ds \int_{\substack{v_i(z_i)>0\\ |z_i|\le 1}} (e^{-\beta |z_i|^2}-1)\, m^{1,i}(x_s, z_i)\, dz_i\right\} \tag{4.45}$$

est une martingale.

L'espérance de (4.45) est donc égale à 1. Or grâce à (4.43) quand $\beta\to+\infty$, pour $t>0$

$$-\int_0^t ds \int_{\substack{|z_i|\le 1\\ v_i(z_i)>0}} (e^{-\beta |z_i|^2}-1)\, m^{1,i}(x_s, z_i)\, dz_i \nearrow +\infty. \tag{4.46}$$

De (4.45) et (4.46), on déduit facilement que p.s., pour tout $t>0$

$$S_{s\le t}\, 1_{|\Delta z^{1,i}_s|\le 1,\, v_i(\Delta z^1_{i,s})>0}\, |\Delta z^1_{i,s}|^2$$

est >0. Par une application immédiate de la propriété de Markov aux temps rationnels, on voit que p.s., pour $t>0$, il existe une infinité de temps $s\le t$ tels que $\Delta z^1_{i,s}\neq 0$, $v_i(\Delta z^1_{i,s})>0$.

Si f est dans le noyau de K_T, par (4.40) et (4.38), on voit par ce qui précède que pour $i=1\dots q$, il existe une suite s_n de réels >0 et tendant vers 0 (qui dépend de i) tels que

$$P_i\, \tilde\varphi^{*-1}_{s_n}\, f=0 \tag{4.47}$$

et donc pour $i=1\dots q$

$$P_i\, f=0. \tag{4.48}$$

Comme les E_i engendrent R^n, $f=0$. $\square$

On va maintenant utiliser les théorèmes 4.5 et 4.7 comme en [3, 14].

Pour simplifier les formules, nous allons utiliser des crochets de Lie de champs de vecteurs. Notons en effet que si T est un champ de vecteurs sur R^n, on peut définir $[\varphi^{*-1}_s e_{i,j}, \varphi^{*-1}_t T](x')$ qui est le crochet de Lie en des champs de vecteurs $\left[\frac{\partial\varphi_s}{\partial x}(x')\right]^{-1} e_{i,j}$ et $\left[\frac{\partial\varphi_t}{\partial x}(x')\right]^{-1} T(\varphi_t(x'))$. De même, on peut définir [31] la dérivée de Lie au sens de la géométrie différentielle du tenseur $L_{i,t}(x')$ suivant le champ $\varphi^{*-1}_s e_{k,l}$ au point x', qu'on note

$$\mathscr{L}_{\varphi^{*-1}_s e_{k,l}} L_{i,t}. \tag{4.49}$$

Rappelons que par (2.17), (2.17'), $\frac{\partial\varphi_t}{\partial x}(x_0)$, $\left[\frac{\partial\varphi_t}{\partial x}(x_0)\right]^{-1}$, $\frac{\partial^m\varphi_t}{\partial x^m}(x_0)$ ($|m|\ge 1$) sont des processus uniformément bornés sur $[0,T]$.

τ est une fonction définie sur $R^n\otimes R^n$ à valeurs dans $[0,1]$, C^∞ bornée à dérivées bornées, égale à 1 sur l'ensemble des C inversibles tels que $\|C^{-1}\|\le M$ ($M>0$) et à 0 sur l'ensemble des C inversibles tels que $\|C^{-1}\|\ge 2M$ et sur les C non inversibles.

On définit la fonction $C\to\tau(C)\,C^{-1}$ sur $R^n\otimes R^n$ en lui donnant la valeur 0 dans $R^n\otimes R^n$ si C n'est pas inversible. Cette fonction est aussi C^∞ bornée à dérivées bornées.

On a alors l'équivalent du théorème 4.2 de [3], qui est un résultat d'intégration par parties tronquée sur le semi-groupe.

Théorème 4.8. *Soit Y un champ de vecteurs défini sur R^n à valeurs dans R^n, C^∞ borné à dérivées bornées. Alors pour tout $f\in C_b^\infty(R^n)$, $T>0$, on a*

$$\begin{aligned}
&E^P[\tau(K_T)(Yf)(x_T)]+E^P[\tau(K_T)\,f(x_T)\\
&\quad\cdot[S_{s\leqq T}\{v_i(\Delta z^1_{i,s})\langle K_T^{-1}[\varphi_s^{*-1}e_{i,j},\varphi_T^{*-1}Y],\varphi_s^{*-1}e_{i,j}\rangle\}\\
&\quad -S_{s\leqq T}\{v_i(\Delta z^1_{i,s})\langle K_T^{-1}L_{i,s}K_T^{-1}\varphi_T^{*-1}Y, L_{i,s}\tilde{\varphi}_s^*\operatorname{grad}_{z_i=\Delta z^1_{i,s}}v_i(z_i)\rangle\}\\
&\quad -S_{u<s\leqq T}\{\langle K_T^{-1}(\mathscr{L}_{\varphi_u^{*-1}e_{i,j}}L_{k,s})\\
&\quad\cdot v_k(\Delta z^1_{k,s})K_T^{-1}\varphi_T^{*-1}Y, v_i(\Delta z^1_{i,u})\varphi_u^{*-1}e_{i,j}\rangle\}\\
&\quad +\left\langle \overset{c'}{S}_{s\leqq T}\left\{L_{i,s}\frac{\tilde{\varphi}_s^*\operatorname{grad}_{z_i=\Delta z^1_{i,s}}v_i(z_i)\,m_i^1(x_{s-},z_i)}{m_i^1(x_{s-},\Delta z^1_{i,s})}\right\}, K_T^{-1}\varphi_T^{*-1}Y\right\rangle\\
&\quad +\left\langle \overset{c'}{S}_{s\leqq T}\left\{S_{u<s}(v_k(\Delta z^1_{k,u})L_{k,u})\left(\tilde{\varphi}_s^*\frac{m^1_{i,x}}{m_i^1}(x_{s-},\Delta z^1_{i,s})\right.\right.\right.\\
&\quad \left.\left.\left.+\tilde{\varphi}_s^*\frac{m_x^2}{m^2}(x_{s-},\Delta y_s^2)\right)\right\}, K_T^{-1}\varphi_T^{*-1}Y\right\rangle]]\\
&\quad +E^P[\langle\tau_K(K_T), S_{s\leqq T}\{v_i(\Delta z^1_{i,s})\\
&\quad\cdot L_{i,s}\langle K_T^{-1}\varphi_T^{*-1}Y, L_{i,s}\tilde{\varphi}_s^*\operatorname{grad}_{z_i=\Delta z^1_{i,s}}v_i(z_i)\rangle\}\\
&\quad +S_{u<s\leqq T}v_k(\Delta z^1_{k,s})(\mathscr{L}_{\varphi_u^{*-1}e_{i,j}}L_{k,s})\\
&\quad\cdot\langle v_i(\Delta z^1_{i,u})\varphi_u^{*-1}e_{i,j}, K_T^{-1}\varphi_T^{*-1}Y\rangle\,f(x_T)]=0
\end{aligned}\tag{4.50}$$

où dans (4.50), on somme sur $1\leqq i,k\leqq q$, $1\leqq j\leqq n_i$.

Preuve. Notons que dans (4.50) tous les termes sont bien définis, en particulier parce que dès que $\tau(K_T)\neq 0$, K_T^{-1} est borné.

On va montrer que (4.50) est exactement la formule (4.39) où k a été choisi égal à

$$k=\tau(K_T)\,K_T^{-1}(\varphi_T^{*-1}Y)(x_0). \tag{4.51}$$

Notons tout de suite que k ne vérifie pas les hypothèses du théorème 4.5, puisque

– k dépend de la trajectoire de $\frac{\partial\varphi_t}{\partial x}(x_0)$ - qui en fait ne dépend que de la trajectoire de x_t - et des trajectoires de $z_1^1\dots z_q^1$.

– k étant donné à partir d'une somme comprenant une infinité de termes n'est a priori pas une fonction différentiable des trajectoires précédentes.

Toutefois comme par (2.17′) $Z'_t=\left[\frac{\partial\varphi_t}{\partial x}(x_0)\right]^{-1}$ est solution de l'équation différentielle

$$dZ'=-Z'\frac{\partial X_0}{\partial x}(x_t)\,dt;\qquad Z'(0)=I \tag{4.52}$$

on peut appliquer le calcul des variations au couple (x_t, Z'_t). La prise en compte de $\varphi_T^{*-1} Y$ dans (4.51) ne pose donc aucune difficulté particulière.

Il faut montrer qu'on peut appliquer le calcul des variations à $\tau(K_T) K_T^{-1}$ qui est une fonction C^∞ bornée à dérivées bornées de K_T. Pour cela, on commence par supposer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $|z_i| \leqq \varepsilon$, $v_i(z_i) = 0$ pour $i = 1 \dots q$. Dans ce cas K_T s'exprime comme une somme finie (à nombre aléatoire de termes) à laquelle il n'y a aucune difficulté d'appliquer le calcul des variations de la section 1. Une fois obtenue la formule (4.50) dans ce cas, on fait un passage à la limite pour des fonctions $v_1 \dots v_q$ générales comme au Théorème 4.1. Le seul terme posant un problème non rencontré au Théorème 4.1 est

$$S_{s \leqq t} v_i(\Delta z_{i,s}^1) \langle K_T^{-1} L_{i,s} K_T^{-1} \varphi_T^{*-1} Y, L_{i,s} \tilde{\varphi}_s^* \operatorname{grad}_{z_i = \Delta z_{i,s}^1} v_i(z_i) \rangle. \tag{4.53}$$

Or si $\sigma(z_i)$ est choisie comme σ dans la preuve du Théorème 4.1, on a

$$\begin{aligned} E^P \int_0^T ds \int_{E_i/\{0\}} \Big| & v_i(z_i) \, v_{z_i}(z_i) \\ & - \sigma\left(\frac{z_i}{\varepsilon}\right) v_i(z_i) \frac{\partial}{\partial z_i} \left(v_i(z_i) \, \sigma\left(\frac{z_i}{\varepsilon}\right)\right) \Big| \, m^1(x_s, z_i) \, dz_i \\ \leqq C \Bigg[& E^P \int_0^T ds \int_{|z_i| \leqq \varepsilon} |v_i(z_i)| \, m^1(x_s, z_i) \, dz_i \\ & + E^P \int_0^T ds \int_{|z_i| \leqq \varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \left| \sigma_{z_i}\left(\frac{z_i}{\varepsilon}\right) \right| v_i^2(z_i) \, m^1(x_s, z_i) \, dz_i \Bigg] \end{aligned} \tag{4.54}$$

Le premier terme à droite de (4.54) tend vers 0 avec ε par (4.34). De plus par (4.34), si $|z_i| \leqq \varepsilon$, $\dfrac{v_i^2(z_i)}{\varepsilon} \leqq \varepsilon \lambda_i^2(z_i)$, de telle sorte que le deuxième terme à droite de (4.54) tend vers 0. On passe alors sans difficulté à la limite sur (4.50) comme au Théorème 4.1.

Il reste à justifier algébriquement la formule (4.50). Pour cela, le plus simple est de reprendre les notations de la preuve du Théorème 2.5, dont on reprend aussi les hypothèses. Pour $i = 1 \dots q$, soit $\Lambda_{i,t}(\omega, z_i)$ une fonction définie sur $(R^+ \times \Omega) \times E_i/\{0\}$ à valeurs dans E_i bornée, $\mathscr{P} \otimes \mathscr{B}(E_i/\{0\})$-mesurable.

Pour $l \in R$, soit x^l, Z'^l les solutions des équations

$$\begin{aligned} x_t^l &= x_0 + \int_0^t X_0(x_s^l) \, ds + z_{1,t}^1 + \dots + z_{q,t}^1 \\ &\quad + l [S_{s \leqq t} \Lambda_1(\Delta z_{1,s}^1) + \dots + S_{s \leqq t} \Lambda_q(\Delta z_{q,s}^1)] + y_t^2 \\ Z_t'^l &= I - \int_0^t Z_s'^l \frac{\partial X_0}{\partial x}(x_s^l) \, ds. \end{aligned} \tag{4.55}$$

$Z_t'^l$ est la solution de (4.52) où x est remplacé par x^l. On a ainsi effectué la transformation (2.30) sur le couple (x_t, Z'_t). Alors

$$\left[\frac{\partial}{\partial l} Z_T'^l\, Y(x_T^l)\right]_{l=0} = \left[\frac{\partial}{\partial l} Z_T'^l\right]_{l=0} Y(x_T) + Z'_T \frac{\partial Y}{\partial x}(x_T) \frac{\partial x_T^l}{\partial l}\, l=0. \tag{4.56}$$

Or $H_t = \frac{\partial x_t^l}{\partial l}$ (en $l=0$) est solution de

$$H_t = \int_0^t \frac{\partial X_0}{\partial x}(x_s)\, H_s\, ds + S_{s \leqq t}\, A_i(\Delta z_{i,s}^1) \tag{4.57}$$

$W_t = \frac{\partial Z_t'^l}{\partial l}$ est tel que

$$dW = \left[-W_s \frac{\partial X_0}{\partial x}(x_s) - Z'_s \frac{\partial^2 X_0}{\partial x^2}(x_s)\, H_s\right] ds; \qquad W(0)=0 \tag{4.58}$$

i.e. si $\varphi_t^* = \frac{\partial \varphi_t}{\partial x}(x) = Z_t'^{-1}$

$$W_T = -\left[\int_0^T \varphi_t^{*-1} \frac{\partial^2 X_0}{\partial x^2}(x_t)\, H_t\, \varphi_t^*\, dt\right] \varphi_T^{*-1}. \tag{4.59}$$

Or $R_t = \frac{\partial H_t}{\partial x}$ est tel que

$$dR = \left(\frac{\partial X_0}{\partial x}(x_s)\, R_s + \frac{\partial^2 X_0}{\partial x^2} H_s\, \varphi_s^*\right) ds; \qquad R(0)=0 \tag{4.60}$$

et donc

$$R_T = \varphi_T^* \int_0^T \varphi_s^{*-1} \frac{\partial^2 X_0}{\partial x^2} H_s\, \varphi_s^*\, ds. \tag{4.61}$$

Comme

$$H_T = \varphi_T^*\, S_{s \leqq T}\, \varphi_s^{*-1}\, A_i(\Delta z_{i,s}^1) \tag{4.62}$$

on tire de (4.56)–(4.62) que

$$\left[\frac{\partial}{\partial l} Z_T'^l\, Y(x_T^l)\right]_{l=0} = [S_{s \leqq T}\, \varphi_s^{*-1} A_i(\Delta z_{i,s}^1), \varphi_T^{*-1} Y](x_0) \tag{4.63}$$

où dans (4.63) A_i est considéré comme un vecteur constant. Par (4.59), si e est un vecteur constant, $\left[\frac{\partial}{\partial l} \varphi_T^{*-1} e\right]_{l=0}$ est un processus continu en T. On le voit en fait directement sur (4.63), puisque la discontinuité en T de (4.63) est égale à $[\varphi_T^{*-1} A_i, \varphi_T^{*-1} e]=0$. Dans ce cas, on peut remplacer dans (4.63) $S_{s \leqq T}$ par $S_{s<T}$.

Si K_T^l est la forme quadratique

$$X, Y \to K_T^l(X,Y) = \sum_{i=1}^q S_{s \leqq T}\, v_i(\Delta z_{i,s}^1 + l A_i(\Delta z_{i,s}^1)) \cdot \sum_{j=1}^{n_i} \langle X, Z_s'^l e_{i,j}\rangle \langle Y, Z_s'^l e_{i,j}\rangle \tag{4.64}$$

par (4.63), on a

$$\frac{\partial K_T^l}{\partial l}(X,Y)=\sum_{i=1}^{q}\Big[S_{s\leqq T}\Big(\langle \operatorname{grad}_{z_i=\Delta z_{i,s}^1} v_i(z_i), A_i(\Delta z_{i,s}^1)\rangle\, L_{i,s}(X,Y)$$
$$+v_i(\Delta z_{i,s}^1)\sum_{j=1}^{n_i}\Big(\Big\langle X,\frac{\partial}{\partial l}Z_s'^l e_{i,j}\Big\rangle\langle Y,\varphi_s^{*-1}e_{i,j}\rangle$$
$$+\langle X,\varphi_s^{*-1}e_{i,j}\rangle\Big\langle Y,\frac{\partial}{\partial l}Z'^l e_{i,j}\Big\rangle\Big)\Big)\Big]. \tag{4.65}$$

Or par (4.63)

$$\sum_{j=1}^{n_i}\Big(\Big\langle X,\frac{\partial}{\partial l}Z_s'^l e_{i,j}\Big\rangle\langle Y,\varphi_s^{*-1}e_{i,j}\rangle+\langle X,\varphi_s^{*-1}e_{i,j}\rangle\Big\langle Y,\frac{\partial}{\partial l}Z_s'^l e_{i,j}\Big\rangle\Big)$$
$$=(\mathscr{L}_{\sum_{k=1}^{q}S_{u\leqq s}\varphi_u^{*-1}A_k(\Delta z_{k,u}^1)}L_{i,s})(X,Y) \tag{4.66}$$

où (4.66) est continu en T. Comme nous l'avons montré, on peut remplacer à droite de (4.66) $S_{u\leqq s}$ par $S_{u<s}$ pour mieux noter le caractère prévisible de (4.66).

Pour obtenir (4.50), il suffit d'utiliser (4.63), (4.65), (4.66) et de procéder comme au Théorème 4.3, en appliquant la formule (2.18) convenablement modifiée avec

$$A_{i,t}(\omega,z_i)=v_i(z_i)\,(\varphi_t^{*-1}e_{i,j})^k\,e_{i,j}$$
$$H=\tau(K_T)\,(K_T^{-1}\,\varphi_T^{*-1}\,Y)^k f(x_T)$$

et en sommant les formules obtenues en $1\leqq i\leqq q$, $1\leqq j\leqq n_i$, $1\leqq k\leqq n$. □

Du théorème 4.8, on tire le résultat très insuffisant suivant.

Théorème 4.9. *Pour tout $T>0$, la loi de x_T est de la forme $q_T(x)\,dx$.*

Preuve. De (4.50), on tire en particulier qu'il existe $C>0$ tel que si $f\in C_b^\infty(R^n)$, pour $l=1\dots n$

$$\left|E^P\left[\tau(K_T)\frac{\partial f}{\partial x^l}(x_T)\right]\right|\leqq C\sup_{x'\in R^n}|f(x')|. \tag{4.67}$$

Par un argument classique d'analyse harmonique [14] la loi de x_T pour la mesure $\tau(K_T)\,dP$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Soit τ_n une suite croissante de fonctions définies sur $R^n\otimes R^n$ ayant les propriétés de τ, convergeant vers 1 sur l'ensemble des éléments inversibles de $R^n\otimes R^n$, et vers 0 ailleurs. Par le Théorème 4.7, pour $T>0$, $\tau_n(K_T)\uparrow 1$ p.s. Le théorème en résulte. □

Remarque 3. Le résultat du Théorème 4.9 est essentiellement trivial. En effet par l'absolue continuité de la mesure P par rapport à Π sur F_T, il suffit de démontrer le résultat pour la mesure Π, i.e. pour $b_1^1=0\dots b_q^1=0$, $b^2=0$. La formule (4.50) devient beaucoup plus simple, puisque m_i^1, m^2 ne dépendent plus de x. Mais surtout, dans ce cas, un argument quasiment «élémentaire» et laissé au lecteur donne le résultat très rapidement. C'est l'itération de (4.50) avec $\tau=1$ qui joue un rôle essentiel pour montrer la régularité du semi-groupe dans la suite.

Remarque 4. Un résultat de Tucker [22] montre que si $h(x)\,dx$ est un noyau de Lévy sur $R^n/\{0\}$, i.e. si h est borélienne $\geqq 0$ et telle que

$$\int_{|x|\leqq 1} |x|^2 h(x)\,dx < +\infty$$

si

$$\int_{|x|\leqq 1} h(x)\,dx = +\infty \tag{4.68}$$

alors la loi de probabilité μ dont la transformée de Fourier $\hat{\mu}$ est donnée par

$$\hat{\mu}(\alpha) = \exp\{\int_{|x|\leqq 1} (e^{-i\langle\alpha,x\rangle} - 1 + i\langle\alpha, x\rangle)\,h(x)\,dx\}$$

est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Ce résultat peut être démontré simplement par dérivation de $\hat{\mu}$.

d) Étude de K_T^{-1}. Intégration par parties d'ordre 1 *sur le semi-groupe*

Pour étendre la formule (4.50) au cas où $\tau=1$, on est amené à étudier à quelles conditions K_T^{-1} appartient à $L_p(\Omega, P)$ pour p donné ($1 \leqq p < +\infty$).

On poursuit ainsi l'analogie avec la démarche que Malliavin [14, 15] et Ikeda-Watanabe [11] ont utilisée pour l'étude des diffusions.

Si $Z_t = \dfrac{\partial\varphi_t}{\partial x}(x)$, $Z'_t = \left[\dfrac{\partial\varphi_t}{\partial x}(x)\right]^{-1}$, il résulte de (2.17) et (2.17') que si $t, t' \leqq K$ (K est une constante arbitrairement grande) il existe une constante $C>0$ telle que

$$|Z'_t - Z'_{t'}| \leqq C|t-t'|; \qquad |Z_t| \leqq C. \tag{4.69}$$

De plus, grâce à l'hypothèse $\mathbb{H}$ 4.2

$$X \in R^n \to \|X\| = \sup_{1\leqq i\leqq q} |P_i X| \tag{4.70}$$

est une norme sur R^n. Il existe $C'>0$ tel que

$$\|X\| \geqq C'|X|. \tag{4.71}$$

Soit $T>0$ fixé $\leqq K$. Soit m un entier $\geqq \dfrac{2TC^2}{C'}$, $t_0 = 0 \leqq t_1 \leqq \ldots \leqq t_m = T$ une équipartition de l'intervalle $[0, T]$, i.e. $t_i - t_{i-1} = \dfrac{T}{m}$.

Soit $X \in R^n$. Pour $k \leqq m$, il existe i - dépendant de k - tel que

$$\|\tilde{\varphi}_{t_k}^{*-1} X\| = |P_i \tilde{\varphi}_{t_k}^{*-1} X| \tag{4.72}$$

et ainsi grâce à (4.69) et (4.71)

$$|P_i \tilde{\varphi}_{t_k}^{*-1} X| \geqq \frac{C'}{C} |X|. \tag{4.73}$$

Pour $t_k < t \leqq t_{k+1}$, on a grâce à (4.69)

$$|P_i \tilde{\varphi}_t^{*-1} X| \geqq |P_i \tilde{\varphi}_{t_k}^{*-1} X| - \frac{CT}{m} |X| \geqq \left(\frac{C'}{C} - \frac{CT}{m}\right) |X| \tag{4.74}$$

et grâce au choix de m, on a

$$|P_i \tilde{\varphi}_t^{*-1} X| \geqq \frac{C'}{2C} |X|. \tag{4.75}$$

De (4.38), et (4.75), il résulte que

$$S_{t_k < t \leqq t_{k+1}} \sum_{j=1}^{q} v_j(\Delta z_{j,t}^1) L_{j,t}(X, X) \geqq \frac{C'^2}{4C^2} S_{t_k < t \leqq t_{k+1}} v_i(\Delta z_{i,t}^1) |X|^2. \tag{4.76}$$

Soit R la variable aléatoire

$$R = \sum_{k=0}^{m-1} [\inf_{1 \leqq i \leqq q} S_{t_k < t \leqq t_{k+1}} v_i(\Delta z_{i,t}^1)]. \tag{4.77}$$

En sommant (4.76) pour $1 \leqq k \leqq m$, et en utilisant (4.40), on a

$$K_T(X, X) \geqq \frac{C'^2}{4C^2} R |X|. \tag{4.78}$$

Pour que $|K_T^{-1}|$ appartienne à $L_p(\Omega, P)$, il suffit que $\frac{1}{R}$ soit dans $L_p(\Omega, P)$.

Soit $\mathscr{I}$ l'ensemble des suites $I = (i_0 \dots i_{m-1})$ où $i_0 \dots i_{m-1}$ sont des entiers compris entre 1 et q. Pour $I = (i_0 \dots i_{m-1}) \in \mathscr{I}$, on pose

$$R_I = \sum_{k=0}^{m-1} S_{t_k < t \leqq t_{k+1}} v_{i_k}(\Delta z_{i_k,t}^1). \tag{4.79}$$

Clairement $\mathscr{I}$ est fini et de plus

$$R = \inf_{I \in \mathscr{I}} R_I. \tag{4.80}$$

Pour que $\frac{1}{R} \in L_p(\Omega, P)$ il faut et il suffit que pour tout $I \in \mathscr{I}$, $\frac{1}{R_I} \in L_p(\Omega, P)$.

On a la formule élémentaire pour $1 \leqq p < +\infty$

$$E^P \frac{1}{R_I^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} \beta^{p-1} E^P e^{-\beta R_I} d\beta. \tag{4.81}$$

On est ainsi ramené à étudier l'intégrabilité sur $[0, +\infty[$ de $\beta^{p-1} E^P e^{-\beta R_I}$. Or pour $\beta > 0$, $I = (i_0 \dots i_{m-1}) \in \mathscr{I}$

$$E^P \exp\left\{-\beta R_I + \int_0^T 1_{t_k < t \leqq t_{k+1}} dt \int_{E_{i_k}/\{0\}} (1 - e^{-\beta v_{i_k}(z_{i_k})}) m_{i_k}^1(x_t, z_{i_k}) dz_{i_k}\right\} = 1. \tag{4.82}$$

Pour $i=1\dots q$, soit α_i tel que $0<\alpha_i<1$. On a trivialement, en particulier grâce à (2.7)

$$\begin{aligned}
&\int_{E_i/\{0\}} (1-e^{-\beta v_i(z_i)})\, m_i^1(x',z_i)\,dz_i \\
&\qquad \geqq \int_{E_i/\{0\}} 1_{b_i^1(x',z_i)\geqq -\alpha_i}(1-\alpha_i)(1-e^{\beta v_i(z_i)})\,g_i(z_i)\,dz_i \\
&\qquad\quad + \int_{E_i/\{0\}} 1_{b_i^1(x',z_i)<-\alpha_i}(1-e^{-\beta v_i(z_i)})\,g_i(z_i)\,dz_i \\
&\qquad\quad -\frac{1}{\alpha_i}\int_{E_i/\{0\}} |b_i^1(x',z_i)|^2\,g_i(z_i)\,dz_i \\
&\qquad \geqq (1-\alpha_i)\int_{E_i/\{0\}} (1-e^{-\beta v_i(z_i)})\,g_i(z_i)\,dz_i-\frac{C}{\alpha_i}.
\end{aligned}\tag{4.83}$$

Dans le cas où b_i^1 est $\geqq 0$, on peut remplacer (4.83) par

$$\int_{E_i/\{0\}} (1-e^{-\beta v_i(z_i)})\, m_i^1(x',z_i)\,dz_i \geqq \int_{E_i/\{0\}} (1-e^{-\beta v_i(z_i)})\,g_i(z_i)\,dz_i. \tag{4.83'}$$

Pour éviter d'écrire deux fois les formules quand $b_i^1\geqq 0$, on prendra (4.83) avec $\alpha_i=0$, $\dfrac{C}{\alpha_i}=0$.

Définition 4.10. Pour $1\leqq i\leqq q$, on désigne par η_i la mesure σ-finie sur $]0,+\infty[$ image de la mesure $1_{v_i(z_i)>0}\, g_i(z_i)\,dz_i$ sur $E_i/\{0\}$ par l'application v_i. Pour $\beta\geqq 0$, $t\geqq 0$, on pose

$$\begin{aligned}
\tau_i(\beta) &= \int_{R^+/\{0\}} (e^{-\beta x}-1)\,d\eta_i(x) = \int_{E_i/\{0\}} (e^{-\beta v_i(z_i)}-1)\,g_i(z_i)\,dz_i \\
\chi_{i,t}(\beta) &= \exp t\,\tau_i(\beta).
\end{aligned}\tag{4.84}$$

$\chi_{i,t}$ est la transformée de Laplace de la loi de $S_{s\leqq t}\, v_i(\Delta z_{i,s}^1)$ sur (Ω, Π).

Par (4.82), (4.83), on voit que

$$E^P e^{-\beta R_I} \leqq C(\alpha_1\dots\alpha_q)\exp\left[\sum_{j=1}^q (1-\alpha_j)\frac{l_j T}{m}\tau_j(\beta)\right] \tag{4.85}$$

où l_j est le nombre de fois qu'apparaît l'indice j dans I.

On a alors le résultat suivant.

Théorème 4.11. *Soit p tel que $1\leqq p<+\infty$ et $T>0$. Pour que $|K_T^{-1}|$ appartienne à $L_p(\Omega,P)$, il suffit qu'il existe $\gamma>0$ tel que pour $i=1\dots q$*

$$\int_0^{+\infty} \beta^{p-1}\chi_{i,T-\gamma}(\beta)\,d\beta<+\infty \tag{4.86}$$

et $|K_T^{-1}|$ est borné dans $L_p(\Omega,P)$ par une constante ne dépendant pas de x. Pour les indices $i=1\dots p$ tels que $b_i^1\geqq 0$, on peut remplacer $T-\gamma$ par T.

Preuve. Par (4.85), on a, par l'inégalité de Hölder

$$\int_0^{+\infty} \beta^{p-1} E^P e^{-\beta R_I} d\beta \leqq C \prod_{j=1}^{q} \left[\int_0^{+\infty} \beta^{p-1} \exp[(1-\alpha_j) T\tau_j(\beta)] \, d\beta \right]^{\frac{l_j}{m}}$$

$$= C \prod_{j=1}^{q} \left[\int_0^{+\infty} \beta^{p-1} \chi_{j,(1-\alpha_j)T}(\beta) \, d\beta \right]^{\frac{l_j}{m}}. \tag{4.87}$$

Si (4.86) est vérifiée, de (4.81) on tire que $E^P \dfrac{1}{R_I^p} < +\infty$ et ainsi $|K_T|^{-1}$ est dans $L_p(\Omega, P)$.

Remarque 5. (4.86) est équivalente au fait que

$$E^{II} \frac{1}{[S_{s \leqq T-\gamma} v_i(\Delta z_{i,s}^1)]^p} < +\infty. \tag{4.86'}$$

On a alors l'extension du Théorème 4.8.

Théorème 4.12. *Soit $T>0$, Y, f choisis comme au Théorème* 4.8. *S'il existe $p>2$ tel que $K_T^{-1} \in L_p(\Omega, P)$, on a la formule* (4.50) *avec $\tau = 1$.*

C'est en particulier le cas si les conditions (4.86) *sont satisfaites pour $p>2$.*

Preuve. Soit κ une fonction définie sur $R^n \otimes R^n$ à valeurs dans $[0, 1]$, C^∞ bornée à dérivées bornées, telle que $\kappa(D)=1$ si $\|D\| \leqq 1$, et $\kappa(D)=0$ si $\|D\| \geqq 2$. Pour N entier, $C \in R^n \otimes R^n$, on pose

$$\begin{aligned} \tau_N(C) &= \kappa\left(\frac{C^{-1}}{N}\right) \text{ si } C \text{ est inversible} \\ &= 0 \text{ ailleurs.} \end{aligned} \tag{4.88}$$

τ_N est une fonction C^∞ bornée sur $R^n \otimes R^n$, à dérivées de tous ordres bornées, égale à 1 pour $\|C^{-1}\| \leqq N$ à 0 si $\|C^{-1}\| \geqq 2N$ ou quand C^{-1} n'existe pas. Enfin

$$\frac{\partial \tau_N}{\partial C} = -\frac{1}{N} \left\langle \frac{\partial \kappa}{\partial C}\left(\frac{C^{-1}}{N}\right), C^{-1} \cdot C^{-1} \right\rangle \quad \text{si } C^{-1} \text{ existe, 0 ailleurs.} \tag{4.89}$$

Or $\dfrac{\partial \kappa}{\partial C}\left(\dfrac{C^{-1}}{N}\right) = 0$ si $\|C^{-1}\| \geqq 2N$; on tire de (4.92) que pour C inversible

$$\left|\frac{\partial \tau_N}{\partial C}(C)\right| \leqq K \, \|C^{-1}\|. \tag{4.90}$$

On a (4.50) avec $\tau = \tau_N$. Faisons tendre N vers $+\infty$. Par le Théorème 4.7 $\tau_N(K_T) \to 1$ p.s. Alors à gauche dans (4.50)

- le premier terme ne pose aucune difficulté
- dans le deuxième terme, on peut majorer les sommes $S_{s \leqq t}$ par

$$C[|K_T^{-1}| + |K_T^{-1}|^2] \, [S_{s \leqq T} v_i(\Delta z_{i,s}^1) + (S_{s \leqq T} v_i(\Delta z_{i,s}^1))^2]. \tag{4.91}$$

Comme $|K_T^{-1}|$ est dans $L_p(\Omega, P)$ $(p>2)$ et comme les sommes $S_{s\leqq T} v_i(\Delta z_{i,s}^1)$ sont dans tous les $L_q(\Omega, P)$ $(1 \leqq q < +\infty)$, (4.91) est dans $L_1(\Omega, P)$. On peut donc passer à la limite dans (4.50) sur les termes correspondants.

Les sommes compensées $\overset{c'}{S}_{s\leqq T}$ sont de carré intégrable. Comme dans les termes correspondants n'apparaît que K_T^{-1}, on passe aussi à la limite sur ces termes.

- Le troisième terme tend vers 0 quant $N \to +\infty$. En effet $(\tau_N)_K(K_T) \to 0$ p.s. La majoration (4.90) montre qu'on peut appliquer le Théorème de Lebesgue au dernier terme. □

Remarque 6. Du Théorème 4.12, il résulte en particulier que pour $l=1 \dots n$

$$\left| E^P \left[\frac{\partial f}{\partial x^l}(x_T) \right] \right| \leqq C \sup_{x' \in R^n} |f(x')|. \tag{4.92}$$

Si $E_T^{x_0}(\alpha)$ est la fonction caractéristique de la loi de x_T pour P, i.e.

$$E_T^{x_0}(\alpha) = E^P e^{-i\langle \alpha, x_T \rangle}. \tag{4.93}$$

(4.92) montre que $|\alpha| E_T^{x_0}(\alpha)$ est borné.

e) Intégration par parties d'ordre 1 *sur les processus à accroissements indépendants*

Ce paragraphe constitut une digression, où nous établissons la formule (4.50) sur les processus à accroissements indépendants. En effet dans ce cas, la fonction caractéristique est connue explicitement, et il serait paradoxal que les manipulations que nous avons effectuées précédemment ne puissent être trivialisées.

Nous allons essentiellement montrer le résultat énoncé à la Remarque 6. Pour simplifier, on se place dans ce paragraphe sur R.

$g(x)$ est une fonction $\geqq 0$ définie sur $R/\{0\}$ et vérifiant l'hypothèse $\mathbb{H}$ 2.1. On suppose pour simplifier que si $|x| \geqq 1$, $g(x)=0$. On suppose de plus que

$$\int g(x)\, dx = +\infty. \tag{4.94}$$

Pour $\alpha \in R$, on pose

$$E_1(\alpha) = \exp\{\int (e^{-i\alpha x} - 1 + i\alpha x)\, g(x)\, dx\}. \tag{4.95}$$

Soit $v(x)$ une fonction définie sur $R/\{0\}$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ de classe C^1, qui est bornée à dérivée bornée et telle que

$$\int v(x)\, g(x)\, dx < +\infty. \tag{4.96}$$

Pour $\alpha \in R$, $\beta \in R^+$, on pose

$$F(\alpha, \beta) = \exp\{\int (e^{-i\alpha x - \beta v(x)} - 1 + i\alpha x)\, g(x)\, dx\}. \tag{4.97}$$

Si $\bar{x}_t$ est le processus à accroissements indépendants tel que $\bar{x}_1$ a pour fonction caractéristique $E_1(\alpha)$, on a

$$F(\alpha, \beta) = E \exp(-i\alpha \bar{x}_1 - \beta S_{s \leqq 1} \nu(\Delta \bar{x}_s)) \tag{4.98}$$

et ainsi

$$|F(\alpha, \beta)| \leqq F(0, \beta). \tag{4.99}$$

On a

$$\frac{\partial F}{\partial \beta}(\alpha, \beta) = -F(\alpha, \beta) \int e^{-i\alpha x - \beta \nu(x)} \nu(x)\, g(x)\, dx. \tag{4.100}$$

Supposons que

$$E\left[\frac{1}{(S_{s \leqq 1} \nu(\Delta \bar{x}_s))^2}\right] = \int_0^{+\infty} \beta F(0, \beta)\, d\beta < +\infty. \tag{4.101}$$

Par (4.94), comme ν est >0, on a

$$\lim_{\beta \to +\infty} F(\alpha, \beta) = 0. \tag{4.102}$$

Par (4.96), (4.99), (4.101), on voit que

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\partial F}{\partial \beta}(\alpha, \beta)\right| d\beta < +\infty. \tag{4.103}$$

De (4.102), (4.103), on tire

$$\begin{aligned} E_1(\alpha) &= -\int_0^{+\infty} \frac{\partial F}{\partial \beta}(\alpha, \beta)\, d\beta \\ &= \int_0^{+\infty} F(\alpha, \beta)\, d\beta \int e^{-i\alpha x - \beta \nu(x)} \nu(x)\, g(x)\, dx. \end{aligned} \tag{4.104}$$

Alors

$$\begin{aligned} i\alpha E_1(\alpha) = &\int_0^{+\infty} F(\alpha, \beta)\, d\beta \int (i\alpha + \beta \nu_x(x))\, e^{-i\alpha x - \beta \nu(x)} \nu(x)\, g(x)\, dx \\ &- \int_0^{+\infty} \beta F(\alpha, \beta)\, d\beta \int e^{-i\alpha x - \beta \nu(x)} \nu_x(x)\, \nu(x)\, g(x)\, dx \end{aligned} \tag{4.105}$$

(par (4.101), comme ν_x est borné, le membre de droite de (4.105) est bien défini). Comme g est à support compact dans R, pour $x > 0$, on a

$$\nu g(x) = -\int_x^{+\infty} (\nu g)_x(y)\, dy. \tag{4.106}$$

Une condition plus forte que (4.96) est

$$\int |(\nu g)_x(x)|\, dx < +\infty. \tag{4.107}$$

Comme ν_x est bornée, $\lim_{x \to 0_\pm} \nu(x)$ existe. A cause de (4.94) et (4.96), ces deux limites sont nulles. Comme ν est bornée, on a

$$\nu(x) \leqq C(|x| \wedge 1). \tag{4.108}$$

Si (4.107) est vérifiée, on a grâce à (4.108)

$$\begin{aligned}&\int (i\alpha+\beta v_x(x))\, e^{-i\alpha x-\beta v(x)}(vg)(x)\,dx\\&\quad=\int (e^{-i\alpha x-\beta v(x)}-1)(vg)_x(x)\,dx\end{aligned} \tag{4.109}$$

(4.105) s'écrit

$$\begin{aligned}i\alpha E_1(\alpha)=&\int_0^{+\infty} F(\alpha,\beta)\,d\beta\int (e^{-i\alpha x-\beta v(x)}-1)(vg)_x(x)\,dx\\&-\int_0^{+\infty}\beta F(\alpha,\beta)\,d\beta\int e^{-i\alpha x-\beta v(x)}(v_x v)(x)\,g(x)\,dx.\end{aligned} \tag{4.110}$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que (4.110) est exactement la formule (4.50) calculée avec

$$\begin{aligned}&X_0=0,\ g_1=g,\ g_2=\dots g_q=0,\ \mu^2=0,\\&b^1=0,\\&f(x)=e^{-i\alpha x},\ Y=\frac{\partial}{\partial x},\ \tau=1,\ T=1.\end{aligned} \tag{4.111}$$

(4.50) s'écrit exactement pour $f\in C_b^\infty(R)$

$$\begin{aligned}E[f_x(\bar{x}_T)]-E&\left[\frac{f(\bar{x}_T)\,S_{s\le T}(v_x v)(\Delta\bar{x}_s)}{(S_{s\le T}\,v(\Delta\bar{x}_s))^2}\right]\\&+E\left[\frac{f(\bar{x}_T)}{S_{s\le T}\,v(\Delta\bar{x}_s)}\overset{c'}{S}_{s\le T}\frac{(vg)_x(\Delta\bar{x}_s)}{g}\right]=0.\end{aligned} \tag{4.112}$$

Les conditions de validité de (4.110) et (4.112) (comme cas particulier de (4.50)) ne sont pas exactement les mêmes.

f) Quelques resultats abéliens et taubériens

Dans ce paragraphe, nous donnons des conditions suffisantes pour que les mesures $\eta_1\dots\eta_q$ vérifient les conditions (4.86). En effet ces conditions portent en fait sur les processus de sauts $\geqq 0$ à accroissements indépendants de mesure de Lévy $\eta_1\dots\eta_q$. Or pour de tels processus, on peut établir un lien entre le comportement à l'infini des transformées de Laplace et de Fourier de leurs lois de probabilité qui sont à leur tour déterminées dans certains cas par la concentration en 0 de leur mesure de Lévy. On élucide ainsi dans certains cas les conclusions de la Remarque 6 pour les processus à accroissements indépendants réels.

Les techniques que nous utilisons sont bien connues et reposent sur des théorèmes de type abélien et taubérien. Nous suivons Simon [17] – chapitre 3, d'après Karamata [32] et Aizenman (non publié).

m est une mesure σ-finie $\geqq 0$ sur $R^+/\{0\}$ telle que l'une des hypothèses suivantes est satisfaite

$$\int_{x \leqq 1} x^2\, dm(x) + \int_{x>1} dm(x) < +\infty \tag{1}$$

$$\int_{x \leqq 1} |x|\, dm(x) + \int_{x>1} dm(x) < +\infty . \tag{2}$$

(2) est plus forte que (1). Pour $\alpha \in R$, $T \geqq 0$, on pose, quand m vérifie (1) (resp. (2))

$$\delta^1(\alpha) = \int_{x \leqq 1} (e^{-i\alpha x} - 1 + i\alpha x)\, dm(x) + \int_{x>1} (e^{-i\alpha x} - 1)\, dm(x)$$

$$\psi_T^1(\alpha) = \exp(T\delta^1(\alpha)) \tag{4.113}$$

(resp. (4.113)

$$\delta_T^2(\alpha) = \int (e^{-i\alpha x} - 1)\, dm(x)$$
$$\psi_T^2(\alpha) = \exp(T\delta^2(\alpha)).)$$

Quand m vérifie (1) ou (2), on pose

$$M(\alpha) = \int (\cos \alpha x - 1)\, dm(x). \tag{4.114}$$

Clairement $\psi_T^1(\alpha)$ et $\psi_T^2(\alpha)$ sont les fonctions caractéristiques d'un processus $\bar{x}_T$ à accroissements indépendants de mesure de Lévy m (avec ou sans compensation des sauts) et de plus pour $j = 1, 2$

$$|\psi_T^j(\alpha)| = \exp M(\alpha). \tag{4.115}$$

On a tout d'abord un résultat trivial et bien connu.

Proposition 4.13. *Si m vérifie* (1) (*resp.* (2)), *alors quand* $|\alpha| \to +\infty$, $\delta^1(\alpha) = \alpha^2 \varepsilon\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ $\left(\textit{resp. } \delta^2(\alpha) = \alpha\varepsilon\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)$.

Preuve. La preuve est élémentaire par intégration par parties. Elle est laissée au lecteur. □

v est une fonction mesurable définie sur $R^+/\{0\}$ à valeurs dans R^+ telle

$$\int_{x \leqq 1} v(x)\, dm(x) < +\infty. \tag{4.116}$$

η_v est la mesure sur $R^+/\{0\}$ image de $1_{v>0}\, dm$ par v. Pour $\beta \geqq 0$, $T \geqq 0$, on pose

$$\tau_v(\beta) = \int (e^{-\beta v(x)} - 1)\, dm(x) = \int (e^{-\beta y} - 1)\, d\eta_v(y)$$
$$\chi_{v,T}(\beta) = \exp[T\tau_v(\beta)]. \tag{4.117}$$

$\chi_{v,T}(\beta)$ est la transformée de Laplace de la loi de $S_{s \leqq T}\, v(\Delta \bar{x}_s)$.
On a un résultat élémentaire.

Proposition 4.14. *Pour $\alpha \in R$, on a*

$$M(\alpha) \geqq \tfrac{5}{2}\, \tau_{x^2}(\alpha^2). \tag{4.118}$$

Preuve. Soit $\gamma>0$. Pour $0<x<\gamma$, on a

$$1-e^{-x^2}=2\int_0^x ye^{-y^2}\,dy \geqq e^{-\gamma^2}x^2 \geqq 2e^{-\gamma^2}(1-\cos x).$$

Pour $x\geqq\gamma$, on a

$$1-e^{-x^2}\geqq 1-e^{-\gamma^2}\geqq \frac{1-e^{-\gamma^2}}{2}(1-\cos x).$$

En choisissant γ tel que $e^{-\gamma^2}=\frac{1}{5}$, on trouve que

$$1-e^{-x^2}\geqq \tfrac{2}{5}(1-\cos x). \tag{4.119}$$

On obtient (4.118) par intégration. □

Remarque 7. Si $\psi_T(\alpha)$ désigne $\psi_T^1(\alpha)$ ou $\psi_T^2(\alpha)$, pour que $\psi_T(\alpha)\to 0$ quand $|\alpha|\to +\infty$, ou pour que ψ_T soit intégrable, il faut que

$$\int dm(x)=+\infty.$$

Si pour $p>0$, $|\alpha|^{2p-1}\psi_T(\alpha)$ est intégrable, si $[\bar{x},\bar{x}]$ est la variation quadratique de $\bar{x}$, i.e.

$$[\bar{x},\bar{x}]_t=S_{s\leqq t}((\Delta\bar{x}_s)^2)$$

(4.124) montre que $\dfrac{1}{[\bar{x},\bar{x}]^{p}_{\frac{5}{2}T}}$ est intégrable. En effet

$$\Gamma(p)\,E\left[\frac{1}{[\bar{x},\bar{x}]^{p}_{\frac{5}{2}T}}\right]=\int_0^{+\infty}\beta^{p-1}\chi_{x^2,\frac{5}{2}T}(\beta)\,d\beta=2\int_0^{+\infty}\alpha^{2p-2}\chi_{x^2,\frac{5}{2}T}(\alpha^2)\,\alpha\,d\alpha$$
$$\leqq 2\int_0^{+\infty}|\alpha|^{2p-1}|\psi_T(\alpha)|\,d\alpha<+\infty.$$

On a ensuite un résultat beaucoup plus fort:

Théorème 4.15. *Soit γ tel que $0<\gamma<2$ et $C\geqq 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) *Quand* $x\to 0^+$

$$m(]x,+\infty[)\sim\frac{C}{x^\gamma}. \tag{4.120}$$

b) *Quand* $|\alpha|\to+\infty$

$$M(\alpha)\sim -C\Gamma(1-\gamma)\sin\tfrac{\pi}{2}(1-\gamma)\,|\alpha|^\gamma \tag{4.121}$$

(*si* $\gamma=1$, *on remplace* $\Gamma(1-\gamma)\sin\frac{\pi}{2}(1-\gamma)$ *par* $\frac{\pi}{2}$).

c) *Il existe* $\gamma'>\gamma$ *tel que* $\int x^{\gamma'}dm(x)<+\infty$ *et que quand* $\beta\to+\infty$,

$$\tau_{x^{\gamma'}}(\beta)\sim -C\Gamma\left(1-\frac{\gamma}{\gamma'}\right)\beta^{\gamma/\gamma'}. \tag{4.122}$$

Si l'une des conditions a), b), c) *est vérifiée, alors* c) *est vérifiée pour tout* $\gamma'>\gamma$.

Preuve. Nous suivons de très près Simon [17].

a)$\Rightarrow$c). Supposons $\gamma<1$ et $\gamma'=1$. Alors si $\overline{G_1}(x)=\int\limits_{x<y} dm(y)$, on a

$$\begin{aligned}\beta^{-\gamma}\tau_x(\beta) &= -\beta^{-\gamma+1}\int_0^{+\infty} e^{-\beta x}\,\overline{G_1}(x)\,dx\\ &= -\int_0^{+\infty} e^{-x}\beta^{-\gamma}\,\overline{G_1}\left(\frac{x}{\beta}\right)dx.\end{aligned} \tag{4.123}$$

Quand $\beta\to+\infty$, $\beta^{-\gamma}\,\overline{G_1}\left(\frac{x}{\beta}\right)\to Cx^{-\gamma}$. Par le Théorème de Lebesgue, on obtient bien (4.122). Dans le cas général, on remplace m par $\eta_{x^{\gamma'}}$, et on est ramené aux conditions précédentes.

c)$\Rightarrow$a). Supposons que $\gamma'=1$. Pour $t>0$, soit m_t la mesure sur $R^+/\{0\}$ définie par $m_t(A)=t^\gamma m(tA)$, et m' la mesure $1_{x\geq 0}\,\gamma\,\frac{dx}{x^{\gamma+1}}$. (4.120) s'écrit

$$\lim_{t\to 0} m_t]1,+\infty[=Cm']1,+\infty[. \tag{4.124}$$

Or la condition c) exprime que pour tout $k\geqq 0$

$$\lim_{t\to 0}\int(1-e^{-kx})\,dm_t(x)=C\int(1-e^{-kx})\,dm'(x). \tag{4.125}$$

Si n'_t est la mesure $dn'_t(x)=(1-e^{-x})\,dm_t(x)$ et si n' est la mesure $dn'(x)=(1-e^{-x})\,dm'(x)$, de (4.125), on tire que pour $k\geqq 0$

$$\lim_{t\to 0}\int e^{-kx}\,dn_t(x)=C\int e^{-kx}\,dn'(x). \tag{4.126}$$

(4.126) étant vérifié pour $k>0$ et $k=0$, on voit que quand $t\to 0$, n_t converge étroitement vers Cn'. Or

$$m_t[1,+\infty[=\int\frac{1_{x>1}}{1-e^{-x}}\,dn_t(x). \tag{4.127}$$

Comme la fonction $\frac{1_{x>1}}{1-e^{-x}}$ est bornée et continue sauf en $x=1$ qui est négligeable pour n', on voit que quand $t\to 0$

$$\int\frac{1_{x>1}}{1-e^{-x}}\,dn_t(x)\to\int\frac{1_{x>1}}{1-e^{-x}}\,C\,dn'(x)=Cm']1,+\infty[. \tag{4.128}$$

On a donc prouvé (4.13) quand $\gamma'=1$. On traite le cas général en remplaçant m par $\eta_{x^{\gamma'}}$.

a)$\Rightarrow$b). On peut supposer que m est à support dans $]0,1]$. On a par intégration par parties

$$|\alpha|^{-\gamma}M(\alpha)=-\int_0^{+\infty}\sin x\,\frac{\overline{G_1}\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{|\alpha|^\gamma}\,dx. \tag{4.129}$$

Pour tout k entier, on a

$$\int_0^{2k\pi}\sin x\,\frac{\overline{G_1}\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{|\alpha|^\gamma}\,dx\leqq -|\alpha|^{-\gamma}M(\alpha)\leqq\int_0^{(2k+1)\pi}\sin x\,\frac{\overline{G_1}\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{|\alpha|^\gamma}\,dx. \tag{4.130}$$

Par le théorème de Lebesgue, quand $|\alpha| \to +\infty$, on a

$$\int_0^{2k\pi} C \frac{\sin x}{x^\gamma}\, dx \leqq \underline{\lim}\,(-|\alpha|^{-\gamma} M(\alpha)) \leqq \overline{\lim}\,(-|\alpha|^{-\gamma} M(\alpha))$$
$$\leqq \int_0^{(2k+1)\pi} \frac{C \sin x}{x^\gamma}\, dx. \tag{4.131}$$

Quand $k \to +\infty$, les deux membres extrêmes de (4.131) tendent vers l'intégrale $C \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\gamma}\, dx$ qui est classiquement donnée par $C\Gamma(1-\gamma) \sin \frac{\pi}{2}(1-\gamma)$.

b) $\Rightarrow$ c). On va montrer c) avec $\gamma' = 2$. Comme $x \to e^{-\beta x^2}$ est à décroissance rapide ainsi que ses dérivées pour $\beta > 0$, on a, par transformation de Fourier

$$\int (e^{-\beta x^2} - 1)\, dm(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-y^2}{4\beta}} M(y)\, dy$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u} M(2\sqrt{\beta u}) \frac{du}{\sqrt{u}}. \tag{4.132}$$

Par convergence dominée, on voit que si $\lim_{|\alpha| \to +\infty} |\alpha|^{-\gamma} M(\alpha) = -C'$, alors

$$\lim \beta^{-\gamma/2} \tau_{x^2}(\beta) = -\frac{C' 2^\gamma}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right). \tag{4.133}$$

L'identification de (4.133) et (4.122) résulte de formules classiques sur la fonction Γ. Comme c) implique a) et a) implique c) pour tout $\gamma' > \gamma$, la preuve est bien terminée.

Corollaire. *Soit γ tel que $0 < \gamma < 2$ et C tel que $0 \leqq C \leqq +\infty$. Alors si*

$$\underline{\lim}_{x \to 0}\, x^\gamma m(]x, +\infty[) = C \tag{4.134}$$

(resp.
$$\underline{\lim}_{|\alpha| \to +\infty} |\alpha|^{-\gamma}(-M(\alpha)) = C\Gamma(1-\gamma) \sin \tfrac{\pi}{2}(1-\gamma) \tag{4.135}$$

où $\Gamma(1-\gamma) \sin \frac{\pi}{2}(1-\gamma)$ est remplacé par $\frac{\pi}{2}$ si $\gamma = 1$)) alors pour tout $\gamma' > \gamma$ (resp. γ' tel que $\gamma < \gamma' \leqq 2$)

$$\overline{\lim}_{\beta \to +\infty} \beta^{-\frac{\gamma}{\gamma'}} \tau_{x^{\gamma'}}(\beta) \leqq -C\Gamma\left(1 - \frac{\gamma}{\gamma'}\right). \tag{4.136}$$

Preuve. Si (4.134) est vérifiée, on peut sans difficulté supposer que $\gamma' = 1$. On applique alors le lemme de Fatou dans (4.123) pour obtenir (4.136).

Supposons maintenant (4.135) vérifiée. Pour $0 < \gamma' \leqq 2$, il est bien connu que $e^{-|x|^{\gamma'}}$ est la transformée de Fourier d'une fonction $\rho\, C^\infty \geqq 0$ d'intégrale égale à 2π. On a alors pour $\gamma < \gamma' \leqq 2$, $\beta > 0$

$$\int (e^{-\beta |x|^{\gamma'}} - 1)\, dm(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\beta^{1/\gamma'}} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho\left(\frac{x}{\beta^{1/\gamma'}}\right) M(x)\, dx$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) M(\beta^{1/\gamma'} x)\, dx \tag{4.137}$$

(l'intégrale à droite de (4.137) est bien définie puisque $M \leqq 0$). Du théorème de Fatou et de (4.137), on déduit que

$$\overline{\lim_{\beta \to +\infty}} \beta^{-\gamma/\gamma'} \tau_{x^{\gamma'}}(\beta) \leqq -C \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(x)|x|^{\gamma}}{2\pi} \right] \Gamma(1-\gamma) \sin\left(\tfrac{\pi}{2}(1-\gamma)\right). \tag{4.138}$$

Or trivialement, par transformation de Fourier, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) \Gamma(1-\gamma) \sin\left(\tfrac{\pi}{2}(1-\gamma)\right) |x|^{\gamma} dx \\ = \int_0^{+\infty} (1-e^{-x^{\gamma'}}) \frac{\gamma dx}{x^{\gamma+1}} = \Gamma\left(1-\frac{\gamma}{\gamma'}\right). \end{aligned} \tag{4.139}$$

On a bien (4.136).

Remarque 8. Si C est >0 dans le Théorème 4.15 ou son corollaire, alors pour $T>0$, $\psi_T(\alpha)$ est à décroissance rapide, et $\chi_{x^{\gamma'}, T}(\beta)$ est à décroissance rapide (quand $\beta \to +\infty$).

Remarque 9. Dans [27], Hartman et Wintner ont donné un critère repris dans [26], suivant lequel s'il existe a tel que $0<a<2$ tel que $\int_{x \leqq 1} x^a \, dm(x) = +\infty$, alors pour $T>0$, $\psi_T(\alpha)$ serait à décroissance rapide. Ce critère est erroné, comme le montre le contre-exemple suivant. Soit x_n la suite $x_n = (\frac{1}{2})^{4^{n-1}}$. On a

$$x_n^2 = x_{n+1}^{\frac{1}{2}}. \tag{4.140}$$

Soit m la mesure

$$m = \sum_n (x_n^{-\frac{3}{2}} - 1) \, \delta_{x_n}.$$

Alors pour $0<b<2$

$$\int x^b \, dm(x) = \sum_n (x_n^{b-\frac{3}{2}} - x_n^b).$$

Si $b=2$, on voit par (4.140) que $\int x^2 \, dm(x) < +\infty$. Si $0<b<\frac{3}{2}$, on a $\int x^b \, dm(x) = +\infty$. Si $\lambda_k = 2\pi 2^{4^k}$, on a

$$\begin{aligned} -M(\lambda_k) &= \int (1-\cos \lambda_k x) \, dm(x) \\ &= \sum_n (1-\cos 2\pi \, 2^{4^k - 4^{n-1}}))(x_n^{-\frac{3}{2}} - 1) \\ &= \sum_{n=k+2} (1-\cos 2\pi \, 2^{4^k - 4^{n-1}})(x_n^{-\frac{3}{2}} - 1) \\ &= \int_{\left]0, \frac{2\pi}{\lambda_k}\right[} (1-\cos \lambda_k x) \, dm(x) \leqq \lambda_k^2 \int_{\left]0, \frac{2\pi}{\lambda_k}\right[} x^2 \, dm(x) = 4\pi^2. \end{aligned} \tag{4.141}$$

Ainsi $-M(\lambda_k)$ est une suite bornée et $\lambda_k \to +\infty$.

On va maintenant étudier les conditions de divergence logarithmique des fonctions M et $\tau_{x^{\gamma'}}$ à l'infini. En effet, la condition (4.86) et la Remarque 6 montrent l'importance d'une telle étude.

Théorème 4.16. *Soit $\gamma>0$, $C \geqq 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

a) *Quand* $x \to 0$

$$m(]x, +\infty[) \sim C \operatorname{Log}^{\gamma} \frac{1}{x}. \tag{4.142}$$

b) *Il existe* $\gamma' > 0$ *tel que quand* $\beta \to +\infty$

$$\tau_{x^{\gamma'}}(\beta) \sim -\frac{C}{\gamma'^{\gamma}} \operatorname{Log}^{\gamma} \beta. \tag{4.143}$$

Si l'une des conditions a) *ou* b) *est vérifiée,* b) *est vérifiée pour tout* $\gamma' > 0$. *Enfin si, quand* $|\alpha| \to +\infty$

$$M(\alpha) \sim -C \operatorname{Log}^{\gamma} |\alpha| \tag{4.144}$$

alors a) *et* b) *sont vérifiées.*

Preuve. Pour montrer l'équivalence a) et b), on peut sans difficulté supposer que dans b), $\gamma' = 1$.

a)$\Rightarrow$b). On raisonne comme en (4.123), en utilisant le fait que pour $x > 0$, $\dfrac{\operatorname{Log}^{\gamma} \frac{\beta}{x}}{\operatorname{Log}^{\gamma} \beta} \to 1$ quand $\beta \to +\infty$.

b)$\Rightarrow$a). On étend la mesure m au point $+\infty$ en posant $m\{+\infty\} = 0$. Pour $t > 0$, soit m_t la mesure sur $]0, +\infty]$ telle que $m_t(A) = \dfrac{m(tA)}{\operatorname{Log}^{\gamma} \frac{1}{t}}$. Soit m' la mesure $C\delta_{\{+\infty\}}$.

La condition b) (avec $\gamma' = 1$) signifie que, pour $k \geqq 0$ quand $t \to 0$

$$\int_{]0, +\infty]} (1 - e^{-kx})\, dm_t(x) \to \int_{]0, +\infty]} (1 - e^{-kx})\, dm'(x). \tag{4.145}$$

Si n_t est la mesure $dn_t(x) = (1 - e^{-x})\, dm_t(x)$, on voit que pour $k \geqq 0$

$$\int_{]0, +\infty]} e^{-kx}\, dn_t(x) \to \int_{]0, +\infty]} e^{-kx}\, dm'(x). \tag{4.146}$$

n_t converge donc étroitement vers m'. Comme m' ne charge pas le point 1, on a

$$\int_{]0, +\infty]} \frac{1_{x > 1}}{1 - e^{-x}}\, dn_t(x) \to C \tag{4.147}$$

qui est équivalent à (4.142). Pour la fin du théorème, on raisonne comme en (4.132). □

Corollaire. *S'il existe* $\gamma > 0$ *et* C $(0 \leqq C \leqq +\infty)$ *tels que*

$$\varliminf_{x \to 0} \frac{m(]x, +\infty[)}{\operatorname{Log}^{\gamma} \frac{1}{x}} = C \tag{4.148}$$

$\left(\textit{resp.}\ (4.149)\quad \varliminf_{|\alpha| \to +\infty} \dfrac{-M(\alpha)}{\operatorname{Log}^{\gamma} |\alpha|} = C\right)$ *alors pour tout* $\gamma' > 0$ (*resp. tout* γ' *tel que* $0 < \gamma' \leqq 2$)

$$\overline{\lim_{\beta\to+\infty}} \frac{\tau_{x^{\gamma'}}(\beta)}{\operatorname{Log}^\gamma \beta} \leqq \frac{-C}{\gamma'^\gamma}. \tag{4.150}$$

Preuve. On raisonne comme au corollaire du Théorème 4.15. □

Remarque 10. Dans le Théorème 4.16 et son corollaire, on peut remplacer la fonction Log par l'une de ses itérées.

Remarque 11. Dans le Théorème 4.16, les conditions a) et b) n'impliquent aucun comportement particulier de la fonction $M(\alpha)$ quand $|\alpha|\to+\infty$, comme le montre l'exemple suivant. Soit m la mesure $\sum_{n=1} \delta_{1/2^n}$.

Quand $x\to 0$, $m]x,+\infty[\sim \dfrac{\operatorname{Log}\frac{1}{x}}{\operatorname{Log} 2}$. Si $\lambda_k = 2\pi 2^k$, on a

$$-M(\lambda_k) = \sum_n (1-\cos 2\pi 2^{k-n}) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} (1-\cos 2\pi 2^{k-n})$$

et ainsi $-M(\lambda_k)$ est majorée par

$$\lambda_k^2 \int_{x<\frac{2\pi}{\lambda_k}} x^2\, dm(x) = 4\pi^2\, 2^{2k} \sum_{k+1} \frac{1}{2^{2n}}$$

qui reste borné.

Pour $T>2p\operatorname{Log} 2$, $\beta^{p-1}\chi_{x^2,T}(\beta)$ est intégrable, bien que $\alpha\psi_T(\alpha)$ ne soit pas borné.

Exemple. Si m est donné par

$$dm(x) = 1_{x\geqq 0} \frac{e^{-x}}{x}\, dx$$

alors $m(]x,+\infty[)\sim \operatorname{Log}\frac{1}{x}$. De plus

$$\delta^2(\alpha) = -\operatorname{Log}(1+i\alpha), \qquad \tau_x(\beta) = -\operatorname{Log}(1+\beta),$$

$$\psi_T(\alpha) = \left[\frac{1}{1+i\alpha}\right]^T, \qquad \chi_{x,T}(\beta) = \left[\frac{1}{1+\beta}\right]^T.$$

Pour $T>0$, la loi de $\bar{x}_T$ est la mesure $d\mu^T(x) = 1_{x\geqq 0}\, x^{T-1} \dfrac{e^{-x}}{\Gamma(T)}\, dx$, qui est singulière en $x=0$, mais avec un ordre de singularité décroissant. Les hypothèses du Théorème 4.11 sont vérifiées avec $v(z)$ à support compact tel que $v(z)=|z|^\eta$ au voisinage de $z=0$ pour $\eta>1$. Alors quand $\beta\to+\infty$, $\tau_v(\beta)\sim -\dfrac{1}{\eta}\operatorname{Log}\beta$. $\beta^{p-1}\chi_{v,T}(\beta)$ est intégrable dès que $T>p\eta$. Les conditions du Théorème 4.12 sont donc vérifiées pour $T>2$. Or on a (4.92) dès que $T>1$. Les conditions du Théorème 4.12 ne sont évidemment pas optimales.

g) Intégration par parties d'ordre 2 sur le semi-groupe

Contrairement à ce qui se produit pour les diffusions hypoelliptiques [3, 11, 14, 19], il n'est pas absolument trivial d'itérer la formule (4.50) avec $\tau=1$. En effet, nous tenons essentiellement à éviter d'introduire une différentiabilité supérieure à l'ordre 1 en les variables $z_1 \dots z_q$ des fonctions $m_1^1(x', z_1) \dots m_q^1(x', z_q)$, essentiellement parce que pour les processus à accroissements indépendants réels, les résultats du paragraphe f) montrent que c'est la concentration en 0 du noyau de Lévy (et non sa régularité) qui explique dans de nombreux cas la régularité du semigroupe (au moins en dimension 1). Or le lecteur vérifiera aisément que l'application du calcul des variations aux termes venant après $f(x_T)$ dans (4.50) ferait en particulier apparaître la dérivée en z_i de

$$\frac{\operatorname{grad}_{z_i} v_i(z_i)\, m_i^1(x_{s^-}, z_i)}{m^1(x_{s^-}, z_i)},$$

et donc des dérivées d'ordre 2 de m_i^1.

Nous allons en fait exploiter ici la propriété de Markov du processus x. Cette propriété a été utilisée implicitement une première fois lorsqu'on a noté que la forme quadratique K_T croît avec T. Nous allons l'utiliser une deuxième fois en procédant à une suite d'intégrations par parties par blocs.

On va effectuer une intégration par parties à l'ordre 1 sur x en faisant une variation du processus x sur l'intervalle $[0, T]$, puis une intégration par parties à l'ordre 2 en faisant une variation de x sur $[T, 2T]$ etc...

Ce paragraphe est essentiellement consacré à l'intégration par parties d'ordre 2.

On conservera toutes les hypothèses du paragraphe d). Par ailleurs, on définit les fonctions

$$n_i^1(x, z_i) = \frac{m_{i,x}^1(x, z_i)}{m_i^1(x, z_i)} \qquad (1 \leqq i \leqq q)$$

$$n^2(x, y) = \frac{m_x^2(x, y)}{m^2(x, y)}. \tag{4.151}$$

Les fonctions de (4.151) ne sont définies que sur les ouverts où les dénominateurs à droite de (4.151) sont non nuls. Les fonctions n_i^1 $(1 \leqq i \leqq q)$ ne dépendent que de b_i^1 $(1 \leqq i \leqq q)$ et non de g_i $(1 \leqq i \leqq q)$.

On fait alors les hypothèses supplémentaires suivantes.

$\mathbb{H}$ 4.3: Les fonctions n_i^1 $(1 \leqq i \leqq q)$ et n^2 sont uniformément bornées sur leur domaine de définition.

$\mathbb{H}$ 4.4: Il existe $N \geqq 2$ tel que

a) Pour $1 \leqq |m| \leqq N$, les fonctions $\frac{\partial^m}{\partial x^m} b_i^1(x, z_i)$, $\frac{\partial^m}{\partial x^m} b^2(x, y)$ existent, sont continues en leurs différentes variables.

b) Pour $1 \leqq |m| \leqq N-1$, les fonctions $\frac{\partial^m}{\partial x^m} n_i^1(x', z_i)$, $\frac{\partial^m}{\partial x^m} n^2(x', y)$ sont bornées sur leur domaine de définition et telles que

$$\int_{E_i/\{0\}} 1_{m_i^1(x', z_i) \neq 0} \left| \frac{\partial^m}{\partial x^m} n_i^1(x', z_i) \right|^2 m_i^1(x', z_i)\, dz_i$$

$$\int_{R^n/\{0\}} 1_{m^2(x', y) \neq 0} \left| \frac{\partial^m}{\partial x^m} n^2(x', y) \right|^2 m^2(x', y)\, d\mu^2(y) \tag{4.152}$$

sont bornés.

c) Pour tout couple (l, l') de multi indices tels que $0 \leqq |l| + |l'| \leqq N-2$, les fonctions

$$\frac{\partial^l}{\partial x^l} \left[m_{i,x}^1 \frac{\partial^{l'}}{\partial x^{l'}} n_i^1 \right] (x', z_i), \qquad \frac{\partial}{\partial x^l} \left[m_x^2 \frac{\partial^{l'}}{\partial x^{l'}} n^2 \right] (x', y) \tag{4.153}$$

sont telles que pour tout $\varepsilon > 0$, pour $|z_i| \geqq \varepsilon$, ou $|y| \geqq \varepsilon$ elles sont uniformément bornées (sur leur domaine de définition), et de plus les fonctions

$$\int_{E_i/\{0\}} 1_{m_i^1(x', z_i) \neq 0} \left| \frac{\partial^l}{\partial x^l} \left[m_{i,x}^1 \frac{\partial^{l'}}{\partial x^{l'}} n_i^1 \right] (x', z_i) \right| dz_i$$

$$\int_{R^n/\{0\}} 1_{m^2(x', y) \neq 0} \left| \frac{\partial^l}{\partial x^l} \left[m_x^2 \frac{\partial^{l'}}{\partial x^{l'}} n^2 \right] (x', y) \right| d\mu^2(y) \tag{4.154}$$

sont uniformément bornées.

d) Pour $1 \leqq |m| \leqq N-1$, les dérivées $\dfrac{\partial}{\partial z_i} \dfrac{\partial^m}{\partial x^m} b_i^1(x', z_i)$ existent et sont continues.

e) Pour $0 \leqq |m| \leqq N-2$, les fonctions

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \frac{\partial^m}{\partial x^m} n_i^1(x', z_i)$$

sont bornées (sur leur domaine de définition).

Notons que grâce à $\mathbb{H}$4.3 et (2.15), b) dans $\mathbb{H}$4.4 est aussi vrai pour $m=0$. De même par (2.15), on a (4.154) pour $l = l' = 0$.

Les hypothèses $\mathbb{H}$4.3 et $\mathbb{H}$4.4 vont nous permettre d'itérer la formule (4.50).

Notons tout de suite que si $\gamma_t(\omega, z_i)$ est une fonction définie sur $(R^+ \times \Omega) \times E_i/\{0\}$, $\mathscr{P} \otimes \mathscr{B}(E_i/\{0\})$ mesurable, uniformément bornée, et telle que

$$\int_{E_i/\{0\}} |\gamma_t(\omega, z_i)|^2\, m_i^1(x_t, z_i)\, dz_i \tag{4.155}$$

est uniformément bornée, alors, pour $\alpha = \pm 1$

$$\exp\{\alpha \overset{c'}{S}_{s \leqq t}\, \gamma(\Delta z_{i,s}^1) - \int_0^t ds \int_{E_i/\{0\}} (e^{\alpha\gamma_s(z_i)} - 1 - \alpha\gamma_s(z_i))\, m_i^1(x_s, z_i)\, dz_i\} \tag{4.156}$$

est une martingale, $\exp|\overset{c'}{S}_{s \leqq t}(\Delta z_{i,s}^1)|$ est intégrable, et ainsi $\overset{c'}{S}_{s \leqq t}\, \gamma(\Delta z_{i,s}^1)$ est dans tous les $L_p(\Omega, P)$ $(1 \leqq p < +\infty)$. On a naturellement un résultat du même type pour des sommes $\overset{c'}{S}_{s \leqq t}\, \gamma_s'(\omega, \Delta y_s^2)$.

Pour simplifier l'écriture de ce qui va suivre, nous allons introduire quelques notations supplémentaires.

Notons tout d'abord que la mesure P dépend du point de départ du processus x_t, qui est x_0. On écrit désormais P_{x_0} au lieu de P.

Définition 4.17. Sur l'espace $\Omega = [D(R^n)]^{q+1}$, pour tout $t \geqq 0$, on définit l'opérateur de translation θ_t par

$$\begin{aligned} &\theta_t(z^1_{1,s}, z^1_{2,s} \dots z^1_{q,s} y^2_s) \\ &\quad = (z^1_{1,s+t} - z^1_{1,t}, z^1_{2,s+t} - z^1_{2,t}, \dots z^1_{q,s+t} - z^1_{q,t}, y^2_{s+t} - y^2_t). \end{aligned} \tag{4.157}$$

On note par ω le point générique de Ω. On a alors immédiatement

Proposition 4.18. *Pour tout* $x_0 \in R^n$, $s, t \geqq 0$, $\omega \in \Omega$, *on a*

$$\varphi_{t+s}(\omega, x_0) = \varphi_s(\theta_t \omega, \varphi_t(\omega, x_0)) \tag{4.158}$$

Preuve. C'est évident par (1.5) et (4.29). □

On a maintenant

Proposition 4.19. *Si* $x_0 \in R^n$, *si* S *est un temps d'arrêt sur* $(\Omega, \{F_t\}_{t \geqq 0})$, *alors si* X *est une variable aléatoire* F_S*-mesurable bornée, et* Y *une variable aléatoire* F_∞*-mesurable bornée, on a*

$$E^{P_{x_0}}[1_{S < +\infty} X Y \circ \theta_S] = E^{P_{x_0}}[1_{S < +\infty} X E^{P_{x_S}} Y]. \tag{4.159}$$

Preuve. On vérifie que la loi de $(x_t, y^1_{1,t} \dots y^1_{q,t}, y^2_t)$ est la solution unique d'un problème des martingales au sens de la définition 1.6, où le noyau de Lévy est du type $N(x_t, dx, dy^1_1, \dots dy^1_q, dy^2)$ (i.e. seul x_t modifie éventuellement la loi des sauts). Le Théorème 1.7 montre qu'on construit ainsi un processus fortement Markovien. On obtient (4.159). □

Définition 4.20. Pour $x_0 \in R^n$, on définit sur (Ω, P_{x_0}) le processus $C^{x_0}_t$ $(t > 0)$

$$\begin{aligned} C^{x_0}_t = &-\tilde{\varphi}^{*-1}_t(x_0) K^{-1}_t(x_0) \Big[S_{s \leqq t} \{ v_i(\Delta z^1_{i,s}) L_{i,s}(x_0) K^{-1}_t(x_0) \\ &\cdot L_{i,s}(x_0) \tilde{\varphi}^*_s(x_0) \operatorname{grad}_{z_i = \Delta z^1_{i,}} v_i(z_i) \} + S_{u < s \leqq t} v_k(\Delta z^1_{k,s}) v_i(\Delta z^1_{i,u}) \\ &\cdot (\mathscr{L}_{\varphi^{*-1}(x_0) e_{i,j}} L_{k,s}(x_0)) K^{-1}_t(x_0) \varphi^{*-1}_u(x_0) e_{i,j} \\ &- \overset{c'}{S}_{s \leqq t} \left\{ L_{i,s}(x_0) \tilde{\varphi}^*_s(x_0) \frac{\operatorname{grad}_{z_i = \Delta z^1_{i,s}} v_i(z_i) m^1_i(x_{s^-}, z_i)}{m^1_i(x_{s^-}, \Delta z^1_{i,s})} \right\}^u \\ &- \overset{c'}{S}_{s \leqq t} \{ S_{u < s} (v_k(\Delta z^1_{k,u}) L_{k,u}(x_0)) (\tilde{\varphi}^*_s(x_0) n^1_i(x_{s^-}, \Delta z^1_{i,s}) \\ &+ \tilde{\varphi}^*_s(x_0) n^2(x_{s^-}, \Delta y^2_s)) \} \Big]. \end{aligned}$$

On note $\varphi^*_t(x_0)$, $K_t(x_0)$, $L_{i,t}(x_0)$ pour marquer que ces objets dépendent du point de départ x_0.

On suppose dans ce paragraphe que $\mathbb{H}$ 4.4 est vérifiée avec $N = 2$.

On a alors

Théorème 4.21. *Soit $x_0 \in R^n$. Soit $Y_1(x)$ un champ de vecteurs C^∞ borné à dérivées bornées défini sur R^n à valeurs dans R^n. Alors si $T>0$ est tel que les conditions* (4.86) *avec $p>2$ sont vérifiées, pour tout $f \in C_b^\infty(R^n)$, $T' \geqq T$, on a l'égalité*

$$\begin{aligned}
&E^{P_{x_0}}[Y_1 f(x_{T'})] + E^{P_{x_0}}[f(x_{T'}) S_{s \leqq T}\{v_i(\Delta z_{i,s}^1)\\
&\quad \cdot \langle K_T^{-1}(x_0)[\varphi_s^{*-1}(x_0) e_{i,j}, \varphi_{T'}^{*-1}(x_0) Y_1(x_{T'})], \varphi_s^{*-1}(x_0) e_{i,j}\rangle\}]\\
&\quad + E^{P_{x_0}}[f(x_{T'}) \langle C_T^{x_0}, (\varphi_{T'} \circ \varphi_T^{-1})^{*-1}(x_0) Y_1(x_{T'})\rangle]\\
&\quad + E^{P_{x_0}}[f(x_{T'}) \langle \tilde{\varphi}_T^{*-1}(x_0) K_T^{-1}(x_0) S_{u \leqq T}(v_k(\Delta z_{k,u}^1) L_{k,u}) \tilde{\varphi}_T^*(x_0)\\
&\quad \cdot \overset{c'}{S}_{T < s \leqq T'}\{(\widetilde{\varphi_s \circ \varphi_T^{-1}})^* (n_i^1(x_{s^-}, \Delta z_{i,s}^1) + n^2(x_{s^-}, \Delta y_s^2))\},\\
&\quad \cdot (\varphi_{T'} \circ \varphi_T^{-1})^{*-1}(x_0) Y_1(x_{T'})\rangle] = 0.
\end{aligned} \tag{4.160}$$

Preuve. Dans la formule (4.50), on peut sans difficulté supposer que v_i dépend aussi de t. Plus précisément, on peut appliquer la formule (4.50) au temps T' en supposant que v_i est remplacé par $\tilde{v}_i(t,\cdot)$, où $v_i(t,\cdot) = v_i(\cdot)$ pour $t \leqq T$ et $\tilde{v}_i(t,\cdot) = 0$ pour $t > T$. On raisonne comme au Théorème 4.12 pour prendre $\tau = 1$ dans la formule (4.50) ainsi modifiée. Les sommes et les sommes compensées où on somme sur v_i sont arrêtées en T. Dans (4.160), on a décomposé la dernière somme compensée de (4.50) en une somme entre 0 et T et une somme entre T et T'. □

Remarque 12. La formule (4.160) est obtenue en faisant le calcul des variations sur l'intervalle $[0, T]$. Nous avons délibérément écrit (4.160) sous une forme algébriquement non triviale.

On suppose vérifiées les conditions (4.86) avec $p>2$.

Soit Y_2 un champ de vecteurs ayant les mêmes propriétés que Y_1. Appliquons (4.16) à la fonction $Y_2 f$ avec $T' = 2T$, où T est choisi comme au Théorème 4.21.

$$\begin{aligned}
&E^{P_{x_0}}[Y_1 Y_2 f(x_{2T})] + E^{P_{x_0}}[(Y_2 f)(x_{2T}) S_{s \leqq T}\{v_i(\Delta z_{i,s}^1)\\
&\quad \cdot \langle K_T^{-1}(x_0)[\varphi_s^{*-1}(x) e_{i,j}, \varphi_{2T}^{*-1}(x_0) Y_1(x_{2T})], \varphi_s^{*-1}(x_0) e_{i,j}\rangle\}]\\
&\quad + E^{P_{x_0}}[(Y_2 f)(x_{2T}) \langle C_T^{x_0}, (\varphi_{2T} \circ \varphi_T^{-1})^{*-1}(x_0) Y_1(x_{2T})\rangle]\\
&\quad + E^{P_{x_0}}[(Y_2 f)(x_{2T}) \langle \tilde{\varphi}_T^{*-1}(x_0) K_T^{-1}(x_0) S_{u \leqq T}(v_k(\Delta z_{k,u}^1) L_{k,u})\\
&\quad \cdot \tilde{\varphi}_T^*(x_0) \overset{c'}{S}_{T \leqq s \leqq 2T}\{(\widetilde{\varphi_s \circ \varphi_T^{-1}})^* (n_i^1(x_{s^-}, \Delta z_{i,s}^1)\\
&\quad + n^2(x_{s^-}, \Delta y_s^2))\}, (\varphi_{2T} \circ \varphi_T^{-1})^{*-1}(x_0) Y_1(x_{2T})\rangle] = 0.
\end{aligned} \tag{4.161}$$

On note J_1, J_2, J_3, J_4 les quatre termes à gauche de (4.161). On va montrer qu'on peut appliquer le calcul des variations sur l'intervalle $[T, 2T]$ aux expressions dans J_2, J_3, J_4, de telle sorte que pour $i = 2, 3, 4$

$$J_i = E^{P_{x_0}}[f(x_{2T}) D_{i,T}^{x_0}]$$

où $D_i^{x_0}$ ($i = 2, 3, 4$) est intégrable.

Calcul des variations sur J_3

$C_T^{x_0}$ est F_T-mesurable. De plus, grâce à (4.158)

$$(\varphi_{2T}\circ\varphi_T^{-1})^{*-1}(x_0)\,Y_1(x_{2T})=[\varphi_T(\theta_T\omega)^*]^{-1}(x_T)\,Y_1(\varphi_T(\theta_T\omega,x_T)). \quad (4.162)$$

De la proposition 4.19, il résulte que

$$J_3=E^{P_{x_0}}[\langle C_T^{x_0}(\omega), E^{P_{y=\varphi_T(\omega,x_0)}}(Y_2 f)(x_T(\tilde\omega))\,\varphi_T^{*-1}(\tilde\omega)\,Y_1(y)\rangle] \quad (4.163)$$

où dans (4.163), on intègre dans $E^{P_{x_0}}$ en la variable ω et dans $E^{P_{y=\varphi_T(\omega,x_0)}}$ en la variable $\tilde\omega$.

Or le Théorème 4.8 (et sa démonstration) montre qu'on peut appliquer le calcul des variations à l'intérieur de $E^{P_{y=\varphi_T(\omega,x_0)}}$. On montre, en effet, sans difficulté que pour $y\in R^n$

$$E^{P_y}(Y_2 f)(x_T)(\varphi_T^{*-1}\,Y_1)(y)=E^{P_y}[f(x_T)\,F_T^y]$$

où l'intégrale de $|F_T^y|$ pour P^y est uniformément bornée, grâce aux Théorèmes 4.11 et 4.12. F_T^y est par ailleurs aisément calculable compte-tenu de (4.50). Ainsi

$$J_3=E^{P_{x_0}}f(x_{2T})\langle C_T(\omega), F_3^{x_T}(\theta_T\omega)\rangle \quad (4.164)$$

et de plus

$$E^{P_{x_0}}|\langle C_T(\omega), F_3^{x_T}(\theta_T\omega)\rangle|<+\infty.$$

Notons ici qu'on aurait pu se passer des opérateurs de translation en effectuant directement sur J_3 un calcul des variations sur $[T,2T]$. Cette remarque s'applique à toute la suite.

Calcul des variations sur J_2

Pour $s\leqq T$, soit ψ_s^T le difféomorphisme $\varphi_s\circ\varphi_T^{-1}$. On a

$$\begin{aligned}&[\varphi_s^{*-1}(\omega)\,e_{i,j},\varphi_{2T}^{*-1}(\omega)\,Y_1]\,(x_0)\\&\quad=\varphi_T^{*-1}(\omega,x_0)\,[\psi_s^{T*-1}(\omega)\,e_{i,j},\varphi_T^{*-1}(\theta_T\omega)\,Y_1]\,(\varphi_T(\omega,x_0)).\end{aligned} \quad (4.165)$$

Donc

$$\begin{aligned}J_2=&E^{P_{x_0}}\langle S_{s\leqq T}\,\nu_i(\Delta z_{i,s}^1)\,K_T^{-1}(x_0)\,\varphi_s^{*-1}(x_0)\,e_{i,j},\varphi_T^{*-1}(\omega,x_0)\\&E^{P_{y=\varphi_T(\omega,x_0)}}((Y_2 f)(\varphi_T(\tilde\omega,y))\,[\psi_s^{T*-1}(\omega)\,e_{i,j},\varphi_T^{*-1}(\tilde\omega)\,Y_1]\,(y))\rangle.\end{aligned} \quad (4.166)$$

On raisonne alors de la même manière sur J_2 que sur J_3.

Calcul des variations sur J_4

C'est le terme le plus compliqué. Pour $y\in R^n$, on définit sur (Ω,P_y) les martingales

$$D_t^y=\overset{c'}{S}_{s\leqq t}\,\tilde\varphi_s^*\,n_i^1(x_{s-},\Delta z_{i,s}^1)$$

$$E_t^y=\overset{c'}{S}_{s\leqq t}\,\tilde\varphi_s^*\,n^2(x_{s-},\Delta y_s^2). \quad (4.167)$$

On a

$$J_4 = E^{P_{x_0}}\langle \tilde{\varphi}_T^{*-1}(x_0)\, K_T^{-1}(x_0)$$
$$\cdot S_{u \leqq T}(v_k(\Delta z_{k,u}^1)\, L_{k,u})\, \tilde{\varphi}_T^*(x_0)\, E^{P_{y=\varphi_T(\omega, x_0)}}$$
$$\cdot [D_T^y(\tilde{\omega}) + E_T^y(\tilde{\omega}), (Y_2 f)(x_T(\tilde{\omega}))(\varphi_T^{*-1}(\tilde{\omega})\, Y_1)(y)]\rangle. \tag{4.168}$$

On est donc ramené à montrer que D_T^y, E_T^y peuvent être soumis au calcul des variations sur l'intervalle $[0, T]$, $Y_2 f$ et $\varphi_T^{*-1} Y_1$ ne posant eux mêmes aucune difficulté. Nous allons raisonner exclusivement sur D_T^y, E_T^y ne posant aucune difficulté particulière.

On va considérer une fonction $k_i(x', z_i)$ définie sur $R^n \times E_i/\{0\}$, à valeurs dans R^n, qui est bornée, et de classe C^1 en les variables x, z_i à dérivée $\frac{\partial k_i}{\partial x}, \frac{\partial k_i}{\partial z_i}$ bornées, telle que pour tout $\varepsilon > 0$, $|m_{i,x}^1|\,|k_i|(x', z_i)$ soit bornée quand $|z_i| \geqq \varepsilon$, et que

$$\int_{E_i/\{0\}} 1_{m_i(x', z_i) \neq 0} \left[\left|\frac{\partial}{\partial x} k_i(x', z_i)\right|^2 + |k_i(x', z_i)|^2\right] m_i^1(x', z_i)\, dz_i \tag{4.169}$$

est bornée.

La somme compensée

$$M_T = \overset{c'}{S}_{s \leqq T}\, \tilde{\varphi}_s^*\, k_i(x_{s^-}, \Delta z_{i,s}^1) \tag{4.170}$$

définit donc une martingale sur (Ω, P_{x_0}) qui est dans tous les $L_p(\Omega, P_{x_0})$ $(1 \leqq p < +\infty)$.

$H(x)$ est une fonction définie sur $D_T(R^n)$ à valeurs dans R, choisie comme à la section 2. dA^x, dB^x sont définis comme à la section 2. On a alors l'extension du Théorème 2.5.

Théoreme 4.22. *Pour $j = 1 \ldots q$, soit $\Lambda_{j,t}(\omega, z_j)$ définie sur $(R^+ \times \Omega) \times E_j/\{0\}$ à valeurs dans E_j qui est bornée, $\mathscr{P} \otimes \mathscr{B}(E_j/\{0\})$ mesurable et telle que*

a) *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $|z_j| < \varepsilon$, $\Lambda_{j,t}(\omega, z_j) = 0$.*

b) *Λ est de classe C^1 en la variable $z_j \in R^{n_1}/\{0\}$ et la dérivée Λ_{z_j} est uniformément bornée.*

Alors pour $x_0 \in R^n$, on a l'égalité dans R^n

$$E^{P_{x_0}}[M_T(\int_{[0,T]} \langle dA^x, \varphi_t^* S_{s \leqq t}\{\varphi_s^{*-1} \Lambda_j(\Delta z_{j,s}^1)\}\rangle$$
$$+ \int_{]0,T]} \langle dB_t^x, \varphi_t^* S_{s<t}\{\varphi_s^{*-1} \Lambda_j(\Delta z_{j,s}^1)\}\rangle]$$
$$+ E^{P_{x_0}}\left[H(x_0)\left[\overset{c'}{S}_{s \leqq T} S_{u<s} \mathscr{L}_{\varphi_u^{*-1} \Lambda_j(\Delta z_{j,u}^1)}(\tilde{\varphi}_{s^-}^* k_i)(x_0, \Delta z_{i,s}^1)\right.\right.$$
$$+ S_{s \leqq T}\, \tilde{\varphi}_s^* \langle k_{i,z_i}(x_{s^-}, \Delta z_{i,s}^1), \Lambda_i(\Delta z_{i,s}^1)\rangle$$
$$- \int_0^T ds \int_{E_i/\{0\}} 1_{m_i^1(x_s, z_i) \neq 0} \langle m_{i,x}^1(x_s, z_i), \varphi_s^*$$
$$\left.\left.\cdot S_{u \leqq s}\, \varphi_u^{*-1} \Lambda_j(\Delta z_{j,s}^1)\rangle\, (\tilde{\varphi}_{s^-}^* k_i)(x, z_i)\, dz_i\right]\right]$$

$$+E^{P_{x_0}}\left[H(x)\,M_T\left(\overset{c'}{S}_{s\leqq T}\frac{\operatorname{div}_{z_j=\Delta z^1_{j,s}} m^1_j(x_{s^-},z_j)\,\Lambda_s(z_j)}{m^1_j(x_{s^-},\Delta z^1_{j,s})}\right.\right.$$

$$+\overset{c'}{S}_{s\leqq T}\langle n^1_j(x_{s^-},\Delta z^1_{j,s})+n^2(x_{s^-},\Delta y^2_s),\varphi^*_s$$

$$\left.\left.\cdot S_{u<s}\{\varphi^{*-1}_u(\Lambda_k(\Delta z^1_{k,u}))\}\rangle\right)\right]=0 \tag{4.171}$$

où dans (4.171), $\tilde{\varphi}_{s^-}\, k_i(x_0,\Delta z^1_{i,s})$ *est la forme linéaire* $\tilde{\varphi}^*_s(x_0)\,k_i(\varphi_{s^-}(x_0),\Delta z^1_{i,s})$ *et l'opérateur de dérivée de Lie agit sur cette forme en la variable* x_0.

Preuve. Tous les termes de (4.171) ont un sens. En effet, dans le premier terme, l'expression à droite de M_T est dans tous les $L_p(\Omega,P_{x_0})$. Dans le deuxième terme la somme compensée est dans tous les $L_p(\Omega,P_{x_0})$ $(1\leqq p<+\infty)$ parce que k_i, $\frac{\partial k_i}{\partial x}$ et (4.169) sont bornés; la somme S est dans tous les $L_p(\Omega,P_{x_0})$; enfin par (2.15), (4.169) et l'inégalité de Schwarz, l'intégrale $\int_0^T$ est uniformément bornée. Dans le troisième terme, la première somme compensée est dans $L_2(\Omega,P_{x_0})$ et la deuxième est dans tous les $L_p(\Omega,P_{x_0})$.

Pour prouver (4.171), on commence par supposer qu'il existe $\xi>0$, $K>0$, $(\xi<K)$ tel que si $|z_i|\notin[\xi,K]$, $k_i(x',z_i)=0$. On a alors

$$M_T=S_{s\leqq T}\,\tilde{\varphi}^*_s k_i(x_{s^-},\Delta z^1_{i,s})-\int_0^T ds\int_{E_i/\{0\}} m^1_i(x_s,z_i)\,\tilde{\varphi}^*_s\,k_i(x_s,z_i)\,dz_i$$

où dans la somme n'apparaît qu'une famille finie de sauts. On peut refaire l'ensemble du raisonnement du Théorème 2.5 appliqué à $H(x)\,M_T$. En se plaçant sous les conditions 1, 2, 3, 4 de la preuve du Théorème 2.5, on définit pour $|l|<\eta\Lambda\xi\Lambda 1$

$$\begin{aligned}M^l_T=&\,S_{s\leqq T}\,\tilde{\varphi}^{*l}_s\,k_i(x^l_{s^-},\Delta z^1_{i,s}+l\Lambda^1_{i,s}(\Delta z^1_{i,s}))\\&-\int_0^T ds\int_{E_i/\{0\}} m^1_i(x^l_s,z_i)\,\tilde{\varphi}^{*l}_s\,k_i(x^l_s,z_i)\,dz_i\end{aligned} \tag{4.172}$$

où x^l est la solution de (4.55). Pour $|l|<\eta\Lambda\xi\Lambda 1$, on ne somme dans $S_{s\leqq T}$ que sur une famille finie de sauts ne dépendant pas de l.

On a

$$E^{P_{x_0}}[M^l_T H(x^l)\,Z^l_T]=E^{P_{x_0}}[M_T H(x)] \tag{4.173}$$

(Z^l_T est l'analogue de (2.39)). On dérive (4.173) en l sans difficulté particulière (par rapport à la preuve du Théorème 2.5). Or $m^1_i(x',z_i)\,k_i(x',z_i)$ n'est $\neq 0$ que pour $\xi\leqq|z_i|\leqq K$. De plus $|m^1_{i,x}|\,|k_i|$ est borné. Par (2.6), pour $\xi\leqq|z_i|\leqq M$, $|m^1_i(x,z_i)|\leqq C g_i(z_i)$. Enfin $\frac{\partial k_i}{\partial x}$ est borné. On peut donc dériver l'intégrale $\int_0^T$ dans (4.172). La dérivation de la somme S sous l'espérance ne pose pas de difficulté car k_{i,z_i} et $k_{i,x}$ sont bornés. On obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_T^l}{\partial l} = & S_{s \leqq T} S_{u<s} \mathscr{L}_{\varphi_u^{*-1} A_j(\Delta z_{j,u}^1)} (\tilde{\varphi}_{s^-}^* k_i)(x_0, \Delta z_{i,s}^1) \\
& + S_{s \leqq T} \tilde{\varphi}_s^* \langle k_{i,z_i}(x_{s^-}, \Delta z_{i,s}^1), A_i(\Delta z_{i,s}^1) \rangle \\
& - \int_0^T ds \int_{E_i/\{0\}} \langle m_{i,x}^1(x_s, z_i), \varphi_s^* S_{u \leqq s} \varphi_u^{*-1} A_j(\Delta z_{j,u}^1) \rangle \\
& \cdot (\tilde{\varphi}_{s^-}^* k_i)(x_0, z_i)\, dz_i - \int_0^T ds \int_{E_i/\{0\}} m_i^1(x_s, z_i) \\
& \cdot \mathscr{L}_{S_{u<s} \varphi_u^{*-1} A_j(\Delta z_{j,u}^1)} (\tilde{\varphi}_{s^-}^* k_i)(x_0, z_i)\, dz_i.
\end{aligned} \tag{4.174}$$

On peut regrouper dans (4.174) le premier et le dernier terme pour écrire la somme compensée correspondante. On obtient (4.171) sous les conditions 1, 2, 3, 4 du Théorème 2.5 et on passe à la limite sans difficulté, en notant en particulier que à cause de la condition de support sur k_i, M_T et $\left.\frac{\partial M_T}{\partial l}\right|_{l=0}$ sont dans tous les $L_p(\Omega, \Pi)$ $(1 \leqq p \leqq +\infty)$. Supposons ensuite qu'il existe $K>0$ tel que pour $|z_i| \geqq K$, $k_i(x', z_i) = 0$. Soit σ une fonction de $C_b^\infty(R)$ à valeurs dans $[0,1]$, égale à 1 pour $|z_i| \geqq 1$ et à 0 pour $|z_i| \leqq \frac{1}{2}$. Pour $\bar{\eta}>0$, on pose

$$k_i^{\bar{\eta}}(x', z_i) = k_i(x', z_i)\, \sigma\left(\frac{z_i}{\bar{\eta}}\right).$$

On a alors (4.171) pour $k_i^{\bar{\eta}}$. On fait tendre $\bar{\eta}$ vers 0. Le seul terme dans (4.171) qui puisse poser problème est

$$S_{s \leqq T} \tilde{\varphi}_s^* \langle k_{i,z_i}^{\bar{\eta}}(x_{s^-}, \Delta z_{i,s}^1), A_i(\Delta z_{i,s}^1) \rangle.$$

Or comme $A_i(z_i) = 0$ pour $|z_i| \leqq \varepsilon$, pour $\bar{\eta}$ assez petit, ce terme est stationnaire. On se débarasse de l'hypothèse de l'existence de $K>0$ par une approximation du même type que précédemment, en notant en particulier que p.s., les sauts $\Delta z_{i,s}^1$ sont bornés sur $[0, T]$.

Corollaire. *Sous les hypothèses du Théorème* 4.22, *on a la formule* (4.171) *avec* $k_i = n_i^1$.

Preuve. On ne peut pas appliquer directement (4.171) avec $k_i = n_i^1$ puisque k_i n'est définie que quand m_i^1 est $\neq 0$. Il faut donc légèrement transformer la preuve du Théorème 4.22.

On suppose provisoirement qu'il existe $M>0$ tel que si $|z_j| > M$, $A_j(z_j) = 0$.

Soit ρ une fonction de $C_b^\infty(R)$ à valeurs dans $[0,1]$ tel que si $x \geqq 1$, $\rho(x) = 1$ et si $x \leqq \frac{1}{2}$, $\rho(x) = 0$. Pour $\gamma > 0$, on pose

$$\begin{aligned}
{}^\gamma k_i(x', z_i) = & \rho\left(\frac{m_i^1(x', z_i)}{\gamma}\right) n_i^1(x', z_i) \quad && \text{si } m_i^1(x', z_i) \neq 0 \\
& 0 && \text{si } m_i^1(x', z_i) = 0.
\end{aligned} \tag{4.175}$$

Clairement ${}^\gamma k_i(x', z_i)$ est de classe C^1 sur $R^n \times E_i/\{0\}$ et bornée. De plus pour $m_i^1(x', z_i) \neq 0$

$$\frac{\partial^\gamma k_i}{\partial x^l}(x', z_i) = \rho\left(\frac{m_i^1(x', z_i)}{\gamma}\right)\frac{\partial n_i^1}{\partial x^l}(x', z_i)$$
$$+\frac{1}{\gamma}\rho'\left(\frac{m_i^1(x', z_i)}{\gamma}\right)\frac{\partial m_i^1}{\partial x^l}(x', z_i)\, n_i^1(x', z_i). \tag{4.176}$$

Or $\rho'\left(\frac{m_i^1(x', z_i)}{\gamma}\right)$ n'est $\neq 0$ que pour $m_i^1(x', z_i) \leqq \gamma$. Donc pour $m_i^1(x', z_i) \neq 0$

$$\left|\frac{\partial^\gamma k_i}{\partial x^l}(x', z_i)\right| \leqq \left|\frac{\partial n_i^1}{\partial x}(x', z_i)\right| + C\,|n_i^1(x', z_i)|^2. \tag{4.177}$$

Par $\mathbb{H}$ 4.3 et $\mathbb{H}$ 4.4b), $\frac{\partial^\gamma k_i}{\partial x^l}$ est uniformément borné par une constante indépendante de γ. Grâce à (4.177), au fait que n_i^1 est borné, à (2.15) et $\mathbb{H}$ 4.4 b), (4.169) est vérifié pour ${}^\gamma k_i$ avec une borne uniforme en γ. Par $\mathbb{H}$ 4.4 c), $m_{i,x}^1\, {}^\gamma k_i$ est borné.

De plus, pour $m_i^1(x', z_i) \neq 0$

$$\left|\frac{\partial^\gamma k_i}{\partial z_i}(x', z_i)\right| \leqq \left|\frac{\partial n_i^1}{\partial z_i}(x', z_i)\right| + C\left|\frac{m_{i,z_i}^1(x', z_i)}{m_i^1}\right| |n_i^1(x', z_i)|. \tag{4.178}$$

On peut alors appliquer le raisonnement de la preuve du Théorème 4.22. En effet, bien que $\frac{\partial^\gamma k_i}{\partial z_i}$ ne soit en général pas uniformément borné, on ne dérive en z_i dans (4.174) que dans les directions de $\Lambda_i(z_i)$ qui est $\neq 0$ pour $\varepsilon \leqq |z_i| \leqq M$. Or $\frac{\partial n_i^1}{\partial z_i}$ est borné. De plus comme g_i, g_{i,z_i} sont continues, grâce à (2.6), on voit que pour $\varepsilon \leqq |z_i| \leqq M$, $\frac{\partial}{\partial z_i} m_i^1(x', z_i)$ est borné uniformément de telle sorte que $\frac{\partial^\gamma k_i}{\partial z_i}(x', z_i)$ est borné pour $\varepsilon \leqq |z_i| \leqq M$. On a donc (4.171) pour ${}^\gamma k_i$.

On fait ensuite tendre γ vers 0. La majoration uniforme (4.177) montre qu'on n'a pas de difficulté avec les termes où apparaissent les dérivées en x de ${}^\gamma k_i$.

La seule difficulté vient de la somme

$${}^\gamma R_T = S_{s \leqq T}\, \tilde{\varphi}_s^* \langle {}^\gamma k_{i,z_i}(x_{s-}, \Delta z_{i,s}^1), \Lambda_i(\Delta_{i,s}^1)\rangle. \tag{4.179}$$

Or comme P_{x_0} p.s., on ne somme que sur des termes où m_i^1 est $\neq 0$, comme dans (4.179), il n'y a qu'un nombre fini de sauts, quand $\gamma \to 0$

$${}^\gamma R_T \to R_T = S_{s \leqq T}\, \tilde{\varphi}_s^* \langle k_{i,z_i}(x_{s-}, \Delta z_{i,s}^1), \Lambda_i(\Delta z_{i,s}^1)\rangle. \tag{4.180}$$

Par (4.178), on a

$$\int_{\varepsilon \leqq |z_i| \leqq M} 1_{m_i^1(x', z_i) \neq 0} |{}^\gamma k_{i,z_i}|(x', z_i)\, m_i^1(x', z_i)\, dz_i$$
$$\leqq C \int_{\varepsilon \leqq |z_i| \leqq M} m_i^1(x', z_i)\, dz_i + C \int_{E_i/\{0\}} 1_{m_i^1(x', z_i) \neq 0}$$
$$\left|\frac{m_{i,x}^1}{m_i^1}(x', z_i)\right| \left|\frac{m_{i,z_i}^1}{m_i^1}(x', z_i)\right| m_i^1(x', z_i)\, dz_i. \tag{4.181}$$

Par (2.7) et par la continuité de g_i, le premier terme à droite de (4.181) est borné. Le second l'est également par (2.14), (2.15) et l'inégalité de Schwarz. Un argument du type de (2.26)-(2.27) montre que les ${}^{\gamma}R_T$ sont bornés dans $L_2(\Omega, P)$, et donc qu'on peut passer à la limite dans (4.171). □

Il n'y a aucune difficulté à étendre (4.171) à des Λ_j plus généraux vérifiant les conditions du Théorème 4.1.

Considérons alors la formule (4.50) avec $\tau=1$ (où Y, f sont choisis comme au Théorème 4.8). Soit W_T^Y l'expression à droite de $f(x_T)$ dans le deuxième terme à gauche de (4.50), i.e.

$$W_T^Y = S_{s\leqq T}\{v_i(\Delta z_{i,s}^1)\langle K_T^{-1}\dots K_T^{-1}\varphi_T^{*-1}Y\rangle.$$

On a alors

Théorème 4.23. *Si* (4.86) *est vérifiée pour* $T>0$ *avec* $p>2$, *pour tout* $x_0\in R^n$, *on a l'égalité dans* $R^n\otimes R^n$.

$$\begin{aligned}
&E^{P_{x_0}}[(Y_2 f)(x_T)\,D_T^{x_0}\otimes\varphi_T^{*-1}Y_1]\\
&+E^{P_{x_0}}\Bigg[f(x_T)\Bigg[\overset{c'}{S}_{s\leqq T}\{S_{u<s}v_j(\Delta z_{j,u}^1)\\
&\cdot(\mathscr{L}_{\varphi_u^{*-1}e_{j,l}}(\tilde\varphi_{s^-}^* n_i^1)(x_0,\Delta z_{i,s}^1))\langle\varphi_u^{*-1}e_{j,l},K_T^{-1}\varphi_T^{*-1}Y_2\rangle)\}\\
&+S_{s\leqq T}v_i(\Delta z_{i,s}^1)\,\tilde\varphi_s^*\langle n_{i,z_i}^1(x_{s^-},\Delta z_{i,s}^1),e_{i,l}\rangle\\
&\cdot\langle\varphi_s^{*-1}e_{i,l},K_T^{-1}\varphi_T^{*-1}Y_2\rangle\\
&-\int_0^T ds\int_{E_i/\{0\}}\langle\tilde\varphi_s^* m_{i,x}^1(x_s,z_i),S_{u\leqq s}v_j(\Delta z_{j,u}^1)L_{j,u},K_T^{-1}\varphi_T^{*-1}Y_2\rangle\\
&\cdot\ \tilde\varphi_s^* n_i^1(x_s,z_i)\,dz_i\Bigg]\otimes\varphi_T^{*-1}Y_1\Bigg]\\
&+E^{P_{x_0}}[f(x_T)\,D_T^{x_0}\otimes(S_{s\leqq T}v_j(\Delta z_{j,s}^1)\,[\varphi_s^{*-1}e_{j,l},\varphi_T^{*-1}Y_1]\\
&\cdot\langle\varphi_s^{*-1}e_{j,l},K_T^{-1}\varphi_T^{*-1}Y_2\rangle)]\\
&+E^{P_{x_0}}[f(x_T)\,(D_T^{x_0}\otimes\varphi_T^{*-1}Y_1)\,W_T^{Y_2}]=0.
\end{aligned}\tag{4.182}$$

Preuve. Choisissons τ comme dans la preuve du Théorème 4.8. Il faut essentiellement appliquer le corollaire du Théorème 4.22 avec

$$\begin{aligned}
H&=\tau(K_T)\,(\varphi_T^{*-1}K_T^{-1}Y_2)^k\,(\varphi_T^{*-1}Y_1)\\
\Lambda_i&=v_i(\Delta z_i^1)\,e_{i,l}(\varphi_s^{*-1}e_{i,l})^k
\end{aligned}$$

et sommer le résultat obtenu en i, $l\,(1\leqq l\leqq n_i)$, $k\ (1\leqq k\leqq n)$. On choisit alors des fonctions τ_N comme au Théorème 4.12 et on passe à la limite en N.

Comme $(K_T)^{-1}$ est dans $L_p(\Omega, P_{x_0})$ $(p>2)$, il n'y a pas de difficulté particulière sur les trois premiers termes de (4.182) (calculés avec $\tau_N(K_T)$!). Le quatrième terme est

$$E^{P_{x_0}}(T_N(K_T)\,f(x_T)\,(D_T^{x_0}\otimes\varphi_T^{*-1}Y_1)\,W_T^{Y_2}).\tag{4.183}$$

Or comme $|K_T^{-1}|$ est dans $L_p(\Omega, P_{x_0})$ avec $p>2$, on vérifie très simplement que $W_T^{Y_2}$ est dans $L_q(\Omega, P_{x_0})$ avec $q>1$. Comme $D_T^{x_0}\otimes\varphi_T^{*-1}\, Y_1$ est dans tous les $L_{q'}(\Omega, P_{x_0})$ $(1\leqq q'<+\infty)$, on passe aussi à la limite sur (4.183). Enfin le dernier terme de (4.182) - qui correspond au dernier terme de (4.50), peut être majoré par $|K_T^{-1}|^2\, B_T$ où B_T est dans tous les $L_{q'}(\Omega, P_{x_0})$ $(1\leqq q'<+\infty)$. On a donc bien (4.182). □

De (4.161) et de ce qui suit, on déduit

Théorème 4.24. *Si* $\mathbb{H}\,4.4$ *est vérifiée avec* $N=2$, *si* $T>0$ *est tel que les conditions* (4.86) *soient vérifiées avec* $p>2$, *alors pour tout* $T'\geqq 2T$, *pour tout* $f\in C_b^\infty(R^n)$, *on a*

$$\left|E^{P_{x_0}}\frac{\partial^2 f}{\partial x^{l_1}\partial x^{l_2}}(x_{T'})\right|\leqq C\sup_{x'\in R^n}|f(x)|\qquad 1\leqq l_1, l_2\leqq n. \tag{4.184}$$

En particulier $|\alpha|^2\, E_{T'}^{x_0}(\alpha)$ *est borné.*

Preuve. Si les conditions (4.86) sont vérifiées pour T, elles le sont aussi pour $T'/2$. On utilise alors les calculs précédents. □

h) *Intégration par parties d'ordre quelconque*

On fait toutes les hypothèses du paragraphe précédent. On a le résultat fondamental.

Théorème 4.25. *Si l'hypothèse* $\mathbb{H}\,4.4$ *est vérifiée avec* $N\geqq 2$, *si* $T>0$ *est tel que les conditions* (4.86) *sont vérifiées avec* $p>2$, *alors pour tout* $T'\geqq NT$, $g\in C_b^\infty(R^n)$, *on*

$$\left|E^{P_{x_0}}\left(\frac{\partial^m}{\partial x^m}g(x_{T'})\right)\right|\leqq C_N\sup_{x'\in R^n}|g(x')|\qquad 1\leqq|m|\leqq N. \tag{4.185}$$

En particulier pour $T'\geqq NT$, $|\alpha|^N\, E_{T'}^{x_0}(\alpha)$ *est bornée.*

Preuve. Si les conditions (4.86) sont vérifiées pour T, elles le sont aussi pour $\tilde T\geqq T$. Il suffit donc de prouver le résultat pour $T'=NT$, $|m|=N$.

On va obtenir (4.185) à l'aide d'une formule d'intégration par parties à l'ordre N sur le semi-groupe. Pour des raisons que les calculs précédents rendent évidentes, on ne peut écrire explicitement la formule d'intégration par parties générale. Aussi nous contenterons-nous de donner les principes généraux d'obtention d'une telle formule (le cas où $N=2$ a été développé complètement au paragraphe précédent).

On vérifie en effet par récurrence qu'on est amené à montrer que l'intégration par parties est possible dans des expressions du type

$$E^{P_{x_0}}[B_T^{k,x_0}\, B'^{k,x_T}(\theta_T\omega)\,(Y_k\dots Y_N f)\,(x_{(N-k+1)T})] \tag{4.186}$$

où B_T^{k,x_0} est F_T-mesurable et dans $L_q(\Omega, P_{x_0})$ $(q>1)$ avec une norme bornée uniformément en x_0, et $B'^{k,y}$ est $F_{(N-k)T}$-mesurable et uniformément borné dans tous les $L_p(\Omega, P_y)$ $(1\leqq p<+\infty)$ avec des normes bornées indépendamment de y.

On fait alors dans (4.186) une variation sur $[0, T]$ (et *non* sur $[0, (N-k+1)T]$). Il faut alors montrer que $B_T^{k, x_0}(\omega)$ et convenablement dérivable en x, $B'^{k,y}$ convenablement dérivable en y, et qu'enfin on peut appliquer une formule du type (4.161) (qui donne le dernier terme de la formule relative à (4.186)), une fois dérivés B, B' et $(Y_k \dots Y_N f)$).

Or à l'ordre 1, (4.161) montre que seuls se propagent vers l'avant

- soit des termes triviaux auxquels on peut réappliquer (4.161).
- soit des termes du type $\overset{c'}{S}_{s \leqq (n-1)T} \tilde{\varphi}_s^*((n_i^1(x_{s^-}, \Delta z_{i,s}^1) + n^2(x_{s^-}, \Delta y_s^2))$.

Or nous avons vu au Théorème 4.22 et dans son corollaire que le calcul des variations est applicable à ces sommes compensées. Plus exactement une nouvelle intégration par parties produit vers l'avant.

- Le produit de termes «triviaux» par de telles sommes compensées.
- Le produit de termes du type $\int_0^{(n-1)T}$ par des sommes compensées.
- Le produit de telles sommes entre elles.

Or il n'y a aucune difficulté à montrer qu'on peut appliquer le calcul des variations à tous les objets décrits plus haut en particulier parce que

- comme ils sont dans tous les $L_p(\Omega, P_{x_0})$ $(1 \leqq p < +\infty)$ de norme uniformément bornée, le produit de tels objets est encore dans tous les $L_p(\Omega, P_{x_0})$ $(1 \leqq p < +\infty)$.
- Le Théorème 4.22 a montré que le calcul des variations est applicable à ces objets. Il n'y a aucune difficulté à montrer qu'il est applicable au produit de tels objets entre eux dès lors que ce produit est dans tous les $L_p(\Omega, P_{x_0})$ $(1 \leqq p < +\infty)$ de norme bornée indépendamment de x_0 et que leurs dérivées sont aussi dans tous les $L_p(\Omega, P_{x_0})$ $(1 \leqq p < +\infty)$ de norme uniformément bornée indépendamment de x_0. On c'est précisément l'objet de l'hypothèse $\mathbb{H}$ 4.4 que les sommes compensées de sauts, la partie de leur dérivée se propageant vers l'avant, les dérivées de ces termes eux-mêmes sont telles qu'on peut leur appliquer le calcul des variations.

Notons en particulier que le Théorème 4.22 est applicable à $k_i = \dfrac{\partial^m n_i^1}{\partial x^m}$ $(|m| \leqq N-2)$. Il suffit en effet de raisonner comme au corollaire du Théorème 4.22 en posant pour $\gamma > 0$, au lieu de (4.175)

$$\begin{aligned} {}^\gamma k_i(x', z_i) &= \rho\left(\frac{m_i^1(x', z_i)}{\gamma}\right) \frac{\partial^m}{\partial x^m} n_i^1(x', z_i) \qquad && \text{si } m_i^1(x', z_i) \neq 0 \\ &0 && \text{si } m_i^1(x', z_i) = 0 \end{aligned}$$

(où ρ est choisi comme dans la preuve du corollaire du Théorème 4.22), et de noter qu'alors pour $m_i^1(x', z_i) \neq 0$, grâce en particulier à $\mathbb{H}$ 4.3

$$\left|\frac{\partial\, {}^\gamma k_i}{\partial x}(x', z_i)\right| \leqq C\left[\left|\frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}} n_i^1\right|(x', z_i) + \left|\frac{\partial^m}{\partial x^m} n_i^1\right|(x', z_i)\right].$$

De même pour $m_i^1(x', z_i) \neq 0$

$$\left|\frac{\partial\, {}^\gamma k_i}{\partial z_i}(x', z_i)\right| \leqq \left|\frac{\partial}{\partial z_i} \frac{\partial^m n_i^1}{\partial x^m}(x', z_i)\right| + C\left|\frac{m_{i, z_i}^1(x', z_i)}{m_i^1}\right| \left|\frac{\partial^m}{\partial x^m} n_i^1(x', z_i)\right|.$$

On peut alors réutiliser les mêmes arguments qu'au Corollaire du Théorème 4.22, en utilisant en particulier (2.14) et (4.152).

La somme compensée $\overset{c'}{S}\,\tilde{\varphi}_s^* n_i{}^1$ engendre par calcul des variations l'intégrale

$$\int_0^T dt \int_{E_i/\{0\}} 1_{m_i^1(x_t,0)\neq 0}\, \tilde{\varphi}_s^* m_{i,x}^1(x_t, z_i)\, \tilde{\varphi}_s^* n_i^1(x_t, z_i)\, dz_i,$$

Il faut alors montrer qu'on peut appliquer à cette intégrale le calcul des variations. En effet, soit $l(x', z_i)$ une fonction définie sur $R^n \times E_i/\{0\}$ continue, bornée, de classe C^1 en x', telle que $\int_{E_i/\{0\}} |l(x', z_i)|\, dz_i$ et $\int_{E_i/\{0\}} |l_x(x', z_i)|\, dz_i$ soient bornées. Soit $\theta(z_i)$ une fonction définie sur E_i à valeurs dans $[0, 1]$, qui est dans $C_b^\infty(E_i)$ et telle que pour $|z_i| \leqq N$, $\theta(z_i)=1$ et pour $|z_i| \geqq N+1$, $\theta(z_i)=0$. Alors le calcul des variations est trivialement applicable à $\int_0^T dt \int_{E_i/\{0\}} l(x_t, z_i)\, \theta(z_i)\, dz_i$, essentiellement parce qu'on peut dériver en x_t sous le signe d'intégration. On obtient en faisant une variation comme au Théorème 4.22

$$\int_0^T dt \int_{E_i/\{0\}} \langle l_x(x_t, z_i)\, \varphi_t^* S_{s\leqq t}\, \varphi_s^{*-1} A_j(\Delta z_{j,s}^1)\rangle\, \theta(z_i)\, dz_i. \tag{4.187}$$

Dans une formule d'intégration par parties figurera dans un terme $\int_0^T dt \int_{E_i/\{0\}} l(x_t, z_i)\, \theta(z_i)\, dz_i$ et dans l'autre (4.187). On construit une suite de fonctions θ_N de type θ qui croissent vers 1, et on obtient ainsi la formule d'intégration par parties avec $\theta=1$.

Si l et l_x ne sont bornées que pour $|z_i| \geqq \varepsilon$ (pour tout $\varepsilon>0$), on remplace l par $\rho\left(\frac{|z_i|}{\alpha}\right) l(x', z_i)$ et on fait ensuite tendre $\alpha>0$ vers 0. On peut ainsi appliquer le calcul des variations à la fonction l^δ ($\delta>0$) définie par

$$\begin{aligned} l^\delta(x', z_i) &= \rho\left(\frac{m_i^1(x', z_i)}{\delta}\right) m_x^1(x', z_i)\, n_i^1(x', z_i) \qquad && \text{si } m_i^1(x', z_i)\neq 0 \\ & && \text{si } m_i^1(x', z_i)=0. \end{aligned}$$

Alors pour $m_i^1(x', z_i)\neq 0$, on a comme en (4.177)

$$|l_x^\delta(x', z_i)| \leqq \left|\frac{\partial}{\partial x}\,(m_x^1\, n_i^1)(x', z_i)\right| + C\,|n_i^1|\,|m_x^1\, n_i^1|(x', z_i).$$

Par $\mathbb{H}$4.3 et $\mathbb{H}$4.4c), $l_x^\delta(x', z_i)$ est borné dès que $|z_i| \geqq \varepsilon$ ($\varepsilon>0$). Par (4.154) $\int_{E_i/\{0\}} |l^\delta(x', z_i)|\, dz_i$ et $\int_{E_i/\{0\}} |l_x^\delta(x', z_i)|\, dz_i$ sont uniformément bornés. On applique la formule d'intégration par parties à $\int_0^T dt \int l^\delta(x_t, z_i)\, dz_i$. On fait ensuite tendre sans difficulté δ vers 0. En notant que le terme φ_s^* est lui-même aisément dérivable, on a bien montré qu'on peut appliquer le calcul des variations à

$$\int_0^T dt \int_{E_i/\{0\}} \tilde{\varphi}_t^* m_x^1(x_t, z_i)\, \tilde{\varphi}_t^* n_i^1(x_t, z_i)\, dz_i$$

IH4.4c) montre qu'on peut aussi l'appliquer à ses dérivées. De même IH4.4c) montre qu'on peut appliquer le calcul des variations aux intégrales $\int_0^T$ issues des sommes compensées elles-mêmes issues de $\overset{c'}{S} \varphi_s^* n_i^1(x_{s^-}, \Delta z_{i,s}^1)$. □

Remarque 13. Pour obtenir la formule d'intégration par parties on fait tout d'abord varier $z_1^1, \ldots, z_q^1$ entre 0 et T, puis après une première intégration par parties, entre T et $2T$, etc... puis entre $(n-1)T$ et nT. Le lecteur peut se demander pourquoi on n'a pas procédé en sens inverse en effectuant une variation entre $(n-1)T$ et nT, puis entre $(n-2)T$ et $(n-1)T$ etc. La raison est que l'intégration par parties entre $(n-1)T$ et nT fait apparaître $[K_T^{x_{(n-1)T}} \circ \theta_{(n-1)T}]^{-1}$ à la puissance 2. Une variation entre $(n-2)T$ ferait aussi varier $[K_T^{x_{(n-1)T}} \circ \theta_{(n-1)T}]^{-1}$ puisque $x_{(n-1)T}$ varierait, et ainsi apparaîtrait la puissance troisième de $[K_T^{x_{(n-1)T}} \circ \theta_{(n-1)T}]^{-1}$ d'où la nécessité de vérifier les conditions (4.86) avec $p>3$, ce qui est naturellement une hypothèse plus forte que celle que nous avons faite.

Remarque 14. La méthode utilisée ici est applicable aux diffusions et permet dans certains cas d'éviter la preuve de Malliavin [14] et Ikeda-Watanabe [11] que l'inverse d'une forme quadratique est dans *tous* les L_p $(1 \leqq p < +\infty)$.

Rappelons que les mesures η_i sur $]0, +\infty[$ ont été définies à la Définition 4.10. Du Théorème 4.25, on déduit

Théorème 4.26. *Si l'hypothèse* IH4.4 *est vérifiée avec* $N=+\infty$, *s'il existe* C *tel que* $0<C\leqq+\infty$, *et que pour* $i=1\ldots q$

$$\lim_{x\to 0} \eta_i \frac{(]x, +\infty[)}{\operatorname{Log}\frac{1}{x}} \geqq C \tag{4.188}$$

alors pour $T>\frac{2}{C}$, *les conditions* (4.86) *sont vérifiées avec* $p>2$. *Pour tout* $x_0 \in R^n$, *pour tout entier* $k\geqq 1$, *si* $t>\frac{2k}{C}$, $|\alpha|^k E_t^{x_0}(\alpha)$ *est une fonction bornée. Pour tout entier* $l\geqq 0$, *si* $t>2\frac{(l+n+1)}{C}$, *la loi de* x_t *pour* P_{x_0} *est de la forme* $q_t(x_0, y)\,dy$, *où* $q_t(x_0, \cdot)$ *est une fonction de* $C_b^l(R^n)$. *En particulier, si* (4.188) *est vérifiée avec* $C=+\infty$, *alors pour tout* $t>0$, *la loi de* x_t *pour* P_{x_0} *est de la forme* $q_t(x_0, y)\,dy$, *et de plus* $q_t(x_0, \cdot) \in C_b^\infty(R^n)$.

Preuve. Par le corollaire du Théorème 4.16, appliqué à $m=\eta_i$ et $\gamma'=1$, on voit que

$$\overline{\lim_{\beta\to+\infty}} \frac{\tau_i(\beta)}{\operatorname{Log}\beta} \leqq -C.$$

Donc pour tout $\varepsilon>0$, s

$$\overline{\lim_{\beta\to+\infty}} \chi_{i,s}(\beta)\, \beta^{(C-\varepsilon)s} \leqq 1.$$

Donc pour $p \geqq 1$ fixé, si $s > \frac{p}{C-\varepsilon}$, $\beta^{p-1}\chi_{i,s}(\beta)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Si $t > \frac{2}{C}$, il existe $\gamma > 0$, $\varepsilon > 0$ et $p > 2$ tels que $t - \gamma > \frac{p}{C-\varepsilon}$, et ainsi les conditions (4.86) sont vérifiées pour t. On applique alors le Théorème 4.25 pour obtenir le résultat sur $E_t^{x_0}$. Si $|\alpha|^k E_t^{x_0}(\alpha)$ est borné, si $k > l+n$, il est classique que la loi de x_t pour P_{x_0} est de la forme $q_t(x_0, y)\,dy$, où $q_t(x_0, \cdot) \in C_b^l(R^n)$. On obtient bien la fin du Théorème.

5. Applications

Dans cette section, nous traitons rapidement de quelques applications. Au paragraphe a), on étudie les densités de transition $q_t(x_0, y)$ de processus de sauts - quand elles existent - en tant que fonctions de (t, x_0, y). Au paragraphe b) on étudie certaines diffusions à sauts.

a) Étude des densités de transition

On suppose que toutes les hypothèses de la Section 4 sont vérifiées (avec $N = +\infty$ dans $\mathbb{H}$4.4) que les hypothèses du Théorème 4.26 sont aussi vérifiées avec $C = +\infty$ dans (4.188). Alors pour $t > 0$, la loi de x_t pour P_{x_0} est de la forme $q_t(x_0, y)\,dy$.

En adaptant avec quelques modifications les techniques de Stroock dans [19], on peut montrer que pour $t > 0$ donné, q_t est une fonction C^∞ des deux variables x_0 et y. Les preuves sont laissées au lecteur.

b) Calcul des variations sur des diffusions à sauts

Soit $X_1 \dots X_r$ r champs de vecteurs définis sur R^n à valeurs dans R^n, qui sont C^∞ bornés à dérivées de tous ordres bornées.

Soit $\mathscr{L}'$ l'opérateur différentiel qui agit sur $f \in C_b^\infty(R^n)$ par

$$\mathscr{L}' f(x) = \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{r} (X_j^2 f)(x). \tag{5.1}$$

$\mathscr{L}$ désigne l'opérateur (4.28). On fait sur $\mathscr{L}$ toutes les hypothèses du paragraphe 4g), en supposant que $N = +\infty$ dans $\mathbb{H}$4.4, à l'exception de l'hypothèse d'ellipticité $\mathbb{H}$4.2 sur $\mathscr{L}$.

On désigne par $\bar{\mathscr{L}}$ l'opérateur qui agit sur $C_b^\infty(R^n)$

$$\bar{\mathscr{L}} = \mathscr{L} + \mathscr{L}'. \tag{5.2}$$

Pour $x_0 \in R^n$, on considère le problème des martingales associé à $x_0 \in R^n$ (qui est le point de départ) et à $\bar{\mathscr{L}}$.

Ω désigne encore l'espace $[D(R^n)]^{q+1}$. Ω' est l'espace $\mathscr{C}(R^+; R^r)$, et $w = (w^1 \dots w^r)$ est l'élément générique de Ω'. B est la mesure Brownienne sur Ω'.

Pour $(z_1^1 \ldots z_q^1, y^2) \in \Omega$, on pose

$$y_t = z_{1,t}^1 + \ldots + z_{q,t}^1 + y_t^2.$$

On considère l'équation différentielle stochastique sur (Ω', B)

$$x_t = x_0 + \int_0^t X_0(x_s)\, ds + \int_0^t X_j(x_s) \cdot dw^j + y_t \tag{5.3}$$

où dw^j est la différentielle de Stratonovitch de w^j [16]. En posant

$$\bar{x}_t = x_t^{x,y} - y_t$$

on voit que $\bar{x}_t$ est solution de l'équation différentielle stochastique ordinaire

$$d\bar{x}_t = X_0(\bar{x}_t + y_t)\, dt + X_i(\bar{x}_t + y_t) \cdot dw^i \tag{5.4}$$

à laquelle on peut appliquer la Théorie des flots [1, 2] (pour $z_1^1 \ldots z_q^1, y^2$ fixés). Par [1], Théorèmes 1.1.2 et 1.2.1, on sait qu'il existe une application $\psi_t^y(w, x_0)$ définie sur $R^+ \times \Omega \times \Omega' \times R^n$ à valeurs dans R^n, qui est optionnelle en $(y, w) \in \Omega \times \Omega'$ (muni de sa filtration canonique), continue en $(t, x_0) \in R^+ \times R^n$, C^∞ en x_0 à dérivées de tous ordres en x_0 continues en (t, x_0), telle que pour tout $(z_1^1 \ldots z_q^1, y^2) \in \Omega$, B p.s., pour tout $t \geqq 0$, $\psi_t^y(w, \cdot)$ est un difféomorphisme de R^n sur R^n, et que pour tout $x \in R^n$, $\psi_t^y(w, x_0)$ est la solution unique unique de (5.4). Si on pose

$$\varphi_t^y(w, x_0) = \psi_t^y(w, x_0) + y_t.$$

$\varphi_t^y(w, x)$ est la solution de (5.3), et de plus φ possède toutes les propriétés de ψ.

Pour construire la solution unique du problème des martingales associé à $(x, \bar{\mathscr{L}})$, on procède de la manière suivante:

1. On munit l'espace $\bar{\Omega} = \Omega \times \Omega'$ de la mesure $\Pi \otimes B$.
2. On construit une mesure P_{x_0} sur $\bar{\Omega}$ à l'aide d'une martingale exponentielle $\geqq 0$ qui s'obtient formellement par la même formule que (4.30).

Il est alors très facile de vérifier que pour P_{x_0}, la loi de $\varphi^y(w, x_0)$ est solution du problème des martingales. L'unicité de la solution de ce problème est laissée au lecteur.

Il y a alors trois cas que nous allons traiter.

A. Le cas où $\mathscr{L}'$ est elliptique

Supposons que l'opérateur $\mathscr{L}'$ soit uniformément elliptique, i.e. que pour tout $x \in R^n$, $X_1(x) \ldots X_r(x)$ engendrent R^n.

Dans ces conditions, il n'est pas difficile de montrer que pour tout $T > 0$, la loi de x_T pour P_{x_0} est donnée par une densité C^∞. En effet il suffit d'appliquer la technique du calcul des variations de [3] sur $w = (w^1 \ldots w^m)$, qui utilise le calcul des variations sur w. Le seul point non complètement trivial par rapport à [3] est de montrer qu'on peut appliquer ce calcul à la densité (4.30). Pour le montrer, il suffit de procéder comme à la section 2. L'ellipticité de $\mathscr{L}'$ permet de procéder comme en [3, 11, 14, 15, 19].

En effet le point clé est de montrer que pour $T>0$, la forme quadratique positive $\bar{K}_T$

$$(X, Y) \to \sum_{i=1}^{r} \int_0^T \langle \varphi_s^{*-1} X_i, X\rangle \langle \varphi_s^{*-1} X_i, Y\rangle \, ds \tag{5.5}$$

a un inverse et que cet inverse est dans tous les $L_p(\Omega, P_{x_0})$ $(1 \leqq p < +\infty)$ (en fait nous avons vu qu'il suffit de le vérifier pour $p>2$). Or l'hypothèse d'ellipticité uniforme de $\mathscr{L}'$ donne immédiatement le résultat.

B. Le cas où $\mathscr{L}$ est elliptique

On suppose maintenant que $\mathbb{H}$4.2 est effectivement vérifiée.

Comme du point de vue différentiel l'équation (5.6) se comporte comme l'équation (1.5), il n'y a aucune difficulté majeure à appliquer à l'équation (5.6) le même calcul des variations en $(z_1^1 \dots z_q^1, y^2)$ qu'aux sections 2.4. Le point essentiel est de noter que pour tout compact $K \subset R^n$, tout $T>0$, tout multiindice m,

$$\sup_{\substack{0 \leqq t \leqq T \\ x \in K}} \left| \frac{\partial^m \varphi_t^y}{\partial x} (w, x_0) \right|, \qquad \sup_{\substack{0 \leqq t \leqq T \\ x \in K}} \left| \left[\frac{\partial \varphi_t^y}{\partial x} (w, x_0) \right]^{-1} \right|$$

est dans tous les $L_p(\Omega, P_{x_0})$ $(1 \leqq p < +\infty)$. (Cette remarque vaut aussi pour le cas A). En effet, par les Théorèmes 1.1.2 et 1.2.1 de [1], pour y fixé, ces variables sont dans tous les $L_p(\Omega', B)$ $(1 \leqq p < +\infty)$ avec des normes majorées par des constantes ne dépendant pas de y. Ces variables sont donc dans tous les $L_p(\bar{\Omega}, \Pi \otimes B)$ $(1 \leqq p < +\infty)$. Comme la densité Z_T donnée par l'équivalent de (4.30) est dans $L_2(\bar{\Omega}, \Pi \otimes B)$, elles sont aussi dans tous les $L_p(\bar{\Omega}, P_{x_0})$ $(1 \leqq p < +\infty)$.

Il n'y a alors aucune difficulté majeure à obtenir une formule de type (4.50), où φ est remplacé par le nouveau flot φ, $v_1 \dots v_q$ gardant formellement leur sens, ainsi que K_T.

$E_t^{x_0}(\alpha)$ désigne encore la fonction caractéristique de x_t pour P_{x_0}.

Toutefois, on ne peut adapter directement la preuve du Théorème 4.11, que nous sommes obligés de modifier.

Théorème 5.5. *S' il existe D tel que $0<D \leqq +\infty$ tel que pour $1 \leqq i \leqq q$*

$$\varliminf_{x \to 0^+} \frac{\eta_i(]x, +\infty[)}{\operatorname{Log} \frac{1}{x}} \geqq D \tag{5.6}$$

alors pour $x_0 \in R^n$, $T > \frac{n+1}{D}$, il existe $p>2$ tel que $K_T^{-1} \in L_p(\bar{\Omega}, P_{x_0})$. Pour tout entier $k \geqq 1$ si $t > \frac{(n+1)k}{D}$, $|\alpha|^k E_t^{x_0}(\alpha)$ est bornée. Pour tout $l \in N$, si $t > \frac{2(n+1)(n+l+1)}{D}$, la loi de x_t pour P_{x_0} est de la forme $q_t(x_0, y)\,dy$ où $q_t(x_0, \cdot) \in C_b^l(R^n)$. Si (5.6) est vérifiée avec $D=+\infty$, pour tout $t>0$, la loi de x_t pour P_{x_0} est de la forme $q_t(x_0, y)\,dy$, et $q_t(x_0, \cdot) \in C_b^\infty(R^n)$.

Preuve. On va prouver le résultat sur K_T^{-1}. La preuve des résultats qui suivent est semblable à la preuve des Théorèmes 4.25 et 4.26.

On reprend les notations du paragraphe 4 d), en particulier sur la définition de la norme $\| \ \|$ sur R^n en (4.70) et sur la constante $C'>0$ en (4.71).

Il suffit de montrer que pour $T>\frac{n+1}{D}$, quand $\lambda\to+\infty$, il existe $\varepsilon>0$ tel que

$$P_x[|K_T^{-1}|\geqq\lambda]\leqq\frac{C}{\lambda^{2+\varepsilon}}. \tag{5.7}$$

Soit γ, δ des réels >0, avec $\gamma<\frac{1}{2}$. On a, en omettant y

$$\begin{aligned} P_{x_0}[|K_T^{-1}|\geqq\lambda]\leqq & P_{x_0}\left[\sup_{0\leqq t\leqq T}\left|\frac{\partial\varphi_t}{\partial x}(x)\right|\geqq\lambda^\gamma\right]+P_{x_0}[|K_T|\geqq\lambda^\delta] \\ & +P_{x_0}\left[\sup_{0\leqq t\leqq T}\left|\frac{\partial\varphi_t}{\partial x}(x)\right|<\lambda^\gamma;|K_T|<\lambda^\delta,|K_T^{-1}|\geqq\lambda\right]. \end{aligned}\tag{5.8}$$

Or comme $\sup\limits_{0\leqq t\leqq T}\left|\frac{\partial\varphi_t}{\partial x}(x_0)\right|$ et $|K_T|$ sont dans tous les $L_p(\Omega,P_{x_0})$ $(1\leqq p<+\infty)$ $\left(\text{compte-tenu de ce que nous avons dit sur } \left|\left[\frac{\partial\varphi_t}{\partial x}(x_0)\right]^{-1}\right|, \text{ ce résultat est trivial}\right)$, les deux premiers termes à droite de (5.8) peuvent être majorés par $\frac{C_{k,\gamma,\delta}}{\lambda^k}$ (pour $k\in N$ donné).

Par un lemme utilisé par Malliavin [15] et Ikeda-Watanabe (lemme V.8.4 dans [11]), on sait qu'étant donné $\varepsilon>0$, $R>0$ $(\varepsilon<R)$, il existe $N(R,\varepsilon)$ points de la sphère unité de R^n notés $l_1\dots l_{N(R,\varepsilon)}$ tels que si A est une forme quadratique symétrique positive telle que $|A|\leqq R$, si pour tout l_i, $\langle Al_i,l_i\rangle\geqq\varepsilon$, alors A^{-1} existe et $|A^{-1}|\leqq 2/\varepsilon$. De plus il existe $C>0$ tel que $N(R,\varepsilon)\leqq C\left(\frac{R}{\varepsilon}\right)^{n-1}$. On en déduit

$$\begin{aligned} & P_{x_0}\left[\sup_{0\leqq t\leqq T}\left|\frac{\partial\varphi_t}{\partial x}\right|<\lambda^\gamma,|K_T|<\lambda^\delta,|K_T^{-1}|\geqq\lambda\right] \\ & \leqq\sum_{j=1}^{N\left(\lambda^\delta,\frac{2}{\lambda}\right)}P_{x_0}\left[\sup_{0\leqq t\leqq T}\left|\left|\frac{\partial\varphi_t}{\partial x}(x)\right|\right|<\lambda^\gamma,\langle K_T l_j,l_j\rangle\leqq\frac{2}{\lambda}\right] \end{aligned}\tag{5.9}$$

et de plus

$$N\left(\lambda^\delta,\frac{2}{\lambda}\right)\leqq C\lambda^{(\delta+1)(n-1)}. \tag{5.10}$$

Par [1]-Théorème 1.2.1, $Z'_t=\left[\frac{\partial\varphi_t}{\partial x}(x)\right]^{-1}$ est solution de l'équation différentielle stochastique $dZ'=-Z'\frac{\partial X_0}{\partial x}(x_t)\,dt-Z'\frac{\partial X_i}{\partial x}(x_t)\cdot dw^i$, $Z'(0)=I$. $\left[\frac{\partial\varphi_t}{\partial x}(x)\right]^{-1}$ est un processus continu prévisible.

Fixons $l_j = l$. Pour $n \in N$, soit T_n le temps d'arrêt prévisible

$$T_n = \inf\left\{t \geqq 0; \left|\left[\frac{\partial \varphi_t}{\partial x}(x)\right]^{-1}\right| \geqq n\right\}.$$

Soit $\beta > 0$. Alors si N_t^β est le processus défini par

$$N_t^\beta = \exp\left\{-\beta\langle K_t l, l\rangle - \int_0^t ds \sum_i \int_{E_i/\{0\}} \right.$$
$$\left. \cdot\, e^{-\beta\langle P_i \tilde{\varphi}_s^{*-1} l,\, P_i \tilde{\varphi}_s^{*-1} l\rangle\, v_i(z_i)} - 1)\, m_i^1(x_s, z_i)\, dz_i\right\} \tag{5.11}$$

$N_{t \wedge T_n}^\beta$ est une martingale. Par le Théorème de Fatou, on en déduit que

$$E^{P_{x_0}} N_T^\beta \leqq 1. \tag{5.12}$$

Sur $\sup\limits_{0 \leqq t \leqq T} \left|\frac{\partial \varphi_t}{\partial x}(x)\right| < \lambda^\gamma$, pour tout $s \leqq T$, il existe un indice i tel que

$$|P_i \tilde{\varphi}_s^{*-1} l| = \|\tilde{\varphi}_s^{*-1} l\| \geqq \frac{C'}{\lambda^\gamma}. \tag{5.13}$$

et donc en utilisant (4.83)-(4.83'), (5.6), (5.12) et le Corollaire du Théorème 4.16, on trouve que pour $0 < \eta < D$ et λ assez grand

$$E^{P_{x_0}}[1_{\sup\limits_{0 \leqq t \leqq T}\left|\frac{\partial \varphi_t}{\partial x}(x)\right| < \lambda^\gamma} \exp\{-\lambda\langle K_T l, l\rangle + T(D-\eta) \operatorname{Log} \lambda^{1-2\gamma}\}] \leqq C. \tag{5.14}$$

De (5.14) on déduit immédiatement que

$$P_{x_0}\left[\sup_{0 \leqq t \leqq T}\left|\frac{\partial \varphi_t}{\partial x}(x)\right| < \lambda^\gamma, \langle K_T l, l\rangle \leqq \frac{2}{\lambda}\right] \leqq \frac{C}{\lambda^{(1-2\gamma)T(D-\eta)}}. \tag{5.15}$$

De (5.9), (5.10) et (5.15) on tire

$$P_{x_0}\left[\sup_{0 \leqq t \leqq T}\left|\frac{\partial \varphi_t}{\partial x}(x)\right| < \lambda^\gamma, |K_T| < \lambda^\delta, |K_T^{-1}| \geqq \lambda\right]$$
$$\leqq C \lambda^{(\delta+1)(n-1)-(1-2\gamma)T(D-\eta)} \tag{5.16}$$

Si $T > \frac{n+1}{D}$, on peut trivialement trouver $\varepsilon, \gamma, \eta, \delta > 0$ tels que $\gamma < \frac{1}{2}$, $\eta < D$, et que

$$(\delta+1)(n-1) - (1-2\gamma)T(D-\eta) = -2-\varepsilon \tag{5.17}$$

De (5.8), (5.16), (5.17), on tire (5.7). □

C. Le cas où $\mathscr{L}'$ est hypoelliptique

Supposons que $\mathscr{L}'$ vérifie les conditions d'hypoellipticité de Hörmander [10], i.e. en tout $x \in R^n$, l'espace engendré par

$$X_1(x)\dots X_r(x), \qquad [X_i, X_j](x)_{1\leqq i,j\leqq r}, \qquad [X_i,[X_j,X_k]](x)_{1\leqq i,j,k\leqq r} \text{ etc}\dots$$

est égal à R^n.

Pour montrer que pour $T>0$, la loi de x_T a une densité, une fois qu'on a montré qu'on peut appliquer le calcul des variations de [3, 19] à la densité (4.30), par [3, 14], il suffit de montrer que la forme quadratique $\bar{K}_T$ donnée par (5.5) est P_{x_0} p.s. inversible. Or on vérifie très simplement que pour $i=1\dots r$, on a sur $(\bar{\Omega}, P_{x_0})$

$$\begin{aligned}
\varphi_t^{*-1} X_i(x_0) &= X_i(x_0) + \int_0^t \varphi_s^{*-1}\left((\mathscr{L}X_i)(x_s) - \frac{\partial X_0}{\partial x}(x_s)\,X_i(x_s)\right) ds \\
&\quad + \int_0^t \varphi_s^{*-1}[X_j, X_i](x_s)\,dw^j \\
&\quad + \overset{c'}{S}_{s\leqq t}\,\varphi_s^{*-1}(X_i(x_{s-}+\Delta x_s) - X_i(x_{s-})) \\
&= X_i(x) + \int_0^t \varphi_s^{*-1}\left((\mathscr{L}X_i)(x_s)\right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial X_0}{\partial x}(x_s)\,X_i(x_s) + \tfrac{1}{2}[X_j,[X_j,X_i]](x_s)\right) ds \\
&\quad + \int_0^t \varphi_s^{*-1}[X_j,X_i](x_s)\cdot\delta w^j \\
&\quad + \overset{c'}{S}_{s\leqq t}\,\varphi_s^{*-1}(X_i(x_{s-}+\Delta x_s) - X_i(x_{s-}))
\end{aligned} \tag{5.18}$$

où dans (5.18), δw^j est la différentielle de Ito de w^j. Rappelons ici encore que $\varphi_s^{*-1} = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x^s}(x)\right]^{-1}$ est un processus continu, donc prévisible, et que la somme compensée $\overset{c'}{S}$ dans (5.18) a bien un sens.

Si $f\in R^n$ est dans le noyau de $\bar{K}_T$, pour $s\leqq T$ $\langle f, \varphi_s^{*-1}X_i(x_0)\rangle = 0$. Par l'unicité de la décomposition de $\langle f, \varphi_s^{*-1}X_i(x_0)\rangle$, on voit

$$\int_0^t \langle f, \varphi_s^{*-1}[X_j, X_i](x)\rangle\,\partial w^j$$

est nulle, et donc, par continuité que $\langle f, \varphi_s^{*-1}[X_j, X_i]\rangle = 0$ pour $s\leqq t$. En itérant le raisonnement, on peut remplacer $[X_j, X_i]$ par un crochet de Lie de longueur arbitraire des champs $X_1\dots X_r$. En particulier f est orthogonale à $X_1(x)\dots X_r(x)$ et à tous les crochets en x de ces champs. f est donc nulle. On raisonne comme à la Proposition 4.1 de [3] pour en déduire que P_{x_0} p.s., $\bar{K}_T$ est inversible.

Remerciements. L'auteur remercie deux rapporteurs pour leurs suggestions et leurs commentaires.

Bibliographie

1. Bismut, J.M.: Mécanique aléatoire. Lecture Notes in Math. **866**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1981

2. Bismut, J.M.: A generalized formula of Ito and some other properties of stochastic flows. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **55**, 331–350 (1981)
3. Bismut, J.M.: Martingales, the Malliavin calculus and hypoellipticity under general Hörmander's conditions. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **56**, 469–505 (1981)
4. Bismut, J.M., Michel, D.: Structure des diffusions conditionnelles et calcul des variations. C.R. Acad. Sci. Paris **292**, série I, 731–734 (1981)
5. Bismut, J.M., Michel, D.: Diffusions conditionnelles. J. Funct. Anal. **44**, 174–211 (1981) II, J. Funct. Anal. **45**, 274–292 (1982)
6. Bretagnolle, J.: Résultats de Kesten sur les processus à accroissements indépendants. Sém. Probab. no. V, pp. 21–36. Lecture Notes in Math. no. **191**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971
7. Dellacherie, C., Meyer, P.A.: Probabilités et potentiels. Chap. I–IV. Paris: Hermann 1975; Chap. V-VIII. Paris: Hermann 1980
8. Haussmann, U.: Functionals of Ito processes as stochastic integrals. S.I.A.M. J. Control Optim. **16**, 252–269 (1978)
9. Haussmann, U.: On the integral representation of Ito processes. Stochastics **3**, 17–27 (1979)
10. Hörmander, L.: Hypoelliptic second-order differential equations. Acta Math. **119**, 147–171 (1967)
11. Ikeda, N., Watanabe, S.: Stochastic differential equations and diffusion processes. Amsterdam: North-Holland 1981
12. Jacod, J.: Calcul stochastique et problèmes de martingales. Lecture Notes in Math., no. **714**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1979
13. Kesten, H.: Hitting probabilities of single points for processes with independent increments. Memoir Amer. Math. Soc. no. **93**, 1–129 (1969)
14. Malliavin, P.: Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators. Proc. Intern. Conf. on Stochastic differential equations of Kyoto 1976, 195–263. Tokyo-Kinokuniya and New York: Wiley 1978
15. Malliavin, P.: C^k hypoellipticity with degeneracy. Stochastic analysis, ed. A. Friedman and M. Pinsky, 199–214. New York-London: Acad. Press 1978
16. Meyer, P.A.: Un cours sur les intégrales stochastiques. Sém. Probabilités no. 10, 245–400. Lecture Notes in Math. **511**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1976
17. Simon, B.: Functional Integration and quantum physics. New York: Academic Press 1979
18. Stroock, D.W.: Diffusion processes associated with Lévy generators. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **32**, 209–244 (1975)
19. Stroock, D.W.: The Malliavin calculus and its applications to second order parabolic differential equations. Part I: Math. Systems Theory **14**, 25–65 1981. Part II: **14**, 141–171 (1981)
20. Stroock, D.W.: The Malliavin calculus and its applications. In: Stochastic Integrals. ed. D. Williams, pp. 394–432. Lecture Notes in Math. **851**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1981
21. Stroock, D.W., Varadhan, S.R.S.: Multidimensional diffusion processes. Grundlehren der Math. Wissenschaften. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1979
22. Tucker, H.G.: Absolute continuity of infinitely divisible distributions. Pacific J. Math. **12**, 1125–1129 (1962)
23. Williams, D.: Diffusions, Markov processes and martingales. New York: Wiley 1979
24. Williams, D.: To begin at the beginning. In: Stochastic Integrals, ed. D. Williams. Lecture Notes in Math. **851**, pp. 1–55. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1981
25. Blum, J.R., Rosenblatt, M.: On the structure of the infinitely divible distributions. Pacific J. Math. **9**, 1–7 (1959)
26. Fisz, M., Varadarajan, V.S.: On conditions of absolute continuity of infinitely divisible distributions. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **1**, 335–339 (1963)
27. Hartman, P., Wintner, A.: The infinitesimal generator of integral convolution. Amer. J. Math. **64**, 273–298 (1942)
28. Doleans-Dade, C.: Quelques applications de la formule de changement de variables pour les semi-martingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **16**, 181–194 (1970)
29. Billingsley, P.: Convergence of probability measures. New York: Wiley 1968

30. Jacod, J., Yor, M.: Étude des solutions extrémales et représentation intégrale des solutions pour certains problèmes de martingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **38**, 83–125 (1977)
31. Kobayashi, S., Nomizu, K.: Foundations of differential geometry. Vol. I. New York: Interscience 1963
32. Karamata, J.: Neuer Beweis und verallgemeinerung der Tauberschen Sätze, welche die Laplacesche und Stieltjessche Transformation betreffen. J. Reine Angew. Math. **164**, 27–39 (1931)
33. Bismut, J.M.: The calculus of boundary processes. To appear
34. Bismut, J.M.: Calcul des variations sur les processus de sauts. C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, **293**, 565–568 (1981)

Reçu le 30 Janvier 1982; en forme finale le 2 Novembre 1982