Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 31, 25–33 (1974)

Marches aléatoires sur le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^d$

B. Roynette

Summary. We intend to prove here that under a moment condition the potential of an aperiodic random walk of the group of Euclidian motions in $\mathbb{R}^d$, $d \geqq 3$ tends to zero at infinity, at a speed which we shall give.

Résumé. Nous nous proposons de prouver ici que le potentiel d'une marche aléatoire apériodique sur le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^d$, pour $d \geqq 3$, et sous une condition de moments, tend vers zéro à l'infini, avec une vitesse que nous préciserons.

Introduction et Notations

Soit G_d le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^d$. G_d est un groupe de Lie connexe égal au produit semi-direct de $SO(d) \times_\phi \mathbb{R}^d$, où $SO(d)$ est la composante connexe du groupe orthogonal de $\mathbb{R}^d$, et où l'homomorphisme ϕ est donné par l'action naturelle de $SO(d)$ sur $\mathbb{R}^d$: $\phi(v)(\lambda) = v \cdot \lambda$ $(v \in SO(d),\ \lambda \in \mathbb{R}^d)$. Tout élément g de G_d sera noté (v, λ) (ou encore $(v(g), \lambda(g))$ avec $v \in SO(d)$ et $\lambda \in \mathbb{R}^d$). Si $\lambda \in \mathbb{R}^d$, $|\lambda|$ désignera la norme euclidienne de λ, et σ sera la mesure de Haar normalisée de $SO(d)$. Les éléments du groupe G_d, ainsi que ceux de $SO(d)$ et de $\mathbb{R}^d$, seront désignés par des lettres minuscules. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace de probabilité et (U_1, Y_1), (U_2, Y_2), $\ldots$, $(U_n, Y_n) \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur Ω, à valeurs dans G_d et de même loi μ (avec U_i de loi ν, à valeurs dans $SO(d)$ et Y_i à valeurs dans $\mathbb{R}^d$). Pour $g = (v, \lambda) \in G_d$, soit Z_n^g la marche aléatoire droite de loi μ partant de (v, λ) à l'instant 0, ie: $Z_n^g = (v, \lambda) \cdot (U_1, Y_1) \cdot \cdots \cdot (U_n, Y_n)$. Bien sûr, vu la forme de la multiplication dans G_d, on a:

$$Z_n^g = (v \cdot U_1 \cdot U_2 \cdot \cdots \cdot U_n, X_n^g)$$

où

$$X_n^g = \lambda + v \cdot Y_1 + v \cdot U_1 \cdot Y_2 + \cdots + v \cdot U_1 \cdot U_2 \ldots U_{n-1} \cdot Y_n.$$

Dans ce qui suit, les variables aléatoires seront notées par des lettres majuscules.

Si $h: G_d \to \mathbb{R}$ est une fonction positive, nous noterons Vh son potentiel, c'est à dire:

$$Vh(v, \lambda) = Vh(g) = E\left(\sum_{n=0}^{\infty} h(Z_n^g)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_g * \mu^{*n}(h)$$

(où $g \in G_d$ et où ε_g est la masse de Dirac au point g).

Nous ferons dans cet article les deux hypothèses suivantes:

H_1: Il existe $\delta > 0$ tel que la mesure μ admette un moment d'ordre $2 + \delta$,

ie:
$$\int_{G_d} |\lambda(g)|^{2+\delta} \mu(dg) < +\infty.$$

H_2: La mesure μ est apériodique, c'est à dire que le plus petit sous-groupe fermé contenant le support de μ est G_d tout entier (remarquons que cette hypothèse implique que ν est apériodique).

Sous ces hypothèses, on sait d'après Crépel (2) que la marche de loi μ est récurrente sur G_2. Aussi la question du comportement à l'infini du potentiel ne se pose pas dans ce cas. C'est pourquoi nous supposerons $d \geqq 3$ dans tout ce qui suit. Le but de ce papier est de prouver le théorème suivant:

Théorème 1. *Nous supposons $d \geqq 3$, et les hypothèses H_1 et H_2 réalisées. Il existe une constante $\alpha > 0$ telle que, pour toute h positive bornée et à support compact, il existe une constante C telle que:*

$$|Vh(v, \lambda)| \leqq \frac{C}{|\lambda|^{2\alpha}} \qquad \textit{pour } |\lambda| \textit{ assez grand}.$$

Nous préciserons au cours de la démonstration comment peut être choisie la constante α en fonction de δ et de d.

Démonstration du théorème 1. Nous aurons besoin de quelques lemmes, que nous allons déjà établir.

Un lemme préliminaire. Fixons d'abord quelques notations. Dans ce qui suit, f désignera la fonction de $\mathbb{R}^d \setminus (0)$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_d) = 1 - \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2)^\alpha}.$$

Si $\rho \geqq 0$, B_ρ sera la boule de $\mathbb{R}^d$ de centre 0 et de rayon ρ, et S_ρ la sphère de centre 0 et de rayon ρ. Si A est une matrice $d x d$ à coefficients réels, nous noterons $\|A\| = d \sup_{1 \leqq i,j \leqq n} |A_{ij}|$, et nous désignerons par I_d la matrice unité de dimension d. Si M est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ ayant des moments d'ordre 2, K_M sera sa matrice de covariance.

Lemme 1. *Soit X une variable aléatoire centrée, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, avec $d \geqq 3$. Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que $E|X|^{2+\delta} < +\infty$. Alors, il existe $\alpha < \frac{d-2}{2}$, $\varepsilon > 0$, ρ_1 et $\rho_0 > 0$ tels que, si $\|K_X - I_d\| < \varepsilon$, et si $x \notin B_{\rho_1}$ on ait:*

$$E(b(x+X)) \geqq b(x)$$

où $b(x) = \sup\{f(x), \xi \cdot 1_{B_{\rho_0}}\}$ (ξ étant la valeur de f sur S_{ρ_0}).

Démonstration. Nous allons procéder en plusieurs étapes.

1. Ici h désigne un élément de $\mathbb{R}^d$, de composantes $h_1, \ldots, h_d$. Pour tout $\beta > 0$, le développement en série de Mac Laurin suivant est convergent, si $|h| \leqq \rho^{1-\beta}$, $x \in S_\rho$, et si ρ est assez grand:

$$\text{(D)} \qquad f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{d} h_i \frac{\partial f}{\partial x}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \cdots.$$

Il suffit, pour prouver ceci, de montrer que le reste de Taylor à l'ordre n tend vers 0 quand $n \to \infty$. Sous les hypothèses indiquées, il n'est pas difficile de voir que ce reste est majoré par $C_1^n \frac{1}{\rho^{\beta n}}$, et tend donc vers 0 si ρ est assez grand.

2. Nous supposons ici que la loi de X est à support compact et que $K_X = I_d$. Dans ces conditions, il existe un ρ' tel que le support de la loi de X soit inclus dans $B_{(\rho')^{1-\beta}}$. Aussi, pour x en dehors d'un compact, pouvons nous substituer X à h dans (D). On obtient:

$$f(x+X) = f(x) + \sum_{i=1}^{d} X_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} X_i X_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \cdots$$

où X_i est la i-ème composante de X. Faisant la somme terme à terme des espérances de cette expression (ce qui se justifie sans peine, X étant bornée), on a:

$$E(f(x+X)) = f(x) + \sum_{i=1}^{d} E(X_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} E(X_i \cdot X_j) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \cdots.$$

Puisque X est centrée et de matrice de covariance égale à I_d, on a:

$$E(f(x+X)) = f(x) + \tfrac{1}{2} \Delta f(x) + \cdots.$$

Le calcul des dérivées successives de f prouve alors que, pour $x \in S_\rho$:

$$\Delta f(x) = 2\alpha \frac{d - 2(\alpha+1)}{(\rho^2)^{1+\alpha}} = \frac{2 C_2}{(\rho^2)^{1+\alpha}}, \qquad \text{avec } C_2 > 0 \text{ si } \alpha < \frac{d-2}{2}.$$

D'autre part, les termes d'ordre supérieur à 2 dans le développement précédent sont de la forme $\frac{1}{(\rho^2)^{1+\alpha}} \varepsilon_1(\rho)$ où $\varepsilon_1(\rho) \xrightarrow[\rho \to \infty]{} 0$.

On a donc finalement, si $x \in S_\rho$:

$$E(f(x+X)) \geqq f(x) + \frac{C_3}{(\rho^2)^{1+\alpha}} \text{ pour } \rho \text{ assez grand}.$$

3. Nous supposons toujours que le support de la loi de X est compact, mais la matrice de covariance K_X n'est plus égale à I_d. Le calcul précédent reste juste, à condition de remplacer l'opérateur Δ par l'opérateur

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} E(X_i \cdot X_j) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Puisque, pour

$$x \in S_\rho, \qquad \Delta f(x) = \frac{2 C_2}{(\rho^2)^{1+\alpha}}$$

avec $C_2 > 0$, il est clair qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $\|K_X - I_d\| < \varepsilon$, alors $Lf(x) \geqq \frac{2 C_2'}{(\rho^2)^{1+\alpha}}$ (avec $C_2' > 0$ et $x \in S_\rho$). En conclusion, sous les hypothèses précédentes, il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $\|K_X - I_d\| < \varepsilon$, alors il existe $C_4 > 0$ tel que, pour $x \in S_\rho$:

$$E(f(x+X)) \geqq f(x) + \frac{C_4}{(\rho^2)^{1+\alpha}} \qquad (\rho \text{ assez grand}).$$

4. Nous ne supposons plus que le support de la loi de X est compact, mais nous supposons que $\|K_X - I_d\| < \varepsilon/2$, où ε a été choisi précédemment. Soit ρ assez

grand pour que la matrice de covariance K_{X_ρ} de la v.a $X_\rho = X \cdot 1_{|X| \leqq \rho^{1-\beta}}$ satisfasse à $\|K_{X_\rho} - I_d\| < \varepsilon$. Remplaçant, comme dans l'alinéa 2, h par X dans (D) si $|X| \leqq \rho^{1-\beta}$, et prenant l'espérance, on a, pour $x \in S_\rho$:

$$E\big(f(x+X); |X| \leqq \rho^{1-\beta}\big) \geqq f(x)\, P\{|X| \leqq \rho^{1-\beta}\}$$
$$+ \sum_{i=1}^{d} E(X_i; |X| \leqq \rho^{1-\beta}) \frac{2\alpha\, x_i}{(\rho^2)^{1+\alpha}} + \frac{C_4}{(\rho^2)^{1+\alpha}}.$$

Compte-tenu du fait que X_i est centrée et que $E(|X|^{2+\delta}) < +\infty$, on a, pour $x \in S_\rho$:

$$\left|E(X_i; |X| \leqq \rho^{1-\beta}) \frac{2\alpha\, x_i}{(\rho^2)^{1+\alpha}}\right| \leqq \frac{2\alpha}{\rho^{2\alpha+1}} \left|E(X_i; |X| > \rho^{1-\beta})\right|$$
$$\leqq \frac{2\alpha\, C_5^i}{\rho^{2\alpha+1}} P\{|X| > \rho^{1-\beta}\}^{1/2} \text{ d'après l'inégalité de Schwarz}$$
$$\leqq \frac{2\alpha\, C_5^i}{\rho^{2\alpha+1}} \frac{1}{\rho^{1-\beta+\frac{\delta}{2}-\frac{\beta\delta}{2}}}.$$

Si β a été choisi suffisamment petit pour que $\dfrac{\delta}{2} > \beta + \dfrac{\beta\delta}{2}$, on en déduit alors

$$\sum_{i=1}^{d} E(X_i; |X| \leqq \rho^{1-\beta}) \leqq \frac{C_6}{(\rho^2)^{1+\alpha}} \varepsilon_2(\rho) \text{ où } \varepsilon_2(\rho) \xrightarrow[\rho\to\infty]{} 0.$$

D'où, pour ρ assez grand:

$$E\big(f(x+X); |X| \leqq \rho^{1-\beta}\big) \geqq f(x) - f(x)\, P\{|X| > \rho^{1-\beta}\} + \frac{C_7}{(\rho^2)^{1+\alpha}}.$$

Du fait que $f(x) \xrightarrow[\rho\to\infty]{} 1$ et puisque:

$$P\{|X| > \rho^{1-\beta}\} \leqq \frac{C_8}{\rho^{(2+\delta)(1-\beta)}}$$

on en déduit que, si α a été choisi assez petit pour que $2+\delta-2\beta-\beta\delta > 2+2\alpha$ $E\{f(x+X); |X| \leqq \rho^{1-\beta}\} \geqq f(x)$ pour $x \in S_\rho$ et ρ assez grand. Le lemme 1 est alors démontré, puisque:

$$E\{b(x+X)\} \geqq E\{f(x+X); |X| \leqq \rho^{1-\beta}\} \geqq f(x) = b(x)$$

si $x \in S_\rho$ et si $\rho \geqq \rho_1$ (où le ρ_0 servant à définir la fonction b est choisi arbitrairement, et où ρ_1 dépend de ρ_0).

Remarque. Le choix de α dépend de δ, mais il suffit que $\delta > d-2$ pour que α puisse être choisi aussi proche que l'on veut de $\dfrac{d-2}{2}$.

Lemme 2. *Soit ν une mesure de probabilité apériodique sur le groupe* SO(d), *pour $d \geqq 3$. Alors ν^{*n} converge vaguement vers la mesure de Haar σ de* SO(d) *quand n tend vers l'infini.*

Démonstration. D'après Collins (1), il suffit de prouver que le support de ν n'est inclus dans aucune partie de la forme $g.\, H$, où $g \in$ SO(d) et où H est un sous groupe fermé distingué propre de $SO(d)$. Soit $so(d)$ l'algèbre de Lie du groupe $SO(d)$, et $so(d, \mathbb{C})$ sa complexifiée. Nous savons (voir par exemple (3), p. II, 6 et 7) que $so(d, \mathbb{C})$ est une algèbre de Lie simple pour $d \geqq 3$, sauf pour $d=4$. En conséquence, pour tout $d \geqq 3$, $d \neq 4$, l'algèbre de Lie $so(d)$ est simple. Nous allons distinguer deux cas:

1. $d \neq 4$. Supposons que $(\operatorname{supp} \nu) \subset g \cdot H$, où H est un sous groupe distingué fermé propre de $SO(d)$. Soit H_0 la composante connexe de H. Puisque H est distingué, la sous-algèbre de Lie de $so(d)$ correspondant à H_0 est un idéal, et puisque H est propre et $so(d)$ simple, cet idéal est nul. H est donc discret, et central.

On a donc: $(\operatorname{supp} \nu) \subset g \cdot Z$, où Z est le centre de $SO(d)$. Dans ces conditions, puisque ν est apériodique, $g. Z$ engendre topologiquement $SO(d)$, ce qui est absurde, puisque $SO(d)$ serait alors abélien.

2. $d=4$. Soit $S_3 \times S_3 \xrightarrow{\Pi} SO(4)$ le revêtement universel de $SO(4)$ (S_3 est le groupe des quaternions de norme 1). Le noyau de Π est formé de deux éléments. Il est clair qu'il existe une mesure de probabilité unique ν sur $S_3 \times S_3$ telle que $\Pi(\tilde{\nu})=\nu$ et telle que $\tilde{\nu}(\tilde{O})=\frac{1}{2}\nu(O)$ si $\tilde{O}$ est un ouvert de $S_3 \times S_3$ en homéomorphisme par Π avec 0. Si on suppose ν apériodique et $(\operatorname{supp} \nu) \subset g. H$, avec H distingué, fermé, propre, on voit sans peine que $(\operatorname{supp} \tilde{\nu}) \subset \tilde{g} \cdot \tilde{H}$ avec $\tilde{H}$ distingué, fermé, propre, et $\Pi(\tilde{g})=g$. De plus $\tilde{\nu}$ est apériodique. Il reste donc à prouver que cette assertion est absurde. La composante connexe $\tilde{H}_0$ de $\tilde{H}$ a une algèbre de Lie qui est un idéal. Or l'algèbre de Lie $S_3 \times S_3$ est $so(3) \oplus so(3)$. Cet idéal est donc $(so(3), 0)$, $(0, so(3))$ ou $(0, 0)$. Le groupe $\tilde{H}_0$ est donc (S_3, e), (e, S_3) ou (e, e). Examinons déjà le premier cas. Dans ces conditions $\tilde{H}$ est de la forme $S_3 \times \Gamma$, où Γ est un sous groupe distingué discret, et donc central de S_3. On en déduit que $(\operatorname{supp} \tilde{\nu}) \subset S_3 \times g_1 \cdot Z$, où Z est le centre de S_3, et où $g_1 \in S_3$. Puisque $\tilde{\nu}$ est apériodique, $g_1 \cdot Z$ engendre topologiquement S_3 ce qui est absurde (S_3 serait abélien).

Les deux autres cas se traitent de la même façon.

Il va de soi qu'on peut remplacer la marche de pas (U_1, Y_1) par la marche de pas $\sigma(U_1, Y_1)$, où σ est un automorphisme intérieur du groupe G_d, sans rien changer au résultat annoncé. Remarquons en effet qu'un automorphisme intérieur ne change pas le comportement à l'infini de la norme de la composante sur $\mathbb{R}^d$, puisque si $(v, \lambda)(w, \mu)(v, \lambda)^{-1}=(v w v^{-1}, \lambda+v \mu-v w v^{-1} \lambda)$ alors

$$|\lambda+v \mu-v w v^{-1} \lambda| \underset{\mu \to \infty}{\sim} |\mu|.$$

Nous allons prouver qu'on peut supposer $E(Y_1)=0$, quitte à remplacer la marche initiale par son image par un automorphisme intérieur bien choisi

Lemme 3. *Il existe un automorphisme intérieur du groupe G_d par un élément (v, λ) bien choisi tel que, si $\sigma(U_1, Y_1)=(U_1', Y_1')$, alors $E(Y_1')=0$.*

Démonstration. Puisque $(v, \lambda)^{-1}=(v^{-1}, -v^{-1} \lambda)$, on a:

$$(v, \lambda)(U_1, Y_1)(v, \lambda)^{-1}=(v \cdot U_1 \cdot v^{-1}, \lambda+v Y_1-v U_1 v^{-1} \lambda).$$

On a donc $Y_1'=\lambda+v Y_1-v U_1 v^{-1} \lambda$. Soit:

$$E(Y_1')=\lambda+v E(Y_1)-v E(U_1) v^{-1} \lambda.$$

Il nous faut donc prouver qu'il existe v et λ tels que $E(Y_1')=0$, soit:

$$v^{-1}(I_d - v\,E(U_1)\,v^{-1})\lambda = -E(Y_1).$$

Il est clair qu'il suffit alors de prouver que dét $(v^{-1}(I_d - v\,E(U_1)\,v^{-1})) \neq 0$. Or, $\text{dét}(v^{-1}\cdot(I_d - v\,E(U_1)\,v^{-1})) = \text{dét}(I_d - E(U_1))$. Si cette quantité était nulle, 1 serait valeur propre de la matrice $E(U_1)$. Il existerait donc un vecteur γ de $\mathbb{R}^d$, de norme 1, tel que:

$$E(U_1)\cdot\gamma = E(U_1\cdot\gamma) = \gamma.$$

Or, le vecteur $U_1\cdot\gamma$ appartient à la sphère unité de $\mathbb{R}^d$. Cette dernière étant strictement convexe, on en déduit que $U_1\cdot\gamma=\gamma$ presque sûrement, et donc que la mesure ν ne change que le sous groupe d'isotropie de γ, sous groupe isomorphe à $SO(d-1)$, ce qui est absurde, ν étant apériodique.

En vertu de ce lemme, nous supposerons dans tout ce qui suit $E(Y_1)=0$.

Lemme 4. *Soit* $v\in SO(d)$, *et* $M_k^v = \frac{1}{\sqrt{k}}\{v\cdot Y_1 + v\,U_1\,Y_2 + \cdots + v\,U_1\,\ldots\,U_{k-1}\,Y_k\}$. *La variable aléatoire* M_k^v *est centrée pour tout* k *et sa matrice de covariance tend vers* $\theta\cdot I_d$ *quand* $k\to\infty$ $(\theta>0)$. *La convergence est uniforme en* v.

Démonstration. Soit $\mathscr{F}_n$ la σ-algèbre engendrée par $(U_1, Y_1), (U_2, Y_2)\ldots,(U_n, Y_n)$. Nous avons, pour tout n, $E(v\,U_1\,\ldots\,U_n\cdot Y_{n+1}) = E(v\,U_1\,\ldots\,U_n\cdot E^{\mathscr{F}_n}\,Y_{n+1})=0$ car Y_{n+1} est indépendante de $\mathscr{F}_n$ et centrée, ce qui prouve que M_k^v est centrée pour tout k.

D'autre part, pour $p>0$ et $1\leq i,j\leq d$, on a:

$$\begin{aligned}&E\{(v\cdot U_1\,U_2\,\ldots\,U_n\cdot Y_{n+1})_i\cdot(v\,U_1\,\ldots\,U_{n+p}\cdot Y_{n+p+1})_j\}\\ &=E\{(v\,U_1\,\ldots\,U_n\,Y_{n+1})_i\cdot(v\,U_1\,\ldots\,U_{n+p}E^{\mathscr{F}_{n+p}}\,Y_{n+p+1})_j\}=0.\end{aligned}$$

Supposons maintenant que v est l'élément neutre e de $SO(d)$, et notons K_Y la matrice de convariance de Y_n, et K_n celle de $U_1\,\ldots\,U_n\,Y_{n+1}$. Un calcul simple prouve alors que:

$$K_n = \int_{SO(d)} g\,K_Y\,g^t\,d\sigma_n(g), \qquad \text{où } \sigma_n \text{ est la loi de } U_1\,\ldots\,U_n.$$

D'après le lemme 2, σ_n converge vaguement vers la mesure de Haar σ de $SO(d)$. Donc:

$$K_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{SO(d)} g\,K_Y\,g^t\,d\sigma(g) = K.$$

Comme il est clair que $wkw^{-1}=K$ pour tout $w\in SO(d)$, la matrice K commute aux éléments de $SO(d)$, et est donc scalaire. Elle est d'autre part strictement définie positive, car la relation $\gamma^t K\gamma=0$ $(\gamma\in\mathbb{R}^d)$ implique $\gamma^t g^t K_Y g\,\gamma=0$ pour tout $g\in SO(d)$, et donc $\gamma'^t K_Y\gamma'=0$ pour tout $\gamma'\in\mathbb{R}^d$, soit donc $K_Y=0$ et $Y=0$ puisque Y est centrée, ce qui est absurde, μ étant apériodique. La matrice K est donc de la forme $\theta\,I_d$, avec $\theta>0$. On en déduit alors

$$K_{M_k^e} = \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k} K_n \xrightarrow[k\to\infty]{} \theta\,I_d.$$

Enfin, si $v \in SO(d)$, et si K_n^v est la matrice de covariance de la $v \cdot a\, v \cdot U_1 \dots U_n Y_{n+1}$, on a:

$$K_n^v = v K_n v^t$$

D'où:

$$\begin{aligned}\|K_n^v - \theta I_d\| &= \|v K_n v^t - \theta v I_d v^t\|\\ &= \|v(K_n - \theta I_d) v^t\| \leqq \|v\|^2 \|K_n - \theta I_d\|\\ &\leqq d^2 \|K_n - \theta I_d\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

uniformément en v, et cela achève la preuve du lemma 4.

Nous appellerons marche alétoire de pas $(U_1, Y_1)\cdot(U_2, Y_2)\cdot\dots\cdot(U_k, Y_k)$ la marche alétoire $Z_{nk}^g (n \geqq 0)$. Nous noterons V^k le potentiel de cette marche. Si h est positive à support compact, on a donc:

$$V^k h(v, \lambda) = \sum_{n \geqq 0} \varepsilon_{v,\lambda} * \mu^{*nk}(h) = E\left(\sum_{n=0}^{\infty} h(Z_{nk}^{v,\lambda})\right)$$

Lemme 5. *Il existe un k tel que la conclusion du théorème* 1 *soit vraie pour la marche de pas* $(U_1, Y_1)\cdot(U_2, Y_2)\cdot\dots\cdot(U_k, Y_k)$, ie, *pour toute h positive bornée à support compact*

$$|V^k h(v, \lambda)| \leqq \frac{C_9}{|\lambda|^{2\alpha}} \qquad \textit{pour } \lambda \textit{ en dehors d'un compact.}$$

Démonstration. 1. Soit $\varepsilon > 0$ choisi comme dans le lemme 1. D'après le lemme 4, il existe un k tel que

$$\|K_{\frac{1}{\sqrt{\theta}} M_k^v} - I_d\| < \varepsilon.$$

Fixons ce k.

D'autre part, puisque pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, l'application $\sigma_a\colon G_d \to G_d$ définie par $\sigma_a(v, \lambda) = (v, a\lambda)$ est un automorphisme de G_d, on ne change rien en remplaçant l'étude de la marche de pas

$$(U_1, Y_1)\cdot(U_2, Y_2)\cdot\dots\cdot(U_k, Y_k) = (U_1 U_2 \dots U_k, Y_1 + U_1 Y_2 + \dots + U_1 \dots U_{k-1} Y_k)$$

par la marche de pas

$$(U', Y') = \left(U_1 \dots U_k, \frac{1}{\sqrt{\theta k}}(Y_1 + U_1 Y_2 + \dots + U_1 \dots U_{k-1} Y_k)\right).$$

Aussi est-ce pour cette dernière marche que nous allons établir la conclusion du lemme 5. Remarquons que Y' est centrée et $\|K_{Y'} - I_d\| < \varepsilon$.

2. Soit $(U_1', Y_1'), (U_2', Y_2'), \dots, (U_n', Y_n'), \dots$ une suite de $v \cdot a$ indépendantes et de même loi que (U', Y'). Soit, si $g = (v, \lambda) \in G_d$,

$$X_n'^g = \lambda + v Y_1' + v U_1' Y_2' + \dots + v U_1' \dots U_{n-1}' Y_n'.$$

Fixons n un instant, et supposons que les $v \cdot a$ (U_i', Y_i') soient définies sur un espace de probabilité produit $\Omega_1 \times \Omega_2$, les (U_i', Y_i') $(i \leqq n)$ étant définies sur Ω_1 et (U_{n+1}', Y_{n+1}') sur Ω_2. On a:

$$X_{n+1}'^g(\omega_1, \omega_2) = X_n'^g(\omega_1) + v \cdot U_1' \dots U_n'(\omega_1)\, Y_{n+1}'(\omega_2) \,(\omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2).$$

D'après le lemme 4 et le choix de Y', la matrice de covariance de la $v \cdot a$ centrée $\omega_2 \to v\, U_1' \dots U_n'(\omega_1)\, Y_{n+1}'(\omega_2)$ est, pour tout v et tout ω_1, proche de I_d à moins de

ε près. D'après le lemme 1, il existe donc un compact $K \in \mathbb{R}^d$ tel que, si $X_n'^g(\omega_1) \notin K$, on ait:

$$E_{\omega_2}\big(b(X_{n+1}'^g(\omega_1, \omega_2))\big) \geqq b\big(X_n'^g(\omega_1)\big)$$

où le symbole espérance dans le terme de gauche de l'inégalité est pris par rapport à ω_2, à ω_1 fixé. Soit maintenant T_K^g le temps d'entrée dans K de la suite de $v \cdot a\, X_n'^g$, ie:

$$T_K^g = \inf\{n;\ X_n'^g \in K\}; \quad \big(g=(v, \lambda) \in G_d,\ \lambda \notin K\big)$$

et soit $\mathscr{F}_n'$ la σ-algèbre engendrée par $(U_1', Y_1'), (U_2', Y_2'), \ldots, (U_n', Y_n')$. Si $A \in \mathscr{F}_n'$, on a:

$$\begin{aligned} &E_{\omega_1}\{1_A(\omega_1)\, E_{\omega_2}\big(b(X_{n+1}'^g(\omega_1, \omega_2)); T_K^g(\omega_1) > n\big\} \\ &\qquad \geqq E_{\omega_1}\{1_A(\omega_1) \cdot b\big(X_n'^g(\omega_1)\big);\ T_K^g(\omega_1) > n\}. \end{aligned}$$

Soit:

$$E\{1_A \cdot b(X_{n+1}'^g);\ T_K^g > n\} \geqq E\{1_A \cdot b(X_n'^g);\ T_K^g > n\}.$$

Il en résulte alors immédiatement que la suite de $v \cdot a\ b(X_{n \wedge T_K^g}'^g)$ est une sous-martingale par rapport à la famille de tribus $\mathscr{F}_n'$.

3) De cela, on déduit que, pour tout n, si $\lambda \notin K$ $\big($avec $g=(v, \lambda)\big)$

$$E\big(b(X_{n \wedge T_K^g}'^g)\big) \geqq b(\lambda).$$

D'où:

$$b(\lambda) \leqq E\{b(X_n'^g);\ n \leqq T_K^g\} + E\{b(X_{T_K^g}'^g);\ n > T_K^g\}$$

b étant majorée par 1, on a:

$$b(\lambda) \leqq P\{n \leqq T_K^g\} + \xi\ P\{n > T_K^g\}$$

où ξ est le sup des valeurs prises par b sur K, (et donc $\xi < 1$). Faisant tendre vers n l'infini, on a:

$$b(\lambda) \leqq 1 - P\{T_K^g < \infty\} + \xi\ P\{T_K^g < \infty\}.$$

Supposons maintenant λ assez grand pour que $b(\lambda) = f(\lambda) = 1 - \dfrac{1}{|\lambda|^{2\alpha}}$, on a:

$$P\{T_K^{v,\lambda} < +\infty\} \leqq \frac{1-\xi}{|\lambda|^{2\alpha}}.$$

Soit maintenant $K' = \mathrm{SO}(d) \times K$ un compact de G_d. On a alors:

$$P\{T_{K'}^{v,\lambda} < +\infty\} \leqq \frac{1-\xi}{|\lambda|^{2\alpha}},$$

où $T_{K'}^{v,\lambda}$ est le temps d'entrée dans K' de la marche de pas (U', Y') partant de (v, λ) à l'instant 0. Passer de cette dernière relation à la conclusion du lemme 5 est alors classique.

Nous pouvons maintenant achever la démonstration du théorème 1. Soit h une fonction positive bornée à support compact dans G_d. D'après le lemme 5, il existe k, C_9 et α tels que:

$$|V^k h(v, \lambda)| \leqq \frac{C_9}{|\lambda|^{2\alpha}}.$$

Mais on a bien sûr:

$$\begin{aligned} Vh(v, \lambda) &= (\varepsilon_{v,\lambda} + \varepsilon_{v,\lambda} * \mu + \cdots + \varepsilon_{v,\lambda} * \mu^{*k-1})\ V^k h \\ &= \varepsilon_{v,\lambda} * \eta(V^k h) \end{aligned}$$

où la mesure $\eta = \varepsilon_e + \mu + \mu^{*2} + \cdots + \mu^{*k-1}$ admet comme μ un moment d'ordre $2+\delta$. On a donc:

$$\begin{aligned} V h(v,\lambda) &= \int_{G_d} V^k h\big((v,\lambda)\cdot g\big)\, d\eta(g) \\ &= \int_{|\lambda(g)| \geqq \frac{\lambda}{2}} V^k h\big((v,\lambda)\cdot g\big)\, d\eta(g) + \int_{|\lambda(g)| < \frac{\lambda}{2}} V^k h\big((v,\lambda)\cdot g\big)\, d\eta(g). \end{aligned}$$

Le second terme de cette expression est, pour λ assez grand, d'après le lemme 5, plus petit que $\dfrac{C_9}{\left|\frac{\lambda}{2}\right|^{2\alpha}}$. Le premier terme, la fonction $V^k h$ étant bornée, est plus petit que $C_{10} \int_{|\lambda(g)| > \frac{\lambda}{2}} d\eta(g) \leqq \dfrac{C_{11}}{|\lambda|^{2+\delta}}$. Finalement, si $2+\delta > 2\alpha$, on en déduit:

$$|V h(v,\lambda)| < \frac{C_{12}}{|\lambda|^{2\alpha}}.$$

Remarque. En examinant précisément les contraintes imposées aux différentes constantes, on voit sans peine que α peut être choisi arbitrairement proche de $\dfrac{(d-2)\wedge\delta}{2}$.

Bibliographie

1. Collins, H.S.: Convergence of convolutions iterates of measures. Duke Math. J. 259–264 (1962)
2. Crepel, P.: Marches aléatoires sur le groupe des déplacements du plan. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A. t**278**, 961–963 (1.4.1974)
3. Serre, J.P.: Algèbres de Lie semi-simples complexes. New York-Amsterdam: Benjamin 1966

Bernard Roynette
Université d'Orléans
Dépt. de Mathématiques
domaine de la Source
F-45000 Orléans
France

(Reçu le Juin 27, 1974)