Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 20, 325–331 (1971)

Bemerkungen zur kühnen Strategie

W. Hansen und D. Walz

Einleitung

In dem Buch "How to gamble if you must" von Dubins und Savage ([1]) wird neben anderen ein Kasino mit der folgenden, durch zwei Parameter $w, r \in (0,1)$ festgelegten Spielregel betrachtet: In jedem Spielgang kann der Spieler jeden Betrag zwischen Null und seiner augenblicklichen Barschaft setzen. Mit Wahrscheinlichkeit $1-w$ verliert er seinen Einsatz, mit Wahrscheinlichkeit w gewinnt er auf seinen Einsatz e den Betrag e/r. Das Kasino ist günstig, fair oder ungünstig, je nachdem ob $w>r$, $w=r$ oder $w<r$ ist.

Der Spieler soll versuchen, mit einem gegebenen Anfangskapital in einer (endlichen oder unendlichen) Folge von Spielgängen den Zielbetrag 1 zu erreichen. Eine Möglichkeit ist die kühne Strategie, die darin besteht, daß der Spieler bei Barschaft unterhalb von r stets seine gesamte Barschaft setzt und im übrigen gerade so viel, wie notwendig ist, um bei Gewinn den Zielbetrag 1 zu erreichen. Die Frage ist nun, ob diese kühne Strategie optimal ist, d.h. ob bei ihrer Verwendung der Betrag 1 mit größtmöglicher Wahrscheinlichkeit erreicht wird.

In dem genannten Buch wird darauf die folgende Antwort gegeben: Für $w<r$ ist bei unendlicher Spieldauer die kühne Strategie optimal. Bei Begrenzung der Spieldauer auf endlich viele Spielgänge n ist die kühne Strategie jedenfalls optimal in dem Spezialfall $w \leqq \frac{1}{2}$ und $r=\frac{1}{2}$ (Rot und Schwarz) und in dem Spezialfall $w=\frac{1}{2}$ und $r \geqq \frac{1}{2}$ (besteuerte Münze). Für $w<r<\frac{1}{2}$ wird gezeigt, daß bereits bei drei Spielgängen die kühne Strategie nicht optimal ist. Ebenso für $\frac{2}{3}<w<r<2^{-\frac{1}{2}}$ bei vier Spielgängen.

In der vorliegenden Arbeit wird vollständig beantwortet, für welche Parameter w, r die kühne Strategie bei endlicher Spiellänge optimal ist: Bei zwei oder weniger Spielgängen ist die kühne Strategie trivial optimal. Bei drei oder mehr Spielgängen ist die kühne Strategie genau dann optimal, wenn $w \leqq \frac{1}{2}$ und $r \geqq \frac{1}{2}$ ist.

Die Darstellung ist völlig elementar. Wahrscheinlichkeitstheorie geht nur insofern ein, als man zur Interpretation der verwendeten Definitionen und gewonnenen Sätze die folgenden beiden Aussagen benötigt: Eine Strategie besteht darin, für jede Barschaft $a \geqq 0$ bei m noch verbleibenden Spielgängen einen Einsatz $e=\varphi(a,m) \leqq a$ zu wählen. Gibt $P_n^\varphi(a)$ die Wahrscheinlichkeit dafür an, bei Befolgung der Strategie φ in n Spielgängen mit dem Ausgangskapital a den Betrag 1 zu erreichen, so gelten folgende Rekursionsformeln:

$$P_0^\varphi(a)=\begin{cases}0, & 0 \leqq a<1, \\ 1, & a \geqq 1,\end{cases}$$

$$P_{n+1}^\varphi(a)=w\, P_n^\varphi\left(a-\varphi(a,n+1)+\frac{\varphi(a,n+1)}{r}\right)+(1-w)\, P_n^\varphi\big(a-\varphi(a,n+1)\big).$$

Die Aussagen bis zum ersten Korollar sind trivial und natürlich nicht neu. Sie werden nur der geschlossenen Darstellung halber aufgenommen.

1. Optimalität der kühnen Strategie

Es seien $w, r \in (0,1)$, $\bar{w}=1-w$, $\bar{r}=1-r$. Es sei $\mathbb{R}^+$ die Menge aller nichtnegativen reellen Zahlen, $\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\ldots\}$ und Φ die Menge aller Abbildungen φ von $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}_0$ in $\mathbb{R}^+$ mit $\varphi(a,n) \leqq a$ für alle $a \in \mathbb{R}^+$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Für jedes $\varphi \in \Phi$ sei P_n^φ rekursiv definiert durch

$$P_0^\varphi(a)=\begin{cases}0, & 0 \leqq a<1, \\ 1, & a \geqq 1,\end{cases} \tag{1}$$

$$P_{n+1}^\varphi(a)=w P_n^\varphi\left(a+\frac{\bar{r}}{r} \varphi(a, n+1)\right)+\bar{w} P_n^\varphi(a-\varphi(a, n+1)). \tag{2}$$

Weiter sei φ_0 (die kühne Strategie) unabhängig von n definiert durch

$$\varphi_0(a, n)=\begin{cases}a, & 0 \leqq a \leqq r, \\ \dfrac{r}{\bar{r}}(1-a), & r \leqq a \leqq 1, \\ 0, & a \geqq 1.\end{cases} \tag{3}$$

Für $r \leqq a \leqq 1$ ist dann nämlich $a+(\bar{r}/r)\,\varphi_0(a,n)=1$. Setzen wir $P_n=P_n^{\varphi_0}$, so bedeutet Optimalität der kühnen Strategie daher $P_n=\sup\{P_n^\varphi\colon \varphi \in \Phi\}$.

Durch vollständige Induktion erhält man sofort, daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$P_n(a)=\begin{cases}0, & \text{falls } a=0, \\ 1, & \text{falls } a \geqq 1.\end{cases}$$

Für P_n erhalten wir daher aus (2) und (3) die Rekursionsformel

$$P_{n+1}(a)=\begin{cases}w P_n\left(\dfrac{a}{r}\right), & 0 \leqq a \leqq r, \\ w+\bar{w} P_n\left(\dfrac{a-r}{\bar{r}}\right), & r \leqq a \leqq 1, \\ 1, & a \geqq 1.\end{cases} \tag{2'}$$

Mit (1) erhalten wir beispielsweise

$$P_1(a)=\begin{cases}0, & 0 \leqq a<r, \\ w, & r \leqq a<1, \\ 1, & a \geqq 1.\end{cases}$$

Lemma 1. *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist P_n isoton.*

Beweis. Wegen (1) ist P_0 isoton. Es sei P_n isoton für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $a \to w P_n(a/r)$ isoton, also P_{n+1} isoton in $[0,r]$ wegen (2'). Ebenso ist P_{n+1} isoton in $[r,1]$ und $[1,\infty)$. Daher ist auch P_{n+1} isoton.

Lemma 2. *Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leqq e \leqq a$ mit $a+(\bar{r}/r)\,e \geqq 1$. Dann ist*

$$w P_n\left(a+\frac{\bar{r}}{r} e\right)+\bar{w} P_n(a-e) \leqq P_{n+1}(a).$$

Beweis. Es ist

$$a \geqq r\left(a+\frac{\bar{r}}{r}e\right) \geqq r \quad \text{und} \quad a-e=\frac{a}{\bar{r}}-\frac{r}{\bar{r}}\left(a+\frac{\bar{r}}{r}e\right) \leqq \frac{a-r}{\bar{r}},$$

also

$$w P_n\left(a+\frac{\bar{r}}{r}e\right)+\bar{w} P_n(a-e) \leqq w+\bar{w} P_n\left(\frac{a-r}{\bar{r}}\right) \leqq P_{n+1}(a).$$

Lemma 3. *Für alle* $0 \leqq e \leqq a$ *und* $n=0,1$ *ist*

$$w P_n\left(a+\frac{\bar{r}}{r}e\right)+\bar{w} P_n(a-e) \leqq P_{n+1}(a).$$

Beweis. Wegen Lemma 2 dürfen wir uns auf $a+(\bar{r}/r)e<1$ beschränken. Dann ist aber

$$w P_0\left(a+\frac{\bar{r}}{r}e\right)+\bar{w} P_0(a-e)=0 \leqq P_1(a).$$

Für $a<r$ ist

$$w P_1\left(a+\frac{\bar{r}}{r}e\right)+\bar{w} P_1(a-e) \leqq w P_1\left(\frac{a}{r}\right)=P_2(a).$$

Für $a \geqq r$ ist wegen $a+(\bar{r}/r)e<1$

$$w P_1\left(a+\frac{\bar{r}}{r}e\right)+\bar{w} P_1(a-e) \leqq w\, w+\bar{w}\, w=w \leqq P_2(a).$$

Korollar. *Für* $n=0,1,2$ *gilt* $P_n=\sup\{P_n^{\varphi}\colon \varphi \in \Phi\}$.

Beweis. Wegen (1) ist die Behauptung trivial für $n=0$. Sie gelte für ein $n \in \{0,1\}$. Für alle $\varphi \in \Phi$ und $a \geqq 0$ ist dann wegen Lemma 3

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{\varphi}(a) &= w P_n^{\varphi}\left(a+\frac{\bar{r}}{r}\varphi(a,n+1)\right)+\bar{w} P_n^{\varphi}\big(a-\varphi(a,n+1)\big) \\ &\leqq w P_n\left(a+\frac{\bar{r}}{r}\varphi(a,n+1)\right)+\bar{w} P_n\big(a-\varphi(a,n+1)\big) \\ &\leqq P_{n+1}(a). \end{aligned}$$

Also ist auch $P_{n+1}^{\varphi} \leqq P_{n+1}$ und damit $P_{n+1}=\sup\{P_{n+1}^{\varphi}\colon \varphi \in \Phi\}$ wegen $\varphi_0 \in \Phi$.

Lemma 4. *Es sei* $w \leqq \frac{1}{2}$, $r \geqq \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}_0$ *und für alle* $0 \leqq e \leqq a$

$$w P_n\left(a+\frac{\bar{r}}{r}e\right)+\bar{w} P_n(a-e) \leqq P_{n+1}(a).$$

Dann gilt für alle $\gamma \geqq 0$ *und* $\alpha, \beta \in [0,\gamma]$

$$w\big(P_n(\alpha)+P_n(\beta)\big) \leqq P_{n+1}\big((r-\bar{r})\gamma+\bar{r}(\alpha+\beta)\big), \tag{4}$$

$$\bar{w}\big(P_n(\alpha)+P_n(\beta)\big) \leqq (\bar{w}-w)+P_{n+1}\big((r-\bar{r})\gamma+\bar{r}(\alpha+\beta)\big). \tag{5}$$

Beweis. Sei $\gamma \geqq 0$ und $\alpha, \beta \in [0,\gamma]$, etwa $\beta \leqq \alpha$. Mit

$$a=r\alpha+\bar{r}\beta, \qquad e=r(\alpha-\beta)$$

ist dann

$$0 \leqq e \leqq a, \qquad a + \frac{\bar{r}}{r} e = \alpha, \qquad a - e = \beta,$$

also nach Voraussetzung

(i) $w P_n(\alpha) + \bar{w} P_n(\beta) \leqq P_{n+1}(r\alpha + \bar{r}\beta)$.

Wegen $r \geqq \frac{1}{2}$ ist $r - \bar{r} \geqq 0$, also $r\alpha + \bar{r}\beta = (r - \bar{r})\alpha + \bar{r}(\alpha + \beta) \leqq (r - \bar{r})\gamma + \bar{r}(\alpha + \beta)$ und daher wegen der Isotonie von P_{n+1}

(ii) $P_{n+1}(r\alpha + \bar{r}\beta) \leqq P_{n+1}((r - \bar{r})\gamma + \bar{r}(\alpha + \beta))$.

Wegen $w \leqq \frac{1}{2}$ ist $w \leqq \bar{w}$, also

(iii) $w(P_n(\alpha) + P_n(\beta)) \leqq w P_n(\alpha) + \bar{w} P_n(\beta)$

und

(iv) $\bar{w}(P_n(\alpha) + P_n(\beta)) \leqq (\bar{w} - w) + w P_n(\alpha) + \bar{w} P_n(\beta)$

wegen $P_n(\alpha) \leqq 1$. Aus (iii), (i) und (ii) folgt (4). Aus (iv), (i) und (ii) folgt (5).

Satz. *Es sei* $w \leqq \frac{1}{2}$ *und* $r \geqq \frac{1}{2}$. *Dann gilt für alle* $n \in \mathbb{N}_0$: *Für alle* $0 \leqq e \leqq a$ *ist*

$$w P_n\left(a + \frac{\bar{r}}{r} e\right) + \bar{w} P_n(a - e) \leqq P_{n+1}(a).$$

Beweis. Für $n = 0$ ist die Behauptung in Lemma 3 enthalten. Sie gelte für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Wir zeigen, daß sie dann auch für $n + 1$ gilt.

Es sei $0 \leqq e \leqq a$. Wegen Lemma 2 dürfen wir uns auf $a + (\bar{r}/r) e < 1$ beschränken. Wir unterscheiden vier Fälle.

I. $a + (\bar{r}/r) e \leqq r$.

Dann ist

$$\begin{aligned} w P_{n+1}\left(a + \frac{\bar{r}}{r} e\right) + \bar{w} P_{n+1}(a - e) &= w \left(w P_n\left(\frac{a + (\bar{r}/r) e}{r}\right) + \bar{w} P_n\left(\frac{a - e}{r}\right)\right) \\ &= w \left(w P_n\left(\frac{a}{r} + \frac{\bar{r}}{r} \frac{e}{r}\right) + \bar{w} P_n\left(\frac{a}{r} - \frac{e}{r}\right)\right) \\ &\leqq w P_{n+1}\left(\frac{a}{r}\right) = P_{n+2}(a). \end{aligned}$$

II. $a \leqq r \leqq a + (\bar{r}/r) e$.

Dann ist

$$\begin{aligned} w P_{n+1}\left(a + \frac{\bar{r}}{r} e\right) + \bar{w} P_{n+1}(a - e) &= w \left(w + \bar{w} P_n\left(\frac{a + (\bar{r}/r) e - r}{\bar{r}}\right)\right) + \bar{w} w P_n\left(\frac{a - e}{r}\right) \\ &= w^2 + \bar{w} w \left(P_n\left(\frac{a + (\bar{r}/r) e - r}{\bar{r}}\right) + P_n\left(\frac{a - e}{r}\right)\right). \end{aligned}$$

Es ist

$$a = r\left(a + \frac{\bar{r}}{r} a\right) \geqq r\left(a + \frac{\bar{r}}{r} e\right) \geqq r^2,$$

also
$$\gamma := \frac{a-r^2}{\bar r\, r} \geqq 0.$$
Es ist
$$\alpha := \frac{a+(\bar r/r)\,e-r}{\bar r} \leqq \frac{a+(\bar r/r)\,a-r}{\bar r} = \frac{a-r^2}{\bar r\, r} = \gamma,$$
$$\beta := \frac{a-e}{r} = \frac{(a/\bar r)-(r/\bar r)\big(a+(\bar r/r)\,e\big)}{r} \leqq \frac{(a/\bar r)-(r/\bar r)\,r}{r} = \gamma$$
und
$$(r-\bar r)\,\gamma + \bar r(\alpha+\beta) = \left(\frac{1}{\bar r}-\frac{1}{r}\right)(a-r^2) + \left(a+\frac{\bar r}{r}\,e-r\right) + \frac{\bar r}{r}(a-e)$$
$$= \frac{1}{\bar r}\,a - \frac{r^2}{\bar r} = \frac{a-r^2}{\bar r}.$$

Nach (4) in Lemma 4 ist daher
$$w\big(P_n(\alpha)+P_n(\beta)\big) \leqq P_{n+1}\left(\frac{a-r^2}{\bar r}\right),$$
also
$$w\,P_{n+1}\left(a+\frac{\bar r}{r}\,e\right) + \bar w\,P_{n+1}(a-e) \leqq w^2 + \bar w\,P_{n+1}\left(\frac{a-r^2}{\bar r}\right).$$
Wegen $\dfrac{a-r^2}{\bar r} \leqq \dfrac{r-r^2}{\bar r} = r$ ist das
$$= w^2 + \bar w\,w\,P_n\left(\frac{a-r^2}{\bar r\, r}\right) = w\,P_{n+1}\left(\frac{a}{r}\right) = P_{n+2}(a).$$

III. $a-e \leqq r \leqq a$.

Zunächst ist wie in Fall II
$$w\,P_{n+1}\left(a+\frac{\bar r}{r}\,e\right) + \bar w\,P_{n+1}(a-e) = w^2 + \bar w\,w\left(P_n\left(\frac{a+(\bar r/r)\,e-r}{\bar r}\right) + P_n\left(\frac{a-e}{r}\right)\right).$$
Es ist
$$(r-\bar r) + \bar r\left(\frac{a+(\bar r/r)\,e-r}{\bar r} + \frac{a-e}{r}\right) = \frac{a}{r} - \bar r = \frac{a-r}{r} + r.$$

Nach (5) in Lemma 4 (mit $\gamma=1$) ist daher
$$w\,P_{n+1}\left(a+\frac{\bar r}{r}\,e\right) + \bar w\,P_{n+1}(a-e) \leqq w^2 + w\left(\bar w - w + P_{n+1}\left(\frac{a-r}{r}+r\right)\right)$$
$$= w\,\bar w + w\,P_{n+1}\left(\frac{a-r}{r}+r\right)$$
$$= w\,\bar w + w\left(w + \bar w\,P_n\left(\frac{a-r}{r\,\bar r}\right)\right)$$
$$= w + \bar w\,w\,P_n\left(\frac{a-r}{r\,\bar r}\right).$$

Wegen $\frac{a-r}{\bar{r}}=(a-e)+\frac{r}{\bar{r}}\left(a+\frac{\bar{r}}{r}e\right)-\frac{r}{\bar{r}}\leqq r+\frac{r}{\bar{r}}-\frac{r}{\bar{r}}=r$ ist dies

$$=w+\bar{w}\,P_n\left(\frac{a-r}{\bar{r}}\right)=P_{n+2}(a).$$

IV. $a-e\geqq r$.

Dann ist

$$\begin{aligned}
&w\,P_{n+1}\left(a+\frac{\bar{r}}{r}e\right)+\bar{w}\,P_{n+1}(a-e)\\
&\quad=w\left(w+\bar{w}\,P_n\left(\frac{a+(\bar{r}/r)\,e-r}{\bar{r}}\right)\right)+\bar{w}\left(w+\bar{w}\,P_n\left(\frac{a-e-r}{\bar{r}}\right)\right)\\
&\quad=w+\bar{w}\left(w\,P_n\left(\frac{a-r}{\bar{r}}+\frac{\bar{r}}{r}\,\frac{e}{\bar{r}}\right)+\bar{w}\,P_n\left(\frac{a-r}{\bar{r}}-\frac{e}{\bar{r}}\right)\right)\\
&\quad\leqq w+\bar{w}\,P_{n+1}\left(\frac{a-r}{\bar{r}}\right)=P_{n+2}(a).
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung auch für $n+1$ bewiesen.

Wie bei Lemma 3 erhalten wir aus diesem Satz durch vollständige Induktion das folgende

Korollar. *Es sei* $w\leqq\frac{1}{2}$ *und* $r\geqq\frac{1}{2}$. *Dann ist für alle* $n\in\mathbb{N}_0$

$$P_n=\sup\{P_n^\varphi:\ \varphi\in\Phi\}.$$

2. Gegenbeispiel

In allen Fällen, in denen die Optimalität der kühnen Strategie nicht durch die beiden Korollare des vorangegangenen Abschnittes nachgewiesen ist, ist die kühne Strategie tatsächlich nicht optimal. Das zeigt der folgende

Satz. *Es sei* φ *definiert durch*

$$\varphi(r^2+2\bar{r}\,r^2,3)=2\bar{r}\,r^2$$

und $\varphi=\varphi_0$ *sonst. Es sei* $n\geqq3$ *und*

$$a_n=r^{n-1}(1+2\bar{r}).$$

Ist dann $r<\frac{1}{2}$ *oder* $w>\frac{1}{2}$, *so ist*

$$P_n^\varphi(a_n)>P_n(a_n).$$

Beweis. Wegen $|2r-1|<1$ ist

$$r^2+2\bar{r}\,r^2=r+r\,\bar{r}(2r-1)<1, \qquad (*)$$

also

$$a_n<r^{n-3}.$$

Durch vollständige Induktion folgt daher zunächst aus (2) und (2′)

$$P_n^\varphi(a_n)=w^{n-3}\,P_3^\varphi(r^2+2\bar{r}\,r^2),$$

$$P_n(a_n)=w^{n-3}\,P_3(r^2+2\bar{r}\,r^2).$$

Nach Definition von φ und (2) ist

$$\begin{aligned}P_3^{\varphi}(r^2+2\bar{r}\,r^2) &= w\,P_2^{\varphi}(r^2+2\bar{r}\,r)+\bar{w}\,P_2^{\varphi}(r^2)\\ &= w\,P_2(r+\bar{r}\,r)+\bar{w}\,P_2(r^2)\\ &= w\big(w+\bar{w}\,P_1(r)\big)+\bar{w}\,w\,P_1(r)\\ &= w^2+2\bar{w}\,w^2.\end{aligned}$$

Sei zunächst $r<\frac{1}{2}$. Wegen (*) ist dann sogar $r^2+2\bar{r}\,r^2<r$, also

$$\begin{aligned}P_3(r^2+2\bar{r}\,r^2) &= w\,P_2(r+2\bar{r}\,r)=w\big(w+\bar{w}\,P_1(2r)\big)\\ &= w^2+\bar{w}\,w^2<w^2+2\bar{w}\,w^2.\end{aligned}$$

Sei nun $r\geqq\frac{1}{2}$ und $w>\frac{1}{2}$. Wiederum wegen (*) ist dann $r^2+2\bar{r}\,r^2\geqq r$, also

$$\begin{aligned}P_3(r^2+2\bar{r}\,r^2) &= w+\bar{w}\,P_2\big(r(2r-1)\big)\\ &= w+\bar{w}\,w\,P_1(2r-1)=w\end{aligned}$$

wegen $2r-1<r$. Wegen $2w>1$ ist aber

$$w=w^2+w\,\bar{w}<w^2+2\bar{w}\,w^2.$$

In beiden Fällen ist also $P_3^{\varphi}(r^2+2\bar{r}\,r^2)>P_3(r^2+2\bar{r}\,r^2)$ und damit auch $P_n^{\varphi}(a_n)>P_n(a_n)$.

Literatur

1. Dubins, L., Savage, L.: How to gamble if you must. McGraw-Hill Series in Probability and Statistics, 1965.
2. Jacobs, K.: Rot und Schwarz. Selecta Mathematica I, S. 28–52. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1969.

Priv.-Doz. Dr. W. Hansen
D. Walz
Mathematisches Institut der Universität
Erlangen-Nürnberg
BRD-8520 Erlangen, Bismarckstraße $1\frac{1}{2}$
Deutschland

(Eingegangen am 12. Oktober 1970)