Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
37, 227–242 (1977)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Das 0–1-Gesetz der terminalen σ-Algebra bei Harrisirrfahrten

Uwe Rösler
Institut für Mathematische Statistik und Wirtschaftsmathematik der Universität Göttingen
Lotzestr. 13, D-3400 Göttingen, Bundesrepublik Deutschland

Für homogene M.K., bestehend aus einer aperiodischen rekurrenten Klasse, ist bekannt, daß die terminale σ-Algebra das 0–1-Gesetz erfüllt. Der erste Teil dieser Arbeit behandelt die Gültigkeit des 0–1-Gesetzes für transiente Ketten, für die eine Folge $k_0, k_1, k_2, k_3, \ldots$ von Zuständen existiert mit $P(\exists n\, X_n = k_{l+1} \mid X_0 = k_l) = 1$, $\forall l \in N$. Das herzuleitende Kriterium wird nur von dieser Folge und den Stoppzeiten, von k_l nach k_{l+1} zu gelangen, abhängen. Eine Anwendung auf Harrisirrfahrten wird uns dort konkrete Aussagen liefern.

§1. Definition und Hilfsmittel

Gegeben sei eine homogene M.K. $(\Omega, \mathscr{F}, P_\pi)$, der Grundraum Ω von der Gestalt $\Omega = I^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}$ die natürlichen Zahlen, I der Zustandsraum, $\mathscr{F}$ eine σ-Algebra, $P = (p_{ij})$, $i, j \in I$ die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten, π die Anfangsverteilung. Mit X_n, $n \in \mathbb{N}$, werden die Koordinatenabbildungen $\Omega \ni (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots) \to X_n(\omega) = \omega_n \in I$ bezeichnet. $\mathscr{F}(X_n, X_{n+1}, \ldots, X_m)$ sei die von $X_n, \ldots, X_m$ aufgespannte σ-Algebra, $\mathscr{F}(X_n, X_{n+1}, \ldots) = \mathscr{F}^n$ die von $X_n, X_{n+1} \ldots$ aufgespannte. Die terminale σ-Algebra $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}^n$ werde mit $\mathscr{F}^\infty$ bezeichnet. Der Einfachheit halber bestehe die Kette aus einer Klasse und die Anfangsverteilung π sei für festes i von der Form $\pi(j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$, d.h. π ist ein Punktmaß mit Masse auf i.[1]

$\mathscr{F}^\infty$ sei i-trivial, falls für alle $A \in \mathscr{F}^\infty$ $P_i(A) = P(A \mid X_0 = i) = 0$ oder 1 gilt. Läßt sich $\mathscr{F}^\infty$ i-trivial für jedes i zeigen, so gilt das 0–1-Gesetz für jede Anfangsverteilung π.[2] Wir sprechen dann von $\mathscr{F}^\infty$-Trivialität.

[1] Für allgemeine Wahrscheinlichkeitsmaße π siehe [7], §1
[2] Siehe [7]

Eine Harrisirrfahrt ist eine spezielle Markovkette mit $I=\mathbb{Z}$ und den Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{ij}=0 \quad \text{für } j \neq i-1, i, i+1,$$

$$p_i, p_{i-1}=q_i,$$

$$p_{i,i}=r_i,$$

$$p_{i,i+1}=p_i, q_i+r_i+p_i=1, \qquad \forall i\in I.$$

Für rekurrente Zustände ist folgender Satz bekannt:

(1.1) **Satz.** *Sei I eine rekurrente, aperiodische Klasse, so erfüllt die terminale σ-Algebra das* $0-1$*-Gesetz.*

Beweis. Siehe hierzu z.B. Freedman [3].

Ein Beweis dazu sei hier nur skizziert.

Anstatt Ω betrachtet man $\Omega'=\{\omega\in\Omega \mid \omega_n=i$ unendlich oft$\}$. Jedes ω wird in Blöcke zerlegt, und zwar beginnt jeder Block mit i und endet vor dem nächsten i.

$$\omega=(\underbrace{i,\omega_1,\omega_2,\omega_3\ldots\omega_n,}_{\beta_1}\underbrace{i,}_{\beta_2}\underbrace{i,\omega_{n+3},\ldots}_{\beta_3})$$

$\beta_k(\omega)$ bedeute den k-ten Block und B sei die abzählbare Menge der Blöcke. Dann ist die Abbildung $\beta=(\beta_1,\beta_2,\ldots)$: $\Omega'\to B^N$ bijektiv und meßbar, β^{-1} ist meßbar, und $P_i\beta^{-1}$ ist das Produktmaß auf dem Produktraum B^N. Eine symmetrische Menge $A\cap\Omega'$ ergibt auch in B^N eine symmetrische Menge $\beta(A\cap\Omega')$. Nach dem Hewitt-Savage $0-1$-Gesetz folgt $P_i\beta^{-1}(\beta(A\cap\Omega'))=P_i(A)=0$ bzw. 1.

Für rekurrente aperiodische M.K. findet man den folgenden Satz 2.1 in der Originalarbeit Orey [4], oder in [1], [3] unter „a theorem of Orey". Die Verallgemeinerung geschieht ohne große Schwierigkeiten.

(1.2) **Satz.** *Sei* X_0, X_1, $X_2,\ldots$ *eine Markovkette. Folgende Aussagen sind äquivalent.*

i) $\mathscr{F}^\infty$ i-trivial
ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(P_i(B\mid\mathscr{F}^n)-P_i(B))=0 \qquad \forall B\in\mathscr{F}$,
iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{A\in\mathscr{F}^n}|P_i(A\cap B)-P_i(A)\cdot P_i(B)|=0 \qquad \forall B\in\mathscr{F}$,
iv) $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{A\in\mathscr{F}^n}|P_i(A\cap B)-P_i(A)\cdot P_i\ (B)|=0$

für B aus dem Erzeugendensystem $\{B_j^m=\{X_m=j\},\ m\in N,\ j\in I\}$ von $\mathscr{F}$,

v) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j\in I}p_{i,j_0}^m\,|p_{j_0,j}^{n-m}-p_{i,j}^n|=0, \qquad \forall m\in N, \qquad \forall j_0\in I.$

Beweis. (i) ⇔ (ii) ⇔ (iii) ist für allgemeine Prozesse bekannt.[3]

Für (iii) ⇔ (iv) benötigt man die Markoveigenschaft.

Ebenfalls wegen der ME reicht es $A\in\mathscr{F}(X_n)$ zu wählen. Mit $B=B_{j_0}^m$ und $A=\{\omega \mid X_n(\omega)=j, p_{j_0,j}^{n-m}\cdot p_{i,j}^n>0\}$ folgt (iv)⇔(v).

[3] [2], S. 95, Problem 6. [5], S. 18, Theorem 4.1

§ 2. Entwicklung eines Kriteriums für transiente M.K.

In der Beweisskizze hatten wir die unabh. id. verteilten Stoppzeiten von i nach i eingeführt. Für transiente Ketten nehmen wir an, es gibt eine Folge von Zuständen $i, k_1, k_2, \ldots$, mit der Bedingung B

(B) $\quad P_{k_l}(\exists n>0\, X_n=k_{l+1})=1 \qquad \forall l\in\mathbb{N}$.

Der folgende Satz besagt, es genügt, sich nur auf diese Zustände zu beschränken.

Wähle als Abkürzung $A(i,k)=\{m \mid p_{ik}^m>0\}$ und $H(i,k)$ das von $A(i,k)-A(i,k)$ $=\{m=m_1-m_2 \mid m_1, m_2\in A(i,k)\}$ bzgl. $\mathbb{Z}$ erzeugte Hauptideal.

(2.1) **Satz.** *$\mathscr{F}^\infty$ i-trivial ist äquivalent zu*

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{j\in I} |p_{kj}^{n-m'}-p_{kj}^n|=0$$

$$\forall k\in\{i,k_1,k_2,\ldots\}\ \forall m'\in H(i,k).$$

Beweis. „$\Leftarrow$" Man wende Kriterium v) aus Satz 1.2 an. Sei $j_0\in I$, $m\in A(i,j_0)$, $k\in\{i,k_1,k_2,\ldots\}$ mit $P_{j_0}(\exists n X_n=k)=1$, so gilt

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} \sum_{j\in I} |p_{j_0,j}^{n-m}-p_{i,j}^n|\\
&\quad=\limsup_{n\to\infty} \sum_{j\in I} \Bigg| \sum_{l=0}^{\infty} f_{i,k}^l\, p_{j_0,j}^{n-m}-\sum_{l=0}^{n} f_{i,k}^l\, p_{k,j}^{n-l}\\
&\qquad\quad -P(X_n=j \wedge \nexists 0\leqq l\leqq n\colon X_l=k \mid i)\Bigg|,
\end{aligned}$$

dabei ist $f_{i,k}^l=P_i(X_l(\omega)=k \wedge X_j(\omega)\neq k\ \forall 0<j<l)$,

$$\begin{aligned}
&\leqq \limsup_{n\to\infty} \sum_{j\in I} \sum_{l=0}^{n} f_{i,k}^l\, |p_{j_0,j}^{n-m}-p_{k,j}^{n-l}|\\
&\quad+\limsup_{n\to\infty} \sum_{j\in I} \sum_{l=n+1}^{\infty} f_{i,k}^l\, |p_{j_0,j}^{n-m}|\\
&\quad+\limsup_{n\to\infty} \sum_{j\in I} P(X_n=j \wedge \nexists 0\leqq l\leqq n\ \ X_l=k \mid i).
\end{aligned}$$

Der zweite und dritte Limes sind 0; für den ersten wende man dominierte Konvergenz an, da $\sum_{0\leqq l\leqq n} f_{i,k}^l\leqq 1$ und der Betrag gleichmäßig durch 2 beschränkt ist. Damit gilt weiter

$$\begin{aligned}
&\leqq \sum_{l=0}^{\infty} f_{i,k}^l \limsup_{n\to\infty} \sum_{j\in I} \Bigg| \sum_{l'=0}^{n-m} f_{j_0,k}^{l'}\, p_{k,j}^{n-m-l'}\\
&\qquad +P(X_{n-m}=j \wedge \nexists 0\leqq l'\leqq n-m\ \ X_{l'}=k \mid j_0)-\sum_{l'=0}^{\infty} f_{j_0,k}^{l'}\, p_{k,j}^{n-l}\Bigg|\\
&\leqq \sum_{l=0}^{\infty} f_{i,k}^l \limsup_{n\to\infty} \sum_{j\in I} \sum_{l'=0}^{n-m} f_{j_0,k}^{l'}\, |p_{k,j}^{n-m-l'}-p_{k,j}^{n-l}|\\
&\quad+\limsup_{n\to\infty} \sum_{j\in I} P(X_{n-m}=j \wedge \nexists 0\leqq l'\leqq n-m\ \ X_{l'}=k \mid j_0)\\
&\quad+\limsup_{n\to\infty} \sum_{j\in I} \sum_{l'=n-m+1}^{\infty} f_{j_0,k}^{l'}\, p_{k,j}^{n-l}.
\end{aligned}$$

Der zweite und dritte Limes sind wiederum 0, für den ersten wende man dominierte Konvergenz an:

$$\leqq \sum_{l=0}^{\infty} f_{i,k}^{l} \sum_{l'=0}^{\infty} f_{j_0,k}^{l'} \limsup_{n\to\infty} \sum_{j\in I} |p_{k,j}^{n-m-l'} - p_{k,j}^{n-l}|$$
$$= \limsup_{n\to\infty} \sum_{j\in I} |p_{k,j}^{n-m'} - p_{k,j}^{n}| = 0.$$

Dabei ist $m' = m + l' - l$ beliebig aus $A = A(j_0, k) + A(i, j_0) - A(i, k)$.

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung folgt diese Behauptung für das von A erzeugte Ideal. Dies ist aber genau $H(i,k)$.

„$\Rightarrow$"

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{j\in I} |p_{kj}^{n-m} - p_{kj}^{n}| \quad m = m_1 - m_2, m_1, m_2 \in A(i,k)$$
$$\geqq \limsup_{n\to\infty} \sum_{j\in I} |p_{kj}^{n-m_1+m_2} - p_{ij}^{n+m_2}| + \limsup_{n\to\infty} \sum_{j\in I} |p_{ij}^{n+m_2} - p_{kj}^{n}|.$$

Aus Kriterium 1.2 folgt die Behauptung. q.e.d.

Wegen der Dreiecksungleichung reicht es im obigen Satz, m' das erzeugende Element d_{ik} von $H(i,k)$ zu wählen, bzw. wegen $H(i,k_j) \subset H(i,k_l)$ für $j<l$, $d = \min_{k\in\{i,k_1,\ldots\}} d_{ik} = \lim_{j\to\infty} d_{ik_j}$ zu wählen. Ist die Markovkette rekurrent oder i wesentlich, so ist d gerade die Periode von i.

Sei eine Folge $\{i = k_0, k_1, \ldots\}$ mit der Eigenschaft B gegeben.

$$\tau_i(\omega) = \begin{cases} \inf\{n \geqq 0\, X_n(\omega) = i\} \\ \infty \text{ falls inf unbestimmt.} \end{cases}$$ τ_{k_l} wird induktiv gegeben durch

$$\tau_{k_l} = \begin{cases} \inf\{n > \tau_{k_{l-1}}\, X_n(\omega) = k_l\} \\ \infty \text{ falls inf unbestimmt.} \end{cases}$$

Setze zur Abkürzung

$$\tau_{k_{l+1}} - \tau_{k_l} = Z_l, \qquad 1 = 1, 2, \ldots$$
$$S_m = \sum_{l=0}^{m-1} Z_l = \tau_{k_m} - \tau_i.$$

S_m^r sei die m-te Partialsumme für die Folge $\{k_r, \ldots\}$.

Aus Bedingung B ergibt sich $P_{k_r}(S_m^r < \infty) = 1 \quad \forall m \in \mathbb{N}$.

Die ZV. Z_l sind unabhängig nach Definition, aber nicht mehr notwendigerweise identisch verteilt.

Man beachte, daß obige Stoppzeiten τ_{k_l} nicht die Zeit angeben, zum ersten Mal k_l zu durchlaufen

$$v_{k_l} = \begin{cases} \inf\{m \geqq 0 \mid X_m(\omega) = k_l\} \\ \infty \text{ sonst.} \end{cases}$$

Nehmen wir an, es gelte

$$P_i(\tau_{k_l} \neq v_{k_l}) > 0$$

und l sei die kleinste Zahl, für die das gilt.

Dann durchläuft das Teilchen k_l, bevor es in einem Zustand $k_{s_0}(s_0 < l)$ gewesen ist. Da dies Teilchen f.s noch nach k_{s_0} gelangen muß, gilt

$$P_{k_l}(\exists\, n \geqq 0 \;\; X_n = k_{s_0}) = 1,$$

wegen Bedingung B aber auch

$$P_{k_{s_0}}(\exists\, n \geqq 0\, X_n = k_l) = 1,$$

d.h. der Zustand k_{s_0} ist rekurrent.

Sind alle Zustände transient, so gilt Bedingung C.

(C) $\quad P(\tau_{k_l} \neq v_{k_l}) = 0 \qquad$ für alle $l \in \mathbb{N}$.

(2.2) **Satz.** *Für $\mathscr{F}^\infty$ i-trivial ist hinreichend*

$$\limsup_{m \to \infty} \sum_{l=0}^{\infty} |P(S_m^r = l) - P(S_m^r = l - m')| = 0 \qquad \forall\, r \in \mathbb{N}$$

$$\forall\, m' \in \{n = n_1 - n_2 \,|\, \exists\, m \colon P(S_m^r = n_1) > 0, P(S_m^r = n_2) > 0\}.$$

Unter Bedingung C gilt auch Notwendigkeit.

Beweis. „$\Leftarrow$" Wähle das Kriterium aus dem vorhergehenden Satz. Sei speziell $k_r = k$

$$\limsup_{n \to \infty} \sum_{j \in I} |p_{k_r, j}^{n - m'} - p_{k_r, j}^n|$$

$$= \limsup_{n \to \infty} \sum_{j \in I} \Bigg| \sum_{l=0}^{n-m'} P(X_{n-m'} = j, S_m^r = l \,|\, k_r)$$

$$+ \sum_{l = n - m' + 1}^{\infty} P(X_{n-m'} = j \cap S_m^r = l \,|\, k_r)$$

$$- \sum_{l=0}^{n} P(X_n = j, S_m^r = l \,|\, k_r)$$

$$- \sum_{l = n+1}^{\infty} P(X_n = j, S_m^r = l \,|\, k_r) \Bigg|$$

$$\leqq \limsup_{n \to \infty} \sum_{j \in I} \Bigg| \sum_{l = m'}^{n} P(X_{n-m'} = j, S_m^r = l - m' \,|\, k_r)$$

$$- \sum_{l=0}^{n} P(X_n = j, S_m^r = l \,|\, k_r) \Bigg|$$

$$+ \limsup_{n \to \infty} \sum_{j \in I} P(X_{n-m'} = j, S_m^r > n - m' \,|\, k_r)$$

$$+ \limsup_{n \to \infty} \sum_{j \in I} P(X_n = j, S_m^r > n \,|\, k_r).$$

Sei diese Version der bedingten Wahrscheinlichkeiten auch für Nullmengen wohldefiniert.

$$\leqq \limsup_{n\to\infty} \sum_{j\in I} \sum_{l=0}^{n} \Big| P(X_{n-m'}=j \mid S_m^r = l-m')\, P(S_m^r = l-m' \mid k_r)$$

$$- P(X_n = j \mid S_m^r = l)\, P(S_m^r = l \mid k_r) \Big|$$

$$+ \limsup_{n\to\infty} P(S_m^r > n-m' \mid k_r) + \limsup_{n\to\infty} P(S_m^r > n \mid k_r)$$

$$\leqq \limsup_{n\to\infty} \sum_{j\in I} \sum_{l=0}^{n} P(X_n = j \mid S_m^r = l)\, |P(S_m^r = l-m' \mid k_r) - P(S_m^r = l \mid k_r)|$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \sum_{l=0}^{n} |P(S_m^r = l-m') - P(S_m^r = l)|$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} |P(S_m^r = l-m') - P(S_m^r = l)|\,.$$

Bilden wir den Grenzübergang $m\to\infty$, so folgt die Behauptung unter Beachtung von $H(i,k_j) \subset H(k_r,k_j) = \{m = m_1 - m_2 \mid P(S_{j-r}^r = m_1) > 0,\ P(S_{j-r}^r = m_2) > 0\}$ für $j > r$.

„$\Rightarrow$". Diese Richtung folgt mit der Ungleichung (1)

$$\sum_{k\in I} |p_{k_r,k}^{n_0-m'} - p_{k_r,k}^{n_0}|$$

$$\geqq \sum_{k\in I} |P(X_{n_0-m'+t} = k,\ S_{n_0}^r \geqq n_0 - m' + t \mid k_r)$$

$$- P(X_{n_0+t} = k,\ S_{n_0}^r \geqq n_0 + t \mid k_r)|$$

$$+ \sum_{n=n_0}^{n_0+t-1} |P(S_{n_0}^r = n-m' \mid k_r) - P(S_{n_0}^r = n \mid k_r)| \tag{1}$$

für alle $t\in N$; mit Limesbildung über t ergibt sich:

$$\geqq \sum_{n=n_0}^{\infty} |P(S_{n_0}^r = n-m' \mid k_r) - P(S_{n_0}^r = n \mid k_r)|$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} |P(S_{n_0}^r = n-m') - P(S_{n_0}^r = n)|\,.$$

Mit der Limesbildung auf beiden Seiten über n_0 ergibt sich die Behauptung.

Der Beweis der Ungleichung (1) geschieht durch Induktion nach t:

i) Für $t=0$, $m>0$ gilt:

$$\sum_{k\in I} |p_{k_r,k}^{n_0-m'} - p_{k_r,k}^{n_0}|$$

$$\geqq \sum_{k\in I} |P(X_{n_0-m'} = k \cap S_{n_0}^r \geqq n_0 - m' \mid k_r)$$

$$- P(X_{n_0} = k \cap S_{n_0}^r \geqq n_0 \mid k_r)|\,.$$

Dies ist aber erfüllt, wenn man beachtet, daß $S_{n_0}^r \geqq n_0$ nach Definition gilt.

ii) Für den Induktionsschluß multipliziert man in der Formel

$$\sum_{k\in I} |P(X_{n_0-m'+t}=k \cap S_{n_0}^r \geqq n_0-m'+t\,|\,k_r)$$
$$-P(X_{n_0+t}=k\cap S_{n_0}^r \geqq n_0+t\,|\,k_r)|$$

den Betrag jeweils mit $\sum_{k'\in I} p_{k,k'}=1$, vertauscht die Summationsreihenfolge und erhält mit der Dreiecksungleichung:

$$\geqq \sum_{k'\in I} |\sum_{\substack{k\in I\\ k\neq k_{n_0+r+1}}} p_{k,k'}(P(X_{n_0-m'+t}=k\cap S_{n_0}^r \geqq n_0-m'+t\,|\,k_r)$$
$$-P(X_{n_0+t}=k\cap S_{n_0}^r\geqq n_0+t\,|\,k_r)|$$
$$+\sum_{k'\in I} p_{k_{n_0+r+1},k'}\,|P(X_{n_0-m'+t}=k_{n_0+r+1}\cap S_{n_0}^r\geqq n_0-m'+t\,|\,k_r)$$
$$-P(X_{n_0+t}=k_{n_0+r+1}\cap S_{n_0}^r\geqq n_0+t\,|\,k_r)|\,.$$

Verwende nun Bedingung C

$$=\sum_{k'\in I} |P(X_{n_0-m'+t+1}=k', S_{n_0}^r\geqq n_0-m'+t+1\,|\,k_r)$$
$$-P(X_{n_0+t+1}=k', S_{n_0}^r\geqq n_0+t+1\,|\,k_r)|$$
$$+|P(S_{n_0+r}=n_0-m'+t\,|\,k_r)-P(S_{n_0}^r=n_0+t\,|\,k_r)|\,.$$

Im Weiteren benötigen wir den Hilfssatz 2.3.

(2.3) **Hilfssatz.** *Y_i, $i\in\mathbb{N}$, seien unabhängige Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{N}$,*

$$T_m=\sum_{i=1}^{m} Y_i, \qquad T_0=0.$$

$t_l^{l_0}\in\mathbb{R}$ sei definiert durch

$$2-t_l^{l_0}=\sum_{j\in\mathbb{N}} |P(Y_l=j)-P(Y_l=j-l_0)|, \qquad l, l_0\in\mathbb{N}.$$

Aus $\sum_{l=1}^{\infty} t_l^{l_0}=\infty$ folgt

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j\in N} |P(T_m=j)-P(T_m=j-l_0)|=0.$$

Beweis. Siehe hierzu Rösler [6].

(2.4) **Kriterium.** *Sei $k_0=i, k_1, k_2\ldots$ eine Folge mit $P_{k_r}(\exists\, m>0\;\, X_m=k_{n+1})=1$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, Z_l wie bisher.*

$$2-t_l^{m'}=\sum_{j\in\mathbb{N}} |P(Z_l=j)-P(Z_l=j-m')|, \qquad l\in\mathbb{N}.$$

$m'=$ größter gemeinsamer Teiler von $\{m\,|\,p_{i,k_l}^{m}>0,\, l\in\mathbb{N}\}$.

Aus $\sum_{l=0}^{\infty} t_l^{m'}=\infty$ folgt $\mathscr{F}^\infty$ i-trivial.

Beweis. Wende Satz 2.2 und Hilfssatz 2.3 an.

$$\infty=\sum_{l=0}^{\infty} t_l^{m'}=\sum_{l=r}^{\infty} t_l^{m'} \Rightarrow \lim_{m\to\infty} \sum_{j\in N} |P(S_m^r=j)-P(S_m^r=j-m')|=0$$

für alle $r\in\mathbb{N}$. q.e.d.

Folgerung 2.5. Ist i rekurrent, so ist $\mathscr{F}^\infty$ i-trivial. Als Folge werde $(i,i,i,\ldots)$ gewählt. m' ist die Periode von i.

§3. Anwendung des Kriteriums 2.4 auf Harrisirrfahrten

Sei $I=\mathbb{Z}$ der Einfachheit halber eine Klasse.

Die Harrisirrfahrten werden eingeteilt in die rechtslaufenden, d.h. $P_i(\exists\, n>0\, X_n=i+1)=1\ \forall\, i\geqq 0$ (bzw. linkslaufenden) und die hier uninteressanten übrigen, die, wie man sich überzeugt,

(*) $P_0(\forall\, n>0\quad X_n>0)>0$ und $P_0(\forall\, n>0\quad X_n<0)>0$ erfüllen.

Die Irrfahrten mit (*) haben immer nicht 0-triviale terminale σ-Algebra, da $(\forall\, n>n_\omega\colon X_n>0)$, $(\forall\, n>n_\omega\colon X_n<0)$ terminale Ereignisse sind mit Maß ungleich 0 bzw. 1.

Rekurrente Harrisirrfahrten sind speziell auch rechtslaufend und besitzen, Proposition 2.5, immer 0-triviale Terminal-σ-Algebra.

Seien für diesen Paragraphen alle r_n gleich Null, d.h. die Periode d_i gleich 2.

(3.1) **Satz.** *Für eine rechtslaufende Harrisirrfahrt mit Periode $d_0=2$ ist $\mathscr{F}^\infty$ 0-trivial genau dann, falls $\sum_{n=0}^{\infty} q_n=\infty$ erfüllt ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$"

Sei $A=\bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{l=n}^{\infty}\{X_l=l\}$, $A\in\mathscr{F}^\infty$, so ist bis auf eine Nullmenge A $=\{(0,1,2,3,4,5,\ldots)\}$. Es gilt $P_0(A)=\prod_{i=0}^{\infty} p_i=0$ bzw. 1. (1 ist unmöglich, da wegen $d_0=2$ mindestens ein p_i, $i\geqq 0$, kleiner als 1 ist.)

Es folgt

$$\infty=\sum_{i=0}^{\infty}(1-p_i)=\sum_{i=0}^{\infty} q_i\,.$$

„$\Leftarrow$"

Als Folge mit Eigenschaft B (und auch C) wähle $0,1,2,3,4,\ldots$. Sei $Z_n=\tau_{n+1}-\tau_n$, $n=1,2,3,\ldots$ die Stoppzeit, um von n zum ersten Mal nach $n+1$ zu gelangen.

Hilfssatz 3.2 liefert $\sum_{n=0}^{\infty} t_{n,n+1}^2=\sum_{n=0}^{\infty} 2q_n=\infty$, mit Kriterium 2.4. folgt nun die Behauptung.

(3.2) **Hilfssatz.** *Gegeben sei eine Harrisirrfahrt auf $I=Z^-\cup\{0,1\}$. Alle r_n seien Null, $p_{1,1}=1$ und $P_0(\exists\, n X_n=1)=1$. Dann ist $f_{0,1}^l=P_0(X_l=1,\forall\, l'<l\colon X_{l'}\neq 1)$ mono-*

ton fallend für $l \geqq 1$ *und* $l \equiv 1 \bmod 2$, *und es gilt:*

$$\sum_{l \in Z} |f_{0,1}^{l} - f_{0,1}^{l-2}| = 2 f_{0,1}^{1} = 2 p_{0,1}$$

Beweis. i) Nehmen wir eine Nullmenge aus Ω heraus und betrachten den Prozeß auf dem fast sicheren Ereignisraum

$$\bar{\Omega} = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega_{n+1} = \omega_n = 1 \vee \omega_{n+1} = \omega_n - 1 \vee \omega_{n+1} = \omega_n + 1 \ \forall n \in N\}$$

$$B^l = \{\omega \in \bar{\Omega} \,|\, \omega_0 = 0 \wedge \omega_j = 1 \, \forall j \geqq l\}$$

$$A^l = \{\omega \in \bar{\Omega} \,|\, \omega_0 = 0 \wedge \omega_l = 1 \text{ zum ersten Mal}\}$$

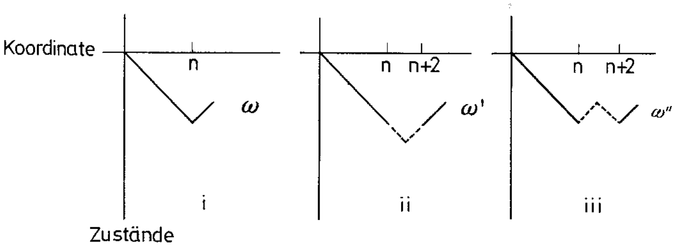
$$P(\bigcup_{l \in N} A^l | 0) = P(\exists l \; X_l = 1 | 0) = 1.$$

$$A_n^l = \{\omega \in A^l | \text{erstes Minimum bei } n\}.$$

Erstes Minimum bei n soll bedeuten: falls $\omega_0 < \omega_1$, so setze $n = 0$; andernfalls sei n der kleinste Wert, für den $\omega_n < \omega_{n-1}, \omega_{n+1}$ gilt.

$$\bigcup_{n=0}^{l} A_n^l = A^l.$$

Durch die Funktion g^l ordne man jedem $\omega \in A^l$ ein (ω', ω'') zu, indem man beim ersten Minimum noch das Stück $\vee$ bzw. $\wedge$ einfügt.



$$g^l: \; A^l \to B^{l+2} \times B^{l+2}$$

$$g^l(\omega) = (\omega', \omega'')$$

Sei $\omega \in A_n^l$.

$$\omega_i' = \omega_i = \omega_i'' \qquad \forall i \leqq n$$

$$\omega_{n+1}' = \omega_n - 1 \qquad \omega_{n+1}'' = \omega_n + 1$$

$$\omega_{i+2}' = \omega_i = \omega_{i+2}'' \qquad \forall i \geqq n.$$

Mit dieser Definition ist g^l eine Funktion auf den angegebenen Räumen.

ii) Für den Teil iv) wollen wir die Beziehung

$$\bigcup_{n=0}^{l} (Y_1(g^l(A_n^l)) \cup Y_2(g^l(A_n^l)) \supset A^{l+2} = \bigcup_{n=0}^{l+2} A_n^{l+2} \qquad \forall l \geqq 1$$

durch Angabe einer Funktion $h^l: A^{l+2} \to A^l$ beweisen. Y_1, Y_2 seien die Projektionen $B^{l+2} \times B^{l+2} \to B^{l+2}$.

Zu jedem $\bar{\omega} \in A^{l+2}$, $l \geqq 1$, sei $n(\bar{\omega}) = n$ das kleinste $\bar{n} \in \mathbb{N}$, für das $\bar{\omega}_{\bar{n}} = \bar{\omega}_{n+1} - 1$ und $\bar{\omega}_{\bar{n}+3} > \bar{\omega}_{\bar{n}}$ gilt. n ist wohldefiniert, da die Koordinate des absoluten Minimums obige Eigenschaft besitzt.

Falls $\bar{\omega}_{\bar{n}+2} = \bar{\omega}_{\bar{n}} + 2$ gilt, so setze

$$(h^l(\bar{\omega}))_i = \bar{\omega}_i \qquad i \leqq n-1$$

$$(h^l(\bar{\omega}))_i = \bar{\omega}_{i+2} \qquad i > n-1$$

und damit

$$h^l(\bar{\omega}) \in A^l.$$

(Vergleich: Pfad aus Bild ii zu Pfad aus Bild i.)

Falls $\bar{\omega}_{n+2} = \bar{\omega}_n$ gilt, so setze

$$(h^l(\bar{\omega}))_i = \bar{\omega}_i \qquad \forall i \leqq n$$

$$(h^l(\bar{\omega}))_i = \bar{\omega}_{i+2} \qquad \forall i > n$$

und damit

$$h^l(\bar{\omega}) \in A^l.$$

(Vergleich: Pfad aus Bild iii zu entsprechendem Pfad aus Bild i.)

Hierdurch ist h^l vollständig als Funktion bestimmt. h^l ordnet nach Konstruktion jedem $\bar{\omega} \in A^{l+2}$ ein Element aus A^l zu, so daß für $g^l(h^l(\bar{\omega})) = (\omega', \omega'')$ entweder $\omega' = \bar{\omega}$ (erste Fallsbedingung) oder $\omega'' = \bar{\omega}$ (zweite Fallsbedingung) gilt.

iii) A_n^l schreibt sich als (T-Shifttransformation)

$$A_n^l = \{0\} \times \{-1\} \times \cdots \times \{-n\} \times \{-n+1\} \times T^{n+2}(A_n^l).$$

Weiter gilt

$$P(A_n^l | 0) = p_{0,-1} \cdots p_{-n+1,-n}\, p_{-n,-n+1}\, p(T^{n+2}(A_n^l) | -n+1),$$

$$P(Y_1(g^l(A_n^l)) | 0)$$
$$= p_{0,-1} \cdots p_{-n+1,-n}\, p_{-n,-n-1}\, p_{n-1,-n}\, p_{-n,-n+1} \cdot P(T^{n+2}(A_n^l) | -n+1),$$

$$P(Y_2(g^l(A_n^l)) | 0)$$
$$= p_{0,-1} \cdots p_{-n+1,-n}\, p_{-n,-n+1}\, p_{-n+1,-n}\, p_{-n,-n+1} \cdot P(T^{n+2}(A_n^l) | -n+1).$$

Hieraus ergibt sich die in iv benötigte Beziehung:

$$P(Y_1(g^l(A_n^l)) | 0) + P(Y_2(g^l(A_n^l)) | 0)$$
$$= P(A_n^l | 0)[p_{-n,-n-1} \underbrace{p_{-n-1,-n}}_{\leqq 1} + p_{-n,-n+1} \underbrace{p_{-n+1,-n}}_{\leqq 1}]$$
$$\leqq P(A_n^l | 0).$$

iv) $f_{0,1}^{l} = P(A^{l}|0) = P\left(\bigcup_{n=0}^{l} A_n^l|0\right) = \sum_{n=0}^{l} P(A_n^l|0)$

$$\geqq \sum_{n=0}^{l} (P(Y_1(g^l(A_n^l))|0) + P(Y_2(g^l(A_n^l))|0))$$

$$\geqq P\left(\bigcup_{n=0}^{l} (Y_1(g^l(A_n^l))\, Y_2(g^l(A_n^l)))|0\right)$$

$$\geqq P(A^{l+2}|0) = f_{0,1}^{l+2}.$$

v) $\sum_{l\in Z} |f_{0,1}^{l} - f_{0,1}^{l+2}| = \sum_{l=-1}^{\infty} |f_{0,1}^{l} - f_{0,1}^{l+2}|$

$$= f_{0,1}^{1} + \sum_{l=0}^{\infty} (f_{0,1}^{l} - f_{0,1}^{l+2})$$

$$= f_{0,1}^{1} + \sum_{l=0}^{\infty} f_{0,1}^{l} - \sum_{l=0}^{\infty} f_{0,1}^{l+2}$$

$$= 2 f_{0,1}^{1}$$

$$= 2 p_{0,1}.$$

§ 4. Anwendungen auf aperiodische Harrisirrfahrten

$I = \mathbb{Z}$ sei eine Klasse mit Periode 1. Jedem Pfad ω wollen wir eindeutig ein $\omega' \in \Omega$ zuordnen, welches die Reihenfolge der verschiedenen Zustände von ω angibt, und ZV. $y_{\omega_n', n}(\omega)$, $n \in \mathbb{N}$, die angeben, wie oft das Teilchen in ω_n' verbleibt.

τ^i, $i \in \mathbb{N}$, seien Stoppzeiten, induktiv definiert durch $\tau^0(\omega) = 0$,

$$\tau^{n+1}(\omega) = \begin{cases} \inf\{m > \tau^n(\omega), & \omega_m \neq \omega_{\tau^n(\omega)} \\ \infty \text{ falls inf unbestimmt.} \end{cases}$$

Um $P(\tau^n < \infty) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu erhalten, müssen wir fordern: $r_n < 1$ für alle n.
Weiterhin sei

$$f\colon\ \Omega \to \Omega' = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega_i \neq \omega_{i+1}\ \forall\, i \in \mathbb{N}\}$$

$$f(\omega) = (\omega_{\tau^0(\omega)}, \omega_{\tau^1(\omega)}, \omega_{\tau^2(\omega)}, \ldots).$$

Der Prozeß X_n': $\Omega' \to I$ ist wieder Markovsch

$$X_n'((f(\omega)_0, f(\omega)_1, \ldots) = (f(\omega))_n$$

mit dem Maß $P f^{-1}$.

X'_n bildet eine Harrisirrfahrt mit Periode 2 und den Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_n^f = \frac{p_n}{1-r_n}, \qquad q_n^f = \frac{q_n}{1-r_n}.$$

$$\begin{aligned} P^f(X'_n = i \,|\, \overbrace{X'_m = j_m \cap X'_{m-1} = j_{m-1} \cap \cdots \cap X'_0 = j_0}^{A'}) & \qquad \text{o.E. } n > m \\ = \frac{P^f(X'_n = i \cap A')}{P^f(A')} = \frac{P(f^{-1}(X'_n) \cap f^{-1}(A'))}{P^f(A')} & \qquad \text{o.E. } P^f(A') > 0 \\ = P(f^{-1}(X'_n) \,|\, f^{-1}(A')) = P(X_{\tau^n(\omega)} = i \,|\, X_{\tau^m(\omega)} = j_m) & \\ = P^f(X'_n = i \,|\, X'_m = j). & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_j^f &= P(X_{\tau^2(\omega)} = j+1 \,|\, X_{\tau^1(\omega)} = j) = p_j + r_j p_j + r_j^2 p_j + \dots \\ &= \frac{p_j}{1-r_j}. \end{aligned}$$

Viele Eigenschaften, wie Rekurrenz, Klasse, übertragen sich von Ω auf Ω'.

Interessant ist besonders, wie lange ein Teilchen aus Ω in einem Zustand verweilt. Diese Z.V. haben eine Verteilung von der Art

$$P(Y_i = j) = (1-r_i)\, r_i^{j-1} = P_i(\tau^1 = j).$$

(4.1) **Proposition.** *Seien* Y_i, $i \in \mathbb{N}$, *unabh. Z.V. mit Vert.* $P(Y_n = j) = (1-r_n)\, r_n^{j-1}$ *für* $j \in \mathbb{N}$, $0 \leqq r_n \leqq 1$, *und sei* S_n *die n-te Partialsumme.*

Dann gilt, aus $\sum_{n \in \mathbb{N}} r_n = \infty$ *folgt*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j \in \mathbb{N}} |P(S_n = j) - P(S_n = j-1)| = 0.$$

Beweis. $P(Y_n = j)$ ist monoton fallend für $j \geqq 1$ und daher gilt

$$\begin{aligned} &\sum_{j \in N} |P(Y_n = j) - P(Y_n = j-1)| \\ &\qquad = P(Y_n = 1) + \sum_{j=2}^{\infty} (P(Y_n = j-1) - P(Y_n = j)) \\ &\qquad = 2P(Y_n = 1) = 2(1-r_n). \end{aligned}$$

Wende nun Kriterium 2.4 an, so folgt die Behauptung.

(4.2) **Satz.** *Ist eine Harrisirrfahrt eine Klasse mit Periode* 1 *und rechtslaufend, so sind äquivalent*

i) $\mathscr{F}^\infty$ *0-trivial*

ii) $P_0(\{\omega \,|\, \sum_{j \in N} r_{(f(\omega))_j} = \infty\}) = 1$.

Beweis. „$\Rightarrow$“

Sei $\mathscr{F}^\infty$ 0-trivial und $P_0(\{\omega \,|\, \sum_{j \in N} r_{(f(\omega))_j} = \infty\}) \neq 1$, so erhält man sofort $P_0(\{\sum_{j \in N} r_{(f(\omega))_j} < \infty\}) = 1$.

Benutze nun folgende Erweiterung von Borel-Cantelli (Breiman [2]).

Sei $Y_0, Y_1 \dots$ ein beliebiger Prozeß, $A_n \in \mathscr{F}(Y_0, \dots, Y_n)$. Dann gilt f.s.

$$\{\omega \mid \omega \in A_n \text{ unendlich oft}\} = \{\omega \mid \sum_{n=0}^{\infty} P(A_{n+1} \mid Y_0, \dots, Y_n) = \infty\}.$$

Sei jetzt $A_n = \{\omega \mid \omega_n = \omega_{n+1}\}$, so folgt nach dem oben zitierten Satz

$$1 = P(A_n \text{ endlich oft}) = P(\omega \mid \exists\, n(\omega)\, \forall\, n \geqq n(\omega) \colon \omega_{n+1} = \omega_n \pm 1).$$

Die beiden terminalen Ereignisse

$$B \quad = \{\omega_n + n \text{ unendlich oft gerade}\} \in \mathscr{F}^{\infty},$$

$$B' \quad = \{\omega_n + n \text{ unendlich oft ungerade}\} \in \mathscr{F}^{\infty},$$

$$B' \cup B = \Omega, \qquad P_0(B \cap B') = P_0(A_n \text{ unendlich oft}) = P(\sum_{j \in \mathbb{N}} r_{f(\omega)_j} = \infty) = 0$$

liefern nun den Widerspruch.

Sei o.E.d.A $P_0(B) > 0$ und $p_{00} > 0$, so gilt wegen $\{0 \times B\} \subset B'$

$$1 = P_0(B \cup B') = P_0(B) + P_0(B') \geqq P_0(B) + p_{00}\, P_0(B)$$

und daher $1 > P_0(B) > 0$. Widerspruch.

„$\Leftarrow$"

v_ε sei eine Stoppzeit auf Ω'

$$v_\varepsilon(\omega') = \inf(\{m \mid \sum_{j \in I} |(P(S_m(\omega'_0 \dots \omega'_m) = j)$$
$$- P(S_m(\omega'_0 \dots \omega'_m) = j - 1)| \leqq \varepsilon\} \cup \{\infty\}).$$

Dabei ist

$$S_m(\omega'_0, \dots, \omega'_m) = \sum_{l=1}^{m} Z_l^{\omega'_{l-1}, \omega'_l},$$

$$Z_l^{\omega'_{l-1}, \omega'_l} = \tau_{\omega'_{l-1}, \omega'_l}, \qquad l = 1, 2, \dots, m.$$

$$P_0 f^{-1}(\ v_\varepsilon(\omega') < \infty) = P_0(\ v_\varepsilon(f(\omega)) < \infty)$$
$$\geqq P_0(\limsup_{m \to \infty} \sum_{j \in I} |P(S_m(\omega'_0, \dots, \omega'_m) = j) - P(S_m(\omega'_0 \dots \omega'_m) = j - 1)| < \varepsilon)$$
$$\geqq P_0(\sum_{j \in N} r_{(f(\omega))j} = \infty) = 1.$$

Wende zum Nachweis der Trivialität Satz 2.1 an

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{j \in N} |p_{k,j}^{n-1} - p_{k,j}^{n}| \qquad k > 0$$

$$\geqq \lim_{n \to \infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\{x'_0 = \omega'_0, \dots, x'_m = \omega'_m\} \subset \{v_\varepsilon(\omega') = m\}} P f^{-1}(X'_0 = \omega'_0, \dots, X'_m = \omega'_m)$$

$$\cdot \sum_{j \in N} |P_k(X_{n-1} = j \mid X'_0 = \omega'_0, \dots, X'_m = \omega'_m)$$
$$- P_k(X_n = j \mid X'_0 = \omega'_0, \dots, X'_m = \omega'_m)|.$$

Ganz analog zum Beweis „$\Leftarrow$" von Satz 2.2 folgt (beachte die etwas andere Definition von $S_n(\ldots)$)

$$\leqq \lim_{n\to\infty} \sum_{m\in N} \sum_{\{v_\varepsilon=m\}} P_k f^{-1}(X'_0=\omega'_0 \ldots X'_m=\omega'_m)$$

$$\cdot \sum_{l=0}^{\infty} |P(S_m(\omega'_0 \ldots \omega'_m)=l-1)-P(S_m(\omega'_0,\ldots,\omega'_m)=l)|$$

$$\leqq \varepsilon \cdot P(v_\varepsilon f<\infty)=\varepsilon.$$

Da ε beliebig war, folgt die Behauptung.

Eine rekurrente Irrfahrt erfüllt das Kriterium aus 4.2., da, es sei o.E. $r_0 \neq 0$, der Zustand 0 unendlich oft besucht wird. Auch aus rechtslaufend und $\sum_{n=0}^{\infty} r_n=\infty$ folgt 0-triviale Terminal-σ-Algebra.

Für $\sum_{n\in N} q_n<\infty$ und $\sum_{n\in N} r_n<\infty$ ist das Maß von $\omega=(0,1,2,\ldots)$ ungleich 0 und 1 und damit ist $\mathscr{F}^\infty$ nicht 0-trivial.

Für $\sum_{n\in N} q_n=\infty$ und $\sum_{n\in N} r_n<\infty$ seien zwei Teilergebnisse für rechtslaufende transiente Irrfahrten mit Periode 1 angegeben, $r_n<1$, $n\in\mathbb{N}$.

(4.3) **Proposition.** *Sei wie oben* $p_n^f=\dfrac{p_n}{1-r_n}$, $q_n^f=\dfrac{q_n}{1-r_n}$ *und* φ_n *rekursiv gegeben durch*

$$\varphi_0=1, \qquad \varphi_{n+1}=\frac{p_n^f}{1-q_n^f\,\varphi_n \exp(-r_n)},$$

$\mathscr{F}^\infty$ *0-trivial ist äquivalent zu* $\prod_{n\in N} \varphi_n=0$.

Beweis. τ_n sei die Stoppzeit in Ω', den Zustand n zum ersten Mal zu erreichen. $Y_{n+1}(\omega)$ gebe die Anzahl der Besuche in n vor $\tau_{n+1}(\omega)$ an. Z_{n+1} sei die Z.V. $\sum_{j=\tau_n}^{\tau_{n+1}-1} r_{\omega_j}$. $(Z_{n+1}^*)^k$ bezeichne die k-fache Faltung von Z_{n+1}. Damit gilt:

$$P^f(Z_{n+1}=x)=\sum_{k=1}^{\infty} P^f(Y_{n+1}=k)\cdot P^f((Z_n^*)^{k-1}=x-k r_n).$$

Die Folge $\varphi_n(t)=E(\exp(-tZ_n))$ erfüllt den rekursiven Zusammenhang

$$\begin{aligned}
\varphi_{n+1}(t)&=E(\exp(-t Z_{n+1}))\\
&=\int \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-t k r_n)\, P^f(Y_{n+1}=k)\\
&\quad \cdot \exp(-t(x-k r_n))\, P^f((Z_n^*)^{k-1}=x-k r_n)\,dx\\
&=\sum_{k=1}^{\infty} \exp(-t k r_n)\, p_n^f (q_n^f)^{k-1}\, \varphi_n^{k-1}(t)\\
&=p_n^f \frac{\exp(-r_n t)}{1-q_n^f\,\varphi_n(t)\exp(-r_n t)}.
\end{aligned}$$

Das Produkt der charakteristischen Funktionen $\prod_{n\in\mathbb{N}}\varphi_n(t)$ gleich 0 für alle $t\neq 0$ ist äquivalent zu $1=P\left(\sum_{n=1}^{\infty} Z_n=\infty\right)=P^f(\sum_{j\in\mathbb{N}} r_{\omega_j}=\infty)$ und dies nach Satz 4.2 zu $\mathscr{F}^\infty$ 0-trivial. Da der Prozeß sich ab gewissem $N(\omega)$ stets in positiven Zuständen befindet, kann man o.E.d.A $q_0=0=r_0$ setzen und erhält damit $\varphi_0(t)=1$. Setzt man $t=1$ folgt eine Richtung, die andere folgt aus $\varphi_0(t)$ ist monoton steigend für $t<0$, und monoton fallend für $t>0$.

(4.4) *Beispiel.* Aus $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{r_n}{p_n+r_n}=\infty$ folgt $\mathscr{F}^\infty$ 0-trivial.

Beweis.

$$\prod_{n\in\mathbb{N}}\frac{p_n^f}{1-q_n^f\varphi_n\exp(-r_n)}\leqq\prod_{n\in\mathbb{N}}\frac{p_n^f}{1-q_n^f\exp(-r_n)}$$

$$\leqq\prod\frac{p_n^f}{1-q_n^f\left(1-r_n+\frac{r_n^2}{2}\right)}$$

$$\leqq\prod\frac{p_n}{\left(p_n+r_n-\frac{r_n^2}{2}\right)(1-r_n)+\frac{p_n r_n^2}{2}}$$

$$\leqq\frac{1}{\min\limits_{n\in\mathbb{N}}(1-r_n)}\prod\frac{p_n}{p_n+r_n-\frac{r_n^2}{2}}.$$

$\min(1-r_n)$ ist größer Null wegen $\sum_{n\in\mathbb{N}} r_n<\infty$. Das Produkt gleich Null ist äquivalent zu

$$\infty=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{r_n\left(1-\frac{r_n}{2}\right)}{p_n+r_n-\frac{r_n^2}{2}}$$

$$\geqq\min\left(1-\frac{r_n}{2}\right)\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{r_n}{p_n+r_n},$$

und dies ist nach Voraussetzung erfüllt.

Für das nächste Beispiel mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} r_n<\infty$ setze man $q_0=0$ (rein technische Annahme bei rechtslaufenden Harrisirrfahrten) und berechne, ähnlich wie in der vorigen Proposition

$$E\left(\sum_{n=1}^{\infty} Z_n\right)=\sum_{i\in N}\frac{r_i(1-r_i)}{p_i}R^i(\infty)$$

mit

$$R^i(\infty)=\sum_{n=0}^{\infty} v_n^i,\qquad v_0^i=1,\qquad v_j^i=\frac{q_{i+1}\cdots q_{i+j}}{p_{i+1}\cdots p_{i+j}}.$$

$R^i(k) = \sum_{n=0}^{k} v_n^i$ ist das invariante endliche Maß für die Irrfahrt in Ω', startend in i und $q_i^f = 0$.

Beispiel. Sei $\frac{q_n}{p_n} \leqq c < 1$ für alle n größer als einem n_0, so ist $\mathscr{F}^\infty$ nicht trivial. Zum Beweis zeigt man, $R^n(\infty)$ ist gleichmäßig beschränkt und $p_n \geqq \frac{1-r_n}{1+c}$ für alle n. Damit ist die Erwartung von $\sum_n Z_n$ endlich und die Behauptung folgt.

Literatur

1. Blackwell, David and David A. Freedman, (1964): The tail σ-field of a Markov chain and a theorem of Orey. Ann. Math. Statist. **35**, 1291–1295 (1964)
2. Breiman, Leo: Probability. Reading, Mass.: Addison-Wesley 1968
3. Freedman, David: Markov Chains. San Francisco: Holden-Day 1971
4. Orey, Steven: An ergodic theorem for Markov chains, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete 1, 174–176 (1962)
5. Orey, Steven: Limit theorems for Markov Chain Transition Probabilities. London: von Nostrand Reinhold 1971
6. Rösler, Uwe: Eine Mischungseigenschaft von Zufallsvariablen. Preprint
7. Rösler, Uwe: Die Gültigkeit des 0–1-Gesetzes für Harrisirrfahrten (Diplomarbeit. Göttingen)

Eingegangen am 15. Dezember 1975; in revidierter Form am 30. August 1976