Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 6, 317—348 (1966)

Zur Verallgemeinerung der abstrakten Integrationstheorie*

C. C. Brown

Eingegangen am 1. Mai 1966

§ 1. Einführung

Die Darstellung der Wahrscheinlichkeitstheorie durch die Theorie von Maßen über Booleschen Algebren ist für viele wahrscheinlichkeitstheoretische Fragen sehr zufriedenstellend. Doch scheint sie noch nicht völlig ausreichend zu sein, um alle in der Physik erscheinenden wahrscheinlichkeitstheoretischen Begriffe zu erfassen, denn es treten große Schwierigkeiten auf, wenn man diese Auffassung als Modell für den wahrscheinlichkeitstheoretischen Aufbau der Quantentheorie anzuwenden versucht. Diese Schwierigkeiten sind weitgehend darauf zurückzuführen, daß der enge Zusammenhang zwischen der Menge der Zufallsveränderlichen und der Booleschen Algebra von meßbaren Mengen, der in der gewöhnlichen Maßtheorie vorhanden ist, anscheinend kein Gegenstück in der Theorie der Operatoren im Hilbertraum besitzt. Um diesen Sachverhalt konkreter zu schildern, betrachten wir den Spektralsatz der Theorie der selbstadjungierten Operatoren im Hilbertraum ([*21*], Kap. 7, § 108). Dieser Satz ist das Gegenstück eines in der Theorie von Maß und Integral erscheinenden Satzes, der besagt, daß jede meßbare Funktion durch Treppenfunktionen monoton approximiert werden kann. In dem Beweis des Satzes treten die Projektionen im Hilbertraum dort auf, wo die meßbaren Mengen in dem gewöhnlichen maßtheoretischen Satz auftreten, und es liegt nahe, die Klasse der Projektionen im Hilbertraum als das Gegenstück zur Klasse der meßbaren Mengen zu betrachten. Der Haken dabei ist jedoch, daß die Projektionen zwar einen Verband, aber keine Boolesche Algebra bilden. Die Verbandsstruktur ist in der Tat viel mehr der einer projektiven Geometrie als der einer Booleschen Algebra ähnlich. Diese Tatsache ist ein Grund dafür, warum viele Autoren, die an der „Quantenlogik" Interesse gehabt haben, u.a. von Neumann ([*17*], [*20*]), Birkhoff ([*2*]) und Varadarajan ([*25*]), sich sehr viel mit Verbänden beschäftigt haben, die der projektiven Geometrie sehr ähnlich sind. In diesem Zusammenhang ist vielleicht auch die folgende Bemerkung von Interesse: Es wird manchmal versucht, eine Boolesche Algebra in der Weise einzuführen, daß man die Einheitskugeloberfläche im Hilbertraum als eine Grundmenge und irgendeine Boolesche Algebra von Untermengen der Oberfläche als die meßbaren Mengen zu betrachten versucht. Dem Verfasser scheint dieser Vorgang unzweckmäßig zu sein, denn die Quantentheorie scheint eindeutig darauf hinzuweisen, daß eine Untermenge des Hilbertraumes ein abgeschlossener Unterraum sein muß, wenn sie physikalisch wichtig sein soll ([*17*]). Die Untermengen der Kugeloberfläche, die vernünftigerweise in Betracht gezogen werden können, sind also die Durchschnitte der Oberfläche mit

* Diese Arbeit entstand im Rahmen eines von der Deutschen Forschungsgemeinschaft finanzierten Forschungsvorhabens.

den abgeschlossenen Unterräumen. Solche Mengen bilden jedoch keine Boolesche Algebra, und der Versuch, eine erzeugte Boolesche Algebra zu betrachten, führt rasch zu Mengen, denen man keine vernünftige physikalische Bedeutung zuschreiben kann, d.h. zu Mengen, die im mathematischen Aufbau der Quantentheorie keinen wichtigen Platz einnehmen.

Die Schwierigkeit, die wahrscheinlichkeitstheoretische Struktur der Quantentheorie in die gewöhnliche abstrakte Wahrscheinlichkeitstheorie einzuordnen, führt natürlich zur Frage der Verallgemeinerung der abstrakten Wahrscheinlichkeitstheorie. Die ersten Schritte in dieser Richtung hat von Neumann gemacht. In seiner im Jahre 1928 erschienenen Arbeit ([*18*]) betrachtet er die Algebra $\mathfrak{A}$ aller beschränkten Operatoren über einem separablen Hilbertraum als eine Verallgemeinerung der Algebra aller beschränkten komplexen Zufallsveränderlichen über einem Maßraum. Er definiert dann eine „Erwartung" als eine gewisse Art von Linearform auf $\mathfrak{A}$. Diese Erwartung soll als das Gegenstück einer Wahrscheinlichkeitsverteilung dienen. Das Hauptergebnis seiner Arbeit ist die volle Charakterisierung aller Erwartungen. Dieses Resultat werden wir unter etwas veränderten Voraussetzungen noch einmal ableiten (§ 3). Aus der Charakterisierung der Erwartungen ist der Begriff einer quantenmechanischen „Mischung" entstanden. Hierunter fallen als Grenzfälle die quantenmechanischen Zustände, und zwar als Extremalpunkte der konvexen Menge aller Mischungen (Erwartungen). Es wurde später von von Neumann gezeigt ([*19*]), daß die Mischungen für die Behandlung der Quantenstatistik geeignet sind.

Hiermit ist das allgemeine Problem der Wahrscheinlichkeitstheorie jedoch noch nicht gelöst worden, denn es gibt in der von Neumannschen Theorie z.B. nichts von der Art des Satzes der monotonen Konvergenz, d.h. eines Satzes, der nicht nur die Ordnungsstetigkeit einer in Betracht gezogenen Erwartung sichert, sondern auch die Existenz eines passenden Supremums für jede monotone Folge mit begrenzten Erwartungswerten. Hierüber wollen wir später ausführlicher diskutieren. Die von Neumannsche Theorie ist also in gewisser Hinsicht noch unvollständig.

Im Jahre 1953 ist eine weitere Arbeit von I. E. Segal über die Verallgemeinerung der Integrationstheorie erschienen ([*23*]). Diese Theorie, die „nichtkommutative Integrationstheorie", legt ebenfalls eine Algebra von Operatoren im Hilbertraum zugrunde und zeigt, daß man, wenn man einmal eine gewisse nichtnegative Funktion m („gage" ([*23*])) auf den Projektionen einer von Neumannschen Algebra ([*5*], [*9*]) in einem Hilbertraum $\mathfrak{H}$ hat, eine vollständige Integrationstheorie mit einem vernünftigen Satz von der monotonen Konvergenz aufbauen kann. Es ist jedoch etwas schwierig, diese Theorie in der Quantentheorie anzuwenden, denn es wird in [*23*] immer vorausgesetzt, daß m unitärinvariant ist. Im Fall, daß $\mathfrak{A}$ die Gesamtheit aller beschränkten Operatoren über einem separablen Hilbertraum ist, kann m nur ein Vielfaches der „Spur" sein, was auf keinen Fall ein quantenmechanischer Zustand (Mischung) sein kann. Linearformen, die nicht unitärinvariant sind, kommen auch in der Segalschen Arbeit vor, besitzen aber keine Lebesgue-Monotonkonvergenzeigenschaft.

Andere Arbeiten über den Zusammenhang zwischen den von Neumannschen Algebren und der Integrationstheorie stammen von Dye ([*7*]) und Dixmier ([*6*]) und sind etwa gleichzeitig mit der Arbeit von Segal erschienen.

Ferner ist die im Jahr 1963 erschienene Veröffentlichung von E. M. ALFSEN ([*0*]) zu nennen. In dieser Arbeit werden projektivinvariante Intervallfunktionen auf Verbänden diskutiert. Es wird gezeigt, daß viele der wichtigsten Sätze der gewöhnlichen Wahrscheinlichkeitstheorie auch für allgemeinere Verbände gelten, aber die Arbeit scheint nicht auf Untersuchungen der wahrscheinlichkeitstheoretischen Struktur der Quantentheorie angelegt zu sein. In der vorliegenden Arbeit zeigen wir, daß die Theorie von ALFSEN trotzdem in der Quantentheorie — in einem gewissen technischen Sinn — angewandt werden kann. Diese Anwendung wird jedoch durch die Projektivinvarianz der Intervallfunktionen sehr erschwert. Die Wahrscheinlichkeiten, die in der Quantentheorie auftauchen, sind nie auf naive Weise projektivinvariant. Wie wir jedoch sehen werden, ist es immer möglich, einen von der Wahrscheinlichkeitsverteilung abhängigen modulären Verband von Operatoren so auszuwählen, daß die gegebene Verteilung projektivinvariant auf diesem Verband ist. Der so ausgewählte Verband hängt aber sehr stark von der Verteilung ab, was eine heuristische Rechtfertigung der Methode praktisch unmöglich macht. Die Verbände, die auf diese Weise in Erscheinung treten, haben in gewisser Weise ad-hoc-Charakter, und sie können kaum eine besondere Rolle beim mathematischen Aufbau der Quantenphysik spielen. Man bekommt den Eindruck, daß die Alfsensche Theorie nur mit Hilfe von Begriffen angewandt werden kann, die in der Untersuchung der wahrscheinlichkeitstheoretischen Struktur der Quantentheorie belanglos sind. Es ist außerdem nicht von vornherein selbstverständlich, daß Verbände in der Untersuchung der allgemeinen Wahrscheinlichkeitstheorie unentbehrlich sind. Die Hauptbegriffe und Hauptsätze, die wir später einführen und beweisen werden, kommen sogar ohne Verbands- oder Ringstruktur aus.

In der vorliegenden Arbeit wollen wir nun wahrscheinlichkeitstheoretische Fragen von einem abstrakteren Standpunkt aus betrachten. Wir werden die Anfangsstufen einer abstrakten Wahrscheinlichkeitstheorie so zusammenbauen, daß es ziemlich klar wird, wie man den Fall der Operatoren über einem Hilbertraum wahrscheinlichkeitstheoretisch am besten erfassen kann. Grundbegriff dieser Überlegungen ist der Begriff des abstrakten Kegels. Die herkömmliche Wahrscheinlichkeitstheorie taucht hier in einer abstrakten Gestalt wieder auf, wenn man annimmt, daß der Grundkegel eine natürliche Verbandsstruktur besitzt. Wir nehmen jedoch nicht immer an, daß diese Verbandsstruktur vorhanden ist. Welche weiteren Strukturannahmen statt dessen gemacht werden sollen, um die Verbandsstruktur zu ersetzen, werden wir hier nur schwach andeuten, denn es werden sich schon mit geringen Voraussetzungen interessante Ergebnisse ergeben. Der Verfasser hofft, daß eine weitere Überprüfung der Spezialfälle (z.B. des Aussehens der Theorie für allgemeine von Neumannsche Algebren) zu einfachen Ideen für einen reichhaltigeren Aufbau der Theorie führen wird.

Es ist nun vernünftig, nach dem Grund dafür zu fragen, daß wir mit Kegeln und nicht mit halbgeordneten Linearräumen als Grundbegriff anfangen. Um diese Frage zu beantworten, bemerken wir, daß ein halbgeordneter Vektorraum nicht unbedingt von seinem positiven Kegel erzeugt zu werden braucht. Dasselbe gilt für den Dualraum. Bei Kegeln entfällt der erste dieser Nachteile automatisch. Der zweite entfällt, wenn man den „Dualkegel“ als den Kegel aller nichtnegativen Affin-formen definiert. Ein heuristischer Grund dafür, warum man nur nichtnegative Affinformen zuläßt und keine größere Klasse, liegt auf der Hand, denn die nichtnegativen Affinformen sind genau die Homomorphismen des gegebenen Kegels auf den Kegel aller nichtnegativen Zahlen. In diesem Schema tauchen halbgeordnete Linearräume nun auf natürliche Weise auf, denn jeder abstrakte Kegel K läßt sich bekanntlich in einen erzeugten halbgeordneten Linearraum, dessen positiver Kegel K ist, einbetten. Auf Grund der Ökonomie scheint es deswegen vernünftig, den Begriff des Kegels und nicht den des halbgeordneten Linearraumes hier als Grundbegriff einzuführen.

Im folgenden Abschnitt dieser Arbeit definieren wir einige der Grundbegriffe (Kegel, Dualkegel usw.), die in unseren weiteren Überlegungen gebraucht werden. In § 3 diskutieren wir den Kegel aller beschränkten Operatoren über einen separablen Hilbertraum, um nichttriviale Beispiele der im ersten Abschnitt definierten Begriffe vorzuführen. Hier fügt sich auch die in [*18*] gegebene Charakterisierung der Erwartungen ein. Am Ende dieses Abschnittes erläutern wir einige Resultate, die dem Leser zeigen sollen, wie typische Eigenschaften des gewöhnlichen Raumes L^1 auch beim Kegel der Operatoren auftreten. Einige dieser Resultate scheinen noch nicht in der allgemeinen Literatur veröffentlicht worden zu sein! Im darauf folgenden Abschnitt (§ 4) fahren wir mit der allgemeinen Theorie fort. Wir definieren ein „Elementarsystem" (Definition (4.6)), und wir beweisen einen abstrakten Integralerweiterungssatz, der u.a. besagt, daß eine Elementarsystem im wesentlichen genau eine Integralerweiterung besitzt. Wir geben dann den Zusammenhang zwischen dieser abstrakten Theorie und der Segalschen bzw. der gewöhnlichen Wahrscheinlichkeitstheorie an.

Im letzten Abschnitt wenden wir den Erweiterungssatz an, um die Integralerweiterung des Kegels der beschränkten nichtnegativen Operatoren im Hilbertraum zu betrachten. Auch hier werden wir bekannten Eigenschaften von L^1 begegnen.

§ 2. Allgemeine Begriffe

Definition (2.1). Ein abstrakter Kegel K über den nichtnegativen reellen Zahlen $\{\lambda\}$ ist eine additive Abelsche Halbgruppe (mit Einheit $\equiv 0$) mit skalarer Multiplikation λx ($\lambda \geqq 0$ reell, $x \in K$) derart, daß die folgenden Rechenregeln gelten:

i) $(\lambda_1 + \lambda_2)x = \lambda_1 x + \lambda_2 x;\quad \lambda_1(\lambda_2 x) = (\lambda_1 \lambda_2)x$,

ii) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,

iii) $1 \cdot x = x$,

iv) $x + y = 0$ ergibt $x = y = 0$,

v) $x + y = z + y$ dann und nur dann, wenn $x = z$.

In einem Kegel K gibt es eine natürliche Halbordnung. Wir sagen, daß $x \geqq y$, wenn es $z \in K$ mit $x = y + z$ gibt. Jeder Kegel K läßt sich in einem halbgeordneten Linearraum so einbetten, daß dieser Raum von K erzeugt wird und K als positiven Kegel besitzt. (Um diesen Raum zu konstruieren, geht man zunächst von der Menge $\{(x, y) \mid x \in K, y \in K\}$ geordneter Paare aus.) Diesen erzeugten Raum werden wir, wie in der Literatur üblich ist, durch $K - K$ bezeichnen.

Definition (2.2). Ein Kegel K heißt σ-vollständig, wenn jede aufsteigende Folge $\{x_i\}$, für die es $y \in K$ mit $y \geqq x_k$ für alle k gibt, ein Supremum $x \in K$ besitzt.

Bemerkung (2.1). Ist K σ-vollständig und $\{x_i\}$ eine lineargeordnete Folge aus K und gibt es ein $y \in K$ mit $y \geqq x_i$ für alle i, so gilt: Es existieren $\inf\{y - x_i\}$ und $\inf\{x_i\}$, und

$$\begin{aligned} y - \sup\{x_i\} &= \inf\{y - x_i\}, \\ y - \inf\{x_i\} &= \sup\{y - x_i\}. \end{aligned}$$

Beweis. Wir beweisen zunächst die erste Gleichung. Sei $z \leqq y - x_i$ für alle i: Dann ist $x_i \leqq y - z$ und $y - z \geqq \sup\{x_i\}$ oder $z \leqq y - \sup\{x_i\}$. Hieraus folgt die erste Gleichung. Nun merken wir, daß die lineargeordnete Folge $\{y - x_i\}$ durch y beschränkt ist. Durch Ersetzen der Folge $\{x_i\}$ durch $\{y - x_i\}$ in der ersten Gleichung bekommen wir die zweite.

Bemerkung (2.2). Ein Corollar zur Bemerkung (2.1) ist: Jede absteigende Folge aus einem σ-vollständigen Kegel K hat ein Infimum in K.

Bemerkung (2.3). Sei $\{x_i\}$ und $\{y_i\}$ aufsteigende Folgen aus einem σ-vollständigen Kegel K. Es existiert $\sup\{x_i + y_i\}$ genau dann, wenn $\sup\{x_i\}$ und $\sup\{y_i\}$ existieren. In diesem Fall gilt

$$\sup\{x_i + y_i\} = \sup\{x_i\} + \sup\{y_i\}.$$

Beweis. Seien $x_\infty = \sup\{x_i\}$ und $y_\infty = \sup\{y_i\}$. Offenbar gilt $x_\infty + y_\infty \geqq \geqq \sup\{x_i + y_i\}$. Sei $z \geqq x_k + y_k$ für alle k. Es gilt $z \geqq y_k$ für alle k und $z \geqq y_\infty$. Sei k_0 beliebig fest gewählt und $k \geqq k_0$. Es gilt $z \geqq x_k + y_k \geqq x_{k_0} + y_k$ und $z - x_{k_0} \geqq y_k$ für alle $k \geqq k_0$. Hieraus folgt $z - x_{k_0} \geqq y_\infty$ und $z - y_\infty \geqq x_{k_0}$. Da k_0 beliebig ist und $z - y_\infty \geqq 0$, folgt jetzt $z - y_\infty \geqq x_\infty$ und $z \geqq x_\infty + y_\infty$, welche zeigt, daß $x_\infty + y_\infty = \sup\{x_i + y_i\}$.

Ein Corollar zu Bemerkung (2.3) ist

Bemerkung (2.4). $\inf\{x_i + y_i\} = \inf\{x_i\} + \inf\{y_i\}$.

Beweis. Sei k_0 fest gewählt. Die Folgen $\{x_{k_0} - x_k\}$ und $\{y_{k_0} - y_k\}$ sind aufsteigend für $k \to -\infty$. Sie sind außerdem durch x_{k_0} bzw. y_{k_0} beschränkt. Wegen Bemerkungen (2.1) und (2.3) ergibt sich jetzt

$$\begin{aligned} x_{k_0} + y_{k_0} - \inf\{x_i + y_i\} &= \sup\{x_{k_0} + y_{k_0} - (x_i + y_i)\} \\ &= \sup\{x_{k_0} - x_i\} + \sup\{y_{k_0} - y_i\} \\ &= x_{k_0} - \inf\{x_i\} + y_{k_0} - \inf\{y_i\} \\ &= x_{k_0} + y_{k_0} - (\inf\{x_i\} + \inf\{y_i\}), \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

Definition (2.3). Eine Abbildung Φ: $K_1 \to K_2$ von einem Kegel K_1 auf einen Kegel K_2 heißt ein Homomorphismus, wenn gilt

$$\begin{aligned} \Phi(x + y) &= \Phi(x) + \Phi(y) \qquad (x, y \in K), \\ \Phi(\lambda x) &= \lambda \Phi(x) \qquad (\lambda \text{ reell} \geqq 0,\ x \in K). \end{aligned}$$

Sie heißt „normal“ (Dixmier [5]), wenn sie ordnungsstetig ist, d.h. für jede monotone Folge $\{x_i\}$ aus K mit

$$x = \sup\{x_i\} \ (x_{-\infty} = \inf\{x_i\})$$

gilt

$$\Phi(x_\infty) = \sup\{\Phi(x_i)\} \ (\Phi(x_{-\infty}) = \inf\{\Phi(x_i)\}).$$

Man überzeugt sich leicht, daß jeder eineindeutige Homomorphismus (Isomorphismus) normal ist.

Bemerkung (2.5). Sei Φ: $K_1 \to K_2$ ein Homomorphismus von K_1 auf einen σ-vollständigen Kegel K_2. Die Abbildung Φ ist genau dann normal, wenn für jede Folge $x_1 \geqq x_2 \geqq x_3 \geqq \cdots$ mit $\inf\{x_i\} = 0$ gilt $\inf\{\Phi(x_i)\} = 0$.

Beweis. Sei $\{x_i\}$ eine aufsteigende Folge aus K_1 mit $x_\infty = \sup\{x_i\}$. Die Folge $\{x_\infty - x_i\}$ aus K_1 ist absteigend. Ist $y \leqq x - x_k$ für alle k, so ist $x_\infty - y \geqq x_k$ und $x_\infty - y \geqq x_\infty$. Hieraus folgt $y = 0$ und $0 = \inf\{x_\infty - x_i\}$. Dies ergibt $\inf\{\Phi(x_\infty - x_i)\} = 0$ und es folgt aus Bemerkung (2.1) die Gleichung $\Phi(x_\infty) = \sup\{\Phi(x_i)\}$. Sei nun $\{x_i\}$ eine absteigende Folge mit $x_{-\infty} = \inf\{x_i\}$. Ist $y \leqq x_k - x_{-\infty}$ für alle k, so ist $y + x_{-\infty} \leqq x_k$ oder $y + x_{-\infty} \leqq x_{-\infty}$ und $y = 0$. Es folgt $0 = \inf\{\Phi(x_i - x_{-\infty})\}$. Nun ist $\Phi(x_{-\infty}) \leqq \Phi(x_k)$ für alle k, und aus Bemerkung (2.4) folgt

$$\begin{aligned}\inf\{\Phi(x_i)\} &= \inf\{\Phi(x_i) - \Phi(x_{-\infty}) + \Phi(x_{-\infty})\}\\ &= \inf\{\Phi(x_i - x_{-\infty}) + \Phi(x_{-\infty})\\ &= \Phi(x_{-\infty})\,.\end{aligned}$$

Definition (2.4). Der Dualkegel K' eines Kegels K ist der Kegel aller normalen Homomorphismen von K auf den Kegel R^+ der nichtnegativen reellen Zahlen.

Bemerkung (2.6). Der Dualkegel K' eines Kegels K ist immer σ-vollständig.

Beweis. Sei $f_1 \leqq f_2 \leqq f_3 \leqq \cdots \leqq f$ eine Folge aus K'. Für jedes $x \in K$ existiert $\lim\limits_n f_n(x) \equiv f_\infty(x)$. Um zu zeigen, daß f_∞ in K' liegt, können wir Bemerkung (2.5) benutzen. Ist also $x_1 \geqq x_2 \geqq x_3 \geqq \cdots$ eine Folge aus K mit $\inf\{x_n\} = 0$, so gilt, wegen der Monotonie in i und n,

$$\lim_n \lim_i f_i(x_1 - x_n) = \lim_i \lim_n f_i(x_1 - x_n)$$

und $\lim\limits_n f_i(x_n) = 0$, weil $f_i \in K'$ für jedes i. Es folgt: $\lim\limits_n f_\infty(x_n)$

$$\begin{aligned}&= \lim_n \lim_i f_i(x_n) = \lim_n \lim_i (f_i(x_1) - f_i(x_1 - x_n)) = f_\infty(x_1)\\ &- \lim_n \lim_i f_i(x_1 - x_n) = f_\infty(x_1) - \lim_i \lim_n f_i(x_1 - x_n) = f_\infty(x_1)\\ &- \lim_i \lim_n f_i(x_1) + \lim_i \lim_n f_i(x_n) = f_\infty(x_1) - f_\infty(x_1) = 0\,.\end{aligned}$$

Sei nun K ein Kegel und $y \in K$. Wir nennen y einen „inneren Punkt" von K, wenn es für jedes Element $x \in K$ ein reelles $\lambda \geqq 0$ mit $x \leqq \lambda y$ gibt. Ist $y \in K$ ein innerer Punkt, so ist $F_y(\cdot)$ ein Element von $(K')' = K''$, wobei $F_y(\cdot)$ durch

$$F_y(f) = f(y) \qquad (f \in K')$$

definiert wird. Die Funktion $F_y(\cdot)$ hat die Eigenschaft: Ist $f_1 \leqq f_2 \leqq f_3 \leqq \ldots$ eine Folge aus K' mit $\sup\{F_y(f_i)\} < \infty$, so existiert $f_\infty = \sup\{f_i\}$ in K' und $F_y(f) = \lim\limits_i F_y(f_i)$. Diese Monotonkonvergenz-Eigenschaft halten wir mit einer Definition fest.

Definition (2.5). Ein *Integral* f_0 über einem σ-vollständigen Kegel K ist ein Element aus K' mit der Eigenschaft: Ist $x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 \leqq \ldots$ eine Folge aus K mit $\sup\{f_0(x_i)\} < \infty$, so existiert $x_\infty = \sup\{x_i\}$ in K und $f_0(x_\infty) = \lim\limits_i f_0(x_i)$.

Wir haben also: F_y ist ein Integral über K', falls y ein innerer Punkt von K ist. Jedes Integral über K ist ein innerer Punkt von K', denn es gilt der Satz:

Satz (2.1). *Ist f_0 ein Integral über dem σ-vollständigen Kegel K und f ein Homomorphismus von K auf dem Kegel R^+ der nichtnegativen reellen Zahlen, so gibt es ein reelles $\lambda \geqq 0$ mit*

$$f(x) \leqq \lambda f_0(x)\,, \qquad (x \in K)$$

und es folgt, daß jeder Homomorphismus f normal ist und zu K' gehört.

Beweis: Gäbe es kein solches λ, so gäbe es eine Folge $\{x_n\}$ aus K mit $f_0(x_n) = 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ und $f(x_n) \to \infty$. Sei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit $\sum \lambda_i < \infty$ und sei y_n durch

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

definiert. Es gilt $f_0(y_n) \leqq \sum_i \lambda_i < \infty$ für alle n.

Es existiert also $y_\infty = \sup\,\{y_i\} \in K$ mit

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i f(x_i) \leqq f(y_\infty)$$

und es konvergiert $\sum \lambda_i f(x_i)$ für jede beliebige Folge $\{\lambda_i\}$ mit den schon genannten Eigenschaften. Das kann aber nur bei beschränkter $\{f(x_i)\}$ möglich sein, in Widerspruch zur Annahme.

Definieren wir nun einen reflexiven Kegel K durch die Eigenschaft, daß die natürliche Abbildung von K in K'' ein Isomorphismus ist, so sehen wir, daß die Menge aller Integrale über einem reflexiven Kegel K genau die Menge der inneren Punkte von K' ist. Diese Art von Reflexivität kommt öfters vor, z. B. ist jeder L^1-Raum bezüglich eines σ-endlichen Maßes reflexiv in diesem Sinn.

Besonders wichtig ist der Spezialfall, in dem die natürliche Halbordnung des Kegels eine Verbandsstruktur induziert. Solche Kegel werden wir Simplexkegel nennen ([*4*], [*1*]). Der von einem Simplexkegel S erzeugte Linearraum $S - S$ ist ein Vektorverband mit S als einem erzeugenden Unterverband[1]. Schon im Fall eines Simplexkegels begegnet man vielen Eigenschaften, die Verallgemeinerungen von entscheidenden Sätzen aus der Maß- und Integraltheorie sind. Ist z. B. $x_1, x_2, x_3, \ldots$ eine Folge aus $S - S$, so ist die Ordnungskonvergenz dieser Folge gegen $x \in S - S$ eine Verallgemeinerung der beschränkten Fastüberall-Konvergenz von Funktionen in L^1. Bezeichnen wir diese Ordnungskonvergenz durch $x = \lim_i x_i \in S - S$, so gilt für jedes $f \in S'$

$$\lim_i f(x_i) = f(\lim_i x_i)$$

Dies ist eine abstrakte Version des Lebesgueschen Satzes von der beschränkten Konvergenz. Der Dualkegel S' eines Simplexkegels ist wieder ein Simplexkegel

[1] Zwischen den Paaren (x, y) und (u, v), mit x, y, u und v aus S, definiert man die Verknüpfung: $(x, y) \vee (u, v) \equiv ((x + v) \vee (u + y), y + v)$. Hierdurch wird die Erweiterung der Verbandsstruktur $\vee$ und $\wedge$ von S auf den ganzen Raum $S - S$ ermöglicht.

und es gelten für $f_1, f_2 \in S$ die Formeln

$$(f_1 \vee f_2)(x) = f_2(x) + \sup_{y \leqq x} [f_1(y) - f_2(y)]$$

$$(f_1 \wedge f_2)(x) = f_2(x) + \inf_{y \leqq x} [f_1(y) - f_2(y)] .$$

Der Beweis für diese Aussage läuft wie der Beweis von Theorem A, § 15, Chapt. III in [*14*]. Hierzu bemerken wir, daß aus der Ungleichung

$$-f_2(y) \leqq f_1(y) - f_2(y) \leqq f_1(y)$$

folgt

$$-f_2(x) \leqq \inf_{y \leqq x} [f_1(y) - f_2(y)] \leqq \sup_{y \leqq x} [f_1(y) - f_2(y)] \leqq f_1(x)$$

und damit die Normalität von $f_1 \vee f_2$ und $f_1 \wedge f_2$.

Dieser Aussage entspricht in der Maßtheorie die Verbandsstruktur der Menge aller endlichen Ladungsverteilungen. Sei nun f_0 ein Integral über dem Simplexkegel S. Es gilt: Sei $\{x_i\}$ eine Folge aus S mit $\liminf_i f_0(x_i) < \infty$. Dann existiert (im verbandstheoretischen Sinn) $\liminf_i x_i \in S$ und

$$f_0(\liminf_i x_i) \leqq \liminf_i f_0(x_i) .$$

Dies ist das Lemma von Fatou in abstrakter Gestalt.

§ 3. Der Operatorkegel

Wir betrachten nun den Kegel $K(\mathfrak{H})$ aller symmetrischen (= selbstadjungierten) nichtnegativen überall definierten[2] Operatoren in einem komplexen separablen Hilbertraum $\mathfrak{H}$. Der Kegel $K(\mathfrak{H})$ ist kein Verband in der additiven Halbordnung, denn wäre er eine, so wäre für jede Projektion $E \in K(\mathfrak{H})$ der Kegel $\{EAE \mid A \in K(\mathfrak{H})\}$ ein Unterverband von $K(\mathfrak{H})$. Das gilt insbesondere, wenn E eine zweidimensionale Projektion ist. Betrachten wir also $K(\mathfrak{H}_2)$, wobei $\mathfrak{H}_2$ ein zweidimensionaler Hilbertraum ist. Dieser Kegel besteht aus den 2×2 Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 - ib_2 \\ b_1 + ib_2 & a_2 \end{pmatrix} \qquad (a_1, a_2, b_1, b_2 \text{ reell}),$$

deren beide Eigenwerte nichtnegativ sind, d. h. $\lambda_1 + \lambda_2 \geqq 0$ und $\lambda_1 \lambda_2 \geqq 0$ erfüllen. Dieser Kegel ist in den Vektorraum aller geordneten Quadrupel (a_1, a_2, b_1, b_2) eingebettet. Die Untermenge

$$V \equiv \{(a_1, a_2, b_1, b_2) \mid a_1 + a_2 = 1\}$$

ist eine affine Untermannigfaltigkeit dieses Raumes und schneidet $K(\mathfrak{H}_2)$ in der Menge der Quadrupel mit

$$a_1 + a_2 = \lambda_1 + \lambda_2 = 1 ,$$
$$\lambda_1 \lambda_2 = a_1 a_2 - (b_1^2 + b_2^2) \geqq 0 ,$$

---

[2] Nach dem Satz von Hellinger und Toeplitz ([*21*]) sind solche Operatoren immer beschränkt.

und der so definierte Schnitt V_1 erzeugt $K(\mathfrak{H}_2) = \{\alpha h \mid \alpha \geqq 0, h \in V_1\}$. Die Randpunkte des Schnittes V_1 sind die Quadrupel mit den Eigenschaften

$$a_1 + a_2 = 1\,,$$
$$a_1 a_2 = b_1^2 + b_2^2\,.$$

Hieraus folgt die folgende Beziehung zwischen a_1, b_2 und b_1

$$4\,(a_1 - \tfrac{1}{2})^2 + 4\,b_1^2 + 4\,b_2^2 = 1\,,$$

welche ein Ellipsoid beschreibt. Das zeigt, daß der Schnitt $V \cap K(\mathfrak{H}_2)$ in jedem in V definierten linearen Koordinatensystem wie ein Ellipsoid aussieht, nicht wie ein Simplex. Es folgt ([*1*], [*4*]), daß $K(\mathfrak{H}_2)$ und $K(\mathfrak{H})$ keine Verbände bezüglich ihrer natürlichen Halbordnung sein können.

Es gibt eine bemerkenswerte Klasse von Kegeln, die in $K(\mathfrak{H}_2)$ enthalten und Simplexkegel sind. Das Zentrum Z des Ellipsoids $V \cap K(\mathfrak{H}_2)$ wird durch das Quadrupel $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$ dargestellt. Dieses Quadrupel entspricht einem Vielfachen der Einheitsmatrix. Sei v eine Gerade in V, die durch Z geht. Die abgeschlossene Strecke $v \cap K(\mathfrak{H}_2)$ ist ein Simplex und erzeugt mit dem Nullpunkt $(0, 0, 0, 0)$ einen Simplexkegel. Dieser Simplexkegel ist der positive Kegel einer maximalen Algebra im Raum aller symmetrischen 2×2 Matrizen. Weiterhin können alle solchen maximalen Algebren auf diese Weise erzeugt werden.

Wir wollen nun einige der in § 2 für Kegel definierten Begriffe im konkreten Fall $K(\mathfrak{H})$ genauer ansehen. Sei $\{\varphi_i\}$ eine orthonormierte Basis in $\mathfrak{H}$. Wir definieren, auf die übliche Weise, die Spur:

$$\operatorname{Sp}\{A\} = \sum_{i=1}^{\infty} (\varphi_i, A\,\varphi_i) \qquad (A \in K(\mathfrak{H}))\,.$$

Aus einfacher Anwendung des Satzes von Fubini folgt die Gleichung ([*5*])

$$\operatorname{Sp}\{B\,B^*\} = \operatorname{Sp}\{B^*\,B\}$$

für jeden beschränkten Operator B in $\mathfrak{H}$. Hieraus folgt

$$\text{i)}\;\; \operatorname{Sp}\{A\} = \operatorname{Sp}\{U A\,U^*\}\,,$$
$$\text{ii)}\;\; \operatorname{Sp}\{A^{1/2} B A^{1/2}\} = \operatorname{Sp}\{B^{1/2} A\,B^{1/2}\}$$

für alle unitären Operatoren U und alle A und B aus $K(\mathfrak{H})$. Aus i) folgt die Unabhängigkeit der Definition der Spur von der Wahl der Basis $\{\varphi_i\}$.

Sei nun J ein Element aus dem Dualkegel $K'(\mathfrak{H})$ des Kegels $K(\mathfrak{H})$ (Def. (2.4)). Durch

$$J(B) = J(B^+) - J(B^-)$$

erweitern wir den Definitionsbereich von J auf die Gesamtheit aller beschränkten symmetrischen Operatoren B, wobei $B = B^+ - B^-(B^+, B^- \in K(\mathfrak{H}))$ ([*21*], Kap. 7, § 108). Durch die triviale Identität

$$A + B = (A + B)^+ - (A + B)^- = A^+ - A^- + B^+ - B^-$$

beweist man leicht, daß das erweiterte J linear ist. Wir erweitern J noch einmal, indem wir für einen beliebigen beschränkten Operator $C = C_1 + i\,C_2(C_1, C_2$ symmetrisch) $J(C)$ durch

$$J(C) = J(C_1) + i\,J(C_2)$$

definieren. Hierdurch kann J als eine komplexe Linearform über den Bereich aller beschränkten linearen Operatoren angesehen werden. Sei nun ψ, φ aus $\mathfrak{H}$. Wir definieren den Operator $E_{\psi,\varphi}$ durch

$$E_{\psi,\varphi}(\xi) = (\varphi, \xi)\psi \qquad (\xi \in \mathfrak{H}).$$

Zur Verkürzung werden wir E_φ statt $E_{\varphi,\varphi}$ schreiben. Es ist offensichtlich, daß

$$\varrho(\psi, \varphi) \equiv J(E_{\psi,\varphi})$$

eine komplexe Bilinearform über $\mathfrak{H}$ ist. Da E_ψ in $K(\mathfrak{H})$ liegt und $E_\psi \leqq I$ aus $\|\psi\| = 1$ folgt, ist

$$0 \leqq J(E_\psi) \leqq J(I) < \infty.$$

Die Bilinearform ϱ ist also positiv und beschränkt. Folglich gibt es genau einen Operator aus $K(\mathfrak{H})$ — den wir wieder mit J bezeichnen wollen — mit

$$J(E_{\psi,\varphi}) = (\varphi, J\psi).$$

Ist $\|\psi\| = 1$, so ist

$$J(E_\psi) = (\psi, J\psi) = \mathrm{Sp}\,\{E_\psi J E_\psi\}.$$

Nun sei E eine Projektion. Da $\mathfrak{H}$ separabel ist, ist auch der Unterraum $E\mathfrak{H}$ separabel und wird von einer abzählbaren orthonormierten Basis $\{\psi_i\}$ aufgespannt. Es gilt

$$E = \sup_n \{\sum_{i=1}^n E_{\psi_i}\}$$

und, wegen der Monotonstetigkeit von J und $\mathrm{Sp}\,\{\cdot\}$, gilt

$$\begin{aligned} J(E) &= \lim_n \sum_{i=1}^n J(E_{\psi_i}) \\ &= \lim_n \sum_{i=1}^n \mathrm{Sp}\,\{E_{\psi_i} J E_{\psi_i}\} \\ &= \lim_n \sum_{i=1}^n \mathrm{Sp}\,\{J^{1/2} E_{\psi_i} J^{1/2}\} \\ &= \lim_n \mathrm{Sp}\,\{J^{1/2}(\sum_{i=1}^n E_{\psi_i}) J^{1/2}\} = \mathrm{Sp}\,\{J^{1/2} E J^{1/2}\}. \end{aligned}$$

Ist $A \in K(\mathfrak{H})$, so ist A das Supremum einer ansteigenden Folge $\{A_n\}$, in der jedes A_n eine endliche positive lineare Zusammensetzung von Projektionen ist. Daraus ersieht man, daß

$$J(A) = \mathrm{Sp}\,\{J^{1/2} A J^{1/2}\} = \mathrm{Sp}\,\{A^{1/2} J A^{1/2}\}$$

für alle $A \in K(\mathfrak{H})$, und daß $\mathrm{Sp}\,\{J\} = J(I) < \infty$. Ist andererseits $J \in K(\mathfrak{H})$ mit $\mathrm{Sp}\{J\} < \infty$, so ist

$$J(\cdot): J(A) = \mathrm{Sp}\{J^{1/2} A J^{1/2}\} = \mathrm{Sp}\{A^{1/2} J A^{1/2}\}$$

ein Element aus $K'(\mathfrak{H})$. Diese Überlegungen führen zu

Satz (3.1). *Der Dualkegel $K'(\mathfrak{H})$ von $K(\mathfrak{H})$ ist zu dem Kegel W aller Operatoren $J \in K(\mathfrak{H})$ mit $\mathrm{Sp}\{J\} < \infty$ isomorph. Diese Isomorphie wird durch die Formel*

$$J(A) = \mathrm{Sp}\{A^{1/2} J A^{1/2}\} = \mathrm{Sp}\{J^{1/2} A J^{1/2}\}$$

eindeutig festgelegt.

Weil $\mathrm{Sp}\{J\} < \infty$ ist, gibt es für J eine Schmidt-Hilbert-Entwicklung

$$J = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i E_{\psi_i},$$

wobei $\mu_i \geqq 0$ für alle i ist und $\Sigma \mu_i < \infty$. Es folgt aus der Monotonstetigkeit von $\mathrm{Sp}\{\cdot\}$, daß $J(A)$ auf die folgende Weise entwickelt werden kann:

$$J(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \,\mathrm{Sp}\{A^{1/2} E_{\psi_i} A^{1/2}\} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Sp}\{E_{\psi_i} A E_{\psi_i}\}$$

oder

$$J(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i (\psi_i, A \psi_i).$$

Die letzte Entwicklungsformel ist die einer „Mischung" im Sinne von § 1. Satz (3.1) entspricht der in [*18*] aufgeführten Charakterisierung der Erwartungen von J. v. Neumann. Eine ähnliche Charakterisierung der normalen Linearformen über einer allgemeinen v. Neumann-Algebra wird in [*5*] angegeben. Betrachten wir nun weiter diesen Kegel W der nichtnegativen Operatoren J mit $\mathrm{Sp}\ \{J\} < \infty$. Über W ist die Spur eine Linearform, und zwar ein Element aus W'. Sie ist in der Tat ein Integral (Def. (2.5)) über W. Diese Eigenschaft der Spur weist man am besten durch die der Definition (2.4) vorausgehenden Bemerkungen nach. Die Identitätsabbildung I vom Hilbertraum $\mathfrak{H}$ auf sich ist ein innerer Punkt vom Kegel $K(\mathfrak{H})$. Hieraus folgt, daß die auf $K'(\mathfrak{H})$ definierte positive Linearform

$$F_I(J) = J(I) \quad (J \in K'(\mathfrak{H}))$$

ein Integral über $K'(\mathfrak{H})$ ist. Wegen der Isomorphie zwischen $K'(\mathfrak{H})$ und W ist also $\mathrm{Sp}\{J\} = J(I)$ ein Integral über W. Es ist übrigens nicht schwierig, den Beweis direkt mit Hilfe von Eigenschaften des Hilbertraums durchzuführen.

Diese Eigenschaft, daß die Spur ein Integral ist, ermöglicht eine volle Charakterisierung der Bidualkegel $K''(\mathfrak{H})$ von $K(\mathfrak{H})$. Es stellt sich heraus, daß $K(\mathfrak{H})$ (und auch W) ordnungsreflexiv ist.

Satz (3.2). *Durch*

$$[\Phi(A)](J) = J(A), \quad (J \in K(\mathfrak{H}))$$

entsteht eine Abbildung $\Phi: K(\mathfrak{H}) \to K''(\mathfrak{H})$. Φ ist ein Isomorphismus (Def. (2.3) *Bemerkung) zwischen $K(\mathfrak{H})$ und $K''(\mathfrak{H})$.*

Beweis: Wir wollen zunächst zeigen, daß der Dualkegel W' von W auf passende Weise mit $K(\mathfrak{H})$ isomorph ist.

Sei $\bar{A} \in W'$. Wir betrachten den Raum $\bar{S}$ aller Operatoren J mit $J = J_1 + iJ_2$, wobei J_1 und J_2 symmetrisch und $\mathrm{Sp}\{|J_1|\} < \infty$, $\mathrm{Sp}\{|J_2|\} < \infty$ sind. Wie im Beweis von Satz (3.1) können wir $\bar{A}(\cdot)$ als eine komplexe Linearform über $\bar{S}$ ansehen. Da $E_{\psi,\varphi} \in \bar{S}$ für $\psi, \varphi \in \mathfrak{H}$, ist

$$\bar{\varrho}(\psi, \varphi) \equiv \bar{A}(E_{\psi,\varphi})$$

eine Bilinearform auf $\mathfrak{H}$. Weiterhin, weil die Spur ein Integral über W ist, gilt für passendes $\lambda \geqq 0$

$$\bar{\varrho}(\varphi, \varphi) = \bar{A}(E_\varphi) \leqq \lambda \,\mathrm{Sp}\{E_\varphi\} = \lambda \|\varphi\|^2,$$

eine Folgerung des Satzes (2.1). Die Bilinearform $\bar{\varrho}$ ist also beschränkt und es gibt genau ein $A \in K(\mathfrak{H})$ mit

$$\bar{A}(E_{\psi,\varphi}) = (\varphi, A\psi) \qquad (\psi, \varphi \in \mathfrak{H}).$$

Wie im Beweis des Satzes (3.1) können wir nun zeigen, daß

$$\bar{A}(J) = \mathrm{Sp}\{A^{1/2} J A^{1/2}\} = \mathrm{Sp}\{J^{1/2} A J^{1/2}\}$$

für alle $J \in W$. Hieraus folgt, daß die Zuordnung $\bar{A} \leftrightarrow A$ ein Isomorphismus zwischen W' und $K(\mathfrak{H})$ ist. Sei $\tilde{A}(\cdot)$ ein Element des Bidualkegels $K''(\mathfrak{H})$ von $K(\mathfrak{H})$. Wegen Satz (3.1) kann $\tilde{A}(\cdot)$ als eine normale nichtnegative Linearform über W betrachtet werden. A ist also gleichzeitig ein Element aus W' und es gibt genau ein A aus $K(\mathfrak{H})$ mit $\tilde{A}(J) = \mathrm{Sp}\{J^{1/2} A J^{1/2}\}$. Es gilt also

$$\tilde{A}(J) = \mathrm{Sp}\{J^{1/2} A J^{1/2}\} = J(A)$$

für alle J in $K'(\mathfrak{H})$ und der Satz ist bewiesen.

Aus diesem Reflexivitätssatz folgt, daß die Integrale über $W(\cong K'(\mathfrak{H}))$ genau die inneren Punkte von $K(\mathfrak{H})$, d. h. die regulären Operatoren aus $K(\mathfrak{H})$ sind.

Sei nun $L^1(\mathfrak{H})$ der Linearraum aller symmetrischen Operatoren J mit $\mathrm{Sp}\{|J|\} < \infty$. In [*22*] wird bewiesen, daß $L^1(\mathfrak{H})$ mit der Norm $\|J\|_1 \equiv \mathrm{Sp}\{|J|\}$ ein Banachraum ist. Wie wir im Satz (3.1) gezeigt haben, ist der positive Kegel W von $L^1(\mathfrak{H})$ mit den Erwartungen über $K(\mathfrak{H})$ zu identifizieren. In W gilt auch die L-Norm-Eigenschaft

$$\|A + B\|_1 = \|A\|_1 + \|B\|_1 \qquad (A, B \in W).$$

Eine tieferliegende Eigenschaft, die auch für verbandstheoretische L-Räume gilt, ist Folgendes: Für jedes $J \in L^1(\mathfrak{H})$ gibt es genau eine Zerlegung $J = J^+ - J^-$ mit $J^+, J^- \in W$ und $\|J\|_1 = \|J^+\|_1 + \|J^-\|_1$. Diese Aussage, die in der gewöhnlichen L-Raum-Theorie eine Anwendung in der Ergodentheorie findet ([*10*] Kap. 2, § 2), ist eine alternative Charakterisierung der Aufspaltung von J in seinen positiven und seinen negativen Teil. Um sie zu beweisen, nehmen wir an, daß es außer $J = J^+ - J^-$ eine weitere Zerlegung

$$J = J_1 - J_2 \qquad (J_1, J_2 \in W)$$

mit

$$\|J\|_1 = \|J_1\|_1 + \|J_2\|_1$$

gibt. Hieraus folgt

$$\|J\|_1 = \|J_1\|_1 + \|J_1 - J\|_1\,,$$
$$J_1 \geqq J\,, \quad J_1 \geqq 0\,.$$

und weil $\|J_1 - J\|_1 = \mathrm{Sp}\{J_1 - J\}$, gilt

$$\mathrm{Sp}\{J^+\} + \mathrm{Sp}\{J^-\} = \mathrm{Sp}\{J_1\} + \mathrm{Sp}\{J_1\} - \mathrm{Sp}\{J^+\} + \mathrm{Sp}\{J^-\}\,,$$

welche $\mathrm{Sp}\{J_1\} = \mathrm{Sp}\{J^+\}$ ergibt. Aber $E^+ J_1 E^+ \geqq E^+ J E^+ = J^+$, wobei E^+ der Träger von J^+ ist. Es gilt nun

$$\mathrm{Sp}\{J^+\} = \mathrm{Sp}\{J_1\} \geqq \mathrm{Sp}\{J_1^{1/2} E^+ J_1^{1/2}\} \geqq \mathrm{Sp}\{E^+ J_1 E^+\} \geqq \mathrm{Sp}\{J^+\}\,.$$

Aus $\mathrm{Sp}\{J_1\} = \mathrm{Sp}\{J_1^{1/2} E^+ J_1^{1/2}\}$ folgt, daß $J_1 = J_1^{1/2} E^+ J_1^{1/2}$, denn $J_1 \geqq J_1^{1/2} E^+ J_1^{1/2}$. Hieraus folgt, daß E^+ mindestens so groß wie der Träger von J_1 ist und $E^+ J_1 E^+ = J_1$. Es gilt also $J_1 \geqq J^+$ und aus $\mathrm{Sp}\{J_1\} = \mathrm{Sp}\{J^+\}$ folgt dann $J_1 = J^+$.

Wir erwähnen jetzt noch eine Eigenschaft von $L^1(\mathfrak{H})$, die in der Theorie der L-Räume von Bedeutung ist. Den Beweis jedoch werden wir in dieser Arbeit nicht durchführen.

Satz (3.3). *Die* Abbildung $J^+ : L^1(\mathfrak{H}) \to W$ *ist stetig in der* $L^1(\mathfrak{H})$*-Norm.*

Wir definieren nun den Raum $L^2(\mathfrak{H})$ als den Raum aller beschränkten Operatoren R in $\mathfrak{H}$ mit $\mathrm{Sp}\{R R^*\} = \mathrm{Sp}\{R^* R\} < \infty$. Dieser Raum ist bekanntlich ([*22*]) ein Hilbertraum mit der Norm

$$\| R \|_2 \doteq [\mathrm{Sp}\{R^* R\}]^{1/2}.$$

Weiterhin ist $R^* R \in W$ und jedes Element von W ist auf diese Weise darstellbar. Die R aus $L^2(\mathfrak{H})$ können genauso gut wie die Elemente aus W benutzt werden, um die Elemente von $K'(\mathfrak{H})$ darzustellen, denn es gilt, für $J = R^* R$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}\{J^{1/2} A J^{1/2}\} &= \mathrm{Sp}\{A^{1/2} J A^{1/2}\} = \mathrm{Sp}\{A^{1/2} R^* R A^{1/2}\} \\ &= \mathrm{Sp}\{R A^{1/2} A^{1/2} R^*\} = \mathrm{Sp}\{R A R^*\}.\end{aligned}$$

Diese enge Beziehung zwischen $L^1(\mathfrak{H})$ und $L^2(\mathfrak{H})$ ist offensichtlich ein Analogon bekannter Sätze aus der gewöhnlichen Maß- und Integraltheorie. Der folgende Satz über die Beziehung zwischen Konvergenz in $L^1(\mathfrak{H})$ und in $L^2(\mathfrak{H})$ zeigt, daß diese Analogie noch tiefer geht.

Satz (3.4). *Sei* $\{A_n\}$ *eine Folge aus* $K(\mathfrak{H})$ *mit* $A_n^2 \in W$ *für alle* n*. Dann konvergiert* $\{A_n^2\}$ *in der* $L^1(\mathfrak{H})$*-Norm genau dann, wenn* $\{A_n\}$ *in der* $L^2(\mathfrak{H})$*-Norm konvergiert. Ist* $A_\infty = \lim_n A_n$ *in der* $L^2(\mathfrak{H})$*-Norm, so ist* $A_\infty \in K(\mathfrak{H})$ *und* $A_\infty^2 = \lim_n A_n^2$ *in der* $L^1(\mathfrak{H})$*-Norm.*

Das Analogon dieses Satzes in den gewöhnlichen Maß- und Integraltheorie ist beinahe trivial zu beweisen. Der Beweis für Satz (3.4) ist schwieriger, soll aber in dieser Arbeit nicht durchgeführt werden.

§ 4. Integralerweiterung

Definition (4.1). Sei K ein σ-vollständiger Kegel und f ein Integral über K. Das Paar (K, f) heißt ein Integralsystem, falls die Halbordnung in K durch K' bestimmt ist, d.h. sind $x, y \in K$, so ist $x \geqq y$ dann und nur dann, wenn $g(x) \geqq g(y)$ für alle $g \in K'$.

Es ist offenbar, daß ein solches Paar (K, f) automatisch ein Integralsystem ist, wenn K reflexiv ist.

Wir werden nun in diesem Abschnitt einen Satz beweisen, der als die kegeltheoretische Gestalt des Fundamentalsatzes der Maß- und Integraltheorie gelten kann. Wir behandeln die Frage, ob es für einen gegebenen Kegel K und ein gegebenes funktional $f \in K'$ ein Integralsystem $(\bar{K}, \bar{f})$ mit $K \subset \bar{K}$ und $\bar{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in K$ gibt. Außerdem werden wir uns der Frage der Eindeutigkeit des Paares $(\bar{K}, \bar{f})$ für gegebenes (K, f) zuwenden. Wir fahren jetzt mit einigen elementaren Definitionen fort.

Definition (4.2). Ein Unterkegel K_1 von K_2 ist ein Kegel, dessen Elemente in K_2 enthalten sind und dessen Halbordnung mit der von K_2 induzierten Halbordnung übereinstimmt, d.h. ist $x - y \in K_2$ mit $x, y \in K_1$, so ist $x - y \in K_1$. K_1 heißt dicht in K_2, wenn K_1 ein Unterkegel von K_2 ist und wenn die Supremum- und Infimumbildungen übereinstimmen, d.h. für jede monotone Folge $\{x_i\}$ aus K_1 mit $x_\infty = \sup\{x_i\}$ bez. K_1 ($x_{-\infty} = \inf\{x_i\}$ bez. K_1) gilt auch $x_\infty = \sup\{x_i\}$ bez. K_2 ($x_{-\infty} = \inf\{x_i\}$ bez. K_2).

Der Sinn des Begriffs „dicht" kann vielleicht besser auf folgende Weise erklärt werden. Sei $x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 \leqq \cdots$ eine Folge aus K_1. Das Supremum von $\{x_i\}$ bez. K_1 wäre ein Element x_∞ mit $x_\infty \in K_1$ und $x_\infty \geqq x_i$ für alle i. Ist $y \in K_1$ mit $y \geqq x_i$ für alle i, so muß $y \geqq x_\infty$ gelten. Es kann jedoch passieren, daß es ein $\bar{y} \in K_2$, mit $\bar{y} \geqq x_i$ für alle i gibt, welches die Eigenschaft $\bar{y} \geqq x_\infty$ nicht hat. Die Dichtheit von K_1 in K_2 schließt diese Möglichkeit aus. Man merke, daß dann für $x_i \in K_1$ die Existenz von $x_\infty = \sup\{x_i\}$ bez. K_1 die Existenz von $x_\infty = \sup\{x_i\}$ bez. K_2 ergibt.

Im folgenden werden wir einen Unterkegel, der selbst vollständig ist (Definition (2.2)), einen σ-vollständigen Unterkegel nennen.

Die Unterkegel eines Kegels K sind genau die Mengen $K \cap E$, wobei E irgendeinen vollen Unterraum von $K - K$ bezeichnet. Der Durchschnitt einer beliebigen Menge von Unterkegeln ist auch ein Unterkegel.

Definition (4.3). Ein Unterkegel K_1 von K_2 heißt ein abgeschlossener Unterkegel in K_2, wenn für jede monotone Folge $\{x_i\}$ aus K_1 mit $x_\infty = \sup\{x_i\}$ bez. K_2 ($x_{-\infty} = \inf\{x_i\}$ bez. K_2) gilt $x_\infty \in K_1$ ($x_{-\infty} \in K_1$).

Ist K_2 ein σ-vollständiger Kegel, so ist jeder abgeschlossene Unterkegel von K_2 auch dicht in K_2 und σ-vollständig. Sei K_2 ein σ-vollständiger Kegel und K_1 ein Unterkegel von K_2. K_1 ist dicht in K_2 genau dann, wenn für jede Folge $x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 \leqq \cdots \leqq x_\infty$ aus K_1 mit $x_\infty = \sup\{x_i\}$ bez. K_1 gilt $x_\infty = \sup\{x_i\}$ bez. K_2. Das Analogon gilt für abgeschlossene Unterkegel. Man braucht in diesem Fall also nur nachzuprüfen, ob Suprema von aufsteigenden Folgen aus K_1 in K_1 liegen. Es gelten nun — wie leicht zu sehen — die folgenden Aussagen

i a) Ein beliebiger Durchschnitt von dichten σ-vollständigen Unterkegeln eines σ-vollständigen Kegels K ist wieder ein dichter σ-vollständiger Unterkegel von K.

ii a) Ein beliebiger Durchschnitt von abgeschlossenen Unterkegeln eines σ-vollständigen Kegels K ist wieder ein abgeschlossener Unterkegel von K.

Ist also K σ-vollständig und E eine Untermenge von K, so gibt es einen kleinsten (von E erzeugten) σ-vollständigen dichten Unterkegel von K, der E enthält. Analog existiert auch ein von E erzeugter Unterkegel und ein von E erzeugter abgeschlossener Unterkegel von K. Sei z.B. Ω ein Raum, $\mathfrak{R}$ ein Mengenkörper in $\Omega\,(\Omega \in \mathfrak{R})$ und $\mathfrak{B}$ der von $\mathfrak{R}$ erzeugte Borelkörper. Ist K der Kegel aller auf Ω definierten nichtnegativen Funktionen und E die Menge aller Indikatorfunktionen I_G ($G \in \mathfrak{R}$), so ist der Kegel aller $\mathfrak{R}$-meßbaren nichtnegativen Treppenfunktionen auf Ω der von E erzeugte Unterkegel von K. Es gelten auch:

i b) Der von E erzeugte dichte σ-vollständige Unterkegel von K ist der Kegel aller beschränkten $\mathfrak{B}$-meßbaren nichtnegativen Funktionen auf Ω.

ii b) Der von E erzeugte abgeschlossene Unterkegel von K ist der Kegel aller $\mathfrak{B}$-meßbaren nichtnegativen Funktionen auf Ω.

Der Beweis dieser Aussagen geht über klassische elementare Sätze aus der Theorie der meßbaren Mengen und Funktionen ([*8*]). Auf Grund dieses Beispiels führen wir die folgende Bezeichnungsweise ein:

Definition (4.4). Ist K_1 ein Unterkegel eines σ-vollständigen Kegels K_2, so sagen wir, daß K_2 durch K_1 „gemessen wird", wenn der von K_1 erzeugte abgeschlossene Unterkegel von K_2 dem ganzen K_2 gleichzusetzen ist.

Ist K_1 ein Unterkegel eines σ-vollständigen Kegels K_3, so wird der von K_1 erzeugte abgeschlossene Unterkegel K_2 von K_3 durch K_1 gemessen, denn jeder abgeschlossene Unterkegel von K_2 ist auch als Unterkegel von K_3 abgeschlossen.

Die folgenden weiteren Definitionen enthalten die Hauptbegriffe für den Hauptsatz dieses Abschnitts. Zunächst führen wir die Bezeichnung $K^\dagger$ für den Kegel aller positiven Linearformen auf K ein. Hat K ein Integral, so gilt, wegen des Satzes (2.1), die Gleichung $K' = K^\dagger$.

Definition (4.5). Ist K ein Kegel und M eine Untermenge von $K^\dagger$, so heißt M fundamental oder ein „fundamentales System", falls $f(x) \geqq f(y)$, $(f \in M)$, stets $x \geqq y$ in K impliziert.

Definition (4.6). Ist K ein Kegel und $f_0 \in K^\dagger$, so heißt das Paar (K, f_0) ein „Elementarsystem", falls die Menge

$$M_{f_0} \equiv \{f \mid f \in K^\dagger, f \leqq f_0\}$$

fundamental über K ist.

Wir werden mit $K^\dagger_{f_0}$ den von M_{f_0} erzeugten Unterkegel von $K^\dagger$ bezeichnen. Ein Element $f \in K^\dagger$ gehört zu $K^\dagger_{f_0}$ genau dann, wenn es $\lambda \geqq 0$ mit $f \leqq \lambda f_0$ gibt. Aus Satz (2.1) folgt: Jedes Integralsystem ist ein Elementarsystem.

Definition (4.7). Ist $(\bar{K}, \bar{f}_0)$ ein Integralsystem (Definition (4.1)), K ein Kegel und $f_0 \in K'$, so sagen wir, daß $(\bar{K}, \bar{f}_0)$ eine Integralerweiterung von (K, f_0) ist, wenn die folgenden Bedingungen gelten:

i) $\bar{K}$ wird durch K gemessen (Definition (4.4)).

ii) Ist $f \in M_{f_0}$, so kann f zu $\bar{f} \in \bar{K}^\dagger$ erweitert werden.

iii) Die Einschränkung von $\bar{f}_0$ auf K ist genau f_0.

Sei nun $f \in M_{f_0}$. Die nach ii) existierende Erweiterung $\bar{f} \in \bar{K}^\dagger$ von f ist eindeutig bestimmt: Sind $\bar{f}$ und $\bar{\bar{f}}$ in $\bar{K}^\dagger$ mit $f(x) = \bar{f}(x) = \bar{\bar{f}}(x)$ für alle $x \in K$, so ist die Menge $\{y \mid y \in \bar{K}, \bar{f}(y) = \bar{\bar{f}}(y)\}$ ein K enthaltender abgeschlossener Unterkegel von $\bar{K}$, also gleich $\bar{K}$ selbst. Außerdem gilt, nach Satz (2.1), daß es für jedes $f \in \bar{K}'$ ein passendes $\lambda \geqq 0$ mit $f \leqq \lambda f_0$ gibt. Die Einschränkung von f auf K gehört also zu $K^\dagger_{f_0}$. Hierdurch ist $\bar{K}^\dagger$ mit $K^\dagger_{f_0}$ isomorph. Das ergibt, daß, wenn $(\bar{K}, \bar{f}_0)$ eine Integralerweiterung von (K, f_0) ist, so ist (K, f_0) ein Elementarsystem. Die obigen Überlegungen liefern außerdem eine Alternative zu Definition (4.7).

Definition (4.7)'. $(\bar{K}, \bar{f}_0)$ ist eine Integralerweiterung von (K, f_0), wenn

i) $\bar{K}$ durch K gemessen wird,

ii) $\bar{K}^\dagger$ mit $K^\dagger_{f_0}$ durch die Einschränkungsabbildung isomorph ist,

iii) die Einschränkung von $\bar{f}_0$ auf K genau f_0 ist.

Definition (4.8). Seien K_1, K_2 Kegel, $f_1 \in K_1^\dagger$, $f_2 \in K_2^\dagger$. Die Paare (K_1, f_1) und (K_2, f_2) sind isomorph, falls es eine Kegel-Isomorphie $\Phi : K_1 \to K_2$ (§ 2) gibt mit $f_1(x) = f_2(\Phi(x))$ für alle $x \in K_1$.

Man sieht leicht, daß die Abbildung Φ gemäß $[\Phi^\dagger(f)](x) = f(\Phi(x))$ einen Isomorphismus $\Phi^\dagger$: $K_2^\dagger \to K_1^\dagger$ definiert. Ist ein Elementarsystem (K_1, f_1) mit (K_2, f_2) isomorph, so ist (K_2, f_2) ein Elementarsystem und die Abbildung $\Phi^\dagger$, eingeschränkt auf $K_{f_2}^\dagger$, ist ein Isomorphismus $\Phi^\dagger : K_{f_2}^\dagger \to K_{f_1}^\dagger$. Jetzt beweisen wir

Satz (4.1). *Zwei Integralsysteme sind genau dann isomorph, wenn sie Integralerweiterungen von isomorphen Elementarsystemen sind. Ist Φ die Isomorphie zwischen den betreffenden Elementarsystemen, so kann die Isomorphie $\bar{\Phi}$ zwischen den Integralsystemen auf genau eine Weise so gewählt werden, daß sie eine Erweiterung der Abbildung Φ ist.*

Beweis. Seien $(\bar{K}_1, \bar{f}_1)$, $(\bar{K}_2, \bar{f}_2)$ Integralerweiterungen von (K_1, f_1) bzw. (K_2, f_2). Mit dem Isomorphismus $\Phi : K_1 \to K_2$ haben wir auch den Isomorphismus $\Phi^\dagger : K_{f_2}^\dagger \to K_{f_1}^\dagger$. Mittels der Einschränkungsabbildungen (Definition (4.7)′) konstruieren wir eine Isomorphie $\bar{\Phi}^\dagger : \bar{K}_2^\dagger \to \bar{K}_1^\dagger$ mit den Eigenschaften

$$(\bar{\Phi}^\dagger(\bar{f}))(x) = \bar{f}(\Phi(x)) \quad (x \in K_1, \bar{f} \in \bar{K}_2^\dagger),$$
$$\bar{\Phi}^\dagger(\bar{f}_2) = \bar{f}_1 .$$

Wir betrachten nun den Kegel $\mathring{K}_1$ aller $x \in \bar{K}_1$ aller $x \in \bar{K}_1$, für welche es $x' \in \bar{K}_2$ mit

$$(\bar{\Phi}^\dagger(\bar{f}))(x) = \bar{f}(x') \quad (\bar{f} \in \bar{K}_2^\dagger)$$

gibt. Sind $x, y \in \mathring{K}_1$ mit $x \geqq y$, so gibt es $z \in \bar{K}_1$ mit $x = y + z$ und

$$(\bar{\Phi}^\dagger(\bar{f}))(x) = (\bar{\Phi}^\dagger(\bar{f}))(y) + (\bar{\Phi}^\dagger(\bar{f}))(z) \quad (\bar{f} \in \bar{K}_2^\dagger).$$

Es gilt also

$$\bar{f}(x') \geqq \bar{f}(y') \quad (\bar{f} \in \bar{K}_2^\dagger)$$

und weil $\bar{K}_2^\dagger$ fundamental über $\bar{K}_2$ ist, gilt $x' \geqq y'$, d.h. es gibt z' mit $x' = y' + z'$ und

$$\bar{f}(x') = \bar{f}(y') + \bar{f}(z') \quad (\bar{f} \in \bar{K}_2^\dagger)$$

oder

$$(\bar{\Phi}^\dagger(\bar{f}))(x) = (\bar{\Phi}^\dagger(\bar{f}))(y) + \bar{f}(z') \quad (f \in \bar{K}_2^\dagger)$$

und $\bar{\Phi}^\dagger(\bar{f})(z) = \bar{f}(z')$ für alle $\bar{f} \in \bar{K}_2^\dagger$. Also gehört z zu $\mathring{K}_1$ und $x \geqq y$ in $\mathring{K}_1$. $\mathring{K}_1$ ist also ein Unterkegel von $\bar{K}_1$. Nun beweisen wir, daß $\mathring{K}_1$ in $\bar{K}_1$ abgeschlossen ist. Sei $\{x_n\}$ eine aufsteigende Folge aus $\mathring{K}_1$ mit $x_\infty = \sup\{x_n\} \in \bar{K}_1$. Es gilt $\sup\{\bar{f}_1(x_n)\} < \infty$ und $\sup\{(\bar{\Phi}^\dagger(\bar{f}_2))(x_n)\} < \infty$ oder $\sup\{\bar{f}_2(x_n')\} < \infty$. Da $\bar{f}_2$ ein Integral über $\bar{K}_2$ ist, ist $\sup\{x_n'\} = x_\infty'$ ein Element von $\bar{K}_2$ mit $\bar{f}(x_\infty') = \lim\limits_n \bar{f}(x_n')$ für alle $\bar{f} \in K_2^\dagger$. Hieraus folgt nun

$$\bar{f}(x_\infty') = \lim_n \bar{f}(x_n) = \lim_n (\bar{\Phi}^\dagger(\bar{f}))(x_n) = (\bar{\Phi}^\dagger(\bar{f}))(x_\infty)$$

und $x_\infty \in \dot{K}_1$. Man folgert nun sehr leicht, daß $\dot{K}_1$ ein K_1 enthaltender abgeschlossener Unterkegel von $\bar{K}_1$ ist. Da $\bar{K}_1$ durch K_1 gemessen wird, muß $\dot{K}_1 = \bar{K}_1$ sein.

Wir definieren jetzt $\bar{\Phi}$: $\bar{K}_1 \to \bar{K}_2$ durch $\bar{\Phi}(x) = x'$. Diese Definition ist sinnvoll, weil $\bar{K}_2^\dagger$ fundamental über $\bar{K}_2$ ist. Die Abbildung $\bar{\Phi}$ ist eindeutig, weil $\bar{\Phi}^\dagger$: $\bar{K}_2^\dagger \to \bar{K}_1^\dagger$ eine Isomorphie und $\bar{K}_1^\dagger$ fundamental über $\bar{K}_1$ ist. Ist $\mathring{K}_2$ der Bildraum von $\bar{K}_1$ unter $\bar{\Phi}$, dann beweist man ähnlich wie oben, daß $\mathring{K}_2$ ein K_2 enthaltender abgeschlossener Unterkegel von $\bar{K}_2$ ist. $\mathring{K}_2$ ist also gleich $\bar{K}_2$ und $\bar{\Phi}$ ist ein Isomorphismus von $\bar{K}_1$ auf $\bar{K}_2$. Da $\bar{f}_1(x) = (\bar{\Phi}^\dagger(\bar{f}_2))(x) = \bar{f}_2(\bar{\Phi}(x))$ für alle $x \in \bar{K}_1$, ist $\bar{\Phi}$ eine Isomorphie zwischen $(\bar{K}_1, \bar{f}_1)$ und $(\bar{K}_2, \bar{f}_2)$. Offenbar ist die Isomorphie $\bar{\Phi}$: $\bar{K}_1 \to \bar{K}_2$ als eine Erweiterung von $\Phi: K_1 \to K_2$ eindeutig festgelegt, denn zwei solche Abbildungen $\bar{\Phi}$ müßten auf einem K_1 enthaltenden abgeschlossenen Unterkegel von $\bar{K}_1$ übereinstimmen. Weil jedes Integralsystem eine Integralerweiterung von sich selbst ist, ist der Satz bewiesen.

Wir beweisen jetzt den fundamentalen Erweiterungssatz.

Satz (4.2). *Sei (K_0, f_0) ein Elementarsystem. Dann gibt es ein Integralsystem $(\bar{K}, \bar{f})$ derart, daß $(\bar{K}, \bar{f})$ eine Integralerweiterung eines zu (K_0, f_0) isomorphen Elementarsystems (K, f) ist.*

Beweis. Sei, wie vorhin, $K_{f_0}^\dagger \equiv \{f \mid f \in K^\dagger,\ \exists \lambda \geqq 0 \text{ mit } f \leqq \lambda f_0\}$. Durch

$$[\mu(x)](f) = f(x), \quad (f \in K_{f_0}^\dagger)$$

definieren wir die Abbildung μ: $K \to (K_{f_0}^\dagger)^\dagger$, und mit

$$\bar{f}(X) = X(f_0) \quad (X \in (K_{f_0}^\dagger)^\dagger)$$

definieren wir ein Integral über dem Kegel $(K_{f_0}^\dagger)^\dagger$. Das Paar $((K_{f_0}^\dagger)^\dagger, \bar{f})$ ist ein Integralsystem. Die Abbildung μ: $K_0 \to \mu(K_0)$ ist eine Isomorphie zwischen K_0 und dem Unterkegel $\mu(K_0)$ von $(K_{f_0}^\dagger)^\dagger$. Es gilt auch $\bar{f}(\mu(x)) = f_0(x)$ und das Elementarsystem (K_0, f_0) ist durch μ mit dem Elementarsystem $(\mu(K_0), \bar{f})$ isomorph. Wir definieren $\bar{K}$ als den von $\mu(K_0)$ erzeugten abgeschlossenen Unterkegel von $(K_{f_0}^\dagger)^\dagger$. Die gewünschte Integralerweiterung des Satzes ist das Paar $(\bar{K}, \bar{f})$.

Über die Vielfachheit der möglichen Integralerweiterungen eines gegebenen Elementarsystems können wir einiges sagen.

Satz (4.3). *Sei $\tilde{K}$ ein σ-vollständiger Kegel und K ein Kegel mit $K \subset \tilde{K}$ (im mengentheoretischen Sinne). Sei ferner $f \in K^\dagger$ beliebig. Sind $(\bar{K}_1, \bar{f}_1)$, $(\bar{K}_2, \bar{f}_2)$ zwei Integralerweiterungen von (K, f), deren Kegel $\bar{K}_1$ und $\bar{K}_2$ dichte Unterkegel von $\tilde{K}$ sind, so gilt $(\bar{K}_1, \bar{f}_1) = (\bar{K}_2, \bar{f}_2)$, d.h. (K, f) besitzt höchstens eine Integralerweiterung, deren Kegel ein dichter Unterkegel von $\tilde{K}$ ist. Außerdem ist K ein Unterkegel von $\tilde{K}$.*

Beweis. Aus Satz (4.1) folgt, daß es eine Isomorphie $\bar{\Phi}$ von $\bar{K}_1$ auf $\bar{K}_2$ mit $\bar{f}_1(x) = \bar{f}_2(\bar{\Phi}(x))$ für alle $x \in \bar{K}_1$ gibt, die auf K die Identitätsabbildung ist. Sei K_1 der Kegel aller $x \in \bar{K}_1$ mit $x = \bar{\Phi}(x)$. Es gilt $K \subset K_1$. K_1 ist ein Unterkegel von $\bar{K}_1$, denn sind $x, y \in K_1$ mit $x = y + z$, wobei $z \in \bar{K}_1$, so ist $\bar{\Phi}(x) = \bar{\Phi}(y) + \bar{\Phi}(z)$ und $x = y + \bar{\Phi}(z) = y + z$ oder $z = \bar{\Phi}(z)$ und $z \in K_1$. Andererseits ist $K_1 \subset \bar{K}_2$ und man beweist wie oben, daß K_1 ein Unterkegel von $\bar{K}_2$ ist. Sei nun $x_1 \leqq x_2 \leqq \leqq x_3 \leqq \cdots$ eine Folge aus K_1 mit $\sup\{x_1\}$ bez. $\bar{K}_1$ vorhanden. Dann ist auch $\sup\{x_i\}$ bez. $\bar{K}_2 = \sup\{\bar{\Phi}(x_i)\}$ bez. $\bar{K}_2 = \bar{\Phi}(\sup\{x_i\}$ bez. $\bar{K}_1)$ in $\bar{K}_2$ vorhanden und es folgt aus der Dichtheit von $\bar{K}_1$ und $\bar{K}_2$ in $\tilde{K}$, daß $\sup\{x_i\}$ bez. $\bar{K}_1 = \sup\{x_i\}$

bez. $\tilde{K} = \sup\{x_i\}$ bez. $\bar{K}_2$, oder $\sup\{x_i\}$ bez. $\bar{K}_1 = \bar{\Phi}(\sup\{x_i\}$ bez. $\bar{K}_1)$, was beweist, daß auch $\sup\{x_i\}$ bez. $\bar{K}_1$ in K_1 ist. Da $\bar{K}_1$ σ-vollständig ist, muß K_1 ein K enthaltender abgeschlossener Unterkegel von $\bar{K}_1$ sein und $K_1 = \bar{K}_1$. Es folgt $x = \bar{\Phi}(x)$ für jedes $x \in \bar{K}_1$ und, daß $\bar{\Phi}$ die Identitätsabbildung von $\bar{K}_1$ in $\tilde{K}$ ist. $\bar{K}_1$ ist, also mit $\bar{K}_2 = \bar{\Phi}(\bar{K}_1)$ identisch und $f_1 = f_2$. Daß K ein Unterkegel von $\tilde{K}$ ist, folgt trivial aus der Tatsache, daß $\bar{K}_1$ ein Unterkegel von $\tilde{K}$ ist.

Die Frage der Existenz einer in $\tilde{K}$ enthaltenen Integralerweiterung ist natürlich nicht trivial. Die Integralerweiterung innerhalb eines gegebenen Kegels wie $\tilde{K}$ einzubetten, entspricht einer Konkretisierung der Integralerweiterung. Solche Fragen fallen unter die üblichen Abhandlungen der Maßtheorie in konkreten Funktions- oder Operatorräumen ([*8*], [*23*]). Wir können jetzt eine Anwendung des Satzes (4.3) anführen. Sei Ω ein Punktraum, $\tilde{K}_0$ der Kegel aller nichtnegativen endlichen Funktionen auf Ω. Sei außerdem der Unterkegel K_0 von $\tilde{K}_0$ ein Unterverband von $\tilde{K}_0$, und $\mu \in K_0^\dagger$ mit der Eigenschaft: Ist $f_1 \leqq f_2 \leqq f_3 \leqq \cdots$ eine Folge von Funktionen aus K_0, und $f \in K_0$ mit $f \leqq \lim_n f_n$, so gilt $\lim_n \mu(f_n) \geqq \mu(f)$. Auf bekannte Weise kann man mittels μ eine nichtnegative Funktion $\mu^* \leqq \infty$ auf dem ganzen Kegel $\tilde{K}_0$ so definieren, daß sie die Eigenschaften ([*10*], Anhang, Kap. 9)

i) μ^* ist monoton,

ii) $\mu^*(f) = \mu(f)$ für $f \in K_0$,

iii) $\mu^*(\lambda f) = \lambda \mu^*(f)$ für λ reell > 0,

iv) ist $\{f_i\}$ eine Folge aus K_0, so ist

$$\mu^*\Big(\sum_{i=0}^{\infty} f_i\Big) \leqq \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(f_i)$$

besitzt.

Sind f und g aus $\tilde{K}_0$, so schreiben wir $f \sim g$, wenn $\mu^*(|f-g|) = 0$, und wir bezeichnen mit $\tilde{K}$ den Kegel der Äquivalenzklassen bezüglich „$\sim$“. Dieser Kegel $\tilde{K}$ ist in der Tat σ-vollständig. Die Inklusionsabbildung Φ: $\tilde{K}_0 \to \tilde{K}$ ist eine normale Homomorphie von $\tilde{K}_0$ auf $\tilde{K}$ und man definiert durch

$$\Phi(f) \vee \Phi(g) \doteq \Phi(f \vee g),$$
$$\Phi(f) \wedge \Phi(g) \doteq \Phi(f \wedge g),$$

eine natürliche Verbandsstruktur in $\tilde{K}$. Dadurch wird $\tilde{K}$ zu einem Simplexkegel gemacht. Das Bild $K = \Phi(K_0)$ von K_0 unter Φ ist ein Unterkegel von $\tilde{K}$, und μ ist ein Element aus $K^\dagger$ mit der Eigenschaft: Aus $x \in K$ mit $\mu(x) = 0$ folgt $x = 0$. Sei nun $\bar{K}_0$ der von K_0 erzeugte abgeschlossene Unterkegel von $\tilde{K}_0$. Dann ist $\bar{K} \doteq \Phi(\bar{K}_0)$ ein abgeschlossener Unterkegel von $\tilde{K}$. Es gilt sogar: $\bar{K}$ ist der von K erzeugte abgeschlossene Unterkegel von $\tilde{K}$. Mit Hilfe von Eigenschaften von Banachverbänden ([*10*]) beweist man, daß μ^* ein Integral über $\bar{K}$ ist und daß das Paar $(\bar{K}, \mu^*)$ eine Integralerweiterung von (K, μ) ist. Dieses Integralsystem $(\bar{K}, \mu^*)$ ist das in der Maß- und Integraltheorie immer auftretende System. Satz (4.3) besagt, daß $(\bar{K}, \mu^*)$ die einzige vernünftige, in $\tilde{K}$ enthaltene Integralerweiterung von (K, μ) ist.

Wir beweisen nun zwei Lemmas, die wichtige Folgerungen haben.

Lemma (4.1). *Sei $(\bar{K}, \bar{f})$ ein Integralsystem und K ein σ-vollständiger Unterkegel von $\bar{K}$. Ist die Einschränkung von $\bar{f}$ auf K ein Integral auf K, so ist K abgeschlossen in $\bar{K}$.*

Beweis. Sei $x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 \leqq \cdots$ eine Folge aus K mit $\bar{x}_\infty = \sup\{x_i\}$ bez. $\bar{K}$. Weil $\bar{f}(x_i) \leqq \bar{f}(\bar{x}_\infty)$ für alle i, muß $\{x_i\}$ ein Supremum bezüglich K besitzen. Offensichtlich gilt $x_\infty \geqq \bar{x}_\infty$. Außerdem gilt

$$\bar{f}(x_\infty) = \lim_i \bar{f}(x_i) = \bar{f}(\bar{x}_\infty),$$

und $\bar{f}(x_\infty - \bar{x}_\infty) = 0$. Hieraus folgt $\bar{x}_\infty = x_\infty \in K$.

Lemma (4.2). *Sei $(\bar{K}, \bar{f})$ ein Integralsystem, K ein Unterkegel von $\bar{K}$ und f die Einschränkung von $\bar{f}$ auf K. Der Kegel K ist genau dann ein dichter Unterkegel von $\bar{K}$, wenn $f \in K'$.*

Beweis. Ist K dicht in $\bar{K}$, so folgt $f \in K'$ trivial aus der Definition von Dichtheit. Sei, umgekehrt, $f \in K'$. Ist $x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 \leqq \cdots$ eine Folge aus K mit $x_\infty = \sup\{x_i\}$ bez. K, so gibt es $\bar{x}_\infty = \sup\{x_i\}$ bez. $\bar{K}$. Es gelten $x_\infty \geqq \bar{x}_\infty$ und

$$\bar{f}(\bar{x}_\infty) = \lim_i \bar{f}(x_i) = \lim_i f(x_i) = f(x_\infty) = \bar{f}(x_\infty).$$

Es folgt $\bar{f}(x_\infty - \bar{x}_\infty) = 0$, und $x_\infty = \bar{x}_\infty$.

Aus Lemma (4.1) folgt

Satz (4.4). *Ist $(\bar{K}, \bar{f})$ ein Integralsystem, dann ist seine Integralerweiterung eindeutig bestimmt und gleich $(\bar{K}, \bar{f})$.*

Aus Lemma (4.2) folgt

Satz (4.5). *Ist $(\bar{K}, \bar{f})$ eine Integralerweiterung von (K, f), so ist K genau dann ein dichter Unterkegel von $\bar{K}$, wenn $f \in K'$ gilt.*

Die in Definition (4.8) definierte Abbildung Φ, die auch in Satz (4.1) auftauchte, kann als ein Automorphismus erscheinen, d.h. eine Abbildung vom Integralsystem $(\bar{K}, \bar{f})$ auf sich. Im Fall, daß $\bar{K}$ der Kegel W (Satz (3.1)) und $\bar{f}$ die Spur über W ist, kann man solche Φ völlig charakterisieren. Sie sind die Abbildungen der Gestalt $\Phi(A) = UJU^{-1}$, wobei U ein beliebiger unitärer oder antiunitärer Operator ist ([*15*], [*11*]). In der gewöhnlichen Maßtheorie kommt Φ öfters als eine eindeutige maßtreue Abbildung von einem Maßraum auf sich vor.

Die vorhergehenden Sätze geben wenig Aufschluß, wie man eine Integralerweiterung konstruieren kann. Unter gewissen Bedingungen ist es möglich, solche Konstruktionen anzugeben. Sei (K, f) ein Elementarsystem. Ist $f' \in K_f^\dagger$, so kann man f' bis auf $K - K$ erweitern, indem man

$$f'((x, y)) \equiv f'(x) - f'(y)$$

definiert. Außerdem ist $K_f^\dagger - K_f^\dagger$ mit dem Raum $\{f_1' - f_2' \mid f_1', f_2' \in K_f^\dagger\}$ isomorph. Dieser ist wiederum der Raum aller Linearformen f' über $K - K$, für die es reelles $\lambda \geqq 0$ mit $-\lambda f(x) \leqq f'(x) \leqq \lambda f(x)$ $(x \in K)$ gibt, denn $f' = (f' + \lambda f) - \lambda f$, und $f' + \lambda f \in K^\dagger$ folgt aus der Ungleichung.

Wir können jetzt durch

$$\|f'\|_\infty = \inf\{\lambda \geqq 0 \mid -\lambda f \leqq f' \leqq \lambda f\}$$

eine Norm in $K_f^\dagger - K_f^\dagger$ definieren. Durch

$$\|x\|_1 = \sup_{\|f'\|_\infty \leqq 1} |f'(x)| \qquad (x \in K - K)$$

definieren wir auch eine Norm in $K - K$. Es ist leicht zu sehen, daß $\|x\|_1 = f(x)$ für $x \in K$. Unter Benutzung dieser Eigenschaft beweist man leicht, daß der Raum der normstetigen Linearformen über $K - K$ genau $K_f^\dagger - K_f^\dagger$ ist. Sei nun L die Banachraum-Vervollständigung von $K - K$. Wir bezeichnen mit L^+ den Kegel aller Elemente x aus L mit der Eigenschaft, daß $f'(x) \geqq 0$ für alle $f' \in K_f^\dagger$. L^+ ist offensichtlich normabgeschlossene Untermenge von L, welche K enthält. Es kommt häufig vor, daß die abgeschlossene Hülle $\bar{K}$ von K in L ein Unterkegel von L^+ ist. Ist dies der Fall, so ist die natürliche Halbordnung in $\bar{K}$ völlig von $K_f^\dagger$ bestimmt, d. h. $K_f^\dagger$ ist ein „fundamentales System" über $\bar{K}$. Ist $\bar{f}$ die normstetige Erweiterung von f auf $\bar{K}$, so ist dann $(\bar{K}, \bar{f})$ ein Integralsystem. Es ist völlig trivial, daß die Bedingungen ii) und iii) von Definition (4.7) erfüllt sind. Unter einer weiteren Voraussetzung, die auch häufig vorkommt, ist $(\bar{K}, \bar{f})$ sogar eine Integralerweiterung von (K, f) und $\bar{K} - \bar{K}$ ist gleich L. Aus $L = \bar{K} - \bar{K}$ und der Annahme, daß $\bar{K}$ ein Unterkegel von L ist, schließt man leicht, daß $\bar{K}$ mit L^+ identisch ist. Die nötige weitere Voraussetzung geben wir in einem Satz an.

Satz (4.6): *Ist $\bar{K}$ ein Unterkegel von L^+ und existiert für jedes $y \in K - K$ eine Zerlegung $y = y^+ - y^-$ mit $y^+, y^- \in K$ und $\|y\|_1 = \|y^+\|_1 + \|y^-\|_1$, so ist $(\bar{K}, \bar{f})$ eine Integralerweiterung von (K, f), und es gilt $L = \bar{K} - \bar{K}$ mit $L^+ = \bar{K}$.*

Beweis: Sei $x \in L$. Es existiert eine Folge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ aus $K - K$ mit $x_i \to x$ in der $\|\cdot\|_1$-Norm. Es kann natürlich angenommen werden, daß $\|x_i - x\|_1 \leqq \frac{1}{2^{i+1}}$.

Wie im Beweis des Satzes von Fischer-Riesz schreiben wir

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k-1} - x_k) .$$

Es gilt nun $(x_{k+1} - x_k) = (x_{k+1} - x_k)^+ - (x_{k+1} - x_k)^-$ mit $\|x_{k+1} - x_k\|_1 = \|(x_{k+1} - x_k)^+\|_1 + \|(x_{k+1} - x_k)^-\|_1$, und

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)^+\Big\|_1 &\leqq \sum_{k=1}^{n-1} \|(x_{k+1} - x_k)^+\|_1 \leqq \\ &\leqq \sum_{k=1}^{n-1} \|x_{k+1} - x_k\|_1 \leqq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \\ &\leqq 1 .\end{aligned}$$

Da $(\bar{K}, \bar{f})$ ein Integralsystem ist, muß es ein $z_\infty^+ \in \bar{K}$ geben mit $z_\infty^+ = \sup \{z_i^+\}$ bez. $\bar{K}$, und

$$\|z_n^+ - z^+\|_1 = \bar{f}(z_\infty^+ - z_n^+) = \bar{f}(z_\infty^+) - \bar{f}(z_n^+) \to 0 .$$

Es konvergiert also $z_n^+ \equiv \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)^+$ gegen z_∞^+ in $\bar{K}$.

Analog beweist man, daß $\sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)^-$ gegen $z_\infty^- \in \bar{K}$ konvergiert. Es gilt also $x = x_1 + z_\infty^+ - z_\infty^-$ mit $x_1 + z_\infty^+ \in \bar{K}$ und $z_\infty^- \in \bar{K}$. Hieraus folgt $x \in \bar{K} - \bar{K}$, was beweist, daß $L = \bar{K} - \bar{K}$ ist. Ist außerdem $x \in \bar{K}$, so ersieht man leicht aus dem Vorhergehenden, daß x im von K erzeugten abgeschlossenen Unterkegel von $\bar{K}$ liegt, denn $x_1 + z_\infty^+$ und z_∞^- liegen dort. Es ergibt sich daraus, daß $\bar{K}$ von K gemessen wird, und der Satz ist bewiesen.

In den mit Satz (4.6) zusammenhängenden Überlegungen kam der Banachraum L auf ziemlich natürliche Weise vor. Trotzdem war es notwendig, weitere Voraussetzungen zu machen, um einen nennenswerten Satz zu beweisen. Daß die Banachraum-Theorie mit der Integrationstheorie irgendwie in Beziehung steht, ist natürlich keine Überraschung, und die Frage liegt nahe, welche Eigenschaften man in die Kegeltheorie einbauen muß, damit diese Beziehung am natürlichsten hervortritt. Die Tatsache, daß es sich an dieser Stelle um Kegel handelt, die in halbgeordnete Banachräume eingebettet sind, läßt hoffen, daß Arbeiten wie z. B. die von Krein und Rutman ([*13*]) über allgemeine Eigenschaften solcher Systeme uns von Nutzen sein können.

§ 5. Zusammenhang mit anderen Integrationstheorien

Die Beziehung zwischen den in § 4 aufgeführten Überlegungen und den üblichen Darstellungen der Integrationstheorie haben wir schon in der Bemerkung angedeutet, die unmittelbar nach dem Beweis des Satzes (4.3) folgte. Die üblichen Begründungen der Wahrscheinlichkeitstheorie können als konkrete Konstruktionen von Integralerweiterungen konkreter Systeme (K, μ) angesehen werden, wobei K der Kegel $\Phi(K_0)$ (§ 4) und K_0 der Kegel aller bezüglich eines gegebenen Mengenkörpers meßbaren nichtnegativen Treppenfunktionen ist. Ein wichtiges Endziel dieser Konstruktion ist, einen Beweis dafür anzugeben, daß die Integralerweiterung durch Äquivalenzklassen von meßbaren Funktionen dargestellt werden kann, d. h., daß ihr Kegel $\bar{K}$ mit dem Kegel $\Phi(\bar{K}_0)$ übereinstimmt (s. oben § 4, und vgl. Aussage ii b), § 4). Um nichts als die Existenz und Eindeutigkeit der Integralerweiterung von (K, μ) zu beweisen, braucht man jedoch nur nachzuweisen, daß (K, μ) ein Elementarsystem ist. Um dies zu tun und auch eine Anwendung des Satzes (4.6) zu finden, können wir allgemeiner vorgehen, indem wir K als einen allgemeinen Simplexkegel betrachten. Wir beweisen also den folgenden abstrakten Satz.

Satz (5.1). *Ist K ein Simplexkegel und $f \in K^\dagger$ mit $x = 0$ für alle $x \in K$ mit $f(x) = 0$, so ist (K, f) ein Elementarsystem.*

Beweis: Ein passendes Fundamentalsystem von Elementen aus $K^\dagger$ definieren wir auf folgende Weise. Sei $x \in K$. Dann definieren wir $f_x(y)$ $(y \in K)$ durch

$$f_x(y) = \lim_{n\to\infty} f(nx \wedge y)\,.$$

Es gilt für $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} f_x(\lambda y) &= \lim_{n\to\infty} f(nx \wedge \lambda y) \\ &= \lambda \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{n}{\lambda} x \wedge y\right) = \lambda f_x(y)\,. \end{aligned}$$

Außerdem beweist man mittels der Ungleichung $x \wedge (y_1 + y_2) \leqq x \wedge y_1 + x \wedge y_2 \leqq 2x \wedge (y_1 + y_2)$ (s. auch Kakutani [*12*]), daß $f_x(y_1 + y_2) = f_x(y_1) + f_x(y_2)$. Da $f(nx \wedge y) \leqq f(y)$, gehört f_x zu $K_f^\dagger$ für jedes $x \in K$. Wir dehnen f_x auf natürliche Weise auf den ganzen Vektorverband $K - K$ aus. Es gilt $f_x(y) = f_x(y^+) - f_x(y^-)$ für alle $y \in K - K$. Sei nun $y_1, y_2 \in K$ mit $f_x(y_1) \geqq f_x(y_2)$ für alle $x \in K$. Es gilt dann

$$f_x(y_1 - y_2) = f_x((y_1 - y_2)^+) - f_x((y_1 - y_2)^-) \geqq 0 .$$

Da $n(y_1 - y_2)^- \wedge (y_1 - y_2)^+ = 0$ für alle n, ist

$$0 \leqq f((y_1 - y_2)^-) = f_{(y_1 - y_2)^-}((y_1 - y_2)^-) = -f_{(y_1 - y_2)^-}(y_1 - y_2) \leqq 0 ,$$

und $(y_1 - y_2)^- = 0$ was beweist, daß $y_1 \geqq y_2$ und damit den Satz.

Wir wollen nun den Satz (4.6) anwenden, um zu beweisen, daß die Integralerweiterung $(\bar{K}, \bar{f})$ von (K, f) zugänglich ist. Hierzu betrachten wir wieder die Banachraum-Vervollständigung L von $K - K$ mit der Norm $\|x\|_1 = \sup\limits_{-f \leq f' \leq f} |f'(x)|$. Sind $x, y \in L$, so definieren wir $x \wedge y$ und $x \vee y$ durch

$$x \wedge y = \lim_i x_i \wedge y_i$$

$$x \vee y = \lim_i x_i \vee y_i$$

wobei $\{x_i\}$ und $\{y_i\}$ Folgen aus $K - K$ sind, die gegen x bzw. y normkonvergieren. Die Normkonvergenz der Folgen $\{x_i \wedge y_i\}$ und $\{x_i \vee y_i\}$, die Zulässigkeit der Definition und die Normstetigkeit von $\vee$ und $\wedge$ sind mittels der Ungleichungen $|x \vee y - \bar{x} \vee y| \leqq |x - \bar{x}|$ und $|x \wedge y - \bar{x} \wedge y| \leqq |x - \bar{x}|$ zu beweisen. Außerdem gilt für den ganzen Raum L

$$\|x\|_1 = f(|x|)$$

und L ist ein L-Raum mit $K - K$ als Unterverband. Jedes Element x aus L mit $x \geqq 0$ kann durch eine Folge aus K approximiert werden, denn ist $\{x_i\}$ eine Folge aus $K - K$ die gegen x normkonvergiert, so konvergiert $\{x_i \vee 0\}$ gegen $x \vee 0 = x$. Hieraus folgt, daß die abgeschlossene Hülle von K in L gleich dem positiven Kegel von L ist. Für die positiven Elemente x aus L gilt also $f'(x) \geqq 0$ für alle f' in $K_f^\dagger$. Die positiven Elemente in L liegen also ganz in L^+ (Satz (4.6)). Ist $y \in L^+$ mit $y \vee 0 \neq y$, so gilt $y^- \equiv -(y \wedge 0) \neq 0$. Hieraus folgt, daß $f_{y^+}(y) = -f_{y^+}(y^+) = -f(y^+) = -\|y^+\|_1 < 0$, was ein Widerspruch zu $y \in L^+$ ist. Es folgt nun, daß L^+ dem positiven Kegel von L gleichzusetzen ist und, daß L^+ die abgeschlossene Hülle $\bar{K}$ von K ist.

Trivialerweise ist nun $\bar{K}$ ein Unterkegel von L^+ und wegen der Zerlegung $x = x^+ - x^-$ mit $\|x\|_1 = \|x^+\|_1 + \|x^-\|_1$, können wir Satz (4.6) anwenden. Es gilt also

Satz (5.2). *Ist K ein Simplexkegel und $f \in K^\dagger$ mit $x = 0$ immer dann, wenn $f(x) = 0$, so ist (K, f) ein Elementarsystem mit $(\bar{K}, \bar{f})$ als Integralerweiterung, wobei $\bar{K}$ die normabgeschlossene Hülle von K in der Banachraum-Vervollständigung von $K - K$ und $\bar{f}$ die stetige Erweiterung von f auf $\bar{K}$ ist. In diesem Fall ist $\bar{K}$ ein L erzeugender Simplexkegel mit K als Unterverband.*

Wir wollen uns nun mit der Segalschen „nichtkommutativen Integrationstheorie" ([*23*]) befassen (§ 1). Bei dieser Theorie fängt man mit einem „gage space" an, d. h. ein Tripel $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}, m)$, wobei $\mathfrak{H}$ ein Hilbertraum, $\mathfrak{A}$ eine v. Neumannsche Algebra in $\mathfrak{H}$ und m ein „gage" ist. Nach Definition ([*23*]) soll ein

„gage“ m eine nichtnegative, σ-additive, unitärinvariante Funktion auf den Projektionen in $\mathfrak{A}$ sein. Sie hat außerdem die Eigenschaft, daß jede Projektion in $\mathfrak{A}$ das Supremum von Projektionen mit endlicher m sein soll. Ist $\mathfrak{H}$ separabel, so ist diese letzte Bedingung eine σ-Endlichkeits-Forderung an m. Am meisten interessiert man sich für den Fall, daß m regulär ist, d. h., daß $E = 0$ aus $m(E) = 0$ folgt. Als primitiven Kegel K wählt man den Kegel aller nichtnegativen „Elementaroperatoren“. Ein Elementaroperator ist ein beschränkter Operator, dessen Träger[3] E die Eigenschaft hat, daß sein gage m endlich ist. Satz 10 der Segalschen Arbeit besagt, daß m auf den ganzen Kegel K erweitert werden kann und daß $K - K$ ein zweiseitiges Ideal in $\mathfrak{A}$ ist mit $m(AB) = m(BA)$ für $A \in K - K$ und $B \in \mathfrak{A}$. Über K hat m die folgende weitere Stetigkeitseigenschaft. Sei E eine Projektion in $\mathfrak{A}$ mit $m(E) < \infty$ und $\mathfrak{A}_E$ die Operatoren aus A, die in E „wohnen“, d. h. Operatoren der Gestalt $EAE\,(A \in \mathfrak{A})$. Die Funktion m ist bezüglich der starken Operator-Topologie stetig auf $\mathfrak{A}_E$. Diese Eigenschaft sichert, daß m ein Element aus K' ist. Seien nun A, $B \in K$ mit $m(EAE) \geqq m(EBE)$ für alle Projektionen E aus K. Setzen wir E dem Träger von $(A - B)^-$ gleich, so gilt

$$0 \leqq m(E(A-B)E) = m(-E(A-B)^-E)$$
$$= -m(E(A-B)^-E) \leqq 0\,.$$

Hieraus folgt, daß $(A - B)^- = E(A - B)^-E$ gleich Null ist, denn $(A - B)^-$ liegt in K. Es gilt also $A \geqq B$. Da $m(EAE) = m(A^{1/2}EA^{1/2}) \leqq m(A)$ für alle A in K, liegen alle Funktionen $m(EAE)$ von A in $K_m^\dagger$ und es folgt, daß (K, m) ein Elementarsystem mit einer Integralerweiterung $(\bar{K}, m')$ ist. Wir wollen zeigen, daß das Segalsche Integralsystem ([*23*]) solch eine Integralerweiterung sein muß, d. h., daß es eine konkrete Darstellung von $(\bar{K}, m')$ liefert. Zunächst wollen wir zeigen, daß die Norm $\|\cdot\|_1$, die in [*23*] (Def. (3.2)) erscheint, mit unserer in § 4 definierten Norm $\|\cdot\|_1$ übereinstimmt. Diese Tatsache ergibt sich aus dem folgenden Lemma.

Lemma (5.1). *Der Banach-Dualraum vom Raum $K - K$ aller Elementaroperatoren* ([*23*]) *mit der Norm $\|A\|_1 \equiv m(|A|)$ $(A \in K - K)$ ist genau die Menge aller Linearformen f' auf $K - K$ mit der Eigenschaft, daß es ein reelles $\lambda \geqq 0$ mit $-\lambda m(A) \leqq f'(A) \leqq \lambda m(A)$ für alle $A \in K$ gibt. Die Dualnorm $\|f'\|_\infty$ von f' kann durch die Formel*

$$\|f'\|_\infty = \inf_{\lambda \geqq 0} \{\lambda \mid -\lambda m \leqq f' \leqq \lambda m\}$$

berechnet werden.

Um dieses Lemma zu beweisen, ist es zweckmäßig, erst folgendes zu bemerken. Sei E eine beliebige Projektion aus K, $\mathfrak{H}_E$ der Bildraum von E und $\mathfrak{A}_E$ die „reduzierte“ Algebra von $\mathfrak{A}$ (Dixmier [*5*]). $\mathfrak{A}_E$ wird als die Algebra aller Einschränkungen von $EA\,(A \in \mathfrak{A})$ auf $\mathfrak{H}_E$ definiert ([*5*]), und sie ist eine v. Neumannsche Algebra über $\mathfrak{H}_E$ ([*5*]). Durch

$$m_E(B) \equiv m(BE) \quad (B \in \mathfrak{A}_E)$$

definieren wir ein gage über $\mathfrak{A}_E$. Das Tripel $(\mathfrak{H}_E, \mathfrak{A}_E, m_E)$ ist ein (endlicher) „gage space“ und m_E ist regulär. Aus Lemma (14.1) in [*23*] folgt: Ist $\alpha \geqq 0$ eine reelle Zahl und n eine Linearform über $\mathfrak{A}_E$ mit $0 \leqq n \leqq \alpha m$, so gibt es genau einen

[3] Der Träger eines Operators ist das orthogonale Komplement seines Nullraumes ([*6*]).

symmetrischen nichtnegativen Operator T aus $\mathfrak{A}_E$ mit $n(B) = m_E(TB)$ für alle $B \in \mathfrak{A}_E$. Hieraus folgt: Ist n eine Linearform auf K mit $0 \leqq n \leqq \alpha m$, so gibt es einen symmetrischen nichtnegativen Operator $T \in \mathfrak{A}_E$ mit $n(A) = m(TA)$ für alle $A \in K - K$ mit Träger in $\mathfrak{H}_E$.

Beweis von Lemma (5.1). Daß jedes stetige f' eine Ungleichung $-\lambda m \leqq f' \leqq \lambda m$ erfüllt, ist klar. Umgekehrt ist diese Ungleichung erfüllt, dann sei $B \in K - K$ mit $B = B^+ - B^-$ und $|B| = B^+ + B^-$. Es gelten die Ungleichungen

$$-\lambda m(B^+) \leqq f'(B^+) \leqq \lambda m(B^+),$$
$$-\lambda m(B^-) \leqq f'(-B^-) \leqq \lambda m(B^-)$$

und $-\lambda m(|B|) \leqq f'(B) \leqq \lambda m(|B|)$, was beweist, daß f' normbeschränkt ist. Sei nun f' eine normbeschränkte Linearform über $K - K$. Es existiert ein reelles $\lambda \geqq 0$ mit $-\lambda m \leqq f' \leqq \lambda m$ und $0 \leqq f' + \lambda m \leqq 2\lambda m$. Weil $f' = (f' + \lambda m) - \lambda m$, ist es klar, daß f' in der Gestalt $f' = f_1' - f_2'$ ausgedrückt werden kann, wobei $0 \leqq f_1' \leqq \lambda_1 m$ und $0 \leqq f_2' \leqq \lambda_2 m$ für passende reelle λ_1 und λ_2. Wir definieren μ durch

$$\mu \equiv \sup_{A \neq 0} \frac{|f'(A)|}{m(|A|)}$$

und wir wählen eine Folge $\{A_k\}$ aus $K - K$ mit

$$\mu = \lim_k \frac{|f'(A_k)|}{m(|A_k|)}.$$

Für jedes k ist der Träger E_k von A_k eine Projektion aus K, und es gibt zwei symmetrische nichtnegative Operatoren T_k^1 und T_k^2 in $\mathfrak{H}_{E_k}$ mit

$$f_1'(A) = m(T_k^1 A),$$
$$f_2'(A) = m(T_k^2 A)$$

für alle A aus $K - K$ mit Träger in $\mathfrak{H}_{E_k}$. Es folgt

$$f'(A) = m(T_k A),$$

wobei T_k symmetrisch und beschränkt ist mit Träger in $\mathfrak{H}_{E_k}$. Es gelten weiterhin

$$|f'(A)| \leqq \| T_k \|_\infty m(|A|)$$

und

$$\frac{|f'(A_k)|}{m(|A_k|)} \leqq \| T_k \|_\infty.$$

Es ist jedoch trivial, ein $B_k \in K$ mit Träger in $\mathfrak{H}_{E_k}$ so zu wählen, daß

$$\| T_k \|_\infty - \frac{1}{k} \leqq \frac{|m(T_k B_k)|}{m(B_k)} = \frac{|f'(B_k)|}{m(B_k)} \leqq \| T_k \|_\infty,$$

indem man für B_k eine geeignete Projektion aus der Spektralschar von T_k wählt. Aus der letzten Ungleichung folgt

$$\frac{|f'(B_k)|}{m(B_k)} \geqq \| T_k \|_\infty - \frac{1}{k} \geqq \frac{|f'(A_k)|}{m(|A_k|)} - \frac{1}{k},$$

und es ergibt sich hieraus, daß

$$\mu = \lim_k \frac{|f'(B_k)|}{m(B_k)} = \lim_k \frac{|f'(A_k)|}{m(|A_k|)}.$$

Die Folge $\{B_k\}$ aus K ist also genauso gut wie $\{A_k\}$, um das Supremum μ zu erreichen, und

$$\sup_{A \neq 0} \frac{|f'(A)|}{m(|A|)} = \sup_{0 \neq B \in K} \frac{|f'(B)|}{m(B)} = \| f' \|_\infty .$$

Lemma (5.1) ist also bewiesen.

Mittels des Satzes von HAHN-BANACH ist es nun leicht zu sehen, daß die zwei Norm-Begriffe übereinstimmen. Es ist jetzt möglich, die Bedingungen von Satz (4.6) der vorliegenden Arbeit nachzuweisen. Aus der Definition ([*23*]) des Integrals, Corollar (12.1) und Corollar (13.1) folgt, daß die nichtnegativen integrablen Operatoren in der $\| \cdot \|_1$ — abgeschlossenen Hülle $\bar{K}$ von K liegen.

Durch Anwendung von Corollar (11.2) in [*23*] beweist man leicht, daß die Menge der nichtnegativen integrablen Operatoren genau $\bar{K}$ ist. Man beweist auch durch Corollar (11.2), daß $\bar{K}$ ein Unterkegel von L^+ (s. oben Satz (4.6)) sein muß. Weil

$$\| B \|_1 = m(B^+ + B^-) = m(B^+) + m(B^-) = \| B^+ \|_1 + \| B^- \|_1$$

mit $B = B^+ - B^-$ sind die Bedingungen des Satzes (4.6) erfüllt und es folgt, daß $(\bar{K}, m')$, wobei m' die stetige Erweiterung von m auf $\bar{K}$ bezeichnet, eine Integralerweiterung von (K, m) ist. Daß dies das Integralsystem von SEGAL ist, ist jetzt klar.

In unserem Beweis, daß das Segalsche Integralsystem eine Integralerweiterung im obigen Sinne ist, haben wir weitgehend gewisse tiefgehende Aussagen der Segalschen Arbeit benützt. Es wäre interessant, einen primitiveren Beweis dafür zu finden, daß die Voraussetzungen von Satz (4.6) erfüllt sind, d. h. einen Beweis, der direkt von den Eigenschaften des Kegels K zur Anwendung des Satzes (4.6) führt, ohne über den Umweg der tieferliegenden Corollare zu gehen. Hierdurch wäre es vielleicht möglich, die von SEGAL durchgeführte explizite Konstruktion besser von der abstrakten Theorie abzutrennen, die Beziehung zwischen ihnen besser zu erkennen und die primitiveren Aspekte der Segalschen Theorie in unsere allgemeinen Überlegungen besser einzuordnen.

§ 6. Die Integralerweiterungstheorie für den vollen Operatorkegel

Wir wollen jetzt die Integralerweiterung, welche für die Quantenstatistik wichtig ist, ansehen. Es wäre naheliegend, mit dem Kegel $K(\mathfrak{H})$ aller nichtnegativen, symmetrischen, über einem separablen Hilbertraum $\mathfrak{H}$ definierten Operatoren zu arbeiten. Es ist jedoch zweckmäßiger, mit etwas Primitiverem anzufangen. Hierzu bezeichnen wir durch K den Kegel aller nichtnegativen symmetrischen entarteten (das bedeutet: der Bildraum hat endliche Dimension) Operatoren auf dem separablen Hilbertraum $\mathfrak{H}$. Dies sind Operatoren A der Gestalt

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i E_{\psi_i} ,$$

wobei die nichtnegativen reellen Zahlen λ_i fast alle Null sind. Die Bezeichnung E_{ψ_i} ist schon in § 3 erklärt worden und bedeutet eine eindimensionale Projektion in der Richtung des aus $\mathfrak{H}$ gewählten Einheitsvektors ψ_i. Dieser Kegel K ist ein dichter Unterkegel des Kegels $K(\mathfrak{H})$ (Def. (4.2)) und $K(\mathfrak{H})$ ist der von K erzeugte σ-vollständige Unterkegel von $K(\mathfrak{H})$. Betrachten wir nun die Elemente $\bar{J}(\cdot)$ aus $K'(\mathfrak{H})$. Jedes solche $\bar{J}(\cdot)$ ist, nach Satz (3.1), durch genau ein $J \in W$ durch die Formel

$$\bar{J}(A) = \mathrm{Sp}\{J^{1/2} A J^{1/2}\} \quad (A \in K(\mathfrak{H}))$$

darstellbar. Die Elemente $\bar{J}(\cdot)$ sind stetig bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm in $K(\mathfrak{H}) - K(\mathfrak{H})$. Auch ist die Einschränkung $J(\cdot)$ von $\bar{J}(\cdot)$ auf $K - K$ normstetig. Es existiert also die natürliche Norm $\|J\|_1$, und es gilt $\|J\|_1 = \mathrm{Sp}\{J\}$. Ist umgekehrt $J(\cdot) \in K^\dagger$, dann ist $J(E_\psi)$ eine symmetrische nichtnegative quadratische Form auf $\mathfrak{H}$. Wenn wir $J(\cdot)$ als eine Wahrscheinlichkeit ansehen wollen, dann soll $J(A) \leqq 1$ für alle $A \in K$ mit $A \leqq I$ sein. Hieraus folgt $\|J\|_1 \leqq 1$. Außerdem ist $J(E_\psi)$ nun eine beschränkte quadratische Form, und $J(E_\psi) = (\psi, J\psi)$, wobei $J \geqq 0$, $\mathrm{Sp}\{J\} = \|J\|_1 \leqq 1$. Es gibt weiterhin genau eine Erweiterung $\bar{J}(\cdot) \in K'(\mathfrak{H})$ von $J(\cdot)$, und es gilt $\|J\|_1 = \bar{J}(I)$. Wir wählen nun eine reguläre ($A \in K$, $J(A) = 0$ ergibt $A = 0$) Linearform $J(\cdot) \in K^\dagger$ mit $\|J\|_1 = 1$ $(\bar{J}(I) = 1)$. (Kommen Fälle vor, wo es günstig ist, eine nichtreguläre Linearform zu benutzen, so kann man den Träger von $J(\cdot)$ als den Hilbertraum $\mathfrak{H}$ betrachten. Entsprechend muß man dann mit Äquivalenzklassen vorgehen.) Wir untersuchen das Paar $(K, J(\cdot))$, um zu beweisen, daß es ein Elementarsystem ist. Um die Menge $M_J \equiv \{J' \in K^\dagger \mid J' \leqq J\}$ (und deswegen auch $K_J^\dagger$) zu beschreiben, brauchen wir nur die entsprechenden Elemente aus W zu studieren. Sie sind, wie man leicht sieht, genau die Operatoren $J' \in W$ der Gestalt $J' = J^{1/2} A J^{1/2}$, wobei $A \in K(\mathfrak{H})$ mit $\|A\|_\infty \leqq 1$. Die Elemente von $K_J^\dagger$ sind also durch $J' \in W$ der Gestalt $J^{1/2} A J^{1/2}$ mit $A \in K(\mathfrak{H})$ dargestellt. Die entsprechenden Linearformen $J'(\cdot)$ werden mittels $J' \in K(\mathfrak{H})$ durch die Formel

$$J'(B) = \mathrm{Sp}\{B^{1/2} J' B^{1/2}\} \ (B \in K)$$

angegeben. Diese Charakterisierung folgt zum Teil aus der Regularität von $J(\cdot)$. Seien $A, B \in K$ mit $J'(A) \geqq J'(B)$ für alle $J'(\cdot)$ in $K_J^\dagger$. Dann gilt für jedes $\psi \in \mathfrak{H}$ $\mathrm{Sp}\{A^{1/2} J^{1/2} E_\psi J^{1/2} A^{1/2}\} \geqq \mathrm{Sp}\{B^{1/2} J^{1/2} E_\psi J^{1/2} B^{1/2}\}$, oder, was dasselbe ist, $(J^{1/2}\psi, A J^{1/2}\psi) \geqq (J^{1/2}\psi, B J^{1/2}\psi)$. Weil der Bildraum von $J^{1/2}$ normdicht in $\mathfrak{H}$ liegt, ergibt nun die letzte Ungleichung $A \geqq B$, und daß das Paar (K, J) ein Elementarsystem ist, ist bewiesen. Wir wollen nun zeigen, daß eine Integralerweiterung von (K, J) übersehbar ist. Hierzu wollen wir unsere Überlegungen auf eine geeignete Weise ändern. Sei

$$J^{1/2} = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^{1/2} E_{\psi_i}$$

eine feste Schmidt-Hilbert-Entwicklung des Operators $J^{1/2}$ (J und $J^{1/2}$ sind kompakt) mittels der orthonormierten Basis $\{\psi_i\}$ in $\mathfrak{H}$. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{H}_0$ den von der Menge $\{\psi_i\}$ erzeugten Linearraum. Selbstverständlich liegt $\mathfrak{H}_0$ normdicht in $\mathfrak{H}$. Aus der Regularität von $J(\cdot)$ folgt weiterhin, daß keins der $\mu_i^{1/2}$ Null sein kann.

Mit $\mathfrak{K}^*$ bezeichnen wir den σ-vollständigen Kegel aller nichtnegativen Bilinearformen $\phi(\varphi, \psi)$, die für alle φ und ψ in $\mathfrak{H}_0$ definiert sind. Hierunter fallen die Bilinearformen $\phi_A(\cdot,\cdot)$ der Gestalt $\phi_A(\varphi, \psi) \doteq (\varphi, A\psi)$, wobei $A \in K(\mathfrak{H})$. Es ist klar, daß A durch ϕ_A eindeutig bestimmt ist und daß es auf diese Weise möglich ist, den Kegel $K(\mathfrak{H})$ als einen dichten Unterkegel von $\mathfrak{K}^*$ zu betrachten. Wir bezeichnen den Kegel aller solcher $\phi_A (A \in K(\mathfrak{H}))$ durch $K^*(\mathfrak{H})$. Als dichter Unterkegel von $K^*(\mathfrak{H})$ (und auch von $\mathfrak{K}^*$) können wir den Kegel K^* aller ϕ_A mit $A \in K$ auszeichnen. Auf K^* kann weiterhin die Linearform $J^*(\cdot)$ durch

$$J^*(\phi_A) \equiv J(A)$$

definiert werden. Das Paar (K, J) ist also mit (K^*, J^*) isomorph. Wir konstruieren nun eine Integralerweiterung von (K^*, J^*) (vgl. Satz (4.2)).

Wir definieren erstens die Linearform $\overline{J^*}(\cdot)$ auf $\mathfrak{K}^*$ durch die Formel

$$\begin{aligned}\overline{J^*}(\phi) &\equiv \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \phi(\psi_i, \psi_i)\\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \phi(J^{1/2}\psi_i, J^{1/2}\psi_i) \leqq \infty\,,\end{aligned}$$

und wir bezeichnen durch $\overline{K^*}$ den in $\mathfrak{K}^*$ dichten Unterkegel aller $\phi \in \mathfrak{K}^*$, für die $\overline{J^*}(\phi) < \infty$. Die Linearform $\overline{J^*}(\cdot)$ ist ein Integral auf $\overline{K^*}$. Es gilt für $A \in K$

$$\begin{aligned}\overline{J^*}(\phi_A) &= \sum_{i=1}^{\infty} (\psi_i, J^{1/2} A J^{1/2} \psi_i) = J(A)\\ &= J^*(\phi_A)\end{aligned}$$

und $\overline{J^*}$ ist eine endliche Erweiterung von J^* auf $\overline{K^*}$. Wir wollen nun zeigen, daß der Kegel $\overline{K^*}$ mit dem Kegel W der nichtnegativen Operatoren mit endlicher Spur kegelisomorph ist und daß diese Isomorphie $\overline{\Phi}$ die Formel

$$\overline{J^*}(\phi) = \mathrm{Sp}(\overline{\Phi}(\phi))\,, \quad (\phi \in \overline{K^*})$$

erfüllt. Man überzeugt sich leicht, daß das Paar $(W, \mathrm{Sp}\{\cdot\})$ ein Integralsystem ist, und die Existenz einer solchen Isomorphie $\overline{\Phi}$ beweist, daß auch $(\overline{K^*}, \overline{J^*})$ ein Integralsystem ist. Um die Isomorphie $\overline{\Phi}$ zu definieren, bemerken wir, daß die Bilinearform

$$\pi(\varphi, \psi) \equiv \phi(J^{1/2}\varphi, J^{1/2}\psi) \quad (\varphi, \psi \in \mathfrak{H}_0)$$

für jede ϕ aus $\mathfrak{K}^*$ definiert ist und es gilt, wenn $\phi \in \overline{K^*}$, die Formel

$$\sum_{i}^{\infty} \pi(\psi_i, \psi_i) = \sum_{i}^{\infty} \mu_i \phi(\psi_i, \psi_i) = \overline{J^*}(\phi) < \infty\,.$$

Hieraus folgt, daß $\pi(\cdot, \cdot)$ beschränkt ist und daß sie durch $\pi(\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$ mit $A \in W$ dargestellt werden kann. Außerdem ist A eindeutig durch ϕ bestimmt und es existiert die Abbildung $\overline{\Phi}(\phi) \equiv A$. Diese Abbildung $\overline{\Phi}\colon \overline{K^*} \to W$ ist linear und eineindeutig. Sie ist auch surjektiv, denn ist $A' \in W$, so ist

$$\phi'(\varphi, \psi) \equiv (J^{-1/2}\varphi, A' J^{-1/2}\psi)$$

eine auf $\mathfrak{H}_0$ definierte Bilinearform. Es gilt außerdem

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \phi'(\psi_i, \psi_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (\psi_i, A'\psi_i)\,,$$

und ϕ' gehört zu $\overline{K^*}$. Weiterhin gilt

$$\pi'(\varphi, \psi) \equiv \phi'(J^{1/2}\varphi, J^{1/2}\psi)\,,$$

was zeigt, daß $\overline{\Phi}(\phi') = A'$ ist und daß ϕ' das Urbild von A' unter $\overline{\Phi}$ ist und $\overline{\Phi}$ ist also eine Kegelisomorphie zwischen W und $\overline{K^*}$. Es gilt auch

$$\begin{aligned} \overline{J^*}(\phi) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \phi(\psi_i, \psi_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi(J^{1/2}\psi_i, J^{1/2}\psi_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \pi(\psi_i, \psi_i) \quad = \sum_{i=1}^{\infty} (\psi_i, \overline{\Phi}(\phi)\psi_i) \\ &= \mathrm{Sp}\{\overline{\Phi}(\phi)\}, \end{aligned}$$

die gewünschte Beziehung zwischen $\mathrm{Sp}\{\cdot\}$ und $\overline{J^*}(\cdot)$. Betrachten wir nun die Unterkegel $K^*(\mathfrak{H})$ und K^* von $\mathfrak{K}^*$. Für jedes ϕ_A auf $K^*(\mathfrak{H})$ gilt $\phi_A(\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$ und $\overline{\Phi}(\phi_A) = J^{1/2} A J^{1/2}$. Mit W_0 bezeichnen wir das Bild $\overline{\Phi}(K^*)$ von K^* unter $\overline{\Phi}$. W_0 ist ein dichter Unterkegel von W. Wenn wir nun beweisen, daß $(W, \mathrm{Sp}\{\cdot\})$ eine Integralerweiterung von $(W_0, \mathrm{Sp}\{\cdot\})$ ist, so haben wir sofort das Ergebnis, daß $(\overline{K^*}, \overline{J^*})$ eine Integralerweiterung von (K^*, J^*) ist. Hierzu weisen wir die Voraussetzungen von Satz (4.6) nach. Erstens ist es trivial zu sehen, daß $(W_0, \mathrm{Sp}\{\cdot\})$ ein Elementarsystem ist, denn es ist mit (K^*, J^*) isomorph. Zweitens ist, wie man leicht ausrechnen kann, die Norm $\mathrm{Sp}\{|A|\}$ in $W_0 - W_0$ genau die in Satz (4.6) erwähnte Norm $\|\cdot\|_1$. Betrachten wir jetzt den Kegel $W_0 = \overline{\Phi}(K^*)$. Er besteht aus allen Operatoren in W, die durch $J^{1/2} A J^{1/2}$ mit entartetem A ausgedrückt werden können. Sie sind genau die Operatoren der Gestalt

$$A_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i E_{\varphi_i},$$

wobei die nichtnegativen reellen Zahlen λ_i fast alle Null sind und wobei die φ_i alle zum Bildraum von $J^{1/2}$ gehören. Ist A in $W_0 - W_0$, so liegen A^+ und A^- in W_0. Diese Tatsache folgt daraus, daß es sich im wesentlichen um endlich-dimensionale Operatoren handelt. Wir beweisen nun das folgende Lemma.

Lemma (6.1). *Im Banachraum $L^1(\mathfrak{H})$ ist W die normabgeschlossene Hülle von W_0.*

Beweis. Wir beginnen mit der Beobachtung, daß aus der Konvergenz einer Folge $\{\xi_i\}$ von Vektoren in $\mathfrak{H}$ gegen ein $\xi \in \mathfrak{H}$ die Konvergenz von $\|E_{\xi_i} - E_\xi\|_1 = \mathrm{Sp}\{|E_{\xi_i} - E_\xi|\}$ gegen Null folgt. Diese Tatsache beruht darauf, daß der Operator $E_{\xi_i} - E_\xi$ niemals mehr als zwei nichtverschwindende Eigenwerte haben kann und daß diese Eigenwerte gegen Null streben müssen. Um dies nachzuweisen, schreibt man für $\psi \in \mathfrak{H}$,

$$\begin{aligned} \|(E_{\xi_i} - E_\xi)\psi\| &= \|\xi_i(\xi_i, \psi) - \xi(\xi, \psi)\| \leqq \\ &\leqq \|\xi_i(\xi_i - \xi, \psi)\| + \|(\xi - \xi_i)(\xi, \psi)\| \leqq \\ &\leqq (\|\xi_i\| + \|\xi\|)\|\xi_i - \xi\| \, \|\psi\|. \end{aligned}$$

Da die $\|\xi_i\|$ gleichmäßig beschränkt sind, gibt es ein $M \geqq 0$ mit $\|(E_{\xi_i} - E_\xi)\psi\| \leqq \leqq M\|\xi_i - \xi\| \, \|\psi\|$. Hieraus folgt, daß

$$\|E_{\xi_i} - E_\xi\|_\infty \leqq M\|\xi_i - \xi\| \quad \text{und} \quad \|E_{\xi_i} - E_\xi\|_\infty \to 0$$

als $\xi_i \to \xi$. Es folgt also die Behauptung, daß die Eigenwerte von $E_{\xi_i} - E_\xi$ gegen Null streben und daß ihre absolute Summe $\|E_{\xi_i} - E_\xi\|_1$ ebenfalls gegen Null strebt. Um den Beweis des Lemmas zu vervollständigen, sei $A \in W$. Es gibt eine Schmidt-Hilbert-Entwicklung

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i E_{\varphi_i} \quad (\sum_i \lambda_i < \infty)$$

mit $\lambda_i \geqq 0$ für alle i. Für jedes i gibt es ein $\overline{\varphi_i}$ im Bildraum von $J^{1/2}$ (er liegt dicht in $\mathfrak{H}$) mit $\| E_{\varphi_i} - E_{\overline{\varphi_i}} \|_1$. Außerdem kann eine natürliche Zahl n noch so gewählt werden, daß $\sum_{i=n}^{\infty} \lambda_i < \varepsilon$. Ist $A_n \equiv \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_{\overline{\varphi_i}}$, so ist A_n in W_0, und für $k \geqq n$

$$\| A_k - A \|_1 \leqq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \| E_{\overline{\varphi_i}} - E_{\varphi_i} \|_1 + \| \sum_{i=k+1}^{\infty} \lambda_i E_{\varphi_i} \|_1 \leqq$$
$$\leqq \varepsilon \sum_{i=1}^{k} \lambda_i + \sum_{i=k+1}^{\infty} \lambda_i \leqq \varepsilon (\| A \|_1 + 1) .$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, haben wir das Lemma bewiesen.

Aus diesem Lemma folgt, daß der Raum $L^1(\mathfrak{H}) = W - W$ eine Banachraum-Vervollständigung von $W_0 - W_0$ ist. Sei nun $A \in L^+$ (s. oben Satz (4.6)). Es gilt für jedes $\psi \in \mathfrak{H}$ die Ungleichung $(J^{1/2}\psi, A J^{1/2}\psi) \geqq 0$. Weil der Bildraum von $J^{1/2}$ normdicht in $\mathfrak{H}$ liegt, ergibt diese Ungleichung $A \geqq 0$ und $A \in W$. Es gilt also $L^+ = W$ und weil W die normalgeschlossene Hülle von W_0 ist, gilt die erste Voraussetzung des Satzes (4.6). Für jedes $A \in W_0 - W_0$ gilt außerdem die Zerlegung $A = A^+ - A^-$ mit $A^+, A^- \in W_0$ und $\| A \|_1 = \| A^+ \|_1 + \| A^- \|_1$. Satz (4.6) ergibt somit, daß $(W, \mathrm{Sp}\{\cdot\})$ eine Integralerweiterung von $(W_0, \mathrm{Sp}\{\cdot\})$ ist.

Bevor wir den ersten ins Auge gefaßten Satz formulieren, ist es zweckmäßig, zu bemerken, daß die Linearform $\overline{J^*}$ auf $\mathfrak{K}^*$ auch weniger umständlich ausgedrückt werden kann. Es gilt: Sei $\{\varphi_i\}$ eine beliebige orthonormierte Basis in $\mathfrak{H}$. Dann gilt

$$\overline{J^*}(\phi) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi(J^{1/2} \varphi_i, J^{1/2} \varphi_i), \quad (\phi \in \mathfrak{K}^*) .$$

Diese Formel folgt aus der Tatsache, daß die Bilinearform $\pi(\varphi, \psi) \equiv \phi(J^{1/2}\varphi, J^{1/2}\psi)$ beschränkt ist und daß die Spur mittels einer beliebigen orthonormierten Basis berechnet werden kann.

Satz (6.1). *Sei K der Kegel aller entarteten symmetrischen nichtnegativen Operatoren in einem separablen Hilbertraum $\mathfrak{H}$ und $J(\cdot) \in K^\dagger$ mit $J(A) = \mathrm{Sp}\{J^{1/2} A J^{1/2}\}$ eine reguläre Linearform mit der Schmidt-Hilbert-Entwicklung*

$$J^{1/2} = \sum_{k=1} \mu_k^{1/2} E_{\psi_k}, \quad (\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k < \infty) .$$

Das Paar (K, J) ist ein Elementarsystem. Seien weiterhin $\mathfrak{H}_0$ der von der Menge $\{\psi_k\}$ erzeugte Linearraum, $\mathfrak{K}^*$ der Kegel aller über $\mathfrak{H}_0$ definierten Bilinearformen ϕ, $K^*(\mathfrak{H})$ der Kegel aller $\phi_A \in \mathfrak{K}^*$ mit $\phi_A(\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$ für passendes $A \in K(\mathfrak{H})$ und K^* der Kegel aller ϕ_A mit $A \in K$. Die Linearform $J^*(\phi_A) = J(A)$ $(A \in K)$ ist ein reguläres Element aus $K^{*\dagger}$. Es gelten: K ist ein dichter Unterkegel von $K(\mathfrak{H})$ und $K(\mathfrak{H})$ ist der von K erzeugte abgeschlossene Unterkegel von $K(\mathfrak{H})$. Der Kegel K^* ist ein dichter Unterkegel von $\mathfrak{K}^*$ und $K^*(\mathfrak{H})$ ist der von K^* erzeugte *dichte σ-vollständige Unterkegel von $\mathfrak{K}^*$ (vgl. Aussage i. b) § 4). Durch die Abbildung $\Psi(A) = \phi_A$ ist K mit K^*, $K(\mathfrak{H})$ und (K, J) mit (K^*, J^*) isomorph, und (K^*, J^*) ist ein Elementarsystem. Durch $\Phi(\phi_A) = J^{1/2} A J^{1/2}$ definieren wir eine Abbildung von K^* in W, und wir setzen $W_0 = \Phi(K^*)$. Durch Φ entsteht eine Isomorphie zwischen (K^*, J^*) und $(W_0, Sp\{\cdot\})$ was zeigt, daß auch $(W_0, \mathrm{Sp}\{\cdot\})$ ein Elementarsystem ist.*

Es ist oben bewiesen worden, daß W_0 in einem sehr günstigen Verhältnis zu der Banachraum-Vervollständigung $L^1(\mathfrak{H})$ von $W_0 - W_0$ steht. Andererseits gibt es eine Isomorphie zwischen (K^*, J^*) und $(W_0, \mathrm{Sp}\{\cdot\})$. Diese Abbildung Φ induziert eine isometrische lineare Abbildung von $L^1(\mathfrak{H})$ auf die Banachraum-Vervollständigung von $K^* - K^*$ unter der Norm $\|\cdot\|_1$ (§ 4). Wir können also ein ähnliches Verhältnis zwischen K^* und der Banachraum-Vervollständigung von $K^* - K^*$ unter dieser Norm erwarten.

Satz (6.2). *Sei L die Banachraum-Vervollständigung von $K^* - K^*$ unter der Norm $\|\phi_A\|_1 = \|J^{1/2} A J^{1/2}\|_1$. Ist $\widetilde{K^*}$ die normabgeschlossene Hülle von K^* in L, so ist der Dualkegel $\widetilde{K^*}'$ zu $\widetilde{K^*}$ fundamental über $\widetilde{K^*}$ und $L = \widetilde{K^*} - \widetilde{K^*}$. Ist außerdem $\phi \in K^*$, so gibt es genau eine Zerlegung $\phi = \phi^+ - \phi^-$ mit $\phi^+, \phi^- \in K^*$ und $\|\phi\|_1 = \|\phi^+\|_1 + \|\phi^-\|_1$.*

Mit Hilfe von Lemma (6.1) haben wir auch den folgenden Satz bewiesen.

Satz (6.3). *Der Kegel $\overline{K^*}$ aller $\phi \in \mathfrak{K}^*$ mit $\overline{J^*}(\phi) \leqq \infty$ ist ein dichter Unterkegel von $\mathfrak{K}^*$. Das Paar $(\overline{K^*}, \overline{J^*})$ ist eine Integralerweiterung von (K^*, J^*) und das Integralsystem $(\overline{K^*}, \overline{J^*})$ ist mit dem Integralsystem $(W, \mathrm{Sp}\{\cdot\})$ isomorph. Zwischen diesen Integralsystemen gibt es genau eine Isomorphie $\overline{\Phi}$, die auf K^* mit Φ: $K^* \to W_0$ übereinstimmt. Der Kegel $\overline{K^*}$ ist die abgeschlossene Hülle von K^* im Sinne von Satz (6.2), also gleich $\widetilde{K^*}$, und $\widetilde{K^*} - \widetilde{K^*}$ ist eine Banachraum-Vervollständigung von $K^* - K^*$ unter der $\|\cdot\|_1$-Norm.*

Aus Satz (4.3) folgt, daß es keine weitere vernünftige, in $\mathfrak{K}^*$ liegende Integralerweiterung von (K^*, J^*) gibt. Da das Integralsystem $(\overline{K^*}, \overline{J^*})$ mit $(W, \mathrm{Sp}\{\cdot\})$ isomorph ist, ist eine Integralerweiterung von (K^*, J^*) ein reflexiver Kegel mit einem Integral und es gibt für jedes $\phi \in \overline{K^*} - \overline{K^*}$ genau eine Zerlegung $\phi = \phi^+ - \phi^-$ mit $\phi^+, \phi^- \in \overline{K^*}$ und $\|\phi\|_1 = \|\phi^+\|_1 + \|\phi^-\|_1$. Außerdem ist ϕ^+ normstetig in ϕ (Satz (3.3)).

Mit Hilfe der Isomorphie $\overline{\Phi}: \bar{K} \to W$, die in diesen Sätzen auftauchte, ist es nun leicht zu sehen, wie man einen modularen Verband von Elementen aus $\overline{K^*}$ so wählen kann, daß $\overline{J^*}$ über diesem Verband projektivinvariant ist: Man braucht nur zu beachten, daß die Spur eine projektivinvariante Funktion (Dimension) über dem modularen Verband der Projektionen in W ist. Die Elemente des in $\overline{K^*}$ liegenden Verbands sind die Urbilder von den Projektionen in W unter $\overline{\Phi}$. Sie liegen sogar im Kegel K^*, der trivialerweise mit K isomorph ist. Hierdurch kann man einen Verband L in K finden mit der Eigenschaft, daß J projektivinvariant über L ist. Eine Anwendung der in § 1 erwähnten Theorie von Alfsen ([*0*]) scheint jedoch in diesem Fall trivial zu sein. Weil außerdem $\overline{\Phi}$ sehr von J abhängig ist, hängt L ebenfalls von J ab, was in § 1 als Einwand gegen diesen Ausgangspunkt erhoben wurde.

Wie im Fall des Kegels W, hat auch der Kegel $\overline{K^*}$ eine Hilbertraum-Darstellung. Sei $\phi \in \overline{K^*}$. Die Bilinearform $\pi(\varphi, \psi) = \phi(J^{1/2}\varphi, J^{1/2}\psi)$ ist beschränkt, und es gibt einen beschränkten Operator T in $\mathfrak{H}$ mit der Eigenschaft $\phi(J^{1/2}\varphi, J^{1/2}\psi) = (T\varphi, T\psi)$ für alle φ, ψ in $\mathfrak{H}$. Die Bilinearform ϕ wird also durch $\phi(\varphi, \psi) = (B\varphi, B\psi)$ für alle $\varphi, \psi \in \mathfrak{H}_0$ dargestellt, wobei B durch $B \equiv TJ^{-1/2}$ über $\mathfrak{H}_0$ definiert ist. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}(B, B) &\equiv \sum_i \mu_i (B\psi_i, B\psi_i) \\ &= \sum_i \mu_i \phi(\psi_i, \psi_i) = \sum_i \phi(J^{1/2}\psi_i, J^{1/2}\psi_i) \\ &= \sum_i (T\psi_i, T\psi_i) = \mathrm{Sp}\{T^* T\},\end{aligned}$$

und $T \in L^2(\mathfrak{H})$. Ist andererseits $T \in L^2(\mathfrak{H})$, so ist $\phi(\varphi, \psi) \equiv (TJ^{-1/2}\varphi, TJ^{-1/2}\psi)$ eine über $\mathfrak{H}_0$ erklärte Bilinearform in $\overline{K^*}$. Durch $T = BJ^{1/2}$ entsteht also eine Isomorphie zwischen dem Hilbertraum aller T in $L^2(\mathfrak{H})$ und dem Hilbertraum aller über $\mathfrak{H}_0$ definierten B mit $(B, B) < \infty$, und der Kegel $\overline{K^*}$ besteht aus denjenigen $\phi \in \mathfrak{K}^*$ der Gestalt $\phi(\varphi, \psi) = (B\varphi, B\psi)$ mit $(B, B) < \infty$. Man überzeugt sich leicht, daß der Raum aller solcher Operatoren B der von $K(\mathfrak{H})$ erzeugte Hilbertraum bezüglich des inneren Produkts (B, B) ist. Es ist auch bemerkenswert, daß es B gibt, die keine dicht definierten adjungierten Operatoren B^* besitzen. Einen solchen Operator B konstruiert man leicht auf folgende Weise: Sei, wie immer, $J^{1/2} = \sum_i \mu_i^{1/2} E_{\psi_i}$ mit $\sum_i \mu_i = 1$ $(\mu_i > 0)$. Wir definieren

$$B\varphi = \sum_i \psi_0(\psi_i, \varphi),$$

wobei φ ein beliebiger Vektor aus $\mathfrak{H}_0$ ist und $\|\psi_0\| = 1$. Es gilt $(B, B) < \infty$, aber B^* existiert nicht für $(\psi, \psi_0) \neq 0$, denn sei $\psi^* \in \mathfrak{H}$ mit $(\psi^*, \psi_i) = (\psi, B\psi_i)$ für alle i. Dann gilt $(\psi^*, \psi_k) = (\psi, \psi_0) \neq 0$ für alle k, und die Summe $\sum_k |(\psi^*, \psi_k)|^2$ divergiert.

Zum Schluß bemerken wir, daß die Isomorphismen wie $\overline{\Phi}$, die früher aufgetaucht sind, nur in sehr speziellen Fällen algebraische Isomorphismen, d.h. auch mit der multiplikativen Struktur der betreffenden Kegel vertauschbar sind. Die algebraische Eigenschaft ist natürlich vorhanden, wenn $\overline{\Phi}$ in einem Funktionenraum durch eine Transformation des Grundraumes induziert wird. In Satz (6.3) hat die dort auftauchende Isomorphie $\overline{\Phi}$ kaum etwas mit der Ringstruktur zu tun. Viel wichtiger für unsere Überlegungen scheinen die Kegelisomorphien zu sein, die die Integrale ineinander überführen. Die Ringstruktur spielt im allgemeinen nur eine sehr sekundäre Rolle und ihr auffälliges Auftreten in der gewöhnlichen Maßtheorie kann zum Teil darauf zurückgeführt werden, daß es unter sehr allgemeinen Bedingungen möglich ist, eine algebraische Ringstruktur in einem Vektorverband ohne weiteres zu definieren.

Literatur

[*0*] Alfsen, E. M.: Order theoretic foundations of integration. Math. Ann. **149**, 419–461 (1963).

[*1*] Bauer, H.: Konvexität in topologischen Vektorräumen. Vorlesungsausarbeitung, Universität Hamburg WS 1963/64.

[*2*] Birkhoff, G., and J. v. Neumann: The logic of quantum mechanics. Ann. of Math. **37**, 823–843 (1936).

[3] CHINTSCHIN, A. J.: Mathematische Grundlagen der Quantenstatistik. Berlin: Akademie-Verlag 1956.

[4] CHOQUET, G., et P. A. MEYER: Existance et unicité des représentations integrals dans les convexes compacts quelconques. Ann. Inst. Fourier **13**, 139—154 (1963).

[5] DIXMIER, J.: Les algébres d'operateurs dans l'espace hilbertien. Paris: Gauthier-Villars 1957.

[6] — Form linéaires sur un anneau d'operateurs. Bull. Soc. math. France 81, 9—39 (1953).

[7] DYE, H. A.: The Radon-Nikodym theorem for finite rings of operators. Trans Amer. math. Soc. **72**, 243—280 (1952).

[8] HALMOS, P. R.: Measure theory. New York: D. v. Nostrand Co. 1950.

[9] HALPARIN, I.: Introduction to von Neumann algebras and continuous geometry. Canadian math. Bull. **3**, 273—288 (1960).

[10] JACOBS, K.: Neuere Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1960.

[11] KADISON, R. V.: Isometries of operator algebras. Ann. of Math., II. Ser. **54**, 325—338 (1951).

[12] KAKUTANI, S.: Concrete representations of abstract L-spaces and the mean ergodic theorem. Ann. of Math., II. Ser. **42**, 523—537 (1941).

[13] KREIN, M. G., and M. A. RUTMAN: Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space. Amer. math. Soc. Translat. No. 26, 128 (1950).

[14] LOOMIS, L. H.: An introduction to abstract harmonic analysis. New York: D. von Nostrand Co. 1953.

[15] MACKEY, G. W.: The mathematical foundations of quantum mechanics. New York: W. A. Benjamin Inc. 1963.

[16] — Quantum mechanics and Hilbert spaces. Amer. math. Monthly **64**, Part II, 45—57 (1957).

[17] NEUMANN, J. v.: Mathematical foundations of quantum mechanics. Princeton University Press 1955.

[18] — Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik. Gött. Nachr. **I**, 245—272 (1927).

[19] — Thermodynamik quantenmechanischer Gesamtheiten. Gött. Nachr. **I**, 273—291 (1927).

[20] — Continuous geometry. N. A. S. Proc. **22** (1936).

[21] RIESZ, F., u. B. Sz. NAGY: Vorlesungen über Funktionalanalysis. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1956.

[22] SCHATTEN, R.: Norm ideals of completely continuous operators. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1960.

[23] SEGAL, I. E.: A non-commutative extension of abstract integration. Ann. of Math., II. Ser. **57**, 401—457 (1953).

[24] — Correction to "A non-commutative extension of abstract integration". Ann. of Math., II. Ser. **58**, 595—596 (1953).

[25] VARADARAJAN, V. S.: Probability in physics and a theorem on simultaneous observability. Commun. pure appl. Math. **15**, 189—217 (1962).

Mathematisches Institut der
Universität Erlangen-Nürnberg
8520 Erlangen
Bismarckstr. 1½