Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 12, 75–86 (1969)

Propriétés de continuité fine des fonctions coexcessives

Michel Weil

Summary. We show at first that if (P_t) is a special standard semi-group on a locally compact space E with a countable base and if u is an excessive function, then the semi-group $(\tilde{P}_t^{(u)})$, superharmonic transform of (P_t) by u, is special standard if (and only if) the function u is regular.

Then we prove that if two standard semi-groups in duality verifying Kunita-Watanabe's hypotheses are given and if g is a coexcessive function (excessive for the dual semi-group) then: 1) g is Borel measurable, 2) g is a.s. left continuous and has right limits on the sample path of the process $(X_{t-})_{0<t<\zeta}$, 3) g has a.s. right and left limits on the sample path of the process $(X_t)_{0<t<\zeta}$ and 4) g is finely continuous except perhaps on a semi-polar set. If we suppose also that the second semi-group is special standard and that the coexcessive function g is regular, then 1) g is a.s. right continuous and has left limits on the sample paths of the process $(X_t)_{0<t<\zeta}$, and 2) g is finely continuous except perhaps on a polar set.

I. Résultats sur les processus standard spéciaux

1. Notations

Nous désignerons par E un espace localement compact à base dénombrable, par ∂ un point isolé adjoint à E, par Ω l'ensemble de toutes les applications continues à droite ω de $\mathbb{R}_+$ dans $E \cup \{\partial\}$ admettant une durée de vie $\zeta(\omega)$ (i.e. $\omega(t) \in E$ pour $t<\zeta(\omega)$, $\omega(t)=\partial$ pour $t \geqq \zeta(\omega)$), et ayant une limite à gauche $\omega(t-)$ pour $0<t<\zeta(\omega)$ (nous n'exigeons par l'existence d'une limite à gauche pour $t=\zeta(\omega)$).

On écrit $X_t(\omega)=\omega(t)$, $X_{t-}(\omega)=\omega(t-)$. L'espace Ω est muni des tribus $\mathscr{F}^0=\mathscr{T}(X_s, s\in\mathbb{R}_+)$, $\mathscr{F}_t^0=\mathscr{T}(X_s, s\leqq t)$. Nous utiliserons en général les notations de (Meyer [6]) relatives à l'espace Ω.

2. Processus standard spéciaux

Soient (P_t) un semi-groupe sous-markovien standard sur E, (U_p) sa résolvante. Comme d'habitude, nous rendrons (P_t) markovien au moyen du point ∂, et nous identifierons les fonctions sur E à des fonctions sur $E \cup \{\partial\}$ nulles en ∂ (sauf mention expresse du contraire, toutes les fonctions considérées dans la suite sont nulles en ∂). Nous dirons que le semi-groupe (P_t) est *standard spécial* si la propriété suivante est satisfaite (l'expression p.s. signifiant «P^μ-p.s. pour toute loi initiale μ»):

«Si (T_n) est une suite croissante de temps d'arrêt[1] de la famille $(\mathscr{F}_{t+}^0)$, dont la limite est T, et si $g=U_p f$ est un p-potentiel (où f désigne une fonction borélienne[2] bornée sur E), alors nous avons p.s.: $\lim_{n\to\infty} g\circ X_{T_n} = g\circ X_T$ sur l'ensemble $\{T<\infty\}$».

On peut montrer (Meyer [7]) que cette propriété équivaut à la suivante: pour toute loi μ, la famille de tribus «complétée» $(\mathscr{F}_t^\mu)$, qui est continue à droite, est dépourvue de temps de discontinuité.

---

1. Un lemme dû à Dynkin montre qu'un temps d'arrêt de la famille complétée $(\mathscr{F}_t^\mu)$ [de la réalisation canonique] est P^μ – p.s. égal à un temps d'arrêt de la famille $\mathscr{F}_t^0$.

2. Il suffit en fait de supposer cela lorsque f est continue bornée.

L'exemple le plus important de semi-groupes standard spéciaux est constitué par les semi-groupes standard «semi-fellériens», c'est-à-dire ceux dont la résolvante possède la propriété suivante: pour toute fonction continue positive à support compact f, $U_p f$ est semi-continue inférieurement. Il en est ainsi, en particulier, chaque fois que l'on peut affirmer que toutes les fonctions p-excessives sont s.c.i.; Il s'agit là d'une remarque qui figure (sous une forme moins explicite) dans le livre à paraître de Blumenthal et Getoor (chap. VI, Section 4, après 4.2).

3. Les u-Processus

Soit u une fonction excessive par rapport au semi-groupe (P_t), et soit E_u l'ensemble $\{0<u<\infty\}$. Pour toute fonction universellement mesurable positive f, posons sur E

$$P_t^{(u)}(x,f)=\begin{cases}\dfrac{1}{u(x)}\,P_t(x,u\,f) & \text{si } x\in E_u\\ 0 & \text{si } x\notin E_u.\end{cases}$$

Cette définition nous donne un semi-groupe sous-markovien sur E (résultat classique), et les mesures $P_t^{(u)}(x,\cdot)$ sont portées par E_u. Malheureusement, ce semi-groupe $(P_t^{(u)})$ ne satisfait pas à la condition $\lim\limits_{t\to 0+} P_t^{(u)} f=f$ si f est continue bornée, lorsque $E_u\neq E$: en particulier, il n'est pas standard. Nous tournerons cette difficulté en introduisant un nouveau semi-groupe:

$$\tilde{P}_t^{(u)}(x,f)=\begin{cases}P_t^{(u)}(x,f) & \text{si } x\in E_u\\ f(x) & \text{si } x\notin E_u.\end{cases}$$

Nous avons alors le résultat suivant, en grande partie classique (la partie «non classique» est empruntée à un cours de Meyer).

Théorème 1. 1. *Pour toute loi μ sur E, il existe une loi (unique) $\tilde{P}^{\mu/u}$ sur Ω, pour laquelle le processus (X_t) est markovien, admet $(\tilde{P}_t^{(u)})$ comme semi-groupe de transition et μ comme loi initiale*[3].

2. *Soient T un temps d'arrêt de la famille $(\mathscr{F}_{t+}^0)$, H une variable aléatoire positive, $\mathscr{F}_{T+}^0$-mesurable. Alors on a (avec les conventions usuelles $X_\infty=\partial$, $u(\partial)=0$),*

$$si \quad x\in E_u, \quad \tilde{E}^{x/u}[H\cdot I_{\{T<\zeta\}}]=\frac{1}{u(x)}\int_{\{T<\zeta\}} H\cdot u\circ X_T\,dP^{x}\,{}^{4}.$$

3. *Le semi-groupe $(\tilde{P}_t^{(u)})$ est standard.*

4. *Si la loi initiale μ est portée par E_u, on a*

$$\tilde{P}^{\mu/u}\{\exists\, t>0: X_t\in E\setminus E_u \;\; ou \;\; X_{t-}\in E\setminus E_u\}=0.$$

Démonstration. Notons d'abord la signification de 4): le semi-groupe $(P_t^{(u)})$ étant subordonné à $(\tilde{P}_t^{(u)})$, la relation 4) est vraie à plus forte raison si l'on remplace $\tilde{P}_t^{\mu/u}$ par $P_t^{\mu/u}$. Il en résulte aussitôt que l'*on a $\tilde{P}^{\mu/u}=P^{\mu/u}$ si μ est portée par E_u.* L'assertion 2) entraîne alors que $(P_t^{(u)})$ est un semi-groupe standard si l'on restreint l'espace d'états à E_u.

3. Si $\mu=\varepsilon_x$, nous écrirons simplement $\tilde{P}^{x/u}$.

4. $\{T<\zeta\}$ peut être supprimé au second membre.

Nous n'établirons pas 1) et 3), qui sont classiques (cf. par exemple Kunita-Watanabe [3]). Pour établir 2), on commence par le cas où T est une constante t, et où H est de la forme $f_1 \circ X_{s_1} \dots f_n \circ X_{s_n}$, $(s_1, \dots, s_n \leqq t)$, puis au cas où T est étagé et $H \in \mathscr{F}_T^0$, et enfin au cas général au moyen de l'approximation habituelle par des temps d'arrêt étagés. Pour établir 4), il suffit de montrer que pour tout rationnel r on a

$$\int_{N_1} u \circ X_r \, dP^x = 0, \qquad \int_{N_2} u \circ X_r \, dP^x = 0 \qquad \text{si } x \in E_u$$

où

$$N_1 = \{\omega \colon r < \zeta(\omega), \ \exists\, t < r \colon X_t(\omega) \text{ ou } X_{t-}(\omega) \in \{u = \infty\}\},$$

$$N_2 = \{\omega \colon r < \zeta(\omega), \ \exists\, t < r \colon X_t(\omega) \text{ ou } X_{t-}(\omega) \in \{u = 0\}\}.$$

Mais d'après (Meyer [6], chap. XV, T 7), si A est un ensemble presque borélien et si $S_A = \inf\{t > 0 \colon X_{t-} \in A\}$, $D_A = \inf\{t \geqq 0 \colon X_t \in A\}$, on a P^x-p.s. $S_A \wedge \zeta \geqq D_A \wedge \zeta$. Appliquons d'abord cela en prenant $A = \{u = \infty\}$: alors $D_A = +\infty$ P^x-p.s. (Meyer [5], chap. VI, T 3), et donc $S_A \geqq \zeta$ P^x-p.s. Cela règle le cas de N_1. Appliquons ensuite le résultat précédent à l'ensemble $A = \{u = 0\}$: la relation $u \circ X_t = 0$ entraînant $u \circ X_r = 0$ pour $r \geqq t$ (Meyer [5], chap. VI, T 15), on a $X_s = 0$ pour $s \geqq D_A$ et donc

$$\int_{\{D_A < r\}} u \circ X_r \, dP^x = 0.$$

D'autre part, nous avons $S_A \wedge \zeta \geqq D_A \wedge \zeta$, de sorte que $N_2 = \{S_A \wedge D_A < r < \zeta\}$ est contenu dans $\{D_A < r\}$, et la seconde intégrale est nulle. Cela achève la démonstration.

4.

Le théorème suivant [5] s'étend aux semi-groupes transformés de (P_t) par diverses fonctionnelles multiplicatives.

Théorème 2. *Supposons que le semi-groupe (P_t) soit standard spécial, et que la fonction excessive u satisfasse à la propriété suivante:*

«Si $x \in E_u$, et si (T_n) est une suite croissante de temps d'arrêt de la famille $(\mathscr{F}_{t+}^0)$, dont on désigne la limite par T, on a P^x-p.s. $\lim_n u \circ X_{T_n} = u \circ X_T$ sur l'ensemble $\{u \circ X_T > 0, T < \infty\}$».

Alors le semi-groupe $(\tilde{P}_t^{(u)})$ est standard spécial.

Démonstration. Soient f une fonction borélienne, positive et bornée, p un nombre > 0, et g le p-potentiel $\tilde{U}_p^{(u)}(f)$ de f par rapport au semi-groupe $(\tilde{P}_t^{(u)})$. Nous voulons montrer que $\lim_n g \circ X_{T_n} = g \circ X_T$ $\tilde{P}^{\mu/u}$-p.s. sur $\{T < \infty\}$, quelle que soit la loi initiale μ sur E. Il suffit de le faire lorsque μ est une masse unité ε_x, et on peut se borner au cas où $x \in E_u$ (l'autre cas est trivial). Il n'y a rien à démontrer lorsque $T(\omega) > \zeta(\omega)$; quitte à tronquer les T_n et T à ζ, nous pouvons donc supposer $T_n \leqq \zeta$ pour tout n.

a) Commençons par prouver la propriété cherchée sur $\{T < \zeta\}$. Comme $x \in E_u$, nous avons, en posant $H = \{\lim_n g \circ X_{T_n} \neq g \circ X_T, T < \zeta\}$

$$\tilde{P}^{x/u}\{\lim_n g \circ X_{T_n} \neq g \circ X_T, T < \zeta\} = \frac{1}{u(x)} \int_H u \circ X_T \, dP^x.$$

5. Ce théorème ne sera pas utilisé dans la suite, et peut être omis par le lecteur.

Mais comme $x \in E_u$, les trajectoires issues de x ne rencontrent P^x-p.s. jamais $\{u=\infty\}$, et restent dans $\{u=0\}$ à partir du premier instant où elles rencontrent cet ensemble. Soit donc T' le temps d'entrée dans le complémentaire de E_u: on a $u \circ X_T = 0$ sur $\{T \geqq T'\}$, et on peut donc remplacer l'ensemble d'intégration de la seconde intégrale par $H \cap \{T < T'\}$. Mais on a $g = \frac{1}{u} U_p(uf)$ sur E_u, et par conséquent, sur $\{T < T'\}$

$$g \circ X_{T_n} = \frac{U_p(uf) \circ X_{T_n}}{u \circ X_{T_n}}, \qquad g \circ X_T = \frac{U_p(uf) \circ X_T}{u \circ X_T}.$$

Le semi-groupe (P_t) étant standard spécial, et la surmartingale $\big(U_p(uf) \circ X_t\big)$ étant régulière pour la mesure P^x, on a P^x-p.s. $\lim U_p(uf) \circ X_{T_n} = U_p(uf) \circ X_T$ sur $\{T < \infty\}$ [6]. En combinant cela avec l'hypothèse faite sur u, on voit que $H \cap \{T < T'\}$ est P^x-négligeable, d'où le résultat cherché.

b) Montrons maintenant que la propriété a lieu aussi sur $\{T = \zeta\}$. Notons d'abord que

$$\lim_n \tilde{E}^{x/u}[e^{-pT_n} g \circ X_{T_n}] = \tilde{E}^{x/u}[e^{-pT} g \circ X_T].$$

En effet, les deux membres sont aussi respectivement les espérances $(\tilde{E}^{x/u})$ de $\int_{T_n}^{\infty} e^{-ps} f \circ X_s \, ds$ et de $\int_{T}^{\infty} e^{-ps} f \circ X_s \, ds$.

D'autre part, d'après la partie a) de la démonstration et le théorème de Lebesgue, on a

$$\lim_n \tilde{E}^{x/u}[e^{-pT_n} g \circ X_{T_n} I_{\{T<\zeta\}}] = \tilde{E}^{x/u}[e^{-pT} g \circ X_T I_{\{T<\zeta\}}]$$

donc, par différence:

$$\lim_n \tilde{E}^{x/u}[e^{-pT_n} g \circ X_{T_n} I_{\{T=\zeta\}}] = \tilde{E}^{x/u}[e^{-pT} g \circ X_T I_{\{T=\zeta\}}] = 0$$

car g est nulle au point ∂.

Enfin $e^{-pT_n} g \circ X_{T_n} I_{\{T=\zeta\}}$ admet une limite p.s. lorsque $n \to \infty$ (th. de convergence des surmartingales). Comme cette variable aléatoire converge vers 0 dans L^1 d'après ce qui précède, elle converge donc vers 0 presque sûrement, ce qui est la résultat cherché.

Remarques. 1) Une fonction excessive u est dite *régulière*, relativement au semi-groupe standard spécial (P_t), si elle satisfait à la condition:

« Pour toute suite croissante (T_n) de temps d'arrêt de la famille $(\mathscr{F}^0_{t+})$, dont on désigne par T la limite, et toute loi initiale μ, on a P^μ-p.s. $\lim_n u \circ X_{T_n} = u \circ X_T$ sur $\{T < \infty\}$ ».

Par exemple, le potentiel d'une fonctionnelle additive continue est une fonction excessive régulière (de la classe (D)): en particulier, un potentiel de fonction est une fonction excessive régulière. Il résulte aussitôt du théorème 2 que le semi-groupe $(\tilde{P}_t^{(u)})$ est standard spécial si u est régulière.

2) On peut montrer que la condition de l'énoncé du théorème 2 est nécessaire et suffisante pour que $(\tilde{P}_t^{(u)})$ soit standard spécial (en supposant bien entendu, que (P_t) est standard spécial).

6. On ne peut pas utiliser directement la définition des processus standard spéciaux, car uf n'est pas une fonction bornée.

5.

Enfin, nous aurons besoin du théorème suivant, relatif aux semi-groupes standard. Il est emprunté à un exposé oral de Meyer: comme il n'a jamais été publié, nous le démontrerons sommairement ici.

Théorème 3. *Soient* (P_t) *un semi-groupe standard sur* E, f *une fonction* p*-excessive. Presque tout* $\omega\in\Omega$ *possède alors la propriété suivante: on a* $(f\circ X_t)_-(\omega)=f\circ X_{t-}(\omega)$ *pour tout* $t\in]0,\zeta(\omega)[$ *tel que* $X_t(\omega)\neq X_{t-}(\omega)$.

Démonstration. Rappelons d'abord que $(f\circ X_t)_-$ désigne la limite à gauche à l'instant t du processus $(f\circ X_s)_{s\in\mathbb{R}_+}$, limite qui existe en vertu de théorèmes classiques sur les surmartingales.

Nous commencerons par un lemme: la terminologie est celle de (Meyer [8]) la loi P est une loi arbitraire de la forme P^μ.

Lemme. *Soient* $J\subset\mathbb{R}_+\times\Omega$ *un ensemble bien-mesurable, et* H *une partie accessible de* J. *Supposons que* J *soit la réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt* T_k. *Alors* H *est la réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt accessibles.*

Démonstration. Posons:

$$S_k(\omega)=T_k(\omega) \quad \text{si } (S_k(\omega),\omega)\in H$$

$$S_k(\omega)=+\infty \quad \text{dans le cas contraire.}$$

On vérifie aussitôt que S_k est un temps d'arrêt, et H est la réunion des graphes des S_k. Au moyen d'un procédé récurrent immédiat, nous pouvons modifier les S_k de telle sorte que leurs graphes deviennent disjoints. Supposons donc cette propriété satisfaite, décomposons S_k en sa partie accessible S'_k et sa partie totalement inaccessible S''_k, et désignons par H' (resp. H'') la réunion des graphes des S'_k (resp. des S''_k): comme H' est accessible, et $H''=H\setminus H'$, H'' est accessible; d'autre part, H'' étant réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt totalement inaccessibles, il ne passe dans H'' aucun graphe de temps d'arrêt accessible. Donc H'' a une projection P-négligeable sur Ω, et le lemme est établi.

Passons alors à la démonstration du théorème 3. Posons

$$H=\{(s,\omega):\ s>0,\ X_{s-}(\omega)\text{ existe dans } E,\ f\circ X_{s-}(\omega)\neq(f\circ X_s)_-(\omega)\}.$$

On vérifie aisément que cet ensemble est prévisible, donc accessible. Posons ensuite

$$K_n=\left\{(s,\omega):\ s>0,\ (f\circ X_s)_-(\omega)\geqq f\circ X_s(\omega)+\frac{1}{n}\right\},$$

$$L_n=\left\{(s,\omega):\ s>0,\ X_{s-}(\omega)\text{ existe dans } E,\ d\big(X_{s-}(\omega),X_s(\omega)\big)\geqq\frac{1}{n}\right\}$$

où d est une distance compatible avec la topologie de E. Il est bien connu que chacun des ensembles K_n, L_n est réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt: il en est donc de même de la réunion J de tous les ensembles K_n, L_n, qui contient évidemment H. Le lemme entraîne alors que H est la réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt accessibles. D'autre part, l'ensemble

$$M=\{(s,\omega):\ 0<s<\zeta(\omega),\ X_s(\omega)\neq X_{s-}(\omega)\}$$

est réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt, et ces temps d'arrêt sont évidemment totalement inaccessibles du fait que le processus est standard. Il en résulte que $H \cap M$ a une projection P-négligeable sur Ω, et le théorème 3 est établi.

II. Un résultat sur la topologie fine

1. Hypothèses et notations

Nous conservons les notations du paragraphe précédent, et nous supposons de plus que le semi-groupe standard (P_t) satisfait à *l'hypothèse de continuité absolue:*

«Il existe une mesure η (que l'on peut supposer p-excessive et bornée), telle qu'il y ait identité entre les ensembles de potentiel nul et les ensemble η-négligeables».

Nous dirons qu'une telle mesure est une *mesure de référence.*

2. Régularisées d'une fonction

Soit g une fonction numérique sur E. Nous poserons pour tout $x \in E$

$$\bar{g}(x) = \limsup_{y \to x} \text{fine}\, g(y), \qquad \underline{g}(x) = \liminf_{y \to x} \text{fine}\, g(y).$$

Ces deux fonctions sont les régularisées semi-continues de la fonction g pour la topologie fine. Nous introduirons d'autre part deux autres régularisées. empruntées au livre à paraître de Blumenthal et Getoor:

$$g^\bullet(x) = \bar{g}(x) \text{ si } x \text{ est régulier pour } \{x\}$$
$$\text{(en particulier si } x \text{ est finement isolé)},$$
$$g^\bullet(x) = \limsup_{y \to x,\ y \neq x} \text{fine}\, g(y) \quad \text{dans le cas contraire.}$$

On définit $g_\bullet$ de manière analogue (ou par la formule $g_\bullet = -(-g)^\bullet$). On a alors la proposition suivante:

Proposition 1. *Les fonctions $g^\bullet, \bar{g}$ sont finement semi-continues supérieurement. On a les relations $g \leqq \bar{g}$, $g^\bullet \leqq \bar{g}$ et l'ensemble $\{g^\bullet < \bar{g}\}$ est réunion d'une suite d'ensembles finement isolés.*

Démonstration. Il est connu que $\bar{g}$ est s.c.s. (c'est la régularisée s.c.s. de g), et les inégalités $g \leqq \bar{g}$, $g^\bullet \leqq \bar{g}$ sont évidentes. Montrons que $g^\bullet$ est s.c.s. en tout point x de E. Si x est régulier pour $\{x\}$, on a $g^\bullet(x) = \bar{g}(x)$, et la propriété est évidente. Sinon, soit ε un nombre >0; choisissons un ouvert fin V contenant x, tel que $g^\bullet(x) \geqq \sup_{y \in V \setminus \{x\}} g(y) - \varepsilon$. On a alors aussi $g^\bullet(x) \geqq \sup_{y \in V} g^\bullet(y) - \varepsilon$, d'où le résultat (noter même que $g^\bullet(x) \geqq \sup_{y \in V \setminus \{x\}} \bar{g}(y) - \varepsilon$).

Pour établir la dernière partie de la proposition, nous remarquerons que l'on peut se ramener au cas où g prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$, puis, par approximation uniforme, au cas où g ne prend que des valeurs dyadiques:

$$g = \sum_{0 \leqq i \leqq 2^n} \frac{i}{2^n} I_{A_i}.$$

La relation $\bar{g}(x)=i2^{-n}$, $g^\bullet(x)<i2^{-n}$ exprime alors que x appartient à l'adhérence fine de A_i, sans être un point d'accumulation de A_i, donc que x est un point isolé de A_i, d'où la proposition.

Proposition 2. *Supposons que g soit presque borélienne. Alors les fonctions $g^\bullet$ et $\bar{g}$ sont presque boréliennes, et on a pour tout $x\in E$*

$$\bar{g}(x)=\limsup_{t\to 0} g\circ X_t,\qquad g^\bullet(x)=\limsup_{t\to 0,\ t>0} g\circ X_t\qquad P^x\text{-p.s.}$$

De plus l'ensemble $\{g^\bullet<\bar{g}\}$ est semi-polaire.

Démonstration. Nous pouvons évidemment nous ramener au cas où g prend ses valeurs dans $[0,1]$. Posons

$$h(\omega)=\limsup_{t\to 0} g\circ X_t(\omega),\qquad h'(\omega)=\limsup_{t\to 0,\ t>0} g\circ X_t(\omega).$$

Il résulte aussitôt de l'interprétation probabiliste de la topologie fine que $h(\omega)=\bar{g}(x)$ P^x-p.s., $h'(\omega)=g^\bullet(x)$ P^x-p.s. D'autre part, il résulte aussitôt des théorèmes sur la mesurabilité des temps d'entrée que h et h' sont des variables aléatoires $\mathscr{F}$-mesurables: les fonctions $\bar{g}$: $x\mapsto E^x[h]$, $g^\bullet$: $x\mapsto E^x[h']$ sont donc universellement mesurables. Comme elles sont finement s.c.s., elles sont presque boréliennes (Meyer [6], chap. XV, T40 et T66). La dernière assertion de l'énoncé est alors évidente. On trouvera une autre démonstration de cette proposition dans (Blumenthal-Getoor [1]).

3.

Voici maintenant le théorème qui fait l'objet de ce paragraphe:

Théorème 4. *Soient g une fonction presque-borélienne, η une mesure de référence.*

a) *Supposons que pour P^η-presque tout $\omega\in\Omega$ l'application $t\to g\circ X_t(\omega)$ soit continue à droite sur $]0,\infty[$. Alors l'ensemble $\{\underline{g}<\bar{g}\}$ est polaire et g est finement continue quasi-partout.*

b) *Supposons que, pour P^η-presque tout $\omega\in\Omega$, la limite $\lim\limits_{\substack{s\to t\\ s>t}} g\circ X_s$ existe pour tout $t\in]0,\infty[$. Alors l'ensemble $\{g_\bullet<g^\bullet\}$ est polaire et l'ensemble $\{\underline{g}<\bar{g}\}$ est semi-polaire. De plus, la fonction $g^\bullet$ est finement continue quasi-partout.*

Démonstration. Prouvons a). Soit A l'ensemble $A=\{\bar{g}\geqq \underline{g}+\varepsilon\}$, qui est presque borélien et finement fermé (prop. 1 et 2). Tout revient à montrer que A est polaire. Or soit $T_s=\inf\{t\geqq s\colon X_t\in A\}$; on a $X_{T_s}\in A$ P^η-p.s. sur $\{T_s<\infty\}$. D'autre part, d'après la propriété de Markov forte et la prop. 2, on a P^η-p.s.

$$\bar{g}\circ X_{T_s}=\limsup_{t\downarrow T_s} g\circ X_t,\qquad \underline{g}\circ X_{T_s}=\liminf_{t\downarrow T_s} g\circ X_t$$

sur $\{T_s<\infty\}$. La continuité à droite de $t\mapsto g\circ X_t(\omega)$ entraîne donc que $\bar{g}\circ X_{T_s}=\underline{g}\circ X_{T_s}$ P^η-p.s. sur $\{T_s<\infty\}$, ce qui n'est compatible avec la relation $X_{T_s}\in A$ sur $\{T_s<\infty\}$ que si $T_s=\infty$ P^η-p.s. En faisant tendre s vers 0, on voit que le temps d'entrée T_A dans A est P^η-p.s. égal à $+\infty$. La fonction excessive $P^\bullet\{T_A<\infty\}$, est donc nulle $\eta-pp$, et donc partout. La propriété a) est établie.

La propriété b) se démontre de la même manière, en prenant $A=\{g^\bullet \geqq g_\bullet + \varepsilon\}$; la fonction $g^\bullet$(resp. $g_\bullet$) étant finement semi-continue supérieurement (resp. inférieurement), et ces deux fonctions étant égales quasi-partout, elles sont finement continues quasi-partout. Enfin, le fait que $\{\underline{g}<\bar{g}\}$ est semi-polaire résulte de ce que cet ensemble est réunion des ensembles semi-polaires $\{\underline{g}<g_\bullet\}$, $\{g_\bullet<g^\bullet\}$, $\{g^\bullet<\bar{g}\}$ (prop. 2).

III. Comportement des fonctions coexcessives sur les trajectoires

1. Notations

Dans ce paragraphe, nous considérerons des noyaux et des *conoyaux*. Il s'agit en fait des mêmes êtres mathématiques, mais les noyaux sont notés comme opérant à gauche sur les fonctions, à droite sur les mesures (Af, μA), tandis que les conoyaux (surmontés d'un ^ pour les distinguer des noyaux) opèrent à droite sur les fonctions, à gauche sur les mesures ($f\hat{A}$, $\hat{A}\mu$). Un noyau A et un conoyau $\hat{A}$ sont en *dualité* par rapport à une mesure m si l'on a, quelles que soient les fonctions boréliennes positives f et g

$$\langle f, Ag\rangle_m = \langle f\hat{A}, g\rangle_m$$

où $\langle f, g\rangle_m$ désigne l'intégrale de la fonction fg par rapport à m.

2.

Nous ferons les hypothèses suivantes, qui sont à rapprocher de celles qui ont été introduites par Kunita et S. Watanabe dans (Kunita-Watanabe [3]).

1. (P_t) et $(\hat{P}_t)$ sont deux semi-groupes sousmarkoviens standards (le premier constitué par des noyaux, le second par des conoyaux). On désigne par (U_p) et $(\hat{U}_p)$ leurs résolvantes respectives.

2. Il existe une mesure de Radon positive η sur E, telle que les mesures $\varepsilon_x U_p$, $\hat{U}_p \varepsilon_x$, soient absolument continues par rapport à η, et que U_p, $\hat{U}_p$ soient en dualité par rapport à η pour tout $p>0$.

Nous ferons en outre l'hypothèse *auxiliaire* suivante: il est facile de s'en débarrasser en considérant, au lieu des semi-groupes (P_t) et $(\hat{P}_t)$, les semi-groupes $(e^{-pt}P_t)$ et $(e^{-pt}\hat{P}_t)$ pour $p>0$. Nous laisserons cette extension facile au lecteur [7].

3. La fonction $Uf(=U_0 f)$ (resp. $f\hat{U}(=f\hat{U}_0)$) est bornée pour toute fonction borélienne $f\geqq 0$ sur E, bornée et à support compact. Quelle que soit la loi initiale μ sur E, la durée de vie ζ est P^μ-p.s. finie.

Dans cet énoncé, la notation P^μ désigne la loi construite sur Ω à partir du semi-groupe (P_t) et de la loi initiale μ.

Nous aurons besoin du résultat suivant, dû à Kunita-Watanabe (cf. Weil [9]) ou (Kunita-Watanabe [3]): il existe une fonction mesurable $u(x,y)$ sur $E\times E$ (E étant muni de la tribu des ensembles universellement mesurables), telle que $u(\cdot,y)$ soit excessive pour tout y, $u(x,\cdot)$ coexcessive pour tout x, et que l'on ait

$$U(x,dy)=u(x,y)\,\eta(dy), \qquad \hat{U}(dx,y)=\eta(dx)\,u(x,y).$$

7. Nous laissons aussi au lecteur l'extension (facile) de nos résultats aux fonctions p-coexcessives ($p>0$).

Si μ est une mesure positive nous désignerons par $\mu \hat{U}$ la fonction coexcessive $\int \mu(dx)\, u(x,\cdot)$: c'est une densité de la mesure excessive μU par rapport à η.

3. Le retournement du temps

Nous allons nous borner à énoncer un cas particulier du théorème de retournement du temps établi dans (Cartier-Meyer-Weil [2]).

Soit $\omega \in \Omega$; posons pour tout $t>0$

$\hat{X}_t(\omega)=\partial$ si $\zeta(\omega)=+\infty$ (éventualité p.s. exclue d'après l'hypothèse (3), si Ω est muni d'une mesure P^μ),

$\hat{X}_t(\omega)=\partial$ si $\zeta(\omega)\leqq t$,

$\hat{X}_t(\omega)=X_{[\zeta(\omega)-t]-}(\omega)$ si $\zeta(\omega)>t$.

On remarquera que l'application $t\mapsto \hat{X}_t(\omega)$ sur $]0,\infty[$ est continue à droite, pourvue de limites à gauche, et que sa durée de vie est égale à $\zeta(\omega)$.

Munissons alors Ω d'une mesure P^μ, où μ est une loi sur E, et désignons par v la fonction coexcessive $\mu\hat{U}$: si f est une fonction bornée à support compact, on a $\langle v,f\rangle_\eta=\langle \mu\hat{U},f\rangle_\eta=\langle \mu U,f\rangle=\langle \mu, Uf\rangle<+\infty$, puisque Uf est une fonction bornée, et que μ est bornée. Ainsi, v est localement intégrable. Posons $E_v=\{0<v<\infty\}$, et, pour toute fonction universellement mesurable positive f

$$\begin{aligned} \hat{Q}_t(f,y) &= \frac{\hat{P}_t(vf,y)}{v(y)} && \text{si } y\in E_v \\ &= f(y) && \text{si } y\notin E_v. \end{aligned}$$

Alors $(\hat{Q}_t)$ est un semi-groupe de conoyaux sous-markoviens, et le théorème du retournement du temps s'énonce ainsi: *si Ω est muni de la loi P^μ, le processus continu à droite $(\hat{X}_t)_{t>0}$ est markovien, et admet $(\hat{Q}_t)$ comme semi-groupe de transition.* On notera que $(\hat{Q}_t)$ dépend de μ.

4.

Voici le premier théorème relatif au comportement des fonctions coexcessives sur les trajectoires. Il a déjà été publié en partie dans (Cartier-Meyer-Weil [2]).

Théorème 5. *Soit g une fonction coexcessive. Alors g est presque-borélienne. Quelle que soit la loi μ, P^μ-presque tout ω possède la propriété suivante:*

l'application $t\mapsto g\circ X_{t-}(\omega)$ de $]0,\zeta(\omega)[$ dans $\mathbb{R}_+$ est continue à gauche et pourvue de limites à droite[8]*. L'application $t\mapsto g\circ X_t(\omega)$ est pourvue de limites à droite et à gauche*[8] *sur $]0,\zeta(\omega)[$.*

On a $g_\bullet=g^\bullet$ quasi-partout, et l'ensemble des points de E où g n'est pas finement continue est semi-polaire.

8. Cette phrase ne prétend pas affirmer l'existence d'une limite à droite en 0, pour l'une quelconque des deux applications. La dernière phrase de l'énoncé montre qu'il en est ainsi si μ ne charge pas les ensembles polaires (car alors $\mu\{g_\bullet<g^\bullet\}=0$). De même la seconde phrase n'affirme pas l'existence d'une limite à gauche en ζ.

Démonstration. Choisissons une fonction continue bornée h, strictement positive en tout point de E, η-intégrable et telle que $h\hat{U}$ soit bornée (il est facile de construire une telle fonction, comme somme d'une série de fonctions continues à support compact positives). Comme $p h \hat{U}_p$ converge vers h lorsque $p \to \infty$, on vérifie aussitôt que la fonction $h\hat{U}$ est strictement positive en tout point. Soit λ une loi de probabilité proportionnelle à la mesure $\mu + h \cdot \eta$: μ étant absolument continue par rapport à λ, il nous suffit de montrer que les propriétés de l'énoncé ont lieu P^λ-p.s. La fonction $\lambda \hat{U} = v$ est coexcessive, strictement positive en tout point, localement η-intégrable. On sait, d'après un théorème classique de Hunt (Meyer [6], chap. XV, T27), qu'une fonction coexcessive finie sauf sur un ensemble de copotentiel nul est finie sauf sur un ensemble copolaire. L'ensemble $\{v=0\}$ est donc vide, et l'ensemble $\{v=\infty\}$ est copolaire.

Construisons le semi-groupe $(\hat{Q}_t)$ à l'aide de la fonction v, comme dans l'énoncé du th. de retournement ci-dessus. Si l'on munit Ω de la loi P^μ, le processus $(\hat{X}_t)_{t>0}$ admet $(\hat{Q}_t)$ comme semi-groupe de transition. Supposons que nous ayons démontré les propriétés suivantes.

a) Il existe deux fonctions boréliennes k et k' sur E telles que $k \leqq g \leqq k'$, et que l'on ait pour P^μ-presque tout $\omega \in \Omega$

$$k \circ \hat{X}_t(\omega) = k' \circ \hat{X}_t(\omega), \qquad k \circ \hat{X}_{t-}(\omega) = k' \circ \hat{X}_{t-}(\omega) \qquad \text{pour tout } t \in]0, \zeta(\omega)[.$$

b) L'application $t \mapsto g \circ \hat{X}_t(\omega)$ est continue à droite et pourvue de limites à gauche sur $]0, \zeta(\omega)[$, pour P^μ-presque tout ω.

c) Pour P^μ-presque tout ω, on a $g \circ \hat{X}_{t-}(\omega) = (g \circ \hat{X}_t)_-(\omega)$ pour tout $t \in]0, \zeta(\omega)[$ tel que $\hat{X}_t(\omega) \neq \hat{X}_{t-}(\omega)$.

Nous déduirons alors de a), en remplaçant $\hat{X}_t$ par son expression explicite, que g est presque-borélienne; de b), que $t \mapsto g \circ X_{t-}(\omega)$ est continue à gauche et pourvue de limites à droite: nous désignerons par $(g \circ X_{t-})_+$ cette limite à droite, pour les quelques lignes qui suivent. La propriété c) entraînera alors que $g \circ X_t(\omega)$ est égal, soit à $g \circ X_{t-}(\omega)$ (aux points où $X_t(\omega) = X_{t-}(\omega)$), soit à $(g \circ X_{t-})_+(\omega)$ (aux points où $X_t(\omega) \neq X_{t-}(\omega)$), et par conséquent $t \mapsto g \circ X_t(\omega)$ admettra aussi une limite à droite en tout point. La dernière phrase de l'énoncé résultera alors immédiatement de la seconde, et du théorème 4. Autrement dit, il nous suffit de démontrer les propriétés a), b) et c). Mais on a en fait, le résultat suivant, qui achèvera la démonstration:

Lemme. *Les propriétés* a), b), c) *sont vraies pour tout processus markovien* $(Y_t)_{t>0}$ *défini sur un espace probabilisé complet, admettant* $(\hat{Q}_t)$ *comme semi-groupe de transition, et dont les trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites à gauche sur* $]0, \zeta[$.

Démonstration. Tout d'abord, on se ramène aisément à considérer des processus $(Z_t)_{t \geqq 0}$, admettant une mesure initiale v: en effet, si le lemme est établi pour de tels processus, il s'appliquera à tous les processus $Z_t = Y_{t+1/n}$ et en faisant tendre n vers $+\infty$ on obtiendra les résultats désirés pour le processus $(Y_t)_{t>0}$. Mais alors, d'après un argument bien connu (cf. par exemple Meyer, [6] ou [7]), il suffit d'établir les propriétés a), b), c) pour le *processus canonique* obtenu en munissant l'espace Ω de la mesure $\hat{Q}^v$.

Tout étant trivial lorsque ν est portée par $E_v^c = \{v = \infty\}$, nous pouvons nous borner au cas où ν est portée par E_v. Munissons alors Ω de la mesure $\hat{P}^\nu$ correspondant à la même loi initiale ν et au semi-groupe standard $(\hat{P}_t)$. Choisissons deux fonctions boréliennes k et k' telles que $k \leqq g \leqq k'$ et que l'ensemble $\{\exists\, t\colon 0 < t < \zeta,\ k \circ X_t < k' \circ X_t$ ou $k \circ X_{t-} < k' \circ X_{t-}\}$ soit $\hat{P}^\nu$-négligeable (Meyer [6], chap. XIV, démonstration de T 16). Désignons par H_r (où r est un rationnel >0) l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels qu'il existe un $t \in]0, r \wedge \zeta(\omega)[$ pour lequel l'une des propriétés suivantes est satisfaite:

ou bien $k \circ X_t(\omega) < k' \circ X_t(\omega)$

ou bien $s \mapsto g \circ X_s(\omega)$ n'est pas continue à droite à l'instant t, ou n'y possède pas de limite à gauche

ou bien $X_t(\omega) \neq X_{t-}(\omega)$, et $g \circ X_{t-}(\omega) \neq (g \circ X_t)_-(\omega)$ [cette propriété est considérée comme satisfaite aussi si $(g \circ X_t)_-(\omega)$ n'existe pas]. Nous savons que H_r est $\hat{P}^\nu$-négligeable: la première propriété, en vertu du choix de k et k', la seconde, en vertu du théorème de Hunt sur le comportement des fonctions coexcessives sur les trajectoires et la troisième en vertu du théorème 3 plus haut. Nous aurons en fait, besoin d'un résultat un peu plus fort, qui résulte des démonstrations de ces propriétés, et que le lecteur vérifiera: c'est que H_r est négligeable *dans la complétion de la tribu $\mathscr{F}_r^0$ par rapport à P^ν* (et non pas dans la complétion de $\mathscr{F}^0$ toute entière). Il existe donc un ensemble P^ν-négligeable K_r, $\mathscr{F}_r^0$-mesurable et contenant H_r. Appliquons maintenant le théorème 1:

$$\hat{Q}^\nu(K_r \cap \{r < \zeta\}) = \int_{E_v} \nu(dx)\, \frac{1}{v(x)} \int_{K_r \cap \{r < \zeta\}} v \circ X_r \, d\hat{P}^x = 0.$$

Il en résulte que $K_r \cap \{r < \zeta\}$ est $\hat{Q}^\nu$-négligeable: on a donc la même propriété à plus forte raison pour $H_r \cap \{r < \zeta\}$, donc pour la réunion (pour r rationnel) de ces ensembles: cela équivaut à l'énoncé du lemme, pour le processus canonique.

5.

Nous en arrivons aux résultats concernant le comportement des fonctions coexcessives régulières (par rapport au semi-groupe $(\hat{P}_t)$): pour plus de clarté, nous les qualifierons de «corégulières». Il nous faut supposer maintenant que le semi-groupe $(\hat{P}_t)$ est *standard spécial.* D'après la remarque de Blumenthal et Getoor rappelée au début de cet article, cette hypothèse est toujours satisfaite lorsque les fonctions coexcessives sont semi-continues inférieurement.

Théorème 6. *Supposons que le semi-groupe $(\hat{P}_t)$ soit standard spécial, et que la fonction coexcessive g soit corégulière. Alors quelle que soit la loi μ, P^μ-presque tout $\omega \in \Omega$ possède la propriété suivante:*

l'application $t \mapsto g \circ X_t(\omega)$ de $]0, \zeta(\omega)[$ dans $\mathbb{R}_+$ est continue à droite et pourvue de limites à gauche[9].

On a $g = \bar{g}$ quasi-partout, et l'ensemble des points de E où g n'est pas finement continue est polaire.

9. Nous ignorons si la limite à gauche à l'instant ζ existe ou non.

Démonstration. La seconde phrase de l'énoncé résulte aussitôt de la première, et du théorème 4. Pour établir la première assertion, reprenons les notations de la démonstration du théorème 5: en retournant le temps à $\zeta(\omega)$, cette première phrase se met sous la forme équivalente: pour P^{μ}-presque tout $\omega \in \Omega$ l'application $s \mapsto g \circ \hat{X}_{s-}(\omega)$ de $]0, \zeta(\omega)[$ dans $\mathbb{R}_+$ est continue à gauche et pourvue de limites à droite. Cela résultera du lemme suivant:

Lemme. *Soit $(Y_t)_{t>0}$ un processus markovien défini sur un espace probabilisé complet W, admettant $(\hat{Q}_t)$ comme semi-groupe de transition, et des trajectoires continues à droite et pourvues de limites à gauche sur $]0, \zeta[$. Alors, pour presque tout $w \in W$, l'application $s \mapsto g \circ Y_s(w)$ admet une limite à gauche $(g \circ Y_t)_-(w)$ égale à $g \circ Y_{t-}(w)$ en tout point $t \in]0, \zeta(w)[$.*

Démonstration. Comme dans la démonstration du théorème 5, il suffit de traiter le cas d'un processus canonique, correspondant à une mesure $\hat{Q}^{\nu}$, où ν est portée par E_{υ}. On raisonne alors dans la démonstration du théorème 5, en remarquant que pour $\hat{P}^{\nu}$-presque tout $\omega \in \Omega$ l'application $s \mapsto g \circ X_s(\omega)$ admet une limite à gauche $(g \circ X_t)_-(\omega)$ égale à $g \circ X_{t-}(\omega)$ pour tout $t \in]0, \zeta(\omega)[$, du fait que g est corégulière et que $(\hat{P}_t)$ est standard spécial (Meyer [6], chap. XIV, démonstration de T26).

Bibliographie

1. Blumenthal, R., and R. Getoor: Markov processes and potential theory. New York: Academic Press 1968.
2. Cartier, P., P. A. Meyer et M. Weil: Le retournement du temps. Séminaire de Probabilités I, Université de Strasbourg. Lecture Notes in Mathematics. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967.
3. Kunita, H., and S. Watanabe: Markov processes and Martin boundaries. Illinois J. Math. **9**, 485–526 (1965).
4. – – On certain reversed processes and their applications to potential theory and boundary theory. J. Math. Mech. **15**, 393–419 (1966).
5. Meyer, P. A.: Probabilités et potentiel. Paris: Hermann; New York: Blaisdell 1966.
6. – Processus de Markov. Lecture Notes in Mathematics. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967.
7. – Sur les relations entre diverses propriétés des processus de Markov. Inventiones math. **1**, 59–100 (1966).
8. – Guide détaillé de la théorie générale des processus stochastiques. Séminaire de Probabilités II, Université de Strasbourg. Lecture Notes in Mathematics. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1968.
9. Weil, M.: Résolvantes en dualité. Séminaire de Probabilités I, Université de Strasbourg.

Michel Weil
Université de Strasbourg
Département de Mathématique
5, rue R. Descartes
Strasbourg, France

(Reçu le 1er Mars, 1968)