Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 11, 41—60 (1968)

Eine parameterfreie Theorie der ungünstigsten Verteilungen für das Testen von Hypothesen

V. Baumann

Eingegangen am 6. Dezember 1967

Summary. The paper concerns sufficient conditions for the existence of least favorable distributions. In sections 2 and 3 some partially known results will be noted about the weak* topology and convex hulls in the space of bounded additive set functions (contents). By a suitable dualization of the linear program for maximin tests it is shown in section 5 that for positive level the convex hull of the hypothesis (alternative) contains a content which is least favorable. This result is used in section 6 for deriving e.g. the following theorem: If there are tests of arbitrarily high power and of arbitrarily small level on a part of the hypothesis such that the complementary part of the hypothesis is uniformly dominated by a finite measure, then the least favorable hypothesis is not even a content but a measure.

1. Einleitung

In der Theorie der ungünstigsten Verteilungen für das Testen von Hypothesen, wie sie etwa in [10]—[12] entwickelt wurde, werden diese Verteilungen als Wahrscheinlichkeitsmaße über Parameterräumen betrachtet und angenommen, daß die Hypothesen- bzw. Alternativmengen durch meßbar parametrisierte Dichten gegeben sind. Wenn auch in den meisten der bisher betrachteten Testprobleme eine „natürliche“ Parametrisierung vorlag, erweist es sich für eine allgemeinere Theorie, insbesondere für Existenzprobleme, als zweckmäßig, Verteilungen über der Menge der Hypothesen bzw. Alternativen selbst zu betrachten, wobei die meßbaren Teilmengen durch inhärente Eigenschaften definiert sind. Eine ähnliche Methode wurde bereits in [17], Kapitel 2, zur Mischung von Strategien benutzt.

Nach einer Betrachtung der schwachen und schwachen* Topologie der Wahrscheinlichkeitsmaße und -inhalte in Abschnitt 2, die insbesondere der Charakterisierung der schwachkompakten Teilmengen dient, wird in Abschnitt 3 der Begriff „Mischung“ und seine Beziehung zur konvexen Hülle betrachtet. Es zeigt sich, daß durch „Parametrisierung“ darstellbare Mischungen auch Mischungen in dem hier definierten Sinne sind. In Abschnitt 4 wird das Testproblem für das Testen zusammengesetzter Hypothesen gegen zusammengesetzte Alternativen bei nicht notwendig konstantem Niveau betrachtet, wobei als Hypothesen und Alternativen auch Wahrscheinlichkeitsinhalte zugelassen werden, und der Begriff der ungünstigsten Hypothese und Alternative als Mischungen bezüglich ungünstigster Verteilungen eingeführt. In Abschnitt 5 wird in einem [8], [18] gegenüber modifizierten Ansatz das Problem der ungünstigsten Verteilungen als ein dem Testproblem duales aufgezeigt und über einen in [3] bewiesenen Dualitätssatz gezeigt, daß unter schwachen Voraussetzungen über die Niveaufunktion immer ungünstigste Hypothesen und Alternativen existieren, wenn als solche auch Wahrscheinlichkeitsinhalte zugelassen werden. In Abschnitt 6 wird gezeigt, daß die ungünstigsten

Hypothesen und Alternativen Wahrscheinlichkeitsmaße sind, wenn die Hypothesen- bzw. Alternativmengen schwach*-kompakt sind oder, in Verallgemeinerung eines in [10], [14], [16] bewiesenen Satzes, die beiden Mengen bis auf schwach*-kompakte Teile beliebig scharf durch Tests zu trennen sind.

2. Die Banach-Räume der Vorzeichen-Maße und -Inhalte

Es sei X eine beliebige Menge, $\mathfrak{A}$ ein σ-Körper über X und B der Banach-Raum der $\mathfrak{A}$-meßbaren beschränkten reellwertigen Funktionen über X in der Supremum-Norm. Der Dualraum B^* von B ist isometrisch isomomorph dem Banach-Raum $ba(X, \mathfrak{A})$ der additiven beschränkten reellen Mengenfunktionen über $\mathfrak{A}$ [4; IV.5.1]. Ist $\varphi \in B$, $m \in ba(X, \mathfrak{A})$, so wird im folgenden $\int \varphi dm$ mit $m[\varphi]$ oder $f_\varphi(m)$ bezeichnet. Die nicht-negativen Elemente aus $ba(X, \mathfrak{A})$ (d.h. $m(A) \geqq 0$ für alle $A \in \mathfrak{A}$) werden als *Inhalte* bezeichnet, die normierten Inhalte (d.h. $\|m\| = m(X) = 1$) als *W-Inhalte*; $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}(X, \mathfrak{A})$ sei die Menge aller W-Inhalte über $\mathfrak{A}$. $ca\ (X, \mathfrak{A})$, der Banach-Raum der σ-additiven reellen beschränkten Mengenfunktionen über $\mathfrak{A}$, ist ein abgeschlossener linearer Teilraum von $ba(X, \mathfrak{A})$, da er als Banach-Raum vollständig ist.

Durch den kanonischen Isomorphismus von B^* auf $ba(X, \mathfrak{A})$ induziert die schwache* (weak*) Topologie von B^* auf $ba(X, \mathfrak{A})$ eine Topologie, die als die schwache* Topologie von $ba(X, \mathfrak{A})$ bezeichnet werden soll. Es ist dies die gröbste Topologie auf $ba(X, \mathfrak{A})$, für die alle Funktionen f_φ, $\varphi \in B$, stetig sind. Die dadurch auf $\mathsf{P} = \mathsf{P}(X, \mathfrak{A})$, der Menge der W-Maße auf $\mathfrak{A}$, induzierte Topologie wird in der Mathematischen Statistik oft als schwache Topologie bezeichnet (etwa in [11]); dies könnte jedoch mit der später auftretenden schwachen Topologie von $ba(X, \mathfrak{A})$ verwechselt werden. In der Terminologie von [4] ist (nach Identifizierung von $ba(X, \mathfrak{A})$ mit B^*) die schwache* Topologie auf $ba(X, \mathfrak{A})$ die B-Topologie. Für eine Teilmenge $\mathsf{H} \subset ba(X, \mathfrak{A})$ ist im folgenden

$\overline{\mathsf{H}}$ die schwach*-abgeschlossene Hülle,

$k(\mathsf{H})$ die konvexe Hülle und

$\tilde{\mathsf{H}} = \overline{k(\mathsf{H})}$ die schwach*-abgeschlossene konvexe Hülle von H in $ba(X, \mathfrak{A})$.

2.1. Satz. (i) Q *ist schwach*-kompakt,*

(ii) *Ist* $\mathsf{H} \subset \mathsf{Q}$, *so ist* $\tilde{\mathsf{H}}$ *eine schwach*-kompakte konvexe Teilmenge von* Q.

Beweis. (i) Bezeichnet χ_A die charakteristische Funktion der Menge $A \in \mathfrak{A}$, so ist nach Definition von Q

$$\mathsf{Q} = f_{\chi_X}^{-1}(\{1\}) \cap \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} f_{\chi_A}^{-1}([0, 1]).$$

Da die Funktionen f_φ, $\varphi \in B$, schwach*-stetig sind, ist Q schwach*-abgeschlossen. Da Q überdies normbeschränkt ist, ist nach dem Satz von Alaoglu-Bourbaki [4; V. 4..3] Q schwach*-kompakt.

(ii) Nach [4; V. 2.1] ist $\tilde{\mathsf{H}}$ konvex. Da Q konvex und wegen (i) schwach*-abgeschlossen ist, gilt $\tilde{\mathsf{H}} \subset \mathsf{Q}$.

2.2. Bemerkung. Ist $\mathscr{X}$ ein lokal-konvexer linearer topologischer Raum, $\mathscr{X}^*$ sein dualer, so existiert zu jedem schwach*-stetigen linearen Funktional f über $\mathscr{X}^*$

ein Element $x \in \mathscr{X}$ derart, daß $f(x^*) = x^*(x)$ für alle $x \in \mathscr{X}$; kurz $\mathscr{X}^{**} = \mathscr{X}$. ([7] 20.2. (3) oder [5] V. 3.9 mit $\mathscr{X}^*$ anstatt $\mathscr{X}$ und $\mathscr{X}$ anstatt Γ.) Ist also insbesondere f ein schwach*-stetiges lineares Funktional auf $ba(X, \mathfrak{A})$, so existiert ein $\varphi \in B$ mit $f = f_\varphi$.

Die schwache Topologie auf $ba(X, \mathfrak{A})$ — im Sinne von [4] die $ba(X, \mathfrak{A})^*$-Topologie, d.i. die gröbste, bezüglich derer alle stetigen linearen Funktionale über dem Banach-Raum $ba(X, \mathfrak{A})$ stetig sind — ist nach [4; V. 3.7] feiner als die schwache* Topologie. Sie ist i. a. echt feiner: Es seien $X = [0, 1]$ bzw. eine abzählbare Menge, $\mathfrak{A}$ der σ-Körper der Borelmengen bzw. aller Teilmengen von X. Die Menge P aller W-Maße über $\mathfrak{A}$ ist nicht schwach*-abgeschlossen, da sie sonst als Teilmenge von Q nach 2.1 schwach*-kompakt wäre, was dem Kompaktheitskriterium 2.5 widerspricht. Andererseits ist P konvex und in der Normtopologie von $ba(X, \mathfrak{A})$ abgeschlossen, also nach [4; V. 3.13] schwach-abgeschlossen. Für Teilmengen von $ca(X, \mathfrak{A})$ jedoch sind schwache Kompaktheit und schwache* Kompaktheit äquivalent:

2.3. Satz. *Für* $\mathsf{H} \subset ca(X, \mathfrak{A})$ *sind äquivalent:*

(i) H *ist relativ schwach*-kompakt in* $ca(X, \mathfrak{A})$,

(ii) H *ist relativ schwach*-folgenkompakt in* $ca(X, \mathfrak{A})$,

(iii) H *ist relativ schwach-folgenkompakt in* $ca(X, \mathfrak{A})$,

(iv) H *ist relativ schwach-kompakt in* $ca(X, \mathfrak{A})$.

Nach Streichung von „relativ in $ca(X, \mathfrak{A})$“ *ist die Aussage* (i) *mit* (iv) *und die Aussage* (ii) *mit* (iii) *äquivalent.*

(Die Terminologie ist die von [7]; H ist relativ kompakt, wenn die abgeschlossene Hülle kompakt ist; H ist relativ folgenkompakt in ca, wenn jede Folge aus H eine gegen ein Element aus ca konvergierende Teilfolge besitzt, was in [4] als „sequentially compact“ bezeichnet wird.) Der Beweis beruht u.a. auf

2.4. Lemma. *Ist* $m \in ca(X, \mathfrak{A})$, *so ist* $ca(m) := \{h \in ca(X, \mathfrak{A}): h$ *ist absolut-, stetig bezüglich* $m\}$ *ein schwach*-abgeschlossener linearer Teilraum von* $ca(X, \mathfrak{A})$, *auf dem die schwache* Topologie (d.i. die Relativierung der schwachen* Topologie über* $ba(X, \mathfrak{A})$*) mit der schwachen Topologie übereinstimmt.*

Beweis. $ca(m)$ ist offensichtlich linearer Raum. Ist $h_0 \in \overline{ca(m)} \cap ca(X, \mathfrak{A})$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ und $A \in \mathfrak{A}$ mit $m(A) = 0$ ein $h \in ca(m)$ mit $|h(A) - h_0(A)| < \varepsilon$; da $h(A) = 0$, ist $h_0(A) = 0$ und damit h_0 absolutstetig bezüglich m, also $h_0 \in ca(m)$. Als schwach*-abgeschlossener Teilraum von $ca(X, \mathfrak{A})$ ist $ca(m)$ auch norm-abgeschlossen in $ca(X, \mathfrak{A})$, da die Norm-Topologie feiner als die schwache* Topologie ist. Nach dem Satz von Radon-Nikodym ist $ca(m)$ norm-isomorph zu dem Banach-Raum $L_1(X, \mathfrak{A}, m)$. Da jedes stetige lineare Funktional über L_1 mittels eines $\varphi_0 \in L_\infty(X, \mathfrak{A}, m)$ dargestellt werden kann ([4] IV. 8.5) und in der Äquivalenzklasse φ_0 *modulo* m ein $\varphi \in B(X, \mathfrak{A})$ enthalten ist, stimmen schwache und schwache* Topologie auf $ca(m)$ überein. (Der Beweis entspricht im wesentlichen dem von [4; IV. 9.5].)

Beweis von 2.3. 1. (ii) ist äquivalent mit (iii): Es sei $\{m_n: n = 1, 2, \ldots\}$ eine Folge aus H.

Mit $m := \sum_{n \geq 1} 2^{-n} m_n / (1 + \| m_n \|)$ gilt $\{m_n\} \subset ca(m) \cap \mathsf{H}$. Da $ca(m)$ schwach*- und damit auch schwach-abgeschlossen ist, gilt wegen 2.4: $\{m_n\}$ konvergiert schwach

(schwach*) gegen $m_0 \in ca(X, \mathfrak{A})$, wenn $m_0 \in ca(m)$ und $\{m_n\}$ schwach* (schwach) gegen m_0 konvergiert. Damit ist die Äquivalenz, auch unter den Bedingungen des Zusatzes, bewiesen.

2. (i) impliziert (iii): Ist $\overline{\mathsf{H}} \cap ca(X, \mathfrak{A})$ schwach*-kompakt und $\{m_n : n = 1, 2, \ldots\}$ eine Folge aus H, so ist $\overline{\mathsf{H}} \cap ca(m)$ schwach*-kompakt und enthält $\{m_n\}$ (m wie in 1.), da nach 2.4 $ca(m)$ in $ca(X, \mathfrak{A})$ schwach*-abgeschlossen ist. Weiter folgt aus 2.4, daß $\overline{\mathsf{H}} \cap ca(m)$ schwach-kompakt, also nach dem Satz von EBERLEIN-SMULIAN [4; V. 6.1] schwach-folgenkompakt ist. Somit konvergiert eine Teilfolge von $\{m_n\}$ schwach gegen ein $m_0 \in ca(X, \mathfrak{A})$.

3. Daß (iii) die Aussage (iv) impliziert, folgt unmittelbar aus dem schon zitierten Satz von EBERLEIN-SMULIAN.

4. (iv) impliziert (i), da die schwache Topologie feiner als die schwache* Topologie ist.

5. Äquivalenz von (i) und (iv) im Zusatz: Ist H schwach*-kompakt, so ist H schwach*-abgeschlossen, also auch in der feineren schwachen Topologie abgeschlossen und damit nach dem schon bewiesenen Teil schwach-kompakt. Die Umkehrung wird wie 4. bewiesen. Aus 2.3 ergibt sich das Kompaktheitskriterium

2.5. Korollar. *Eine Teilmenge* H *von* $ca(X, \mathfrak{A})$ *ist genau dann in* $ca(X, \mathfrak{A})$ *relativ schwach*-kompakt, wenn* H *beschränkt ist und ein* $m \in ca(X, \mathfrak{A})$, $m \geqq 0$, *existiert so, daß zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *existiert mit:* $m(A) < \delta$ *impliziert* $|h(A)| < \varepsilon$ *für alle* $h \in \mathsf{H}$ *und* $A \in \mathfrak{A}$.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar mit [4; IV. 9.2] und 2.3.

(Das Kompaktheitskriterium wird für W-Maße bereits in [13], Seite 146, unter Berufung auf [4] zitiert.)

2.6. Bemerkung. Ist $\mathsf{H} \subset ca(X, \mathfrak{A})$ schwach*-kompakt, so ist es nach 2.3 relativ schwach*-folgenkompakt und somit als schwach*-abgeschlossene Menge schwach*-folgenkompakt. Ist $\mathsf{H} \subset ca(X, \mathfrak{A})$ jedoch schwach*-folgenkompakt, so kann i.a. die schwache* Kompaktheit nur gefolgert werden, wenn jedes Element der schwachen* Hülle limes einer Folge von Elementen aus H ist. Dies ist z.B. immer gesichert, wenn $\mathfrak{A}$ separabel ist: Die schwache* Topologie wird wegen 2.5 auf H durch die charakteristischen Funktionen jedes $\mathfrak{A}$ erzeugenden Körpers induziert.

3. Mischung von Inhalten und Maßen

3.1. Definition. Ist $\mathsf{H} \subset ba(X, \mathfrak{A})$, so ist $\mathscr{B}_0(\mathsf{H})$ der kleinste σ-Körper über H, bezüglich dessen alle Funktionen f_φ/H, $\varphi \in B$, meßbar sind, $\mathscr{B}(\mathsf{H})$ der kleinste σ-Körper über H, der alle schwach*-offenen Mengen enthält (also der der Borel-Mengen); dabei ist die schwache* Toplologie über H die Relativierung der schwachen* Toplologie über $ba(X, \mathfrak{A})$.

3.2. Bemerkung. $\mathscr{B}_0(\mathsf{H}) \subset \mathscr{B}(\mathsf{H})$.

3.3. Lemma. *Es sei* $\mathsf{H} \subset \mathsf{Q}$ *und* λ *ein* W-*Maß über* $(\mathsf{H}, \mathscr{B}_0(\mathsf{H}))$. *Dann ist* P_λ, *die „λ-Mischung von* H“, *definiert durch*

$$P_\lambda(A) = \int_{\mathsf{H}} P(A)\, d\lambda(P), \qquad A \in \mathfrak{A},$$

ein W-Inhalt über $(X, \mathfrak{A})$, und es gilt

$$(*) \qquad P_\lambda[\varphi] = \int_{\mathsf{H}} P[\varphi]\, d\lambda(P) \quad \textit{für alle } \varphi \in B.$$

Ist überdies $\mathsf{H} \subset \mathsf{P}$, so ist P_λ ein W-Maß über $(X, \mathfrak{A})$. Sind alle W-Inhalte aus H bezüglich eines nicht notwendig endlichen Maßes absolut stetig, so auch P_λ.

Beweis. Da λ ein W-Maß ist, ist $P_\lambda \in \mathsf{Q}$. Zu jedem $\varphi \in B$ und $\varepsilon > 0$ existiert eine Linearkombination ψ von endlich vielen charakteristischen Funktionen zu Mengen aus $\mathfrak{A}$ derart, daß $\|\varphi - \psi\| < \varepsilon$. Somit wird

$$\left| P_\lambda[\varphi] - \int_{\mathsf{H}} P[\varphi]\, d\lambda(P) \right| < 2\varepsilon + \left| P_\lambda[\psi] - \int_{\mathsf{H}} P[\psi]\, d\lambda(P) \right|.$$

Der zweite Summand der rechten Seite verschwindet offensichtlich, also gilt $(*)$. Ist $\mathsf{H} \subset \mathsf{P}$ und $\{A_n : n = 1, 2, \ldots\} \subset \mathfrak{A}$ eine abnehmende Folge mit leerem Durchschnitt, so konvergiert $\{P(A_n): n = 1, 2, \ldots\}$ monoton gegen 0 für jedes $P \in \mathsf{H}$. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz konvergiert somit $P_\lambda(A_n)$ gegen 0; also ist P_λ ein W-Maß. Sind alle $P \in \mathsf{H}$ absolut stetig bezüglich eines Maßes m über $(X, \mathfrak{A})$ und gilt $m(A) = 0$ für ein $A \in \mathfrak{A}$, so ist $P(A) = 0$ für alle $P \in \mathsf{H}$, also auch $P_\lambda(A) = 0$.

In der Theorie der ungünstigsten Verteilungen, etwa [8—12, 18], wurde für die Konstruktion von Mischungen vorausgesetzt, daß die W-Maße aus H durch ein σ-endliches Maß dominiert werden und bezüglich dieses Maßes Dichten besitzen, die im Sinne der Voraussetzungen von 3.4 meßbar sind. Der nachfolgende Satz soll zeigen, daß die so erhaltenen Mischungen auch Mischungen im Sinne von 3.3 sind.

3.4. Satz. *Es sei $\mathsf{H} = \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ und Σ ein σ-Körper über Θ, λ' ein W-Maß über Σ. Es sei m ein σ-endliches Maß über $\mathfrak{A}$, das alle P_ϑ, $\vartheta \in \Theta$, dominiert. Für jedes $\vartheta \in \Theta$ sei p_ϑ Dichte von P_ϑ bezüglich m derart, daß die Funktion $(\vartheta, x) \to p_\vartheta(x)$ $\Sigma \times \mathfrak{A}$-meßbar ist. P sei das W-Maß, das durch die Dichte $\int_\Theta p_\vartheta(x)\, d\lambda'(\vartheta)$ bezüglich m gegeben ist. Dann existiert ein W-Maß λ über $(\mathsf{H}, \mathscr{B}_0(\mathsf{H}))$ mit $P = P_\lambda$.*

Beweis. Nach einem Satz über Produktmaße [5; Beweis von 36.B] ist die Funktion $\vartheta \to P_\vartheta[\varphi] = \int_X p_\vartheta(x)\varphi(x)\, dm$ für $\varphi \in B$ Σ-meßbar. Damit ist auch die Parametrisierung $\pi: \vartheta \to P_\vartheta \in \mathsf{H}$ Σ-$\mathscr{B}_0(\mathsf{H})$-meßbar, da für $r \in \mathbb{R}$, $\varphi \in B$,

$$\pi^{-1}\{P \in \mathsf{H} : P[\varphi] \leqq r\} = \{\vartheta \in \Theta : P_\vartheta[\varphi] \leqq r\} \in \Sigma.$$

Nach dem Transformationssatz für Maße [5; 39.C] gilt für das W-Maß $\lambda := \lambda' \pi^{-1}$ über $\mathscr{B}_0(\mathsf{H})$, daß für beliebiges $\varphi \in B$

$$P_\lambda[\varphi] = \int_{\mathsf{H}} P[\varphi]\, d\lambda(P) = \int_{\mathsf{H}} f_\varphi(P)\, d(\lambda' \pi^{-1}) = \int_\Theta f_\varphi(\pi(\vartheta))\, d\lambda'(\vartheta) = \int_\Theta P_\vartheta[\varphi]\, d\lambda'(\vartheta).$$

Da nach dem Satz von Fubini der letzte Ausdruck $P[\varphi]$ ist, ist der Satz bewiesen.

3.5. Definition. Ist $\mathsf{H} \subset \mathsf{Q}$, so ist $M(\mathsf{H}) = \{P_\lambda : \lambda\ W\text{-Maß über } (\mathsf{H}, \mathscr{B}_0(\mathsf{H}))\}$ die Menge der *Mischungen* von H im Sinne von 3.3.

Der folgende Satz gibt Aufschluß über die geometrische Lage der Mischungen einer Menge $\mathsf{H} \subset \mathsf{Q}$. Er zeigt insbesondere, daß für schwach*-abgeschlossenes H die Mischungen genau die schwach*-abgeschlossene konvexe Hülle von H ausmachen.

3.6. Satz. *Für beliebiges* $\mathsf{H} \subset \mathsf{Q}$, $\mathsf{H} \neq \emptyset$, *ist*

(i) $\tilde{\mathsf{H}} = \{P_\lambda : \lambda$ *reguläres W-Maß über* $(\overline{\mathsf{H}}, \mathscr{B}(\overline{\mathsf{H}}))\}$ *und*

(ii) $\mathsf{H} \subset k(\mathsf{H}) \subset M(\mathsf{H}) \subset \tilde{\mathsf{H}} = M(\overline{\mathsf{H}})$.

Beweis. (i) Nach 2.1 sind $\overline{\mathsf{H}}$ und $\tilde{\mathsf{H}}$ kompakte Teilmengen des lokal-konvexen linearen topologischen Hausdorff-Raumes $ba(X, \mathfrak{A})$ in der schwachen* Topologie. Da überdies $\tilde{\mathsf{H}}$ konvex ist, gibt es zu jedem regulären W-Maß λ über $(\overline{\mathsf{H}}, \mathscr{B}(\overline{\mathsf{H}}))$ genau ein Element $Q \in \tilde{\mathsf{H}}$ derart, daß für jede schwach*-stetige lineare Funktion f über $\tilde{\mathsf{H}}$ gilt:

$$\int_{\overline{\mathsf{H}}} f(P)\, d\lambda(P) = f(Q)$$

[2; Satz 2.5.2]. Insbesondere gilt also für die Funktionen f_φ, $\varphi \in B$,

$$\int_{\overline{\mathsf{H}}} P[\varphi]\, d\lambda(P) = \int_{\overline{\mathsf{H}}} f_\varphi(P)\, d\lambda(P) = f_\varphi[Q] = Q[\varphi],$$

und damit $Q = P_\lambda$. Andrerseits bildet nach dem zitierten Satz die Zuordnung $\lambda \to P_\lambda$ die Menge der regulären W-Maße λ über $\mathscr{B}(\overline{\mathsf{H}})$ auf $\overline{k(\overline{\mathsf{H}})} = \tilde{\mathsf{H}}$ ab.

(ii) Ist $P \in \mathsf{H}$, so wird durch $\lambda'(\{P\}) = 1$ ein W-Maß über $\mathscr{B}(\mathsf{H})$ definiert, dessen Einschränkung λ auf $\mathscr{B}_0(\mathsf{H})$ P darstellt: $P = P_\lambda \in M(\mathsf{H})$. $M(\mathsf{H})$ ist also eine konvexe, H umfassende Teilmenge von Q, und damit $k(\mathsf{H}) \subset M(\mathsf{H})$.

Es seien $Q = P_\lambda \in M(\mathsf{H})$, l und n natürliche Zahlen,

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in B, \quad \|\varphi_i\| < 1 \quad \text{und} \quad g_i = f_{\varphi_i}^{\pi} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Das Mengensystem

$$\mathscr{H} = \left\{\mathsf{H} \cap \bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1}\left(\left[\frac{k_i - 1}{l}, \frac{k_i}{l}\right]\right) : -l + 1 \leqq k_i \leqq l, k_i \text{ ganzzahlig}\right\} \subset \mathscr{B}_0(\mathsf{H})$$

ist eine endliche disjunkte Zerlegung von H derart, daß auf jedem $\mathsf{G} \in \mathscr{H}$ die Schwankung eines jeden g_i höchstens l^{-1} ist. Ist für jedes nichtleere $\mathsf{G} \in \mathscr{H}$ P_{G} ein beliebig gewähltes Element aus G und

$$P = \Sigma\{\lambda(\mathsf{G}) P_{\mathsf{G}} : \emptyset \neq \mathsf{G} \in \mathscr{H}\},$$

so ist $P \in k(\mathsf{H})$ und $|Q[\varphi_i] - P[\varphi_i]| \leqq l^{-1}$ für $i = 1, \ldots, n$. Somit ist Q Element von $\overline{k(\mathsf{H})}$, also $M(\mathsf{H}) \subset \overline{k(\mathsf{H})} = \tilde{\mathsf{H}}$. Wegen (i) ist $\tilde{\mathsf{H}} \subset M(\overline{\mathsf{H}})$; andererseits ergibt die Anwendung des schon bewiesenen Teils von (ii) auf $\overline{\mathsf{H}}$, daß $M(\overline{\mathsf{H}}) \subset \tilde{\overline{\mathsf{H}}} = \tilde{\mathsf{H}}$.

3.7. Bemerkung. Die Relationen $\subset$ in 3.6 (ii) sind i.a. streng.

a) Es sei $X = [0, 1]$, $\mathfrak{A}$ das System der Borel-Mengen über X; für $r \in [0, 1]$ sei P_r das Ein-Punkt-W-Maß $P_r(\{r\}) = 1$. Ist $\varphi \in B(X, \mathfrak{A})$, so ist $f_\varphi(P_r) = \varphi(r)$, also kann über die Parametrisierung $r \to P_r \in \mathsf{H} := \{P_r : r \in [0, 1]\}$ der σ-Körper $\mathscr{B}_0(\mathsf{H})$ mit $\mathfrak{A}$ identifiziert werden. Ist λ ein beliebiges W-Maß über $\mathfrak{A}$, so ist für $\varphi \in B$

$$P_\lambda[\varphi] = \int f_\varphi(P_r)\, d\lambda(r) = \int \varphi(r)\, d\lambda(r) = \lambda[\varphi];$$

also ist $M(\mathsf{H})$ die Menge aller W-Maße über $\mathfrak{A}$, während $k(\mathsf{H})$ nur die W-Maße mit endlichem Träger enthält.

b) Es sei $X = \{1, 2\}$, $\mathfrak{A}$ das System der Potenzmengen und

$$\mathsf{H} = \{P \in \mathsf{P}\colon 0 < P(\{1\}) < 1\}.$$

Offensichtlich ist $\mathsf{H} = M(\mathsf{H})$, während $\tilde{\mathsf{H}} = \overline{\mathsf{H}} = \mathsf{P}$.

3.8. Bemerkungen. Ist $P \in \overline{\mathsf{H}}$ Extremalpunkt von $\tilde{\mathsf{H}}$, so ist das durch $\lambda(\{P\}) = 1$ definierte reguläre W-Maß das einzige über $\mathscr{B}(\overline{\mathsf{H}})$, das P darstellt [2; 2.5.6]. Ist die Menge H_e der Extremalpunkte von $\tilde{\mathsf{H}}$ schwach*-abgeschlossen, so brauchen für 3.6 (i) nur reguläre W-Maße zugelassen zu werden, die von H_e getragen werden [2; 2.5.5]. Aber selbst unter dieser Einschränkung ist das ein $P \in \tilde{\mathsf{H}}$ repräsentierende Maß λ über $\mathscr{B}(\overline{\mathsf{H}})$ i.a. nicht eindeutig bestimmt: Es sei $X = \{1, 2, 3\}$, $\mathfrak{A}$ das System der Teilmengen. Die zubetrachtenden W-Maße über $\mathfrak{A}$ sollen als Tripel geschrieben werden, wobei die i-Komponente die Belegung des Punktes $i \in X$ angibt; es seien $P_1 = (0,\ 1/3,\ 2/3)$, $P_2 = (2/3,\ 1/3, 0)$, $P_3 = (0, 2/3, 1/3)$, $P_4 = (2/3, 0, 1/3)$. Für $\mathsf{H} := \{P_i\colon 1 \leqq i \leqq 4\}$ ist $\mathsf{H} = \overline{\mathsf{H}} = \mathsf{H}_e$. $P := (1/3, 1/3, 1/3) = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) = \frac{1}{2}(P_3 + P_4)$.

4. Ungünstige Verteilungen, Hypothesen und Alternativen

Es seien $B_0 := \{\varphi \in B\colon 0 \leqq \varphi \leqq 1\}$ die Menge der randomisierten Tests, H und K nicht-leere Teilmengen von Q und h eine reellwertige Funktion auf H, $0 \leqq h \leqq 1$. Dann ist $B(h; \mathsf{H}) := \{\varphi \in B_0\colon P[\varphi] \leqq h(P)$ für alle $P \in \mathsf{H}\}$ die Menge der „Tests der Hypothese H zum Niveau h“, $\beta(\varphi; \mathsf{K}) := \inf\{P[\varphi]\colon P \in \mathsf{K}\}$, $\varphi \in B_0$, die „Güte des Tests φ gegen die Alternative K“ und $\bar{\beta}(h; \mathsf{H}, \mathsf{K}) := \sup\{\beta(\varphi, \mathsf{K})\colon \varphi \in B(h; \mathsf{H})\}$. Da $B(h; \mathsf{H})$ zumindest die konstante Funktion $\varphi = \inf\{h(P)\colon P \in \mathsf{H}\}$ enthält, ist die letzte Definition sinnvoll. Üblicherweise ist h eine Konstante $\alpha \in [0, 1]$, doch kann es durchaus zweckmäßig sein, auf Teilen der Hypothese größere Fehler erster Art zugunsten einer besseren Güte in Kauf zu nehmen.

Die schwache* Topologie wird durch die gröbste Uniformität induziert, bezüglich der alle f_φ, $\varphi \in B$, gleichmäßig-stetig sind. Eine bezüglich dieser Uniformität gleichmäßig-stetige Funktion soll schwach*-gleichmäßig-stetig genannt werden. Ist h eine schwach*-gleichmäßig-stetige Funktion auf H, so ist h eindeutig stetig auf $\overline{\mathsf{H}}$ fortsetzbar [6; S. 195].

4.1. Definition. Ist h eine schwach*-gleichmäßig-stetige Funktion auf H, so ist $\bar{h}(P) := \inf\{\lambda[h]\colon \lambda$ reguläres W-Maß auf $(\overline{\mathsf{H}}, \mathscr{B}(\overline{\mathsf{H}}))$ mit $P = P_\lambda\}$ für $P \in \tilde{\mathsf{H}}$.

4.2. Bemerkung. Ist h eine konstante Funktion mit Wert α, so ist $\lambda[\alpha] = \alpha$ für alle W-Maße λ; auch falls $h = f_\psi$, $\psi \in B$, ist $\lambda[h] = P[\psi]$ nur von $P \in \tilde{\mathsf{H}}$ und nicht von dem P repräsentierenden W-Maß λ abhängig. I.a. jedoch ist $\lambda[h] \neq \lambda'[h]$ für $P_\lambda = P_{\lambda'}$ möglich, insbesondere auch $\bar{h}(P) < h(P)$ für $P \in \mathsf{H}$. Ist etwa

$$\mathsf{H} = \{P, P_1, P_2, P_3, P_4\},\ P \text{ und } P_i \text{ aus 3.8, so ist}$$

$$\bar{h}(P) \leqq \operatorname{Min}\{h(P), \tfrac{1}{2}(h(P_1) + h(P_2)), \tfrac{1}{2}(h(P_3) + h(P_4))\}.$$

4.3. Lemma. (i) *Ist h schwach*-gleichmäßig-stetig auf* H, $0 \leqq h \leqq 1$, *so ist* $B(h; \mathsf{H}) = B(\bar{h}, \tilde{\mathsf{H}})$.

(ii) $\beta(\varphi; \mathsf{K}) = \beta(\varphi; \tilde{\mathsf{K}})$ *für jedes* $\varphi \in B_0$.

Somit gilt $\overline{\beta}(h; \mathsf{H}, \mathsf{K}) = \overline{\beta}(\bar{h}; \tilde{\mathsf{H}}, \tilde{\mathsf{K}})$.

Beweis. (i) Da f_φ, $\varphi \in B$, und h auf $\overline{\mathsf{H}}$ schwach*-stetig sind, ist

$$B(h; \mathsf{H}) \subset B(h; \overline{\mathsf{H}}).$$

Wird $P \in \tilde{\mathsf{H}}$ durch λ repräsentiert, so ist für jedes $\varphi \in B(h; \overline{\mathsf{H}})$

$$P[\varphi] = \int_{\overline{\mathsf{H}}} P[\varphi]\, d\lambda(P) \leqq \int h(P)\, d\lambda(P) = \lambda[h].$$

(ii) Die linke Seite von (i) ist nach Definition nicht kleiner als die rechte. Ist andererseits $\beta(\varphi; \mathsf{K}) = \gamma$, so folgt aus 4.2 und (i), daß

$$1 - \varphi \in B(1-\gamma; \mathsf{K}) \subset B(1-\gamma; \tilde{\mathsf{K}}).$$

Lemma 4.3 besagt in der Test-Terminologie: Ist φ ein Test für H gegen K zum Niveau h mit Güte γ, so ist φ sogar ein Test für $\tilde{\mathsf{H}}$ gegen $\tilde{\mathsf{K}}$ zum Niveau $\bar{h}$ mit Güte γ. $\tilde{\mathsf{H}}$ ist darüber hinaus die größte Obermenge von H, für die dieser Satz bei konstantem Niveau für jede Alternative K gilt, wie es in 4.6 und 4.7 präzisiert wird.

4.4. Lemma. *Sind* H *und* K *schwach*-abgeschlossene konvexe disjunkte Teilmengen von* Q, *so ist*

$$\overline{\beta}(\alpha; \mathsf{H}, \mathsf{K}) > \alpha \quad \textit{für jedes} \quad \alpha \in (0,1).$$

Beweis. Wegen 2.1 ist H schwach*-kompakt. Nach einem bekannten Trennungssatz [4; V.2.10] und 2.2 existieren $\varphi \in B$ und $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ mit

$$(*) \qquad P[\varphi] \leqq \varepsilon < \delta \leqq Q[\varphi] \quad \text{für alle} \quad P \in \mathsf{H}, Q \in \mathsf{K}.$$

Da φ beschränkt ist, ist $\zeta := \sup\{\varphi(x)\colon x \in X\}$ und $\eta := \inf\{\varphi(x)\colon x \in X\}$ endlich, und wegen der Ungleichung in (*) ist $\zeta > \eta$. Durch Übergang zu

$$\varphi' := (\varphi - \mathrm{Min}(0, \eta))/(\zeta - \eta)$$

kann angenommen werden, daß $\varphi \in B_0$. Ist $\varepsilon \geqq \alpha$, so ist

$$\psi := (\alpha/\varepsilon)\,\varphi \in B(\alpha; \mathsf{H}) \quad \text{und} \quad \beta(\psi; \mathsf{K}) \geqq (\delta/\varepsilon)\,\alpha > \alpha.$$

Ist $\varepsilon < \alpha$, so ist

$$\psi := [(1-\alpha)\,\varphi + (\alpha - \varepsilon)]/(1-\varepsilon) \in B(\alpha; \mathsf{H})$$

und

$$\beta(\psi; \mathsf{K}) = \alpha + (1-\alpha)(\delta - \varepsilon)/(1-\varepsilon) > \alpha.$$

4.5. Korollar. *Für* $\mathsf{H}, \mathsf{K} \subset \mathsf{Q}$ *sind äquivalent*

(i) $\tilde{\mathsf{H}} \cap \tilde{\mathsf{K}} = \emptyset$,

(ii) *es existiert ein* $\alpha \in (0,1)$ *mit* $\overline{\beta}(\alpha; \mathsf{H}, \mathsf{K}) > \alpha$,

(iii) *für alle* $\alpha \in (0,1)$ *ist* $\overline{\beta}(\alpha, \mathsf{H}, \mathsf{K}) > \alpha$.

Beweis. Wegen 4.4 folgt aus (i) die Aussage (iii) und damit (ii). Gilt umgekehrt (ii), so existiert $\varphi \in B(\alpha; \mathsf{H})$ mit $\beta(\varphi; \mathsf{K}) > \alpha$. Wegen 4.3 ist dann $P[\varphi] \leqq \alpha$ für alle $P \in \tilde{\mathsf{H}}$ und $Q[\varphi] > \alpha$ für alle $Q \in \tilde{\mathsf{K}}$, also gilt (i).

4.6. Korollar. *Es seien* G *und* H *Teilmengen von* Q. $\mathsf{G} \subset \tilde{\mathsf{H}}$, *falls*

(i) $B(\alpha; \mathsf{G}) \supset B(\alpha; \mathsf{H})$ *für ein* $\alpha \in (0,1)$, *oder*

(ii) $\beta(\varphi; \mathsf{G}) \geqq \beta(\varphi; \mathsf{H})$ *für alle* $\varphi \in B_0$.

Beweis. Es sei $P \notin \tilde{\mathsf{H}}$, also $\overline{k(P)} \cap \tilde{\mathsf{H}} = \emptyset$. (i) Nach 4.5 ist $\overline{\beta}(\alpha; \mathsf{H}, P) > \alpha$, also $P \notin \mathsf{G}$. (ii) Nach 4.5 ist $\overline{\beta}(\frac{1}{2}; P, \mathsf{H}) > \frac{1}{2}$, also $P \notin \mathsf{G}$.

4.7. Satz. (i) *Ist h eine schwach*-gleichmäßig-stetige Funktion über* H, $0 \leqq h \leqq 1$, $P \in \tilde{\mathsf{H}}$ *und* $Q \in \tilde{\mathsf{K}}$, *so gilt*

$$(*) \qquad \overline{\beta}(\bar{h}(P); P, Q) \geqq \begin{Bmatrix} \overline{\beta}(h; \mathsf{H}, Q) \\ \overline{\beta}(\bar{h}(P), P, \mathsf{K}) \end{Bmatrix} \geqq \overline{\beta}(h; \mathsf{H}, \mathsf{K}).$$

(ii) *Ist überdies $h \equiv \alpha \in (0, 1)$, so ist $\tilde{\mathsf{H}}$ die größte unter den Mengen $\mathsf{G} \subset \mathsf{Q}$, für die (*) bei beliebigem K für alle $P \in \mathsf{G}$, $Q \in \mathsf{K}$ gilt, und $\tilde{\mathsf{K}}$ die größte unter den Mengen $\mathsf{L} \subset \mathsf{Q}$, für die (*) bei beliebigem H für alle $P \in \mathsf{H}$, $Q \in \mathsf{L}$ gilt.*

Beweis. Da für $\mathsf{H}' \subset \mathsf{H}'' \subset \tilde{\mathsf{H}}$ und $\mathsf{K}' \subset \mathsf{K}'' \subset \mathsf{Q}$

$$(**) \qquad \overline{\beta}(\bar{h}; \mathsf{H}'', \mathsf{K}'') \leqq \overline{\beta}(\bar{h}; \mathsf{H}', \mathsf{K}'),$$

folgt (i) unmittelbar aus 4.3. (ii) Falls $\mathsf{G} \not\subset \tilde{\mathsf{H}}$, gibt es ein $P_0 \in \mathsf{G}$, $P_0 \notin \tilde{\mathsf{H}}$. Für $\mathsf{K} = \{P_0\}$, $P = Q = P_0$ ist nach 4.5 $\overline{\beta}(\alpha; P, Q) = \alpha < \overline{\beta}(\alpha; \mathsf{H}, \mathsf{K})$. Ist $\mathsf{L} \not\subset \tilde{\mathsf{K}}$, so existiert $Q_0 \in \mathsf{L}$, $Q_0 \notin \tilde{\mathsf{K}}$. Für $\mathsf{H} = \{Q_0\}$, $P = Q = P_0$ ist $\overline{\beta}(\alpha; P, Q) = \alpha < \overline{\beta}(\alpha; \mathsf{H}, \mathsf{K})$.

4.8. Definition. Es seien $\mathsf{H}, \mathsf{K} \subset \mathsf{Q}$, h schwach*-gleichmäßig-stetig auf H, $0 \leqq h \leqq 1$, $P \in \tilde{\mathsf{H}}$, $Q \in \tilde{\mathsf{K}}$. Für das Testen von H gegen K zum Niveau h ist

(i) *P ungünstigste Hypothese,* falls $\overline{\beta}(\bar{h}(P); P, \mathsf{K}) = \overline{\beta}(h; \mathsf{H}, \mathsf{K})$,
(ii) *Q ungünstigste Alternative,* falls $\overline{\beta}(h; \mathsf{H}, Q) = \overline{\beta}(h; \mathsf{H}, \mathsf{K})$,
(iii) *(P, Q) simultan ungünstigst,* falls $\overline{\beta}(\bar{h}(P); P, Q) = \overline{\beta}(h; \mathsf{H}, \mathsf{K})$.

Die P, Q darstellenden Maße über $\mathscr{B}(\overline{\mathsf{H}})$, $\mathscr{B}(\overline{\mathsf{K}})$ sind *ungünstigste Verteilungen.*

4.9. Bemerkung. Falls (P, Q) simultan ungünstigst ist, so ist wegen 4.7 (i) P ungünstigste Hypothese, Q ungünstigste Alternative. Umgekehrt jedoch ist nicht notwendig jedes aus einer ungünstigsten Hypothese P und ungünstigsten Alternative Q gebildete Paar (P, Q) simultan ungünstigst: Es sei $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathfrak{A}$ das System der Teilmengen von X, $P_0(\{1\}) = P_0(\{2\}) = P_1(\{4\}) = P_1(\{5\}) = Q_0(\{2\}) = Q_0(\{3\}) = Q_1(\{3\}) = Q_1(\{4\}) = \frac{1}{2}$, $\mathsf{H} = \{P_0, P_1\}$, $\mathsf{K} = \{Q_0, Q_1\}$. Es sei $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$. Nach 3.7 ist $\tilde{\mathsf{H}} = \{P_\varrho = (1-\varrho) P_0 + \varrho P_1 \colon \varrho \in [0, 1]\}$, $\tilde{\mathsf{K}} = \{Q_\tau = (1-\tau) Q_0 + \tau Q_1 \colon \tau \in [0, 1]\}$.

a) Ist $\varphi \in B(\alpha; \mathsf{H})$, so ist $Q_i[\varphi] \leqq \alpha + \frac{1}{2}$ für $i = 0, 1$, also $\beta(\varphi; Q_\tau) \leqq \alpha + \frac{1}{2}$ für alle $\tau \in [0, 1]$; für

$$\varphi(x) := \begin{Bmatrix} 2\alpha & \text{für} \quad x = 2 \quad \text{und} \quad x = 4, \\ 1 & \text{für} \quad x = 3, \\ 0 & \text{sonst}, \end{Bmatrix}$$

wird $\beta(\varphi; \mathsf{K}) = \alpha + \frac{1}{2}$, also $\overline{\beta}(\alpha; \mathsf{H}, \mathsf{K}) = \alpha + \frac{1}{2}$. Nach 4.7 (i) ist jedes $Q \in \tilde{\mathsf{K}}$ ungünstigste Alternative.

b) Ist $\beta(\varphi; \mathsf{K}) > \alpha + \frac{1}{2}$ für ein $\varphi \in B_0$, so ist $P_0[\varphi] > \alpha$ und $P_1[\varphi] > \alpha$ und damit $P_\varrho[\varphi] > \alpha$ für alle $\varrho \in [0, 1]$. Also ist $\beta(\alpha; P, \mathsf{K}) \leqq \alpha + \frac{1}{2}$ für alle $P \in \tilde{\mathsf{H}}$; alle diese P sind somit nach 4.7 (i) ungünstigste Hypothesen.

c) Für

$$\varphi(x) = \begin{Bmatrix} 0 & \text{für} & x = 1, 2, 5, \\ 1 & \text{für} & x = 3, 4 \end{Bmatrix} \quad \text{ist} \quad Q_1[\varphi] = 1, \quad P_0[\varphi] = 0,$$

also $\bar{\beta}(\alpha; P_0, Q_1) = 1 > \alpha + \frac{1}{2}$. Das Paar (P_0, Q_1) ist somit nicht simultan ungünstigst.

Die Betrachtung ungünstigster Hypothesen und Alternativen bezweckt, das Aufsuchen „guter" Tests für H gegen K auf das „guter" Tests für eine einfache Hypothese P gegen eine einfache Alternative Q zu reduzieren, was etwa mit dem Lemma von NEYMAN-PEARSON wesentlich leichter ist (falls P und Q W-Maße sind). Die in der Definition gestellte Forderung „$P \in \tilde{\mathsf{H}}, Q \in \tilde{\mathsf{K}}$" — sie entspricht der klassischen stärkeren Forderung, daß P und Q Mischungen im Sinne von 3.5 sind — bewirkt nach 4.3, daß jeder Test von H gegen K zum Niveau h auch Test von P gegen Q zum Niveau $\bar{h}(P)$ von nicht geringerer Güte ist. Daß „gute" Tests von H gegen K auch „gute" Tests von ungünstigsten Hypothesen gegen K, von H gegen ungünstigste Alternativen sind, soll nach einer Präzisierung des Begriffs „guter" Test gezeigt werden.

4.10. Definition. Unter den Annahmen von 4.8 ist für $\varepsilon \geqq 0$

$$\bar{B}_\varepsilon(h; \mathsf{H}, \mathsf{K}) := \{\varphi \in B(h; \mathsf{H}) \colon \beta(\varphi; \mathsf{K}) \geqq \bar{\beta}(h; \mathsf{H}, \mathsf{K}) - \varepsilon\}$$

die Menge der *ε-Maximintests von* H *gegen* K *zum Niveau h*;

$$\bar{B}(h; \mathsf{H}, \mathsf{K}) := \bar{B}_0(h; \mathsf{H}, \mathsf{K})$$

ist die Menge der *Maximintests von* H *gegen* K *zum Niveau h.*

4.11. Bemerkung. $\bar{B}(h; \mathsf{H}, \mathsf{K})$ ist nicht leer, falls etwa $\mathsf{H}, \mathsf{K} \subset \mathsf{P}$ und $\mathsf{H} \cup \mathsf{K}$ von einem σ-endlichen Maß dominiert wird (vgl. 6.3). I.a. jedoch kann $\bar{B}$ leer sein, während nach Definition von $\bar{\beta}$ die Menge $\bar{B}_\varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$ nicht leer ist.

4.12. Satz. *Unter den Annahmen von* 4.8 *gilt für das Testen von* H *gegen* K *zum Niveau h, daß für alle* $\varepsilon \geqq 0$

$$\bar{B}_\varepsilon(h; \mathsf{H}, \mathsf{K}) \subset \begin{cases} \bar{B}_\varepsilon(\bar{h}(P); P, \mathsf{K}), & \textit{falls} \quad P \textit{ ungünstigste Hypothese}, \\ \bar{B}_\varepsilon(h; \mathsf{H}, Q), & \textit{falls} \quad Q \textit{ ungünstigste Alternative}, \\ \bar{B}_\varepsilon(\bar{h}(P); P, Q), & \textit{falls} \quad (P, Q) \textit{ simultan ungünstig}. \end{cases}$$

Der Satz folgt unmittelbar aus 4.3 und 4.8.

Die Aussage, die 4.12 für ungünstigste Hypothesen macht, ist umkehrbar: Gilt die erste Inklusion für ein $P \in \mathsf{H}$ und für alle $\varepsilon \geqq 0$, oder im Falle $\bar{B}_0(h; \mathsf{H}, \mathsf{K}) \neq \emptyset$ auch nur für $\varepsilon = 0$, so ist P ungünstigste Hypothese. Ist nämlich $\varphi \in \bar{B}_\varepsilon(h; \mathsf{H}, \mathsf{K})$ und gilt die erste Inklusion, so ist

$$\bar{\beta}(h; \mathsf{H}, \mathsf{K}) \geqq \beta(\varphi, \mathsf{K}) \geqq \bar{\beta}(\bar{h}(P); P, \mathsf{K}) - \varepsilon.$$

Bis auf die Tatsache, daß hier mehr Mischungen zugelassen sind, sind somit die in 4.8 definierten ungünstigsten Hypothesen genau die „least favorable mixtures" im Sinn von [15].

Durch die Einführung eines nicht notwendig konstanten Niveaus h ist eine Unsymmetrie zwischen Hypothese und Alternative eingeführt worden, die im Falle konstanten Niveaus i.a. nicht gegeben ist:

4.13. Lemma. *Ist*

$$\alpha \in [0, 1) \quad \textit{und} \quad \beta := \overline{\beta}(\alpha; \mathsf{H}, \mathsf{K}) < 1,$$

so ist

$$\overline{\beta}(1-\beta; \mathsf{K}, \mathsf{H}) = 1 - \alpha.$$

Beweis. Ist $\varphi \in \bar{B}_\varepsilon(\alpha; \mathsf{H}, \mathsf{K})$, so gilt für $\psi := \varrho(1-\varphi)$, $\varrho := (1-\beta)/(1-\beta+\varepsilon)$, daß $\psi \in B(1-\beta; \mathsf{K})$ und $\beta(\psi; \mathsf{H}) \geqq 1 - \alpha - \varepsilon(1-\alpha)/(1-\beta)$; also ist $\overline{\beta}(1-\beta; \mathsf{K}, \mathsf{H}) \geqq 1-\alpha$. Wäre $\overline{\beta}(1-\beta; \mathsf{K}, \mathsf{H}) > 1-\alpha$, so würde ein $\psi \in B\,(1-\beta; \mathsf{K})$ existieren, für das $\beta(\psi; \mathsf{H}) = : 1 - \alpha' > 1 - \alpha$. Damit ergäbe sich für

$$\varphi := \varrho(1-\psi) + (1-\varrho), \qquad \varrho := (1-\alpha)/(1-\alpha'),$$

daß

$$\varphi \in B(\alpha; \mathsf{K}) \quad \text{und} \quad \beta(\varphi; \mathsf{H}) \geqq \varrho\beta + (1-\varrho) > \beta,$$

was $\beta = \overline{\beta}(\alpha; \mathsf{H}, \mathsf{K})$ widerspricht.

4.14. Korollar. *Es sei* $\alpha \in [0, 1)$ *und* $\beta := \overline{\beta}(\alpha; \mathsf{H}, \mathsf{K}) < 1$. *Ist* P *bzw.* Q *bzw.* (P', Q') *ungünstigste Hypothese bzw. Alternative bzw. simultan ungünstigst für das Testen von* H *gegen* K *zum Niveau* α, *so ist* Q *bzw.* P *bzw.* (Q', P') *ungünstigste Hypothese bzw. Alternative bzw. simultan ungünstigst für das Testen von* K *gegen* H *zum Niveau* $1-\beta$.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus 4.2, 4.8, 4.13.

5. Die Existenz ungünstigster Hypothesen und Alternativen

Es seien H, K feste nicht-leere Teilmengen von Q, h eine schwach*-stetige Funktion auf $\overline{\mathsf{H}}$, $0 \leqq h \leqq 1$, (was damit äquivalent ist, daß h stetige Fortsetzung einer schwach*-gleichmäßig-stetigen Funktion auf H ist). Um das Testproblem für H gegen K zum Niveau h als lineares Programm formulieren zu können, werden die Banachräume

$$Y = B \times \mathbb{R}, \quad Z = C(\overline{\mathsf{H}}) \times C(\overline{\mathsf{K}}) \times B$$

und die lineare Abbildung T von Y in Z betrachtet, die durch

$$T(\varphi, \varrho) := (f_\varphi | \overline{\mathsf{H}}, \varrho - f_\varphi | \overline{\mathsf{K}}, \varphi), \qquad \varphi \in B, \varrho \in \mathbb{R},$$

definiert ist. (Ist $\mathscr{T}$ ein topologischer Raum, so bezeichnet $C(\mathscr{T})$ den Banach-Raum der über $\mathscr{T}$ stetigen reellwertigen Funktionen in der Sup-Norm.) Dieser Ansatz entspricht dem in [8; S. 293] vorgeschlagenen bei Abänderung von Z und T. Da die Elemente aus $\overline{\mathsf{H}}$, $\overline{\mathsf{K}}$ W-Inhalte sind, ist die Norm der Elemente $f_\varphi | \overline{\mathsf{H}}$ und $f_\varphi | \overline{\mathsf{K}}$ höchstens $\|\varphi\|$, also

$$\|T(\varphi, \varrho)\| \leqq (3\,\|\varphi\|^2 + \varrho^2)^{1/2} \leqq 3\,\|(\varphi, \varrho)\|,$$

und damit T stetig. Weiter ist

$$y_0^*(\varphi, \varrho) := \varrho, \quad \varphi \in B, \quad \varrho \in \mathbb{R}$$

ein stetiges lineares Funktional auf Y. Als Positivkegel werden wie üblich definiert: $\mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R}\colon r \geqq 0\}$,

$$B_+ := \{\varphi \in B\colon \varphi(x) \geqq 0 \text{ für alle } x\}$$
$$C(\mathscr{T})_+ := \{f \in C(\mathscr{T})\colon f(t) \geqq 0 \text{ für alle } t \in \mathscr{T}\},$$
$$Y_+ := B_+ \times \mathbb{R}_+, \quad Z_+ := C(\overline{\mathsf{H}})_+ \times C(\overline{\mathsf{K}})_+ \times B_+;$$

$y \geqq 0$ bedeute $y \in Y_+$, $z \geqq 0$ bedeute $z \in Z_+$.

5.1. Lemma. *Mit* $z_0\colon = (h, 0, 1) \in Z$ *und* $Y_0\colon = \{y \in Y_+\colon z_0 - Ty \geqq 0\}$ *gilt* $\overline{\beta}(h;\ \mathsf{H},\ \mathsf{K}) = \sup\{y_0^*(y)\colon y \in Y_0\}$. *Überdies ist* $\{y \in Y_0\colon y_0^*(y) = \overline{\beta}(h;\ \mathsf{H},\ \mathsf{K})\} = \overline{B}(h; \mathsf{H}, \mathsf{K}) \times \{\overline{\beta}(h; \mathsf{H}, \mathsf{K})\}$.

In der Sprache des linearen Programmierens besagt 5.1: $\beta(h; \mathsf{H}, \mathsf{K})$ ist der *Wert* des linearen Programms „$\sup y_0^*$! unter den Nebenbedingungen $z_0 - Ty \geqq 0$“, und die ersten Komponenten der *Lösungen* sind genau die Maximintests von H gegen K zum Niveau h.

Der *Beweis* ergibt sich unmittelbar aus den vorhergehenden Definitionen und der Definition von $\overline{\beta}$ und $\overline{B}$.

Wird T^* als zu T duale lineare Abbildung von Z^* in Y^* definiert, d.h. $(T^*z^*)(y) = z^*(Ty)$ für alle $y \in Y$, und

$$Y_+^*\colon = \{y^* \in Y\colon y^*(y) \geqq 0 \text{ für alle } y \in Y_+\},$$
$$Z_+^*\colon = \{z^* \in Z^*\colon z^*(z) \geqq 0 \text{ für alle } z \in Z_+\},$$

so gilt für das „duale Programm“ folgender Satz [3; „Schwacher Dualitätssatz“, S. 110]:

5.2. Satz. *Mit* $Z_0^* = \{z^* \in Z_0^*\colon T^*z^* - y_0^* \geqq 0\}$ *gilt:*

$$(*) \qquad \sup\{y_0^*(y)\colon y \in Y_0\} = \min\{z^*(z_0)\colon z^* \in Z_0^*\},$$

falls ein $y_0 \in Y_+$ *existiert derart, daß* $z_0 - Ty_0$ *innerer Punkt von* Z_+ *ist, und falls die linke Seite von* (*) *endlich ist.*

„min“ bedeutet: „Infimum und das Infimum wird angenommen“.

5.3. Satz. *Falls* $\inf\{h(P)\colon P \in \mathsf{H}\} =\colon \alpha > 0$, *gilt*

$$(*) \qquad \beta(h;\ \mathsf{H},\ \mathsf{K}) = \min\{r\bar{h}(P) + (Q - rP)^+(X)\colon r \in \mathbb{R}_+,\ P \in \tilde{\mathsf{H}},\ Q \in \tilde{\mathsf{K}}\}.$$

Dabei bedeutet $(Q - rP)^+$ *den Positivteil von* $Q - rP \in ba(X, \mathfrak{A})$ *bei der Jordan-Zerlegung* [4; III. 1.8].

Beweis. Es ist $y_0\colon = (\alpha/2, \alpha/4)$ innerer Punkt von Y_+ und

$$z_0 - Ty_0 = \{h, 0, 1\} - \{\alpha/2, -\alpha/4, \alpha/2\} \geqq \{\alpha/2, \alpha/4, 1 - \alpha/2\}$$

innerer Punkt von Z_+. Nach 5.1 ist die linke Seite von 5.2 (*) endlich, also gilt nach 5.2

$$\overline{\beta}(h; \mathsf{H}, \mathsf{K}) = \min\{z^*(z_0)\colon z^* \in Z_0^*\}.$$

Da sich jedes $z^* \in Z^*$ als Summe eines Elements aus $C(\overline{\mathsf{H}})^*$, $C(\overline{\mathsf{K}})^*$ und B^* darstellen läßt [7; S. 290], ist $Z_+^* = \{(f, g, \varphi) \in Z \to \lambda[f] + \mu[g] + \nu[\varphi]\colon \lambda$ reguläres Borel-Maß über $\overline{\mathsf{H}}$, μ reguläres Borel-Maß über $\overline{\mathsf{K}}$, ν Inhalt über $(X, \mathfrak{A})\}$

und für $z^* = \lambda + \mu + \nu \in Z_+^*$, $(\varphi, \varrho) \in Y$:

$$\begin{aligned}(T^* z^* - y_0^*)(\varphi, \varrho) &= z^*(T(\varphi, \varrho)) - y_0^*(\varphi, \varrho)\\ &= \lambda[f_\varphi|\,\overline{\mathsf{H}}] + \mu[\varrho - f_\varphi|\,\overline{\mathsf{K}}] + \nu[\varphi] - \varrho\\ &= \lambda[f_\varphi|\,\overline{\mathsf{H}}] - \mu[f_\varphi|\,\overline{\mathsf{K}}] + \nu[\varphi] + \varrho(\mu[1] - 1), \qquad \text{also}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Z_0^* = \{z^* = \lambda + \mu + \nu \colon &\lambda[f_\varphi|\,\overline{\mathsf{H}}] - \mu[f_\varphi|\,\overline{\mathsf{K}}] + \nu[\varphi]\\ &+ \varrho(\mu[1] - 1) \geqq 0 \text{ für alle } \varphi \in B_0,\ \varrho \in \mathbb{R}_+;\ \lambda, \mu, \nu \text{ wie bei } Z_+^*\}.\end{aligned}$$

Ist $\mu[1] < 1$, so gibt es kein λ, ν derart, daß $\lambda + \mu + \nu \in Z_0^*$; also ist $\mu[1] \geqq 1$ für $z^* \in Z_0^*$. Ist $z^* = \lambda + \mu + \nu \in Z_0^*$ mit $\mu[1] > 1$, so $z_1^* := z^*/\mu[1] \in Z_0^+$ und $z_1^*(z_0) \leqq z^*(z_0)$, also wegen 3.6 und der Definition von z_0 in 5.1:

$$\overline{\beta}(h;\, \mathsf{H}, \mathsf{K}) = \min\{r\lambda[h] + \nu[1] \colon rP[\varphi] - Q[\varphi] + \nu[\varphi] \geqq 0 \text{ für alle } \varphi \in B_0;$$

$$\lambda \text{ reguläres } W\text{-Maß über } \overline{\mathsf{H}},\ P = P_\lambda,\ Q \in \tilde{\mathsf{K}},\ \nu \text{ Inhalt über } (X, \mathfrak{A}),\ r \in \mathbb{R}_+\}.$$

Es sei nun durch λ, P, Q, ν, r eine Stelle gegeben, an der das Minimum angenommen wird. Ist $\lambda[h] \neq \bar{h}(P)$, so gibt es nach 4.1 wegen $P \in \tilde{\mathsf{H}}$ ein reguläres W-Maß λ' mit $P_{\lambda'} = P$ und $\lambda'[h] < \lambda[h]$. Damit ist die Nebenbedingung auch für $P_{\lambda'}$ erfüllt, aber $r\lambda'[h] < r\lambda[h]$ für $r > 0$. Also ist $r\lambda[h] = r\bar{h}[P]$. Wäre weiter $\nu[1] < (Q - rP)^+[1] = \sup\{(Q - rP)(A) \colon A \in \mathfrak{A}\}$, so gäbe es ein $A \in \mathfrak{A}$ mit

$$\nu(A) \leqq \nu[1] < (Q - rP)(A);$$

also würde durch $\varphi = \chi_A$ die Nebenbedingung verletzt. Da $\nu' := (Q - rP)^+$ die Nebenbedingung erfüllt und $\nu'[1] \leqq \nu[1]$, ist 5.3 bewiesen.

5.4. Bemerkung. Falls $\alpha = 0$, ist 5.3 (*) i.a. falsch. Es sei etwa $\mathsf{H} = \{P\} = \{N(0, 1)\}$, $\mathsf{H} = \{Q\} = \{N(1, 1)\}$. Dann ist $\beta(0;\, \mathsf{H}, \mathsf{K}) = 0$, aber $r\bar{h}(P) + (Q - rP)^+(X) = (Q - rP)^+(X) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{x > \frac{1}{2} + \ln r} e^{-x^2/2}\,(e^{x - 1/2} - r)\,dx > 0$ für jedes $r \in \mathbb{R}_+$.

5.5. Satz. *Es sei* $\inf\{h(P) \colon P \in \mathsf{H}\} > 0$. $(P, Q) \in \tilde{\mathsf{H}} \times \tilde{\mathsf{K}}$ *ist genau dann simultan ungünstigst für das Testen von* H *gegen* K *zum Niveau* h, *wenn ein* $r \in \mathbb{R}_+$ *derart existiert, daß* (r, P, Q) *Minimalstelle für* 5.3 (*) *ist.*

Beweis. Nach 5.3 existiert zu $P \in \tilde{\mathsf{H}}$, $Q \in \tilde{\mathsf{K}}$ ein $r \in \mathbb{R}_+$ derart, daß

$$\overline{\beta}(\bar{h}(P);\, P, Q) = r\bar{h}(P) + (Q - rP)^+(X).$$

(i) Ist (P, Q) simultan ungünstigst, so ist $\overline{\beta}(\bar{h}(P);\, P, Q) = \overline{\beta}(h;\, \mathsf{H}, \mathsf{K})$, also (r, P, Q) Minimalstelle von 5.3 (*).

(ii) Ist (r, P, Q) Minimalstelle von 5.3 (*), so ist

$$\begin{aligned}\overline{\beta}(h;\, \mathsf{H}, \mathsf{K}) &= r\bar{h}(P) + (Q - rP)^+(X)\\ &\geqq \min\{s\,\bar{h}(P) + (Q - sP)^+(X) \colon s \in \mathbb{R}_+\} = \overline{\beta}(\bar{h}(P);\, P, Q),\end{aligned}$$

also (P, Q) simultan ungünstigst wegen 4.7.

5.6. Korollar. *Ist* $\inf\{h(P) \colon P \in \mathsf{H}\} > 0$, *so existiert ein simultan ungünstigstes Paar* (P, Q) *für das Testen von* H *gegen* K *zum Niveau* h.

Beweis. Folgt unmittelbar aus 5.3 und 5.5.

Ist P ungünstigstes Hypothese, Q ungünstigste Alternative, so ist nach 4.9 das Paar (P, Q) nicht notwendig simultan ungünstigst. Jedoch läßt sich jede ungünstigste Hypothese (Alternative) durch eine geeignete ungünstigste Alternative (Hypothese) zu einem simultan ungünstigsten Paar ergänzen:

5.7. Korollar. *Ist* $\inf\{h(P)\colon P \in \mathsf{H}\} > 0$, *so gilt für das Testen von* H *gegen* K *zum Niveau* h: *Zu jeder ungünstigsten Hypothese* P *(Alternative* Q*) existiert eine ungünstigste Alternative* Q *(Hypothese* P*) derart, daß* (P, Q) *simultan ungünstigst ist.*

Beweis. Ist $P \in \tilde{\mathsf{H}}$ (bzw. $Q \in \tilde{\mathsf{K}}$), so existiert nach 5.3 ein $r \in \mathbb{R}_+$ und $Q \in \tilde{\mathsf{K}}$ (bzw. $P \in \tilde{\mathsf{H}}$) derart, daß $\overline{\beta}(\overline{h}(P); P, \mathsf{K})$ (bzw. $\overline{\beta}(h; \mathsf{H}, Q)) = r\overline{h}(P) + (Q - rP)^+(X)$. Ist P (bzw. Q) ungünstigst, so ist wegen 4.8 (r, P, Q) Minimalstelle von 5.3 (*). Mit 5.5 folgt daraus, daß (P, Q) simultan ungünstigst ist.

5.8. Bemerkung. Wenn auch für $\inf\{h(P)\colon P \in \mathsf{H}\} = 0$ mit der hier benutzten Methode kein simultan ungünstigstes Paar nachgewiesen werden kann, so existiert doch zumindest für $h \equiv 0$ eine ungünstigste Alternative in $\overline{\mathsf{K}}$: Wäre $\overline{\beta}(0; \mathsf{H}, Q) > \beta \colon= \overline{\beta}(0; \mathsf{H}, \mathsf{K})$ für alle $Q \in \overline{\mathsf{K}}$, so würde zu jedem $Q \in \overline{\mathsf{K}}$ ein $\varphi_Q \in B(0; \mathsf{H})$ existieren mit $Q[\varphi_Q] =\colon \beta_Q > \beta$. Da $\overline{\mathsf{K}}$ schwach*-kompakt ist, gäbe es eine endliche Menge $\mathsf{K}_0 \subset \mathsf{K}$, so daß für jedes $Q' \in \overline{\mathsf{K}}$ ein $Q \in \mathsf{K}_0$ existiert mit $Q'[\varphi_Q] > \frac{1}{2}(\beta_Q + \beta)$. Für $\varphi \colon= \max\{\varphi_Q\colon Q \in \mathsf{K}_0\} \in B(0; \mathsf{H})$ wäre dann $\beta(\varphi; \mathsf{K}) > \min\{\frac{1}{2}(\beta_Q + \beta)\colon Q \in \mathsf{K}_0\} > \beta$ im Widerspruch zur Definition von β.

5.9. Korollar. *Ist* $\inf\{h(P)\colon P \in \mathsf{H}\} > 0$, *so ist* P *ungünstigste Hypothese,* Q ungünstigste Alternative, (P', Q') *simultan ungünstigst für das Testen von* H *gegen* K *zum Niveau* h *genau dann, wenn*

$$\overline{\beta}(\overline{h}(P); P, \mathsf{K}) = \inf\{\overline{\beta}(\overline{h}(P); P, \mathsf{K})\colon P \in \tilde{\mathsf{H}}\},$$
$$\overline{\beta}(h; \mathsf{H}, Q) = \inf\{\overline{\beta}(h; \mathsf{H}, Q)\colon Q \in \tilde{\mathsf{K}}\},$$
$$\overline{\beta}(\overline{h}(P'); P', Q') = \inf\{\overline{\beta}(\overline{h}(P); P, Q)\colon P \in \tilde{\mathsf{H}},\ Q \in \tilde{\mathsf{K}}\}.$$

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus 4.7, 4.8 und 5.6. Die in 5.9 formulierte Eigenschaft ungünstigster Verteilungen entspricht der üblichen Definition, etwa in [11]; sie ist jedoch i.a. schwächer, da das Infimum größerer Mengen eingeht.

Analog zu Satz 7 in [8] erlaubt die durch 5.3 gegebene Darstellung ungünstigster Hypothesen und Alternativen eine Charakterisierung der Maximintests:

5.10. Satz. *Es sei* $\inf\{h(P)\colon P \in \mathsf{H}\} > 0$ *und* $\varphi \in B(h; \mathsf{H})$. $\varphi \in \bar{B}(h; \mathsf{H}, \mathsf{K})$ *genau dann, wenn* $r \in \mathbb{R}_+$ *und reguläre W-Maße* λ *über* $\mathscr{B}(\overline{\mathsf{H}})$, μ *über* $\mathscr{B}(\overline{\mathsf{K}})$ *derart existieren, daß*

(1) $(P_\mu - rP_\lambda)^+[\varphi] = (P_\mu - rP_\lambda)^+[1], \quad (P_\mu - rP_\lambda)^-[\varphi] = 0,$

(2) $Q[\varphi] = \beta(\varphi, \mathsf{K})$ *für* μ*-fast alle* $Q \in \overline{\mathsf{K}}$,

(3) $rP[\varphi] = rh(P)$ *für* λ*-fast alle* $P \in \overline{\mathsf{H}}$.

Falls P_μ, P_λ *W-Maße sind,* p_μ *und* p_λ *deren Dichten bezüglich* $P_\mu + P_\lambda$, *ist* (1) *äquivalent mit*

$$(1') \qquad \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad p_\mu(x) > r\,p_\lambda(x) \\ 0 & \text{für} \quad p_\mu(x) < r\,p_\lambda(x) \end{cases} \Bigg\}\ \text{für } (P_\mu + P_\lambda)\text{-fast alle } x.$$

Beweis. Für alle $\varphi \in B(h; \mathsf{H})$ und alle Minimalstellen $(r, P_\lambda, P_\mu) \in \mathbb{R}_+ \times \tilde{\mathsf{H}} \times \tilde{\mathsf{K}}$ von 5.3 (*) gilt

$$(*) \qquad \bar{\beta}(h; \mathsf{H}, \mathsf{K}) - r\bar{h}(P_\lambda) = (P_\mu - r\,P_\lambda)^+[1] \geqq (P_\mu - r\,P_\lambda)^+[\varphi] \\ \geqq P_\mu[\varphi] - r\,P_\lambda[\varphi] \geqq \beta(\varphi; \mathsf{K}) - r\bar{h}(P_\lambda).$$

Einserseits können in (*) alle Zeichen $\geqq$ durch $=$ genau dann ersetzt werden, wenn (1)—(3) gilt. Andrerseits stimmen die linke und die rechte Seite von (*) genau dann überein, wenn $\beta(\varphi; \mathsf{K}) = \bar{\beta}(h; \mathsf{H}, \mathsf{K})$, also $\varphi \in B(h; \mathsf{H}, \mathsf{K})$.

5.11. Bemerkung. Aus dem Beweis geht hervor, daß ein Maximintest φ die Bedingungen (1)—(3) nicht nur für *ein* Paar (λ, μ) ungünstiger Verteilungen, sondern sogar für *alle* solche Paare erfüllen muß, für die $r\lambda[h] = r\bar{h}(P_\lambda)$.

6. Ungünstigste Hypothesen und Alternativen im Bereich der W-Maße

In der Testtheorie der Mathematischen Statistik sind Hypothese H und Alternative K Mengen von W-Maßen, und ungünstigste Hypothesen und Alternativen nur von Interesse, wenn sie W-Maße sind, da dann das Lemma von NEYMAN-PEARSON (das in 5.10 mit (1′) anstatt (1) formuliert ist) die Bestimmung der Maximintestes erleichtert. Das Arbeiten mit Inhalten ist zum einen schwierig, weil ein Inhalt nicht eindeutig durch seine Einschränkung auf einen $\mathfrak{A}$ erzeugenden Ring bestimmt ist, zum anderen im Hinblick auf 5.10, weil für Vorzeichen-Inhalte i.a. keine Hahn-Jordan-Zerlegung möglich ist.

Mit 3.3, 3.6, 4.9, 5.6 und 2.3 ergibt sich unmittelbar:

6.1. Satz. *Sind* H *und* K *nichtleere Teilmengen von* P, h *eine schwach*-gleichmäßig-stetige Funktion über* H *mit* $0 \leqq h \leqq 1$ *und* $\inf\{h(P): P \in \mathsf{H}\} > 0$, *so existiert für das Testen von* H *gegen* K *zum Niveau* h *eine ungünstigste Hypothese in* P, *eine ungünstigste Alternative in* P, *bzw. ein simultan ungünstigstes Paar in* $\mathsf{P} \times \mathsf{P}$, *wenn* H, K, *bzw.* H *und* K *in* P *relativ schwach*-kompakt oder relativ schwach*-folgenkompakt ist.*

Ein Beispiel für die Nichtexistenz einer ungünstigsten Hypothese wird in [10] gegeben:

$$\mathsf{H}:= \left\{P_n := \frac{1}{2}\left(N\left(\frac{1}{n}, 1\right) + N(n, 1)\right): n \geqq n(\alpha)\right\}, \qquad \mathsf{K} := \{N(0,1)\}.$$

Um dies Beispiel auch im Fall der parameterfreien Theorie verwenden zu können, ist lediglich zu zeigen, daß $\mathsf{L} := \{\sum r_n P_n : r_n \geqq 0,\ \sum r_n = 1\} = \tilde{\mathsf{H}} \cap \mathsf{P}$. Offensichtlich ist $\mathsf{L} \subset \tilde{\mathsf{H}} \cap \mathsf{P}$. Weiter ist L normabgeschlossen:

Ist $P \in \mathsf{P}$ und $\lim\limits_{i\to\infty} \| P - \sum r_{ni} P_n \| = 0$, $r_{ni} \geqq 0$ und $\sum r_{ni} = 1$, so kann o.B.d.A. (durch Übergang zu einer Teilfolge) angenommen werden, daß $\lim\limits_{i\to\infty} r_{ni} =: r_n$ existiert. Wäre $\sum r_n > 1$, so für ein geeignetes n_0 und alle hinreichend großen i auch $\sum\limits_{n \leqq n_0} r_{ni} > 1$, was unmöglich ist. Wäre $\sum r_n = 1 - 2\delta < 1$, so existierte zu jedem n ein $i(n)$ derart, daß $\sum\limits_{n \geqq n_0} r_{ni} > \delta$ für alle $i \geqq i(n_0)$ und damit

$$\sum_n r_{ni} P_n([n_0, +\infty)) > \delta/4 \quad \text{für alle} \quad i \geqq i(n_0),$$

also $P([n_0, +\infty)) > \delta/4$ für alle n_0, was ebenfalls unmöglich ist. Somit ist $P = \sum r_n P_n \in \mathsf{L}$. Als norm-abgeschlossene konvexe Menge ist L schwach- [4, V. 3.13] und damit nach 2.4 schwach*-abgeschlossen in P, also $\overline{k(\mathsf{H})} \cap \mathsf{P} \subset \mathsf{L}$.

6.2. Bemerkung. Die Kompaktheitsbedingung in 6.1 sichert auch die Existenz ungünstigster Verteilungen für das Testen von $\mathsf{H}^{(n)} = \{P^{(n)}: = n$-faches unabhängiges Produkt von P, $P \in \mathsf{H}\}$ gegen $\mathsf{K}^{(n)}$. In [13; Seite 146] wird nämlich gezeigt, daß die relativ schwache* Kompaktheit von H in P die von $\mathsf{H}^{(n)}$ impliziert $(n \geqq 1)$.

Die Aussage „$\overline{\beta}(h; \mathsf{H}, \mathsf{K}) = \min \overline{\beta}(h(P), P, Q)$" gilt also nicht, wenn auf der rechten Seite nur Elemente $P \in \tilde{\mathsf{H}} \cap \mathsf{P}$, $Q \in \tilde{\mathsf{K}} \cap \mathsf{P}$ zugelassen werden. Sind jedoch die Familien H, K durch ein σ-endliches (und damit auch durch ein endliches) Maß dominiert, so gilt $\overline{\beta}(h; \mathsf{H}, \mathsf{K}) = \inf\{\overline{\beta}(\bar{h}(P); P, Q): P \in k(\mathsf{H}), Q \in k(\mathsf{K})\}$. Eine Analyse des Beweises des „schwachen Dualitätssatzes" in [8; Satz 4] zeigt nämlich, daß die Voraussetzungen über die Existenz meßbar parametrisierter Dichten nicht benutzt werden. Da der Beweis dieser Aussage mit dem der Existenz eines Maximintests verbunden werden kann, soll er hier nochmals angeführt werden.

6.3. Satz. *Es seien* H, K *nichtleere Teilmengen von* P, h, $0 \leqq h \leqq 1$, *eine schwach*-gleichmäßig-stetige Funktion auf* H *mit* $\inf\{h(P): P \in \mathsf{H}\} > 0$ *und* m *ein* $\mathsf{H} \cup \mathsf{K}$ *dominierendes endliches Maß. Dann gilt*

$$(*) \qquad \begin{aligned} \overline{\beta}(h; \mathsf{H}, \mathsf{K}) &= \inf\{r\bar{h}(P) + (Q - rP)^+(X): (r, P, Q) \in \mathbb{R}_+ \times k(\mathsf{H}) \times k(\mathsf{K})\} \\ &= \inf\{\overline{\beta}(\bar{h}(P); P, Q): P \in k(\mathsf{H}), Q \in k(\mathsf{K})\} \end{aligned}$$

und $\bar{B}(h; \mathsf{H}, \mathsf{K}) \neq \emptyset$.

Beweis. Nach 5.3 gilt die zweite Gleichung von (*) und mit 3.6

$$\overline{\beta}(h; \mathsf{H}, \mathsf{K}) \leqq \gamma: = \inf\{r\bar{h}(P) + (Q - rP)^+(X): (r, P, Q) \in \mathbb{R}_+ \times k(\mathsf{H}) \times k(\mathsf{K})\}.$$

Zum Beweis von (*) genügt es also, $\overline{\beta}(h; \mathsf{H}, \mathsf{K}) \geqq \gamma$ zu zeigen.

a) Nach dem Satz von ALAOGLU ist die abgeschlossene Einheitskugel in $L_\infty(X, \mathfrak{A}, m)$ $ca(m)$-kompakt, da $L_1(X, \mathfrak{A}, m) \cong ca(m)$ und $L_1^*(X, \mathfrak{A}, m) \cong L_\infty(X, \mathfrak{A}, m)$. Da für jedes $A \in \mathfrak{A}$ das Maß m_A: $m_A(A') = m(A \cap A')(A' \in \mathfrak{A})$ in $ca(m)$ liegt, ist die den Testfunktionen entsprechende Menge in L_∞ $ca(m)$-kompakt:

$$C: = \{\varphi \in L_\infty: 0 \leqq \varphi(x) \leqq 1 \text{ für } m\text{-fast alle } x \in X\} = \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} \{\varphi \in L_\infty: 0 \leqq m_A[\varphi] \leqq m_A[1]\}$$

ist als Durchschnitt $ca(m)$-abgeschlossener Mengen eine $ca(m)$-abgeschlossene Teilmenge der Einheitskugel.

b) Ist H_0 eine endliche Teilmenge von H, $\bar{h}_{\mathsf{H}_0}(P): = \inf\{\lambda[h]: \lambda$ W-Maß auf $\mathsf{H}_0, P_\lambda = P\}$ und K_0 eine endliche Teilmenge von K, so existiert nach 5.3 $(r, P, Q) \in \mathbb{R}_+ \times k(\mathsf{H}) \times k(\mathsf{K})$ mit

$$\overline{\beta}(h; \mathsf{H}_0, \mathsf{K}_0) = r\bar{h}_{\mathsf{H}_0}(P) + (Q - rP)^+(X) \geqq \gamma,$$

da $\bar{h}(P) \leqq \bar{h}_{\mathsf{H}_0}(P)$ für $P \in \mathsf{H}_0$. Es ist also für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge

$$C_\varepsilon(\mathsf{H}_0, \mathsf{K}_0): = \{\varphi \in C: P[\varphi] \leqq h(P) \text{ für } P \in \mathsf{H}_0, Q[\varphi] \geqq \gamma - \varepsilon \text{ für } Q \in \mathsf{K}_0\}$$

eine $ca(m)$-abgeschlossene nichtleere Teilmenge von C. Sind $\varepsilon_i > 0$, H_i endliche Teilmenge von H, K_i endliche Teilmenge von K, $(i = 1, \ldots, n)$, so ist mit

$$\varepsilon = \min\{\varepsilon_i\colon 1 \leqq i \leqq n\}, \qquad \mathsf{H}_0 = \bigcup \mathsf{H}_i, \qquad \mathsf{K}_0 = \bigcup \mathsf{K}_i,$$
$$\bigcap C_{\varepsilon_i}(\mathsf{H}_i, \mathsf{K}_i) \supset C_\varepsilon(\mathsf{H}_0, \mathsf{K}_0) \neq \emptyset.$$

Da C kompakt ist, existiert also ein $\varphi \in \bigcap \{C_\varepsilon(P, Q)\colon \varepsilon > 0, P \in \mathsf{H}, Q \in \mathsf{K}\}$. Nach Definition ist $P[\varphi] \leqq h(P)$ auf H, $Q[\varphi] \geqq \gamma$ auf K, also $\bar{\beta}(h; \mathsf{H}, \mathsf{K}) \geqq \gamma$ und $\bar{B}(h; \mathsf{H}, \mathsf{K}) \neq \emptyset$.

6.4. Bemerkung. Für jedes $\varphi \in B_0$ ist f_φ eine schwach*-stetige Funktion, also $f := \sup\{f_\varphi\colon \varphi \in B(h; \mathsf{K})\}$ eine nach unten schwach*-halbstetige Funktion. Ist $\mathsf{K} \cap \mathsf{P}$ schwach*-kompakt, so nimmt f auf $\mathsf{K} \cap \mathsf{P}$ sein Infimum an [2; S. 13]. Somit folgt mit 6.3, in dessen Beweis die Aussage 5.3 nur für endliche Mengen H, K einging, die Existenz einer ungünstigsten Alternative bei relativ schwach*-kompaktem K in P, falls H dominiert ist. Der so skizzierte Beweisgang entspricht dem WALDschen [17].

Falls eine der beiden Mengen $\mathsf{H}, \mathsf{K} \subset \mathsf{P}$ nicht dominiert ist, kann 6.3(*) verletzt werden: Es sei $X = [0, 1]$, $\mathfrak{A}$ der σ-Körper der Borelmengen, P_r das Ein-Punkt-Maß auf $r \in [0, 1]$, P' das Lebesgue-Maß auf $[0, 1]$ und

$$\mathsf{H} := \{P'\}, \qquad \mathsf{K} := \{P_r\colon r \in [0, 1]\}.$$

$k(\mathsf{K})$ ist die Menge der W-Maße Q mit endlichem Träger über $[0, 1]$. Ist also $\alpha \in [0, 1]$, so wird durch

$$\varphi(x) = \begin{Bmatrix} 1 & \text{für} \quad Q(\{x\}) > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{Bmatrix}$$

ein Test für H gegen $Q \in k(\mathsf{K})$ zum Niveau α und Güte 1 gegeben. Andererseits jedoch ist nach 3.8 $M(\mathsf{K})$ die Menge aller W-Maße über $(X, \mathfrak{A})$ und somit nach 3.6 $\mathsf{H} \subset \overline{k(\mathsf{K})}$; also ist wegen 4.5 $\bar{\beta}(\alpha; \mathsf{H}, \mathsf{K}) = \alpha$.

Wie schon in 6.4 bemerkt wurde, läßt sich das Aufsuchen einer ungünstigsten Alternative unter den spieltheoretischen Ansatz WALD's einordnen, indem man $B(h; \mathsf{H})$ als die Strategienmenge des Spielers 1, K als die des Spielers 2 und $P[\varphi]$ auf $B(h; \mathsf{H}) \times \mathsf{K}$ als Auszahlungsfunktion einführt. Da die in [17], (2.84), definierte schwache Kompaktheit der Strategienmenge des Spielers 2 wegen der Linearität der hier benutzten Auszahlungsfunktion die schwache* Kompaktheit von K bedeutet, ergibt sich die in 6.1 behauptete Existenz einer ungünstigsten Verteilung aus [17], Th. 2.20 und 2.25 bei separablem $\mathfrak{A}$. Falls $\mathfrak{A}$ separabel ist, ergibt sich weiter 6.3 aus [17], Th. 2.25 und Vertauschen der beiden Spieler. Das Aufsuchen einer ungünstigsten Hypothese läßt sich zwar im Falle konstanten Niveaus h mit 4.14 auf das obige Problem reduzieren, bei nichtkonstantem Niveau bietet sich jedoch keine spieltheoretische Interpretation. Das simultane Bestimmen ungünstigster Hypothesen und Alternativen kann bei konstantem Niveau durch den Ansatz in [9] spieltheoretisch formuliert werden, indem eine Linearkombination der Fehler erster und zweiter Art zu minimieren ist. Die Erwähnung der Resultate des Kapitels 2 aus [17] erscheint angebracht, da etwa in [10] für die Existenz ungünstigster Alternativen die Resultate des Kapitels 3 zitiert werden und dabei mit Assumption 3.7 die Kompaktheit von K in der Norm-Topologie gefordert wird.

Die Voraussetzungen von 6.1, etwa die schwache* Kompaktheit von H, sichert die Existenz einer ungünstigsten Hypothese, welches auch die Alternative K sein mag. In [10] wird für eine Familie H von W-Maßen über dem $\mathbb{R}^n$, die durch Parameter aus dem $\mathbb{R}^k$ stetig indizierte Dichten bezüglich des Lebesgue-Maßes besitzen, die Existenz ungünstigster Hypothesen gegen Alternativen gezeigt, die sich durch geeignete Testfunktionen beliebig scharf von Teilen der Hypothese trennen lassen. Dieser Satz wurde in [14] und [16] auf in der Normtopologie lokalkompakte Hypothesen verallgemeinert. Lemma 3.3 und Korollar 5.6 erlauben es, den Satz auf Hypothesen zu übertragen, die sich von K beliebig scharf bis auf einen schwach*-kompakten Teil trennen lassen:

6.5. Satz. *Es seien* $\mathsf{H}, \mathsf{K} \subset \mathsf{P}$, h *eine schwach*-gleichmäßig-stetige Funktion auf* H, $0 \leqq h \leqq 1$, $\alpha := \inf\{h(P)\colon P \in \mathsf{H}\} > 0$ *und* $\gamma := \overline{\beta}(h; \mathsf{H}, \mathsf{K}) < 1$. *Zu jedem* $n = 1, 2, \ldots$ *existiere ein* $\varphi_n \in B_0$ *derart, daß*

(i) $\beta(\varphi_n; \mathsf{K}) \geqq 1 - 1/n$ *und*

(ii) $\mathsf{H}_n := \left\{P \in \mathsf{H}\colon P[\varphi_n] \geqq \frac{1}{n}\right\}$ *in* P *relativ schwach*-kompakt ist.*

Dann ist jede ungünstigste Hypothese für das Testen von H *gegen* K *zum Niveau* h *ein* W*-Maß, das durch eine Verteilung über* $\mathsf{H}_0 := \limsup \overline{\mathsf{H}}_n$ *dargestellt werden kann.*

Beweis. Ist P_0 ungünstigste Hypothese, so gibt es nach 5.7 $r \in \mathbb{R}_+$ und $Q \in \tilde{\mathsf{K}}$ so, daß (r, P_0, Q) Minimalstelle von 5.3(*) ist; da $\overline{\beta}(h; \mathsf{H}, \mathsf{K}) < 1$, ist r positiv. Somit existiert nach dem Beweis von 5.3 ein P_0 darstellendes W-Maß λ über $\overline{\mathsf{H}}$, für das $\lambda[h] = \bar{h}(P_0)$. Für $n = 1, 2, \ldots$ sei $\varphi_n' \in \bar{B}_{1/n}(h; \mathsf{H}, \mathsf{K})$ und $\psi_n = \varphi_n' \varphi_n$. Wegen 4.3 und (ii) gilt

$$P[\psi_n] \leqq \min(P[\varphi_n], P[\varphi_n']) \leqq \begin{cases} h(P) & \text{für } P \in \overline{\mathsf{H}}_n, \\ \dfrac{1}{n} & \text{für } P \in \overline{\mathsf{H}} - \overline{\mathsf{H}}_n. \end{cases}$$

Die Mengen $\overline{\mathsf{H}}_n$ sind als schwach*-kompakte Mengen Elemente von $\mathscr{B}_0(\overline{\mathsf{H}})$, also

$$(*) \qquad \begin{aligned} P_0[\psi_n] &= \int\limits_{\overline{\mathsf{H}}_n} P[\psi_n]\, d\lambda + \int\limits_{\overline{\mathsf{H}} - \overline{\mathsf{H}}_n} P[\psi_n]\, d\lambda \\ &\leqq \int\limits_{\overline{\mathsf{H}}_n} h(P)\, d\lambda + \frac{1}{n}\lambda(\overline{\mathsf{H}} - \overline{\mathsf{H}}_n) \leqq \bar{h}(P_0) - \alpha\lambda(\overline{\mathsf{H}} - \overline{\mathsf{H}}_n) + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Für $P \in \mathsf{K}$ ergibt sich mit (i), daß

$$(**) \qquad \begin{aligned} P[\psi_n] &= -P[\varphi_n(1 - \varphi_n')] + P[\varphi_n] \\ &\geqq -P[1 - \varphi_n'] + P[\varphi_n] \geqq -1 + \gamma - \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n} = \gamma - \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Wäre $c := \limsup \lambda(\overline{\mathsf{H}} - \overline{\mathsf{H}}_n) > 0$, so würde aus (*) und (**) folgen, daß $\overline{\beta}(\bar{h}(P_0) - \frac{1}{2}\alpha c; P_0, \mathsf{K}) \geqq \gamma$, was wegen $\gamma < 1$

$$\overline{\beta}(\bar{h}(P_0); P_0, \mathsf{K}) \geqq \gamma + (1 - \gamma)\frac{\alpha c}{2 - 2\bar{h}(P_0) + \alpha c} > \gamma$$

impliziert. Dies widerspricht der Voraussetzung, daß P_0 ungünstigste Hypothese ist.

6.6. Satz. *Es seien* $\mathsf{H}, \mathsf{K} \subset \mathsf{P}$, $h, \alpha > 0$ *und* $\gamma < 1$ *wie in* 6.5. *Zu jedem* $n = 1, 2, \ldots$ *existiere* $\varphi_n \in B(1/n, \mathsf{H})$ *derart, daß*

$$\mathsf{K}_n = \left\{P \in \mathsf{K}\colon P[\varphi_n] \leqq 1 - \frac{1}{n}\right\}$$

in P *relativ schwach*-kompakt ist. Dann ist jede ungünstigste Alternative für das Testen von* H *gegen* K *zum Niveau* h *ein* W*-Maß, das durch eine Verteilung über* $\mathsf{K}_0 := \limsup \overline{\mathsf{K}}_n$ *dargestellt werden kann.*

Beweis. Für $n = 1, 2, \ldots$ sei

$$\varphi_n' \in \bar{B}_{1/n}(h; \mathsf{H}, \mathsf{K}), \qquad r_n = \alpha \Big/ \left(\alpha + \frac{1}{n}\right) \quad \text{und} \quad \psi_n := r_n \max(\varphi_n', \varphi_n).$$

Da $r_n \leqq h(P) \Big/ \left(h(P) + \frac{1}{n}\right)$ für alle $P \in \mathsf{H}$, ist

$$P[\psi_n] \begin{cases} \leqq r_n \left(h(P) + \frac{1}{n}\right) \leqq h(P) & \text{für} \quad P \in \mathsf{H}, \\ \geqq r_n \left(\gamma - \frac{1}{n}\right) & \text{für} \quad P \in \overline{\mathsf{K}}_n \quad \text{und} \\ \geqq r_n \left(1 - \frac{1}{n}\right) & \text{für} \quad P \in \overline{\mathsf{K}} - \overline{\mathsf{K}}_n; \end{cases}$$

insbesondere gilt $\psi_n \in B(h; \mathsf{H})$. Ist λ ein eine ungünstigste Alternative P_0 darstellendes W-Maß über $\overline{\mathsf{K}}$, so wird

$$P_0[\psi_n] = \int\limits_{\overline{\mathsf{K}}_n} P[\psi_n]\, d\lambda + \int\limits_{\overline{\mathsf{K}} - \overline{\mathsf{K}}_n} P[\psi_n]\, d\lambda \geqq r_n \left(\left(\gamma - \frac{1}{n}\right) \lambda(\overline{\mathsf{K}}_n) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \lambda(\overline{\mathsf{K}} - \overline{\mathsf{K}}_n)\right).$$

Wäre $c := \limsup \lambda(\overline{\mathsf{K}} - \overline{\mathsf{K}}_n) > 0$, so wäre wegen $\gamma < 1$

$$\bar{\beta}(h; \mathsf{H}, P_0) \geqq \sup P_0[\psi_n] \geqq \gamma + c(1 - \gamma) > \gamma,$$

also P_0 nicht ungünstigste Alternative.

6.7. Bemerkung. Ohne die Voraussetzung $\bar{\beta}(h; \mathsf{H}, \mathsf{K}) < 1$ in 6.5 und 6.6 ist die Behauptung über den Träger ungünstigster Verteilung i.a. falsch, da für $\bar{\beta} = 1$ jedes Paar $(P, Q) \in \mathsf{H} \times \mathsf{K}$ simultan ungünstigst ist.

Die Voraussetzung $\alpha > 0$ kann nach einem aus [14] modifiziert übernommenen Beispiel zumindest in 6.6 nicht ersatzlos entbehrt werden: Es sei $X = \{0, 1, 2, \ldots\}$,

$$\mathsf{H} = \{P\} \quad \text{mit} \quad P(\{x\}) = \begin{Bmatrix} 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ 2^{-x} & \text{für} \quad x = 1, 2, \ldots \end{Bmatrix},$$

$$\mathsf{K} = \{P_n\colon n = 1, 2, \ldots\} \quad \text{mit} \quad P_n(\{x\}) = \begin{Bmatrix} 2^{-1} + 2^{-n} & \text{für} \quad x = 0 \\ 2^{-1} - 2^{-n} & \text{für} \quad x = n \\ 0 & \text{sonst.} \end{Bmatrix}.$$

Wählt man zu jedem $n = 1, 2, \ldots$ eine natürliche Zahl k_n so, daß

$$\sum \{2^{-i}\colon i \geqq k_n\} \leqq \frac{1}{n},$$

so erfüllt $\varphi_n := \chi_{\{i:\, i = 0 \text{ oder } i \geqq k_n\}}$ die Trennungsvoraussetzungen von 6.6. $\bar{\beta}(0; \mathsf{H}, \mathsf{K}) = 2^{-1}$ und $\varphi := \chi_{\{0\}}$ ist das maximale Element aus $B(0; \mathsf{H})$. Ist λ

ein beliebiges W-Maß über K, so ist

$$P_\lambda[\varphi] = \sum \lambda(P_n) \cdot P_n[\varphi] = 2^{-1} + \sum \lambda(P_n) 2^{-n} > 2^{-1},$$

also P_λ nicht ungünstigste Alternative.

Literatur

1. Barankin, E. W.: On systems of linear equations, with application to linear programming and the theory of tests of statistical hypotheses. Univ. California Publ. Statist. **1**, 161–214 (1951).
2. Bauer, H.: Konvexität in topologischen Vektorräumen. Hamburg: Vorlesung 1963/64.
3. Dieter, U.: Optimierungsaufgaben in topologischen Vektorräumen I: Dualitätstheorie. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **5**, 89–117 (1966).
4. Dunford, N. u. J. T. Schwarz: Linear operators, Part I. New York: Interscience Publishers 1958.
5. Halmos, P. R.: Measure theory. Princeton: van Nostrand 1950.
6. Kelley, J. L.: General topology. Princeton: van Nostrand 1955.
7. Köthe, G.: Topologische lineare Räume. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1960.
8. Krafft, O., u. H. Witting: Optimale Tests und ungünstigste Verteilungen. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **7**, 289–302 (1967).
9. Krafft, O.: Eine symmetrische Behandlung des Testproblems. Arch. Math. **18**, 545–560 (1967).
10. Lehmann, E. L.: On the existence of least favorable distributions. Ann. math. Statistics **23**, 408–416 (1952).
11. — Testing statistical hypothesis. New York: Wiley 1959.
12. —, u. C. Stein: Most powerful tests of composite hypotheses I. Ann. math. Statistics **19**, 495–516 (1948).
13. Le Cam, L., u. L. Schwartz: A necessary and sufficient condition for the existence of consistent estimates. Ann. math. Statics **31**, 140–150 (1960).
14. Pfanzagl, J.: On the existence of least favorable distributions. Unveröffentlichtes Manuskript, 1966.
15. Reinhardt, H. E.: The use of least favorable distributions in testing composite hypotheses. Ann. math. Statistics **32**, 1034–1041 (1961).
16. Terschüren, H. A.: Über die Existenz von ungünstigsten Wahrscheinlichkeitsmaßen beim Testen von zusammengesetzten Hypothesen gegen einfache Alternativen. Diplom-Arbeit Univ. Köln, 1966.
17. Wald, A.: Statistical decision functions. New York: Wiley 1950,
18. Witting, H.: Unendliche Programme und ihre Anwendung in der Statistik. Z. angew. Math. Mech., **36** (1966), Tagungssonderheft.

Dr. V. Baumann
Mathematisches Institut der Universität
5000 Köln-Lindenthal, Biggestr. 15