

Nachtrag

zu meinem Aufsatz in Band XVII, S. 187 des Ingenieur-Archivs:
 „Die energetische Berechnung des induzierten Widerstandes“.

Von **W. Kaufmann**.

Herr *E. Truckenbrodt*¹ hat mich freundlicherweise darauf aufmerksam gemacht, daß die in Abb. 3 meiner obigen Arbeit aufgetragene Funktion $\gamma^2/\eta=f(\eta)$ bei elliptischer Flügel-Auftriebsverteilung für $\eta \rightarrow 0$ nicht gegen ∞ geht, sondern einen endlichen Grenzwert besitzt.

Eine besondere Entwicklung in der Umgebung der Stelle $\eta=0$ ist also in diesem Falle nicht notwendig. Der Ausdruck für den induzierten Widerstand lautet dann unter Zusammenfassung der beiden Anteile aus Gleichung (8) und (15) einfacher

$$W_i = \frac{\rho \Gamma_0^2}{2\pi} \left(0,934 + \int_{\eta=0}^{\eta=1} \frac{\gamma^2}{\eta} d\eta \right), \tag{1}$$

wobei das Integral durch graphische Integration über den ganzen Bereich $0 \leq \eta \leq 1$ bestimmt werden kann. Obwohl sich dadurch an dem von mir mitgeteilten Zahlenwert praktisch nichts ändert — auch Herr *Truckenbrodt* berechnet nur eine einprozentige Abweichung gegenüber dem *Prandtl'schen* Wert —, möchte ich nachstehend doch die von Herrn *Truckenbrodt* durchgeführte Grenzwertbetrachtung in etwas erweiterter Form wiedergeben, da sie mir für die Anwendung des Verfahrens von Bedeutung erscheint.

Unter Beachtung der Gleichungen (2) und (18) meiner Arbeit und nach Einführung der Abkürzung $c=(x_1-x)/a$ kann Gleichung (17) wie folgt geschrieben werden:

$$\eta^2 = \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r_0}\right)^2 (\sqrt{1+2c^2} - 1 + c^2)$$

oder wegen (3)

$$\eta^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sqrt{1+2c^2} - 1 + c^2) \quad (0 \leq c \leq 1).$$

Durch Differentiation nach c folgt daraus

$$\frac{d\eta}{dc} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1+2c^2}} + 1\right) c}{\sqrt{1+2c^2} - 1 + c^2}$$

und durch Grenzwertbildung

$$\left[\frac{d\eta}{dc}\right]_{c \rightarrow 0} = \sqrt{\frac{4}{3}}.$$

Nun wird wegen $c=(x_1-x)/a$ und unter Beachtung von Gleichung (16) und (18) der obigen Arbeit

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\frac{\gamma^2}{\eta}\right) &= \sqrt[4]{\frac{3}{4}} \lim_{c \rightarrow 0} \left(\frac{\gamma^2}{c}\right) = \sqrt[4]{\frac{3}{4}} \lim_{x \rightarrow b/2} \left(\frac{\gamma^2 \Gamma_x a}{\int_{\xi=x}^{\xi=b/2} \Gamma_\xi d\xi}\right) \\ &= a \sqrt[4]{\frac{3}{4}} \lim_{x \rightarrow b/2} \left(\frac{\gamma_x^3}{\int_{\xi=x}^{\xi=b/2} \gamma_\xi d\xi}\right) = -a \sqrt[4]{\frac{3}{4}} \lim_{x \rightarrow b/2} \left(\frac{\gamma_x^3}{\int_{\xi=b/2}^{\xi=x} \gamma_\xi d\xi}\right). \end{aligned}$$

Da aber

$$\left(\frac{d(\gamma_x^3)}{dx}\right) = 3 \gamma_x^2 \frac{d\gamma_x}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx} \int_{\xi=b/2}^{\xi=x} \gamma_\xi d\xi = \gamma_x,$$

so folgt

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\frac{\gamma^2}{\eta}\right) = -\frac{3}{2} a \sqrt[4]{\frac{3}{4}} \left[\frac{d(\gamma_x^2)}{dx}\right]_{x=b/2} = -1,395 a \left[\frac{d(\gamma_x^2)}{dx}\right]_{x=b/2},$$

wobei $\gamma_x = \Gamma_x/\Gamma_0$ die dimensionslose Flügelzirkulation darstellt. Führt man noch die dimensionslosen Werte $\bar{x}=2x/b$ und $\bar{a}=2a/b$ ein, so erhält man schließlich den von Herrn *Truckenbrodt*

¹ Anschrift: Dr.-Ing. *E. Truckenbrodt*, (20b) Braunschweig, Andreeplatz 5.

gefundenen Grenzwert

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\frac{\gamma^2}{\eta} \right) = -1,395 \bar{a} \left[\frac{d(\gamma_x^2)}{d\bar{x}} \right]_{(\bar{x}=1)}$$

Im Falle elliptisch verteilter Flügelzirkulation $\gamma_x = \Gamma_x / \Gamma_0 = \sqrt{1 - \bar{x}^2}$ wird unter Beachtung von (2a)

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\frac{\gamma^2}{\eta} \right) = 2,79 \bar{a} = 2,79 \frac{\pi}{4} = 2,19.$$

Herr *Truckenbrodt* hat darüber hinaus den induzierten Widerstand für elliptische, parabolische und dreiecksförmige Verteilung der Flügelzirkulation nach dem vorliegenden Verfahren berechnet und mit den entsprechenden Werten nach der *Prandl'schen* Theorie verglichen. Die Ergebnisse seiner Rechnung sind in der Tabelle und in nebenstehender Abbildung zusammengestellt. Aus der Tabelle ist die gute Übereinstimmung beider Theorien erkennbar.

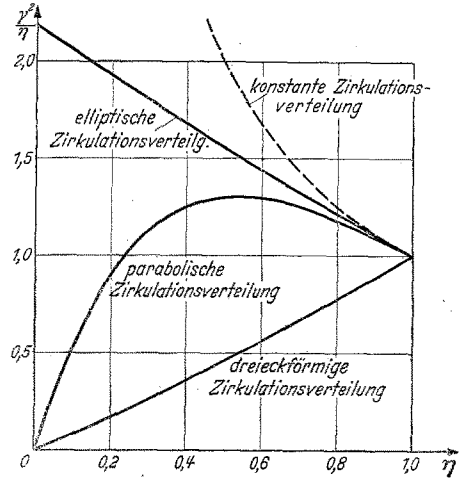


Abb. 1. Zuordnung $\frac{\gamma^2}{\eta}(\eta)$ für verschiedene Zirkulationsverteilungen.

Zirkulationsverteilung		Induz. Widerstand W_i			
	γ_x	\bar{a}	$\left[\frac{d(\gamma_x^2)}{d\bar{x}} \right]_{(\bar{x}=1)}$	Prandtl	Kaufmann
elliptisch	$\sqrt{1 - \bar{x}^2}$	$\frac{\pi}{4}$	-2	$\frac{\pi^2}{8} \frac{\rho \Gamma_0^2}{\pi}$	$1,01 \frac{\pi^2}{8} \frac{\rho \Gamma_0^2}{\pi}$
parabolisch	$1 - \bar{x}^2$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{\rho \Gamma_0^2}{\pi}$	$1,01 \frac{\rho \Gamma_0^2}{\pi}$
dreiecksförmig	$1 - \bar{x}$	$\frac{1}{2}$	0	$\ln 2 \cdot \frac{\rho \Gamma_0^2}{\pi}$	$1,01 \ln 2 \cdot \frac{\rho \Gamma_0^2}{\pi}$

Bei beliebig vorgegebener, zwischen Ellipse und umbeschriebenem Rechteck liegender Zirkulationsverteilung kann man, wie ich an anderer Stelle gezeigt habe¹, die Flügelzirkulation angenähert durch den Ausdruck darstellen

$$\Gamma_x = \Gamma_0 \left[1 - \left(\frac{2x}{b} \right)^\nu \right]^{1/\nu},$$

wo $\nu > 2$. In diesem Falle geht $[\gamma^2/\eta]_{\eta=0} \rightarrow \infty$, so daß man zweckmäßig Gleichung (20) meiner obigen Arbeit benutzen wird.

Würde man dagegen, worauf Herr *Truckenbrodt* hinweist, die Zirkulationsverteilung durch den *Betz'schen* Ansatz

$$\Gamma_x = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{b} \right)^2} \sum_0^\infty A_n \left(\frac{2x}{b} \right)^n$$

darstellen, so würde sich $[\gamma^2/\eta]_{\eta=0}$ stets endlich ergeben, solange $\sum_0^\infty A_n \neq \infty$ wird. In diesem Falle würde die obige Gleichung (1) anzuwenden sein, da jetzt die graphische Integration über den ganzen Bereich $0 \leq \eta \leq 1$ keine Schwierigkeiten bereitet.

Die kritischen Bemerkungen des Herrn *Truckenbrodt* und die von ihm durchgerechneten Beispiele stellen eine wesentliche Ergänzung meiner Arbeit dar, für die ich ihm aufrichtigen Dank sage.

Zum Schluß möchte ich noch einen Druckfehler in meiner Arbeit richtigstellen. Auf S. 192 Zeile 3 muß es, wie man leicht feststellt, richtig heißen

$$\frac{[1 - (1 - \eta)^n]^{2/n}}{\eta} \approx n^{\frac{2}{n}} \eta^{\frac{2}{n} - 1}.$$

¹ *W. Kaufmann*. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Mathem.-Naturwiss. Abt. 1946, S. 119.

(Eingegangen am 27. September 1949.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr.-Ing. *Walter Kaufmann*, (13b) München, Technische Hochschule.