Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 14, 127–139 (1969)

Zur Konstruktion eindimensionaler homogener Markoffscher Prozesse

BERND EIFRIG

Summary. The aim of this paper is the construction of a class of semi-groups of homogeneous one-dimensional Markov processes with respect to a given infinitesimal operator. This is done namely by the method of stochastic integration represented in the book of Skorokhod. The Lipschitzian conditions – needed there – are weakened to uniform continuity by a method of approximation of semi-groups. Also to these semi-groups we can construct Markov processes as solutions of stochastic integral equations. The representation is connected with the result of Meyer, Watanabe, Motoo.

§ 0. Einleitung

Die vorliegende Arbeit behandelt die Konstruktion einer Klasse von Halbgruppen homogener eindimensionaler Markoffscher Prozesse bei vorgegebenem infinitesimalem Operator. Haupthilfsmittel hierzu ist die im Buch von Skorochod [4] ausführlich dargestellte stochastische Integration. Allerdings mußten dort an die auftretenden Koeffizienten Lipschitzbedingungen gestellt werden. Solche Einschränkungen werden im folgenden zur gleichmäßigen Stetigkeit abgeschwächt. Das geschieht durch ein Approximationsverfahren für Halbgruppen. Auch zu diesen Halbgruppen lassen sich Prozesse angeben, die Lösung einer stochastischen Integralgleichung sind. Die gefundene Darstellung steht in engem Zusammenhang mit den Arbeiten von Meyer [1], Motoo, Watanabe [2] und stellt sozusagen deren Umkehrung dar.

§ 1. Stochastische Integration

Dieser Paragraph wiederholt kurz die grundlegenden Definitionen der benutzten stochastischen Integrale [4].

1. Die Definition des stochastischen Integrals bezüglich eines Brownschen Prozesses: Sei $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $w_t(\omega)$ ein im Zeitintervall $[a, b[$ erklärter Brownscher Prozeß. Ferner sei jedem $t \in [a, b[$ ein σ-Ring $\mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}$ zugeordnet mit den Eigenschaften:

a) für $a \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq b$ gilt $\mathscr{F}_{t_1} \subset \mathscr{F}_{t_2}$,

b) für jedes $t \in [a, b[$ ist w_t $\mathscr{F}_t$-meßbar,

c) für $t \in [a, b[$ und $A \in \mathscr{F}_t$ hängen die Zufallsgrößen $w_{s_k} - w_t$, $s_k \in [t, b[$, $1 \leqq k \leqq n$, nicht von A ab.

Ferner sei

$$\mathscr{M}(\mathscr{F}_t, [a, b[) = \{f; [a, b[\times \Omega \to R, f(t, \cdot) \text{ } ist \text{ } \mathscr{F}_t\text{-}me\beta bar\},$$

$$\mathscr{M}_0(\mathscr{F}_t, [a, b[) = \Big\{ f: f(t, \omega) = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i, \omega)\, c_{[t_i, t_{i+1}[}\,;$$

$$t_0 = a < t_1 \ldots < t_n = b,\ f(t_{i_j}) \text{ } ist \text{ } \mathscr{F}_{t_i}\text{-}me\beta bar \text{ } f\ddot{u}r \text{ } i = 1, \ldots, n \Big\},$$

$$\mathscr{M}_1(\mathscr{F}_t, [a, b[) = \Big\{ f: f \in \mathscr{M}(\mathscr{F}_t, [a, b[), \int_a^b \mathsf{E} f^2(t, \omega)\, P(d\omega)\, dt < \infty \Big\}.$$

Man definiert dann das *stochastische Integral bezüglich* w_t zunächst für Funktionen $f \in \mathscr{M}_0 \cap \mathscr{M}_1$ durch

$$\int_a^b f\, dw_t = \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i, \omega)(w_{t_{i+1}} - w_{t_i}).$$

In natürlicher Weise geschieht die Fortsetzung auf die Funktionenmenge $\mathscr{M}_1$.

2. Stochastische Integrale bezüglich gewisser zufälliger Maße: Gegeben sei ein meßbarer Raum $(X, \mathscr{B})$ und ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. $\mu: \mathscr{B} \times \Omega \to R$ heißt ein *zufälliges Maß*, wenn μ σ-additiv bezüglich der stochastischen Konvergenz ist. Falls für k disjunkte Mengen $B_1, \ldots, B_k \in \mathscr{B}$ die Variablen $\mu(B_1)$, $\ldots, \mu(B_k)$ unabhängig sind, spricht man von einem zufälligen Maß mit unabhängigen Werten.

Bei der Analyse von Sprungstellen der Trajektorien eines Markoffschen Prozesses treten speziell zufällige Maße mit unabhängigen Werten auf, die poissonverteilt sind [2]. Bei der Konstruktion Markoffscher Prozesse erscheint es daher angebracht, die folgenden zufälligen Maße zu verwenden.

Sei $\mathscr{B}$ der σ-Ring aller Borelschen Mengen $B \subset [a, b[\times R$ mit $\int_B u^{-2}\, du\, dt < \infty$ und $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. $p: \mathscr{B} \times \Omega \to R$ sei ein zufälliges Maß mit unabhängigen Werten, so daß $p(B)$ für $B \in \mathscr{B}$ Poisson verteilt ist mit dem Erwartungswert $\mathsf{E}\, p(B) = \int_B u^{-2}\, du\, dt$. Durch Zentrieren entsteht ein neues zufälliges Maß q, definiert durch $q(B) = p(B) - \mathsf{E}\, p(B)$ für $B \in \mathscr{B}$. Da p unabhängige Werte besitzt, gilt für disjunkte Mengen $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$: $\mathsf{E}\, q(B_1)\, q(B_2) = 0$.

Seinen wieder ein Intervall $[a, b[$ und eine aufsteigende Familie von σ-Ringen $\mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}$, $t \in [a, b[$ gegeben. Es gelte

a) falls $B \subset [a, t[\times R$, $B \in \mathscr{B}$, dann ist $p(B)$ $\mathscr{F}_t$-meßbar;

b) für $B_1, \ldots, B_k \subset ([t, b[\times R)$ ist die k-dimensionale Zufallsgröße $(p(B_1), \ldots, p(B_k))$ unabhängig von $\mathscr{F}_t$.

Wir führen ein:

$\bar{\mathscr{M}}(\mathscr{F}_t, [a, b[) = \{f: f: [a, b[\times R \times \Omega \to R, f(t, u, \cdot)$ *ist* $\mathscr{F}_t$*-meßbar für* $u \in R$, $t \in [a, b[\}$,

$\bar{\mathscr{M}}_0(\mathscr{F}_t, [a, b[) = \{f: f \in \bar{\mathscr{M}}, f = \sum_{i,j} f_{ij}\, c_{[t_i, t_{i+1}[\times A_j}\}$;

$t_0, \ldots, t_k$ *ist eine Zerlegung des Intervalls* $[a, b[$; $A_j \cap A_{j'} = \emptyset$ *für* $j \neq j'$, $\bigcup_{i=1}^{n} A_j = R$, A_j *Borelsch*,

$$\mathscr{M}_q^1(\mathscr{F}_t, [a, b[) = \left\{ f;\ f \in \bar{\mathscr{M}};\ \int_b^a \mathsf{E}\, f^2(t, u)\, u^{-2}\, dt\, du < \infty \right\}.$$

Das stochastische Integral bezüglich q wird für $f \in \bar{\mathscr{M}}_0$ durch

$$\int_a^b \int_R f(t, u)\, q(ds \times du) = \sum_{i,j} f_{ij}\, q([t_i, t_{i+1}[\times A_j)$$

erklärt und läßt sich in natürlicher Weise auf $\mathscr{M}_q^1$ fortsetzen.

§ 2. Stochastische Gleichungen

In diesem Paragraphen werden die für das Weitere wichtigen Resultate aus [4] zusammengestellt und kommentiert. Die Bezeichnungen des Paragraphen 1 werden – von selbstverständlichen Modifikationen abgesehen – im folgenden beibehalten. Ferner seien der Brownsche Prozeß und das zufällige Maß unabhängig.

Mit $\mathscr{C}=\mathscr{C}(R)$ bezeichnen wir den Banachschen Raum der auf R definierten beschränkten gleichmäßig stetigen reellwertigen Funktionen. Die Norm eines Elementes $g\in\mathscr{C}(R)$ ist $\|g\|=\sup_{x\in R}|g(x)|$.

Schließlich sei $\mathscr{C}_2=\{g\colon g, g', g''\in\mathscr{C}\}$.

Zu Funktionen $a, b\colon R\to R$, $f\colon R\times R\to R$ suchen wir nun Lösungen der Gleichung

$$X_t=Y_0+\int_{t_0}^{t} a(X_s)\,ds+\int_{t_0}^{t} b(X_s)\,dw_s+\int_{t_0}^{t}\int_R f(X_s, u)\,q(ds\times du). \tag{2.1}$$

Wir übernehmen aus [4] das

Theorem 2.1. *Gegeben seien Funktionen $a, b\in\mathscr{C}(R)$ und $f\colon R\times R\to R$, so daß*

$$\int_R f^2(x, u)\,u^{-2}\,du$$

gleichmäßig in x beschränkt ist. Es existiere ein $L>0$ mit

$$|a(x)-a(y)|^2+|b(x)-b(y)|^2+\int_R |f(x, u)-f(y, u)|^2\,u^{-2}\,du\leqq L^2|x-y|^2, \tag{2.2a}$$

(2.2b) *Y_{t_0} sei eine $\mathscr{F}_{t_0}$-meßbare Funktion aus $L_2(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Dann hat* (2.1) *eine bis auf stochastische Äquivalenz eindeutige Lösung.*

Korollar 2.1. *Die Verteilung von X_t hängt nicht vom Wahrscheinlichkeitsraum ab, falls Y_{t_0} konstant ist.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus dem Iterationsverfahren in [4].

Theorem 2.2. *Unter den Voraussetzungen des Theorems* 2.1 *bildet für $x\in R$ die Lösung*

$$X_t^x=x+\int_0^t a(X_s^x)\,ds+\int_0^t b(X_s^x)\,dw_s+\int_0^t\int_R f(X_s^x, u)\,q(ds\times du) \tag{2.3}$$

einen homogenen Markoffprozeß.

Beweis. In [4] Kap. 3, Abschnitt 4 wird die Markoffeigenschaft abgeleitet. Die Homogenität folgt aus dem Korollar 2.1. Will man die so erhaltenen Prozesse genauer untersuchen, erhebt sich die Frage, welche Halbgruppen durch die Verteilungen $P_t(x,\cdot)$ der Variablen X_t^x erhalten werden können. Dazu dient

Lemma 2.1. *Unter den Voraussetzungen des Theorems* 2.1 *gilt für $x_1, x_2\in R$ und $t\in[t_0, \infty[$:*

$$\mathsf{E}\,|X_t^{x_1}-X_t^{x_2}|^2\leqq 4\,|x_1-x_2|^2\,e^{4L^2((t-t_0)+1)}.$$

Beweis. Man hat für $i=1,2$

$$X_t^{x_i}=x_i+\int_{t_0}^{t} a(X_s^{x_i})\,ds+\int_{t_0}^{t} b(X_s^{x_i})\,dw(s)+\int_{t_0}^{t}\int_R f(X_s^{x_i},u)\,q(ds\times du).$$

Unter Benutzung von (2.2) erhält man:

$$\mathsf{E}\,|X_t^{x_1}-X_t^{x_2}|^2\leqq 4\left\{(x_1-x_2)^2+L^2\big((t-t_0)+1\big)\int_{t_0}^{t}\mathsf{E}\,|X_s^{x_1}-X_s^{x_2}|^2\,ds\right\},$$

woraus durch Iteration leicht die Behauptung folgt. Zu beachten ist dabei lediglich noch, daß $\mathsf{E}(X_t^{x_1}-X_t^{x_2})^2$ wegen (2.2b) gleichmäßig auf jedem kompakten Zeitintervall beschränkt ist.

Hieraus erhält man

Korollar 2.2. *$g\in\mathscr{C}$. Dann ist die Funktion $\mathsf{E}\,g(X_t^{\cdot})$: $x\to\mathsf{E}\,g(X_t^x)$ ebenfalls in $\mathscr{C}$.*

Beweis. Es genügt der Nachweis der Behauptung für Funktionen $g\in\mathscr{C}_2$. Lemma 2.1 liefert:

$$|\mathsf{E}\,g(X_t^{x_1})-\mathsf{E}\,g(X_t^{x_2})|\leqq 2\,|x_1-x_2|\,e^{2L^2((t-t_0)+1)}\,\|g'\|+2\,|x_1-x_2|^2\,e^{4L^2((t-t_0)+1)}\,\|g''\|.$$

Bezeichnen wir wie üblich mit $P_t(x,dy)$ die Verteilung der Variablen X_t^x ($t_0=0$ gesetzt), so besagt das Korollar 2.2:

(2.4) $P_t\,g=\int P_t(\cdot,dy)\,g(y)$ definiert eine Kontraktionsabbildung von $\mathscr{C}(R)\to\mathscr{C}(R)$.

Leicht sieht man:

$$\lim_{t\to 0}\|P_t\,g-g\|=0 \qquad \textit{für } g\in\mathscr{C}. \tag{2.5}$$

Also definiert P_t eine stark stetige Halbgruppe auf $\mathscr{C}$. Wegen $P_t 1=1$ ist diese Markoffsch.

§ 3. Berechnung des infinitesimalen Operators

Es sollen zunächst sehr „einfache" Halbgruppen betrachtet werden. Ein weiter unten auftauchender Approximationssatz wird dann den allgemeinen Fall behandeln.

Theorem 3.1. *Seien gegeben:*

$$a,b,f_1,\dots,f_k\in\mathscr{C}, \tag{3.1a}$$

(3.1b) *k disjunkte Borelsche Mengen $B_k\subset R$ mit $\int_{B_j} u^{-2}\,du<\infty$, $1\leqq j\leqq k$,*

$$f(x,u)=\sum_{j=1}^{k} f_j(x)\,c_{B_j}(u),\qquad (x,u)\in R^2, \tag{3.2}$$

und es gelte:

(3.3) $|a(x_1)-a(x_2)|^2+|b(x_1)-b(x_2)|^2+\int_R |f(x_1,u)-f(x_2,u)|^2\,u^{-2}\,du\leqq L^2(x_1-x_2)^2$

mit einer Konstanten L gleichmäßig für $x_1, x_2 \in R$. Nach Theorem 2.2 existiert eine Lösung X_t^x der Gleichung

$$X_t^x = x + \int_0^t a(X_s^x)\, ds + \int_0^t b(X_s^x)\, dw(s) + \int_0^t \int_R f(X_s^x, u)\, q(ds \times du). \tag{3.4}$$

Für $g \in \mathscr{C}_2$ gilt unter diesen Voraussetzungen

$$\lim_{t \to 0} \sup_{x \in R} \left| \frac{\mathsf{E}\, g(X_t^x) - g(x)}{t} - \left\{ a(x)\, g'(x) + \frac{b^2(x)}{2} g''(x) + \int_R \frac{g(x+f(x,u)) - g(x) - f(x,u)\, g'(x)}{u^2}\, du \right\} \right| = 0. \tag{3.5}$$

Der infinitesimale Operator der Halbgruppe P_t ist also durch den zweiten Term in (3.5) gegeben.

Beweis. Sei

$$Y_t^x = x + \int_0^t a(x)\, ds + \int_0^t b(x)\, dw(s) + \int_0^t \int_R f(x, u)\, q(ds \times du). \tag{3.6}$$

Wir beschränken uns auf Werte $t \in [0, 1]$.

Man sieht leicht:

$$\mathsf{E}\, |X_t^x - Y_t^x|^2 \leqq K_0 \int_0^t \mathsf{E}\, |X_s^x - x|^2\, ds, \qquad x \in R,\ 0 \leqq t \leqq 1, \tag{3.7}$$

mit einer von x und t unabhängigen Konstanten K_0. Außerdem gibt es ein ebensolches K_1 mit

$$\mathsf{E}\, |X_t^x - x|^2 \leqq K_1\, t. \tag{3.8}$$

(3.7) und (3.8) implizieren:

$$\mathsf{E}\, |X_t^x - Y_t^x|^2 \leqq K_2\, t^2, \qquad K_2 = \frac{K_0\, K_1}{2}. \tag{3.9}$$

Unter Beachtung der Beziehung:

$$\lim_{t \to 0} \sup_x \frac{1}{t} \left| \int_0^t [\mathsf{E}\, a(X_s^x) - a(x)]\, ds \right| = 0 \tag{3.10}$$

und nach mehrfacher Anwendung der Schwarzschen Ungleichung ergibt sich:

$$\lim_{t \to 0} \sup_x \frac{1}{t} |\mathsf{E}\, g(X_t^x) - g(Y_t^x)| = 0. \tag{3.11}$$

Das folgt mit (3.9) aus:

$$|\mathsf{E}\, g(X_t^x) - g(Y_t^x)| \leqq \|g'\| \int_0^t |(P_s\, a)(x) - a(x)|\, ds$$
$$+ \|X_t^x - Y_t^x\|_2\, \|X_t^x - x\|_2\, \|g''\| + \|X_t^x - Y_t^x\|_2^2\, \|g''\|\, 2^{-1}.$$

Zur Berechnung des infinitesimalen Operators genügt es daher, Y_t^x an Stelle von X_t^x zu verwenden:

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\, g(Y_t^x) - g(x) = \mathsf{E} &\left\{ g\left(x + \int_0^t \int_R f(x,u)\, q(ds \times du)\right) - g(x) - g'(x) \int_0^t \int_R f(x,u)\, q(ds \times du) \right\} \\ &+ \mathsf{E} \left\{ \left(a(x)\, t + \int_0^t b(x)\, dw(s)\right) g'\left(x + \int_0^t \int_R (x,u)\, q(ds \times du)\right) \right\} \\ &+ \mathsf{E} \left\{ \frac{1}{2} \left(a(x)\, t + \int_0^t b(x)\, dw(s)\right)^2 g''\left(x + \int_0^t \int_R f(x,u)\, q(ds \times du)\right) \right. \\ &+ \theta_t(\omega) \left(a(x)\, t + \int_0^t b(x)\, dw(s)\right) = I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

mit $0 \leqq \theta_t(\omega) \leqq 1$.

I_2 läßt sich leicht behandeln:

$$\begin{aligned} I_2 = \mathsf{E} &\left\{ a(x)\, t + \int_0^t b(x)\, dw(s) \left[g'(x) + \int_0^t \int_R f(x,u)\, q(ds \times du)\, g'' \right.\right. \\ &\left.\left. \cdot \left(x + \hat{\theta}_t \int_0^t \int_R f(x,u)\, q(ds \times du)\right)\right]\right\}, \end{aligned}$$

$0 \leqq \hat{\theta}_t(\omega) \leqq 1$, also $I_2 = a(x)\, t + o_2(t)$; dabei gilt die Beziehung $o_2(t)$ gleichmäßig in x. Analog $I_3 = \frac{b^2(x)}{2} t + o_3(t)$; $o_3(t)$ gilt ebenfalls gleichmäßig in x.

Beide Beziehungen folgen aus bekannten Martingalungleichungen [4] und der gleichmäßigen Stetigkeit und Beschränktheit der Koeffizienten.

Um I_1 auszuwerten, geht man auf die Definition des Maßes q zurück. Das liefert:

$$I_1 = \mathsf{E} \left\{ g\left(x + \sum_{j=1}^k f_j(x)\, p([0,t[\times B_j)\right) - \sum_{j=1}^k f_j(x)\, t \int_{B_j} \frac{du}{u^2} \right\} - g(x). \tag{3.12}$$

Eine Taylorentwicklung gibt:

$$\begin{aligned} I_1 = \mathsf{E} &\left\{ g\left(x + \sum_{j=1}^k f_j(x)\, p([0,t[\times B_j)\right) \right. \\ &- t \sum_{j=1}^k f_j(x) \int_{B_j} \frac{du}{u^2}\, g'\left(x + \sum_{j=1}^k f_j(x)\, p([0,t[\times B_j)\right) \\ &\left. + \frac{t^2}{2} \sum_{j=1}^k f_j(x) \int_{B_j} \frac{du}{u^2}\, g''\left(x + \bar{\theta}_t(\omega) \sum_{j=1}^k f_j(x)\, p([0,t[\times B_j)\right)\right. . \end{aligned} \tag{3.13}$$

Wegen $f_j \in \mathscr{C}$, $j = 1, \ldots, n$, und $g'' \in \mathscr{C}$ gilt für den letzten Term in (3.13) die Beziehung $o(t)$ gleichmäßig in x.

Beachtet man schließlich, daß die Variablen $p([0,t[\times B_j)$, $j = 1, \ldots, k$ unabhängig sind und eine Poissonverteilung mit dem Parameter $t \int_{B_j} u^{-2}\, du$ besitzen, ergibt sich die Behauptung.

§ 4. Eine Klasse von Differenzenoperatoren

Im vorigen Paragraphen hatte der Differenzenoperator im infinitesimalen Operator eine sehr spezielle Gestalt. Um eine allgemeinere Form zu erhalten, führen wir folgenden linearen Raum ein. Sei

$\mathcal{M}=\{f\colon f\colon R\times R\to R;\ u^{-2}f(x,u)\in L_2(du);\ f(\cdot,u)\,u^{-2}$ *ist gleichmäßig stetig im quadratischen Mittel; die Menge* $\{f(x,u)\,u^{-2};\ x\in R\}$ *ist relativ kompakt in* $L_2(du)\}$.

Definiert man auf $\mathcal{M}$ durch

$$\|f\|_{\mathcal{M}}=\sup_x\left|\int_R\frac{f^2(x,u)}{u^2}\,du\right|^{\frac{1}{2}} \tag{4.1}$$

eine Norm $\|\ \|_{\mathcal{M}}$, so ist $\mathcal{M}$ ein Banachscher Raum.

Lemma 4.1. *Die Treppenfunktionen der Gestalt* $\sum_{j=1}^{k} f_j(x)\,c_{B_j}(u)$ *mit* $f_j\in\mathscr{C}$ *und* $\int_{B_j} u^{-2}\,du<\infty$ *für* $j=1,\dots,k$, *liegen dicht in* $\mathcal{M}$ *bezüglich der Norm* $\|\ \|_{\mathcal{M}}$.

Benötigt wird noch

Korollar 4. *Für* $f\in\mathcal{M}$ *gilt gleichmäßig in* x:

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{|u|\leqq\delta} f^2(x,u)\,u^{-2}\,du=0.$$

Die Einführung des Raumes $\mathcal{M}$ rechtfertigt

Lemma 4.2. *Sei* $g\in\mathscr{C}_2$, $f\in\mathcal{M}$; *dann ist die durch*

$$x\to\int\frac{g\big(x+f(x,u)\big)-g(x)-f(x,u)\,g'(x)}{u^2}\,du$$

erklärte Funktion in $\mathscr{C}$ *gelegen.*

Beweis. Die Existenz des Integrals folgt aus der Abschätzung:

$$\left|\frac{g\big(x+f(x,u)\big)-g(x)-f(x,u)\,g'(x)}{u^2}\right|\leqq\frac{f^2(x,u)}{u^2}\,\|g''\|.$$

Ferner ist die Behauptung des Lemmas für Treppenfunktionen trivial. Nach Lemma 4.1 existiert eine f approximierende Folge $(f_n)_{n\geqq 1}$ von Treppenfunktionen. Nun gilt:

$$\left|\int\frac{g\big(x+f(x,u)\big)-g(x)-f(x,u)\,g'(x)}{u^2}\,du-\int\frac{g\big(x+f_n(x,u)\big)-g(x)-f_n(x,u)\,g'(x)}{u^2}\,du\right|$$
$$\leqq\int_R|f_n(x,u)|[f(x,u)-f_n(x,u)]\,\frac{du}{u^2}\,\|g'\|+\frac{\|g''\|}{2}\int_R\frac{(f(x,u)-f_n(x,u))^2}{u^2}\,du,$$

woraus mittels der Schwarzschen Ungleichung die Behauptung folgt.

§ 5. Die Existenz einer Halbgruppe im allgemeinen strikt elliptischen Fall

Es wurden mittels stochastischer Integration bereits Halbgruppen konstruiert. Die Koeffizienten des infinitesimalen Operators genügten dabei einer Lipschitz-bedingung. Wie in der Einleitung angekündigt, benötigt man jedoch nur die Stetigkeit. Die Konstruktion beruht zum Teil auf

Lemma 5.1. *Seien E ein Banachscher Raum und $T_i: E \to E$ $i=1,2$ zwei dicht definierte lineare Operatoren, deren Graphen abgeschlossen sind. Außerdem sei* Graph $T_1 \subset$ Graph T_2 *und T_2 besitze ein stetiges Inverses. Dann ist* Graph $T_1 =$ Graph T_2.

Beweis. T_1', T_2' seien die adjungierten Abbildungen.

Aus dem Polarentheorem folgt:

$$\text{Graph } T_1' \supset \text{Graph } T_2'. \tag{5.1}$$

Ein Korollar des „closed-range“ Theorems [5] besagt: $\mathsf{R}(T_2') = E'$ (R = range). Wegen (5.1) gilt dann auch: $\mathsf{R}(T_1') = E'$. Daraus folgt aufgrund desselben Korollars: T_1 hat ein stetiges Inverses. Also Graph $T_1 =$ Graph T_2.

Sei $f \in \mathscr{M}$, $a, b \in \mathscr{C}$. Für $g \in \mathscr{C}_2$ definiert

$$(A\,g)(x) = a(x)\,g'(x) + \frac{b^2(x)}{2}\,g''(x) + \int_R \frac{g(x+f(x,u)) - g(x) - f(x,u)\,g'(x)}{u^2}\,du \tag{5.2}$$

nach Lemma 4.2 wieder eine Funktion aus $\mathscr{C}$.

A ist also ein dicht in $\mathscr{C}$ definierter linearer Operator mit Werten in $\mathscr{C}$.

Definition. A heißt strikt elliptisch, wenn $\inf\limits_{x \in R} b^2(x) > 0$.

Theorem 5.1. *Sei A wie in* (5.2) *und strikt elliptisch. Dann ist der* Graph $\{(g, A\,g)\colon g \in \mathscr{C}_2\}$ *abgeschlossen in $\mathscr{C} \times \mathscr{C}$.*

Beweis. Bekanntlich genügt es bei linearen Operatoren zu zeigen, daß $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = 0$, $g_n \in \mathscr{D}(A)$, $n = 1, 2, \ldots$, und $\lim\limits_{n\to\infty} A\,g_n = y$ die Gleichung $y = 0$ nach sich zieht. Der Beweis wird indirekt geführt. Nach üblichen Bezeichnungsänderungen existiere also eine Folge $g_n \in \mathscr{C}_2$ mit $\|g_n'\| \geqq 1$. Zu jedem natürlichen n gibt es ein $x_n \in R$ mit

$$\big|\|g_n'\| - |g_n'(x_n)|\big| < 2^{-n}. \tag{5.3}$$

Für $h = -\operatorname{sgn} g_n'(x_n)\sqrt{\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ und alle hinreichend großen n liefert die Taylor-entwicklung:

$$\left| -\frac{2\,|g_n'(x_n)|}{\sqrt{\varepsilon}} + g_n''(x_n \mp \delta\sqrt{\varepsilon}) \right| < 2, \qquad 0 \leqq \delta \leqq 1.$$

Hieraus und aus der Wahl der Folge x_n erhält man

$$\|g_n''\| \geqq \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\,\{\|g_n'\| - 2^{-n}\} - 2 \qquad \textit{für fast alle } n. \tag{5.4}$$

Speziell zu $\varepsilon = k^{-1}$ läßt sich also eine Teilfolge $(g_{n_k})_{k\geqq 1}$ konstruieren mit:

(5.5) a) $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = \infty$,

b) $\|g''_{n_k}\| \geqq 2k^{\frac{1}{2}}(\|g'_{n_k}\| - 2^{-n_k}) - 2$.

Es gibt eine Folge $h_k \in R$, $k = 1, 2, \ldots$, so daß gilt:

$$\big|\|g''_{n_k}\| - |g''(y_k)|\big| < 2^{-k}.$$

Mit Korollar 4 folgt unter Benutzung der strikten Elliptizität: $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} |A\, g_{n_k}(y_k)| = +\infty$, was der Konvergenz der Folge $(A\, g_n)_{n\geqq 1}$ widerspricht. Es resultiert $\lim\limits_{n\to\infty} g'_n = 0$. $(\|g''_n\|)_{n\geqq 1}$ ist dann beschränkt. Unter nochmaliger Ausnutzung der strikten Elliptizität ergibt sich:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot A\, g_n}{b^2} = \lim_{n\to\infty} g''_n.$$

Da $(g'_n)_{n\geqq 1}$ eine Nullfolge ist, gilt wegen der Konvergenz der Folge g''_n das gleiche für $(g''_n)_{n\geqq 1}$. $(A\, g_n)_{n\geqq 1}$ ist also selbst eine Nullfolge.

Theorem 5.2. *Sei A_n eine Folge von Operatoren der Form* (5.2). *a_n, b_n seien konvergente Folgen. Ebenso konvergiere f_n in $\mathscr{M}$. Überdies gebe es positive Zahlen A, B, β_0, F, K mit:*

(5.6) a) $\|a_n\| \leqq A$, $\quad \|b_n\| \leqq B$, $\quad \|f_n\|_{\mathscr{M}} \leqq F$

und $\inf\limits_x b_n^2(x) \geqq \beta_0 > 0$ *für alle* $n = 1, 2, \ldots$.

b) *Für jede Folge $(g_n)_{n\geqq 1} \in \mathscr{C}_2$, deren Elemente in der Einheitskugel liegen, werde überdies $\sup\limits_n \|A_n\, g_n\| \leqq K$ vorausgesetzt.*

Es folgt dann:

$$\sup_n \|g'_n\| < \infty, \tag{5.7}$$

$$\sup_n \|g''_n\| < \infty. \tag{5.8}$$

Beweis. Der Beweis erfolgt indirekt. Der Fall, daß lediglich $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|g''_n\| = +\infty$ ist, läßt sich leicht widerlegen. Sei also $(g_{n_k})_{k\geqq 1}$ eine Teilfolge von $(g_n)_{n\geqq 1}$ mit:

$$\|g'_{n_k}\| \leqq \|g'_{n_{k+1}}\| \qquad \textit{für } k = 1, 2, \ldots, \tag{5.9}$$

$$\|g'_{n_k}\| \geqq 2^k \qquad \textit{für } k = 1, 2, \ldots. \tag{5.10}$$

Dann gibt es eine reelle Punktfolge $(x_k)_{k\geqq 1}$ mit:

$$|g'_{n_k}(x_k)| \geqq 2^k - 2^{-k}. \tag{5.11}$$

Mit $h_k = \dfrac{-\operatorname{sgn} g'(x_k)}{k}$ liefert die Taylorentwicklung:

(5.12) $\quad |g_{n_k}(x_k + h_k) - g_{n_k}(x_k)| = |h_k\, g'_{n_k}(x_k) + 2^{-1} h_k^2\, g''_{n_k}(x_k + \delta_k\, h_k)| \leqq 2$

mit $0 \leqq \delta_k \leqq 1$. Somit gilt:

(5.13) a) $\|g''_{n_k}\| \geqq 2k\, 2^k - 4k^2$,

b) $\|g''_{n_k}\| \geqq 2k(\|g'_{n_k}\| - 2^{-k}) - 4k^2$,

c) $\dfrac{\|g''_{n_k}\|}{\|g'_{n_k}\|} \geqq \dfrac{3}{2} k - 1; \qquad k \geqq 10.$

Die strikte Elliptizität zusammen mit (5.6) a) und den Bedingungen (5.13) liefert dann: $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A\, g_{n_k} = +\infty$ was (5.6) b) widerspricht.

Mit Hilfe dieser beiden Theoreme können nun zu einer großen Klasse von infinitesimalen Operatoren Halbgruppen konstruiert werden. Dazu wird noch folgender Satz aus [5] (Trotter-Kato-Theorem) benötigt.

Theorem 5.3. *Sei E ein Banachscher Raum, und $T_t^{(n)}$ $T_t^n: E \to E$, $n = 1, 2, \ldots$, eine Folge von Kontraktionshalbgruppen mit den infinitesimalen Operatoren A_n und Resolventen $R(\cdot, A_n)$. Es existiere ein $\lambda_0 > 0$ mit:*

(5.14) a) $\lim\limits_{n\to\infty} R(\lambda_0, A_n)\, x = I(\lambda_0)\, x$ *existiert für* $x \in E$.

b) *Das Bild* $\mathrm{R}(I(\lambda_0))$ *ist dicht in E. Dann ist $I(\lambda_0)$ die Resolvente eines infinitesimalen Operators A einer Kontraktionshalbgruppe T_t. Überdies gilt für $x \in E$ $\lim\limits_{n\to\infty} T_t^n x = T_t x$ gleichmäßig in jedem kompakten Intervall.*

Theorem 5.4. *Sei $a, b \in \mathscr{C}$, $f \in \mathscr{M}$;*

(5.15)
$$\begin{aligned}(A\,g)(x) &= a(x)\frac{dg}{dx}(x) + \frac{b^2(x)}{2}\frac{d^2 g}{dx^2}(x)\\ &\quad + \int_R \frac{g\big(x+f(x,u)\big) - g(x) - g'(x)\, f(x,u)}{u^2}\, du\end{aligned}$$

$g \in \mathscr{C}_2$, A sei strikt elliptisch. Dann existiert eine Markoffsche Halbgruppe $P_t: \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ mit infinitesimalen Operator A, dessen Definitionsbereich $\mathscr{D}(A)$ mit $\mathscr{C}_2$ identisch ist.

Beweis. Es kann b positiv vorausgesetzt werden. Durch Regularisierung läßt sich eine Folge von Funktionen $a_n, b_n \in \mathscr{C}$, $f_n \in \mathscr{M}$, f_n „Treppenfunktion", $n = 1, 2, \ldots$ finden mit:

(5.16) $$\lim_{n\to\infty} (\|a_n - a\| + \|b_n - b\| + \|f_n - f\|_{\mathscr{M}}) = 0,$$

(5.17) a) $$|a_n(x_1) - a_n(x_2)|^2 + |b_n(x_1) - b_n(x_2)|^2 + \int \frac{f_n(x_1, u) - f_n(x_2, u))^2}{u^2}\, du \leqq L_n^2 (x_1 - x_2)^2,$$

b) $\inf\limits_x b_n \geqq \inf\limits_x b > 0$ für alle n.

Nach Theorem 3.1 existiert zu jedem infinitesimalen Operator A_n (zu (a_n, b_n, f_n) gebildet) eine Markoffsche Halbgruppe $P_t^n: \mathscr{C} \to \mathscr{C}$. Theorem 5.1 und Lemma 5.1 zeigen: $\mathscr{D}(A_n) = \mathscr{C}_2$, also ist A_n genau der infinitesimale Operator von P_t^n. Für $g \in \mathscr{C}_2$ $\lambda_0 > 0$ hat man:

(5.18) $$R(\lambda_0, A_n)\{(\lambda_0 - A)\, g + (A - A_n)\, g\} = g.$$

Aus (5.16) a) folgt: $\lim_{n\to\infty} R(\lambda_0, A_n)(A_n - A)\, g = 0$. Somit:

$$\lim_{n\to\infty} R(\lambda_0, A_n)(\lambda_0 - A)\, g = g, \quad g\in\mathscr{C}_2. \tag{5.19}$$

Also ist bereits (5.14) b) erfüllt. Um (5.14) a) zu zeigen, beachte man, daß für jedes $h\in\mathscr{C}$ und für $n=1,2,\ldots$ eine Lösung $g_n\in\mathscr{C}_2$ der Gleichung

$$(\lambda_0 - A_n)\, g_n = h \tag{5.20}$$

existiert. Bekanntlich gilt: $R(\lambda_0, A_n)\, h = g_n$, also $\lambda_0^{-1}\|h\| \geqq g_n$. Daraus folgt:

$$\|A_n g_n\| \leqq 2\,\|h\|. \tag{5.21}$$

Mittels Theorem 5.2 erhält man sofort:

$$\lim_{n\to\infty} (A - A_n)\, g_n = 0. \tag{5.22}$$

Demnach ist die Menge $(\lambda_0 - A)\, g$, $g\in\mathscr{C}_2$ dicht in $\mathscr{C}$. Also ist auch (5.14) a) erfüllt und der Satz bewiesen.

Korollar 5.1. *Sei A ein infinitesimaler Operator wie in Theorem 5.4. Dann ist die Funktion $x\to E\, g(X_t^x) = \int P_t(x, dy)\, g(y) = (P_t g)(x)$ in $\mathscr{C}_2$, wenn $g\in\mathscr{C}_2$.*

Beweis. $P_t g\in\mathscr{D}(A)$.

§ 6. Darstellung von Markoffschen Prozessen als Lösung stochastischer Integralgleichungen

Die Existenz einer Zerlegung vom Typ der Integralgleichung (2.3) wird durch die Arbeit [2] nahegelegt. Dort werden quadratisch integrierbare Martingale betrachtet, die additive Funktionale Markoffscher Prozesse sind. Wir können nun zeigen, daß die zu den in § 5 konstruierten Halbgruppen gehörigen Prozesse die eingangs betrachtete Integralgleichung lösen; genauer läßt sich eine solche Lösung über dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega', \mathscr{F}', P')$ konstruieren, wo hier wie im folgenden $\Omega' = [0, 1]$, $\mathscr{F}'$ der σ-Ring der Borelschen Mengen aus $[0, 1]$ und P' das darauf definierte Lebesgue-Maß ist. Eine eindeutige Lösung ist natürlich nicht zu erwarten, da dies bereits bei gewöhnlichen Differentialgleichungen nicht immer der Fall ist. Damit der Sprunganteil bequemer behandelt werden kann, soll der letzte Term in 2.2 noch auf andere Weise geschrieben werden. Sei $f\in\mathscr{M}$, φ_n, $n=1,2,\ldots$ ein Orthonormalsystem des Raumes $L_2(du)$ für $|u|\leqq 1$ und (ψ_n), $n=1,2,\ldots$ ein solches für $L_2(u^{-2}\, du)$, $|u|\geqq 1$. Dann gilt: $u^{-1} f|_{|u|\leqq 1}\in L_2(du)$, und $f|_{|u|\geqq 1}\in L_2(u^{-2}\, du)$. Für $n\geqq 1$ definieren wir:

(6.1) a) $\hat{\varphi}_n(t) = \int\limits_{|u|\leqq 1} \int\limits_0^t u\, \varphi_n(u)\, q(ds\times du)$,

b) $\hat{\psi}_n(t) = \int\limits_{|u|>1} \int\limits_0^t \psi_n(u)\, q(ds\times du)$,

c) $\tilde{\varphi}_n(t) = \hat{\varphi}_n(t)\, n^{-1}$,

d) $\tilde{\psi}_n(t) = \hat{\psi}_n(t)\, n^{-1}$.

Man zeigt die Identität:

$$(6.2)\qquad \int_0^t \int_R f(x,u)\, q(ds\times du) = \sum_n \int_0^t c_n(x_s)\, d\hat{\varphi}_n(ds) + \sum_n \int_0^t d_n(x_s)\, d\hat{\psi}_n(ds).$$

$c_n(\cdot), d_n(\cdot)$ sind die Entwicklungskoeffizienten von $f(\cdot,\cdot)$ bezüglich der Orthonormalsysteme der Räume $L_2(du, |u|\leqq 1)$ bzw. $L_2(u^{-2}\, du, |u|>1)$. Erinnert sei an das Kriterium von Prochorov für die Kompaktheit einer Menge von Maßen [3].

Theorem 6.1. *Eine Folge von Maßen μ_n auf einem polnischen Raum $\mathcal{R}$ ist relativkompakt, wenn:*

1. $\sup_n \mu_n(\mathcal{R}) < \infty$,
2. *zu $\varepsilon>0$ existiert ein Kompaktum $\mathcal{K}_\varepsilon \subset \mathcal{R}$ mit $\mu_n(\mathcal{R}-\mathcal{K}_\varepsilon)<\varepsilon$, $n=1,2,\ldots$.*

Außerdem benötigen wir aus [4, 14]

Lemma 6.1. *Gegeben sei eine schwach konvergente Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen $(\mu_n)_{n\geqq 1}$ auf einem polnischen Raum $\mathcal{R}$. μ_0 heiße das Grenzelement. Dann lassen sich zufällige Variable ξ_n mit der Verteilung μ_n über $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ konstruieren, so daß die Folge $(\xi_n)_{n\geqq 1}$ stochastisch gegen eine Variable ξ_0 mit der Verteilung μ_0 konvergiert.*

Wir benutzen die Bezeichnungen des § 5. Seien $(a_n), (b_n), (f_n)_{n\geqq 1}$ Folgen, die a, b, f approximieren und den Voraussetzungen des Theorems 5.4 genügen. Zu a_n, b_n, f_n existieren dann insbesondere Lösungen der Integralgleichung (2.2). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei der Zeitparameter t auf das Intervall $[0,1]$ beschränkt. $(t_i)_{i\geqq 1}$ $\{(X_n^x(t_i), w(t_i), \tilde{\varphi}_1(t_i), \tilde{\psi}_1(t_i), \tilde{\varphi}_2(t_i), \tilde{\psi}_2(t_i), \ldots), i=1,2,\ldots\}$ ein Punkt eines geeigneten polnischen Raumes $\mathcal{R}$. $(X_n^x(\cdot)$ sei eine Lösung von (2.2) mit den Koeffizienten $a_n, b_n, f_n)$. Zu jedem $n=1,2,\ldots$ gehört eine Verteilung μ_n auf $\mathcal{R}$. Wir zeigen, daß die Folge (μ_n) die Kriterien (1, 2) in Theorem (6.1) erfüllt. Zunächst haben wir die Inklusion

$$(6.3)\qquad \{\omega\colon |X_n^x(t)|>2C\} \subset \left\{\omega\colon \left|X_n^x - \int_0^t a(X_n^x(s))\, ds - x\right| > C\right\}$$

für $0\leqq t\leqq 1$ und hinreichend große C. Nun ist die $2(N+1)$-dimensionale zufällige Variable

$$(6.4)\qquad Z_{n,N}^x(t) = \left\{X_n^x(t) - \int_0^t a_n(X_n^x(s))\, ds - x,\ w(t),\ \tilde{\varphi}_1(t)\ldots\tilde{\varphi}_N(t),\ \tilde{\psi}_1(t)\ldots\tilde{\psi}_N(t)\right\}$$

ein Martingal. Für quadratisch integrierbare Martingale $Z(t)$ mit Werten in einem endlich-dimensionalen euklidischen Raum gilt:

$$(6.5)\qquad \mathsf{E} \sup_{0\leqq t\leqq 1} |Z(t)|^2 \leqq 4\, \mathsf{E}(Z(1))^2.$$

Wendet man das auf (6.4) an, gibt das

$$\mathsf{E} \sup_{0\leqq t\leqq 1} |Z_{n,N}^x(t)|^2 \leqq 4(B^2+F^2+5)$$

gleichmäßig in n, N. Daraus folgt, Bedingung 2 ist erfüllt. (1. ist trivialerweise richtig.) Lemma 6.1 läßt sich nach Auswahl einer konvergenten Teilfolge anwenden. Mittels ähnlicher Betrachtungen wie in [4] zeigt sich, daß die entsprechenden Integrale stochastisch konvergieren. Somit existiert also eine Lösung

$$\tilde{X}^x(t) = x + \int_0^t a(\tilde{X}^x(s))\, ds + \int_0^t b(\tilde{X}^x(s))\, d\tilde{w}(s)$$

$$+ \sum_n \int_0^t c_n(\tilde{X}^x(s))\, d\tilde{\tilde{\varphi}}_n(s) + \sum_n \int_0^t d_n(\tilde{X}^x(s))\, d\tilde{\tilde{\psi}}_n(s).$$

Aufgrund der Halbgruppenkonstruktion hat $X^x(t)$ eine Verteilung $P_t(x, dy)$, die schwacher Limes der Verteilung $P_t^n(x, dy)$ zu $X_n^x(t)$ ist. Also gilt

Theorem 6.2. *Zum strikt elliptischen Operator A mit den Eigenschaften des Theorems* 5.4 *läßt sich ein Markoffscher Prozeß finden, der Lösung einer stochastischen Integralgleichung ist und dessen Verteilung durch die zu A konstruierte Halbgruppe festgelegt ist.*

Bemerkungen. 1. Viele der vorliegenden Überlegungen bleiben auch für n-dimensionale Prozesse richtig.

2. Setzt man voraus, daß für einen Operator A vom oben betrachteten Typ eine Halbgruppe existiert und für ein $\lambda_0 > 0$ $\{(\lambda_0 - A)\, g : g \in \mathscr{C}_2\}$ dicht in $\mathscr{C}$ liegt, so läßt sich die Aussage des Theorems 6.2 auch ohne die Elliptizität von A gewinnen.

3. Das Korollar 5.1 gestattet es, einige Voraussetzungen über die Lösbarkeit einer Differentialgleichung fortzulassen, die Borovkov in einer noch unveröffentlichten Arbeit über die Konvergenz stochastischer Prozesse gegen Diffusionsprozesse verwendet.

Literatur

1. Meyer, P. A.: Intégrales Stochastiques. Strasbourg: Séminaire de Probabilité 1966/67.
2. Motoo, M., Watanabe, S.: On a class of additive functionals of Markov processes. J. Math. Kyoto Univ. 4-3, 429–469 (1965).
3. Prochorov, J.: Konvergenz von stochastischen Prozessen und Grenzverteilungssätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Teor. Verojatn. Primen **1**, 177–238 (1956) [Russisch].
4. Skorochod, A. V.: Studies in the theory of random processes. Kiew 1961 [Russisch]. Reading, Mass.: Addison-Wesley 1964.
5. Yosida, K.: Functional analysis. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 123. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1965.

Dr. B. Eifrig
Institut für Angewandte Mathematik
der Universität
69 Heidelberg
Tiergartenstraße, Neubau Standardgebäude

(Eingegangen am 1. 11. 1968)