Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 6, 161—169 (1966)

Zum zentralen Grenzwertsatz für zufällige Elemente mit Werten aus einem Hilbertraum

KURT REINSCHKE

Eingegangen am 25. Oktober 1965

Zusammenfassung. Es wird ein neuer Beweis zu einem unlängst von KANDELAKI und SASONOV [1] veröffentlichten zentralen Grenzwertsatz für Zufallselemente mit Werten aus einem separablen Hilbertraum angegeben. Dieser Beweis ist elementarer, weil er charakteristische Funktionale nicht verwendet und daher ohne den Begriff der schwachen Kompaktheit von Mengen von Wahrscheinlichkeitsmaßen auskommt. Es wird wesentlich von der Methode der Wahrscheinlichkeitsoperatoren Gebrauch gemacht.

1. Zugrunde gelegt sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $[\Omega, \mathfrak{B}_\Omega, P]$, wobei Ω eine abstrakte Menge, $\mathfrak{B}_\Omega$ eine σ-Algebra von Teilmengen von Ω und P eine auf $\mathfrak{B}_\Omega$ definierte Wahrscheinlichkeit darstellen. Weiter sei H ein separabler Hilbertraum und $\mathfrak{B}_H$ die Borelsche σ-Algebra, die von den abgeschlossenen Teilmengen von H erzeugt wird. Ein zufälliges Element X mit Werten aus H ist eine $\mathfrak{B}_\Omega$-meßbare Abbildung von $[\Omega, \mathfrak{B}_\Omega]$ in $[H, \mathfrak{B}_H]$. Sie wird zur wahrscheinlichkeitstreuen Abbildung durch Definition des von X über $[H, \mathfrak{B}_H]$ induzierten Wahrscheinlichkeitsmaßes μ_X gemäß

$$\mu_X(B) = P(X \in B) \quad \text{für alle} \quad B \in \mathfrak{B}_H .$$

In Übereinstimmung mit der üblichen Terminologie schreiben wir abkürzend
(h, g) für das Skalarprodukt zweier Elemente $h \in H$ und $g \in H$,
$\|h\|^2 = (h, h)$ für das Quadrat der Norm von $h \in H$,
$\{e_j\}$ für eine (orthonormierte) Basis des Raumes H.

Bei der Festlegung weiterer Symbole wird von definierenden Gleichheitszeichen „:=" bzw. „=:" Gebrauch gemacht, wobei der Doppelpunkt auf der Seite der zu definierenden Größe steht.

Allen unseren Betrachtungen liegt eine Folge $\{X_k\}$ unabhängiger zufälliger Elemente zugrunde, für die der Erwartungswert der Zufallsgrößen $\|X_k\|^2$ endlich bleibt,

$$E\|X_k\|^2 := \int_H \|x\|^2 \mu_{X_k}(dx) < +\infty . \tag{1}$$

Die mathematische Erwartung EX_k des zufälligen Elementes X_k ergibt sich aus der Forderung

$$E((h, X_k - EX_k)^2) \leqq E((h, X_k - g)^2) \quad \text{für alle} \quad h, g \in H \quad \text{zu}$$

$$EX_k = \int_H x \mu_{X_k}(dx) ,$$

wobei das Integral im PETTISschen Sinne [2] zu verstehen ist. Im folgenden werde

o. B. d. A. vorausgesetzt, daß EX_k mit dem Nullelement θ des Raumes H zusammenfalle,

$$EX_k = \theta\,. \tag{2}$$

Über das bilineare Funktional $E((h, X_k)(g, X_k))$ — mit festgehaltenem Index k — kommen wir zum „Streuungsoperator" S_{X_k},

$$E((h, X_k)(g, X_k)) = \int_H (h, x)(g, x)\,\mu_{X_k}(dx) =: (S_{X_k}h, g) \qquad (h, g \in H)\,. \tag{3}$$

Der Operator S_{X_k} ist linear, beschränkt, symmetrisch, positiv. Er besitzt eine endliche Spur $SpS_{X_k} := \sum_{j=1}^{\infty} (S_{X_k}e_j, e_j)$; denn es gilt

$$SpS_{X_k} = \int_H \|x\|^2 \mu_{X_k}(dx)\,. \tag{4}$$

Für die Summe zweier unabhängiger Zufallselemente und ein mit einem linearen beschränkten Operator A transformiertes zufälliges Element ergeben sich die Relationen

$$S_{X_k+X_j} = S_{X_k} + S_{X_j}\,, \tag{5}$$

$$S_{AX_k} = AS_{X_k}A^*\,. \tag{6}$$

Ein zufälliges Element Y mit $EY = \theta$ genügt einer (zentrierten) Normalverteilung $\mu_Y = \Phi$ mit dem Streuungsoperator S, wenn die Zufallsgrößen (h, Y) normalverteilt nach $N(0, (Sh, h))$ sind für beliebige $h \in H$. Die Verteilung Φ wird durch den Streuungsoperator S eindeutig charakterisiert.

2. Bekanntlich konvergiert eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\{\mu_n\}$ genau dann schwach gegen ein Grenzmaß μ, $\mu_n \Rightarrow \mu$, wenn für alle μ-Stetigkeitsmengen A gilt: $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$. (Eine Menge $A \in \mathfrak{B}_H$ heißt μ-Stetigkeitsmenge, wenn[1] $\mu(CA \cap C\bar{A}) = 0$ wird. Das System aller μ-Stetigkeitsmengen bildet eine Mengenalgebra $\mathfrak{S}_\mu$.)

Bei der Untersuchung des asymptotischen Verhaltens von Summen unabhängiger Zufallselemente mit Werten in einem abstrakten Raum orientiert man sich gern an den entsprechenden Aussagen für Zufallsgrößen. Bei diesen erfolgt die Normierung naturgemäß mit Zahlen. Für Zufallselemente allgemeinerer Art ist das nicht immer angebracht. Adäquat erscheint hier eine Normierung mit linearen beschränkten Operatoren A_n. Man hat dann die Konvergenzeigenschaften der Folge $\{Y_n\}$ mit

$$Y_n := A_n \sum_{k=1}^{n} X_k \tag{7}$$

zu untersuchen.

In einer unlängst erschienenen Arbeit [1] von KANDELAKI und SASONOV werden normierende Operatoren $\{A_n\}$ benutzt, um eine Verallgemeinerung des zentralen Grenzwertsatzes von LINDEBERG und FELLER auf separable Hilberträume H zu beweisen.

---

[1] Wir bezeichnen mit CA die Abschließung und mit $\bar{A}$ das Komplement einer Menge A.

Definition [1]. Eine Folge linearer beschränkter (meßbarer) Operatoren $\{A_n\}$ normiert die Folge $\{X_k\}$ zum Streuungsoperator S, wenn für eine Basis $\{e_j\}$ in H gilt:

$$\begin{aligned} &\sup_n Sp S_{Y_n} = \sup_n \sum_{j=1}^{\infty} (S_{Y_n} e_j, e_j) =: C_0 < +\infty\,, \\ &\lim_{j_0\to\infty} \sup_n \sum_{j=j_0}^{\infty} (S_{Y_n} e_j, e_j) = 0\,, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\lim_{n\to\infty} (S_{Y_n} h, h) = (Sh, h) \quad \text{für alle } h \in H\,. \tag{9}$$

Satz (N. P. Kandelaki und V. V. Sasonov). *Es sei $\{A_n\}$ eine $\{X_k\}$ zu S normierende Folge von Operatoren. Dann gilt*

$$\begin{aligned} &\mu_{Y_n} \Rightarrow \Phi \quad \textit{mit dem Streuungsoperator } S \quad \textit{und} \\ &\lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le n} P(\|A_n X_k\| > \varepsilon) = 0 \quad \textit{bei beliebigem } \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

genau dann, wenn bei beliebigem $\varepsilon > 0$:

$$L_n(\varepsilon) := \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\|A_n x\| > \varepsilon} \|A_n x\|^2 \mu_{X_k}(dx) \to 0 \quad \textit{für} \quad n \to \infty\,.$$

Dies ist offensichtlich eine Verallgemeinerung des Lindeberg-Fellerschen Satzes. Er lautet in der Sprache linearer Funktionale:

Hilfssatz 1. *Es sei h irgendein Element aus H.*

Dann gilt

$$\begin{aligned} &\mu_{(h,Y)} \Rightarrow \mu_{N(0,(Sh,h))} \quad \textit{und} \\ &\lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le n} P(|(h, A_n X_k)| > \delta) = 0 \quad \textit{bei beliebigem } \delta > 0 \end{aligned}$$

genau dann, wenn es zu beliebigem $\delta > 0$ eine Nullfolge $\{\delta_n\}$ positiver Zahlen derart gibt, daß $\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|(h,A_n x)| > \delta} (h, A_n x)^2 \mu_{X_k}(dx) \le \delta_n$ bleibt.

Beim Beweis des Satzes von Lindeberg und Feller bedient man sich vorteilhaft der Methode der charakteristischen Funktionale, die in linearen Räumen endlicher Dimension ein hervorragendes Hilfsmittel beim Studium der Grenzverteilungen für Summen von zufälligen Vektoren darstellen. In Räumen unendlicher Dimension hingegen machen die Übertragung des Eindeutigkeitssatzes und des Stetigkeitssatzes für charakteristische Funktionen auf die entsprechend definierten charakteristischen Funktionale große Schwierigkeiten. Insbesondere müssen Aussagen über die schwache Kompaktheit von Mengen von Wahrscheinlichkeitsmaßen [3] herangezogen werden. Diesen Weg haben Kandelaki und Sasonov beim Beweis ihres Satzes gewählt. Es ist Hauptzweck dieser Note, den Satz elementarer zu beweisen. Auf charakteristische Funktionale wird dabei gänzlich verzichtet. Im hinreichenden Teil des Beweises, der im eindimensionalen Spezialfall mit dem von Trotter [4] im Jahre 1959 angegebenen Beweis des Lindebergschen Satzes im wesentlichen übereinstimmt, wird mit Wahrscheinlichkeitsoperatoren ([5] und dort zitierte Literatur) gearbeitet. Die Methode der Wahrscheinlichkeitsoperatoren erweist sich auch in anderem Zusammenhange als ein angepaßtes Hilfsmittel. Z. B. kann man diese Methode bei der Untersuchung des Grenzverhaltens zufälliger Felder anwenden.

Zu einer Wahrscheinlichkeitsverteilung μ_X definiert man den Wahrscheinlichkeitsoperator W_X, der den Raum C der beschränkten und gleichmäßig stetigen Funktionale f (auf H) in sich abbildet, durch

$$(W_X f)(h) := \int_H f(x+h)\,\mu_X(dx)\,. \tag{10}$$

Benutzt man im Raum C die Supremumsnorm, so ist W_X ein kontrahierender Operator,

$$\sup_{h\in H}(W_X f)(h) =: \| W_X f\| \leqq \|f\|\,. \tag{11}$$

Für zwei voneinander unabhängige Zufallselemente ergibt sich aus dem Satz von Fubini [6]:

$$W_{X_1+X_2} = W_{X_1} W_{X_2} = W_{X_2} W_{X_1}\,. \tag{12}$$

3. Bevor wir zu dem angekündigten elementaren Beweis des Satzes von KANDELAKI und SASONOV kommen, sollen noch zwei nützliche Hilfssätze über separable Hilberträume bewiesen werden.

Dabei wird das folgende Funktional [7] wesentlich benutzt:

$$\varphi(x;\varepsilon) = \begin{cases} \exp\left\{\dfrac{-\varepsilon^2}{\varepsilon^2-(x,x)}\right\} & \text{für} \quad (x,x) < \varepsilon^2\,, \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad (x,x) \geqq \varepsilon^2\,. \end{cases}$$

Man rechnet leicht nach, daß dieses Funktional beliebig oft FRÉCHET-differenzierbar ist.

Der Abstand eines Elementes $x \in H$ von einer Menge $F \subset H$ werde wie üblich bezeichnet, $\varrho(x, F) := \inf\limits_{y\in F}\{\|x-y\|\}$.

Hilfssatz 2. *Seien F_0 und F_1 zwei abgeschlossene Mengen eines separablen Hilbertraumes H mit positivem Abstand $\varrho(F_0, F_1) > 0$. Dann existiert ein auf H definiertes, gleichmäßig stetiges, beliebig oft Fréchet-differenzierbares Funktional f mit*

$$\begin{aligned} 0 \leqq f(x) &\leqq 1 & & x\in H\,,\\ f(x) &= 0 & \text{für}\quad & x \in F_0\,,\\ f(x) &= 1 & & x\in F_1\,. \end{aligned}$$

Beweis. Sei $\varrho(F_0, F_1) =: 3\varepsilon$. Dann haben auch die Abschließungen der ε-Umgebungen von F_0 und F_1 positiven Abstand $\varrho(CU(F_0,\varepsilon), CU(F_1,\varepsilon)) > 0$. Das Funktional

$$g(x) = \frac{\varrho(x, CU(F_0,\varepsilon))}{\varrho(x, CU(F_0,\varepsilon)) + \varrho(x, CU(F_1,\varepsilon))}$$

ist gleichmäßig stetig und offenbar gilt

$$\begin{aligned} 0 \leqq g(x) &\leqq 1 & & x\in H\,,\\ g(x) &= 0 & \text{für}\quad & x \in CU(F_0,\varepsilon)\,,\\ g(x) &= 1 & & x\in CU(F_1,\varepsilon)\,. \end{aligned}$$

Wie oben bezeichne Φ eine (nichtausgeartete, zentrierte) Normalverteilung über H. Für beliebiges $x \in H$ und $\eta > 0$ gilt $\Phi(U(\{x\}, \eta)) > 0$. Das Funktional

$$f(x) = \frac{1}{\int\limits_H \varphi(x-y;\varepsilon)\,\Phi(dy)} \int\limits_H g(y)\,\varphi(x-y;\varepsilon)\,\Phi(dy)$$

genügt den Angaben des Hilfssatzes 2.

Hilfssatz 3. *Sei $\{\mu_n\}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Dann gilt $\mu_n \Rightarrow \mu$, wenn für eine feste natürliche Zahl m jedes beschränkte, gleichmäßig stetige, m-mal Fréchet-differenzierbare Funktional f der Beziehung genügt,*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_H f(x)\,\mu_n(dx) = \int\limits_H f(x)\,\mu(dx)\,.$$

Beweis. Sei A eine beliebige μ-Stetigkeitsmenge, d. h. $A \in \mathfrak{S}_\mu$. Zu vorgegebenem m und beliebigem $\delta > 0$ konstruiere man sich ein gleichmäßig stetiges m-mal Fréchet-differenzierbares Funktional f mit

$$\begin{aligned} 0 \leqq f(x) &\leqq 1 && x \in H\,,\\ f(x) &= 1 \quad \text{für} && x \in CA\,,\\ f(x) &= 0 && x \in \overline{U(A,\delta)}\,. \end{aligned}$$

Das ist nach Hilfssatz 2 stets möglich.

Die folgenden Ungleichungen sind evident:

$$\mu_n(A) \leqq \int\limits_H f(x)\,\mu_n(dx) \leqq \mu_n(U(A,\delta)) \quad \text{für alle } n\,,$$

$$\mu(A) \leqq \int\limits_H f(x)\,\mu(dx) \leqq \mu(U(A,\delta))\,.$$

Mithin

$$\begin{aligned} \lim_n \sup \mu_n(A) \leqq \lim_n \sup \int\limits_H f(x)\,\mu_n(dx) = \int\limits_H f(x)\,\mu(dx) \leqq \\ \leqq \inf_{\delta>0} \mu(U(A,\delta)) = \mu(A)\,. \end{aligned}$$

Da mit der Menge A auch deren Komplement $\tilde{A}$ μ-Stetigkeitsmenge ist, folgt ebenso

$$1 - \lim_n \inf \mu_n(A) = \lim_n \sup \mu_n(\tilde{A}) \leqq \mu(\tilde{A}) = 1 - \mu(A)\,.$$

Aus $\mu(A) \leqq \lim_n \inf \mu_n(A) \leqq \lim_n \sup \mu_n(A) \leqq \mu(A)$ ergibt sich die gewünschte Relation.

4. Wir kommen nun zum notwendigen Teil des Beweises. Konvergieren die Verteilungen μ_{Y_n} schwach gegen die (zentrierte) Normalverteilung Φ mit dem Streuungsoperator S, so konvergieren bei beliebigem $h \in H$ die Verteilungen $\mu_{(h,Y_n)}$ der Linearformen (h, Y_n) schwach gegen $\mu_{N(0,(Sh,h))}$. O.B.d.A. sei $h \neq \theta$ und $(Sh, h) > 0$ vorausgesetzt. Weiter ist nach Voraussetzung

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqq k\leqq n} P(|(h, A_n X_k)| > \delta) \leqq \lim_{n\to\infty} \max_{1\leqq k\leqq n} P(\|A_n X_k\| > \varepsilon) = 0$$

mit $\varepsilon = \dfrac{\delta}{\|h\|}$.

Der Hilfssatz 1 impliziert daher

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|(h,A_n x)|>\delta} (h, A_n x)^2 \mu_{X_k}(dx) < \delta_n \quad \text{mit} \quad \delta_n \downarrow 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty .$$

Wegen $1 - \cos\alpha \leqq \frac{1}{2}\alpha^2$ wird bei beliebigem $h \in H$ und beliebigem $\eta > 0$:

$$\int\limits_{\|A_n x\|>\varepsilon} (h, A_n x)^2 \mu_{X_k}(dx) \leqq \int\limits_H (h, A_n x)^2 \mu_{X_k}(dx) - 2\Big\{\int\limits_H - \int\limits_{\|A_n x\|>\varepsilon}\Big\}(1 -$$
$$- \cos(h, A_n x))\,\mu_{X_k}(dx) \leqq \Big\{\int\limits_{|(h,A_n x)|\leqq\eta} + \int\limits_{|(h,A_n x)|>\eta}\Big\}[(h, A_n x)^2 -$$
$$- 2(1 - \cos(h, A_n x))]\,\mu_{X_k}(dx) + 2 \int\limits_{\|A_n x\|>\varepsilon} (1 - \cos(h, A_n x))\,\mu_{X_k}(dx)$$
$$\leqq \frac{1}{3} \int\limits_{|(h,A_n x)|\leqq\eta} |(h, A_n x)|^3 \mu_{X_k}(dx) + \int\limits_{|(h,A_n x)|>\eta} (h, A_n x)^2 \mu_{X_k}(dx) +$$
$$+ 4 \int\limits_{\|A_n x\|>\varepsilon} \mu_{X_k}(dx) \leqq \frac{\eta}{3} \int\limits_H (h, A_n x)^2 \mu_{X_k}(dx) + \int\limits_{|(h,A_n x)|>\eta} (h, A_n x)^2 \mu_{X_k}(dx) +$$
$$+ \frac{4}{\varepsilon^2} \int\limits_H \|A_n x\|^2 \mu_{X_k}(dx) .$$

Daraus folgt

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\|A_n x\|>\varepsilon} (h, A_n x)^2 \mu_{X_k}(dx) \leqq \frac{\eta}{3}(S_{Y_n} h, h) + \delta_n + \frac{4}{\varepsilon^2} Sp S_{Y_n} .$$

Zu einer vorgegebenen Basis $\{e_j\}$ setzen wir $(S_{Y_n} e_j, e_j) =: s_{jn}$ und erhalten bei beliebigem $\lambda > 0$ mit (8) die folgende Abschätzung für $L_n(\varepsilon)$.

$$L_n(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\|A_n x\|>\varepsilon} \sum_{j=1}^{\infty} (e_j, A_n x)^2 \mu_{X_k}(dx) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\|A_n x\|>\varepsilon} (e_j, A_n x)^2 \mu_{X_k}(dx) =$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{s_{jn}}{\lambda^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\|A_n x\|>\varepsilon} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{s_{jn}}} e_j, A_n x\right)^2 \mu_{X_k}(dx)$$
$$\leqq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{s_{jn}}{\lambda^2} \left[\frac{\eta}{3}\left(S_{Y_n} \frac{\lambda}{\sqrt{s_{jn}}} e_j, \frac{\lambda}{\sqrt{s_{jn}}} e_j\right) + \delta_n + \frac{4}{\varepsilon^2} Sp S_{Y_n}\right]$$
$$\leqq \frac{\eta}{3} C_0 + \frac{C_0}{\lambda^2} \delta_n + \left(\frac{2\,C_0}{\lambda \cdot \varepsilon}\right)^2 .$$

Dieser Wert läßt sich durch geeignete Wahl von λ und η für $n \to \infty$ beliebig klein machen.

5. Da aus der Lindebergschen Bedingung $\lim\limits_{n\to\infty} L_n(\varepsilon) = 0$ die Infinitesimalität der zufälligen Elemente $A_n X_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ folgt, bleibt nur noch zu zeigen, daß die Lindebergsche Bedingung hinreichend für die schwache Konvergenz $\mu_{Y_n} \Rightarrow \Phi$ ist. Es sei $\{Z_k\}$ eine Folge unabhängiger normalverteilter Zufallselemente mit der Eigenschaft

$$EZ_k = \theta , \quad S_{Z_k} = S_{X_k} , \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Die Folgen $\{Z_k\}$ und $\{X_k\}$ seien voneinander unabhängig. Dann ist

$$T_n := A_n \sum_{k=1}^{n} Z_k$$

normalverteilt und μ_{T_n} konvergiert schwach gegen die zentrierte Normalverteilung mit dem durch (9) gegebenem Streuungsoperator S. Es soll gezeigt werden, daß auch die Folge $\{Z_k\}$ der Lindebergschen Bedingung genügt,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{\|A_n x\|>\varepsilon} \|A_n x\|^2 \mu_{Z_k}(dx) = 0 . \tag{13}$$

Zunächst folgt aus der Lindebergschen Bedingung für $\{X_k\}$ die „gleichmäßige Kleinheit der Streuungen“,

$$0 = \lim_{n\to\infty} \max_{1\leq k\leq n} \int_H (h, A_n x)^2 \mu_{X_k}(dx) = \lim_{n\to\infty} \max_{1\leq k\leq n} (S_{A_n X_k} h, h) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \max_{1\leq k\leq n} (S_{A_n Z_k} h, h) .$$

Besitzt (h, Z_k) eine eigentliche Verteilung, so ist die Zufallsgröße $V = \frac{(h, Z_k)}{(S_{Z_k} h, h)}$ normalverteilt nach $N(0, 1)$. Die zugehörige Verteilungsfunktion werde mit F bezeichnet. Dann wird

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{|(h, A_n x)|>\varepsilon} (h, A_n x)^2 \mu_{Z_k}(dx) = \sum_{k=1}^{n} (S_{A_n Z_k} h, h)^2 \int_{|v|>\varepsilon/(S_{A_n Z_k} h, h)} v^2 dF(v)$$
$$\leq (S_{Y_n} h, h) \cdot \max_{1\leq k\leq n} (S_{A_n X_k} h, h) \int_{|v|>\varepsilon/\max\limits_{1\leq k\leq n} (S_{A_n Z_k} h, h)} v^2 dF(v) \leq \delta_n ,$$

wobei $\delta_n \downarrow 0$ mit $n \to \infty$. Weiter verfährt man wie in Abschnitt 4 und erhält so die Beziehung (13).

Wir wollen zeigen, daß für jedes beschränkte, gleichmäßig stetige Funktional f mit Fréchet-Ableitungen einschließlich 2-ter Ordnung gilt,

$$\lim_{n\to\infty} \left[\int_H f(x) \mu_{Y_n}(dx) - \int_H f(x) \mu_{T_n}(dx)\right] = 0 . \tag{14}$$

Damit ist dann nach Hilfssatz 3 die Konvergenz $\mu_{Y_n} \Rightarrow \Phi$ gesichert.

Unter Benutzung der in (10), (11) und (12) angegebenen Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsoperatoren ergibt sich:

$$\left|\int_H f(x) \mu_{Y_n}(dx) - \int_H f(x) \mu_{T_n}(dx)\right| = |(W_{Y_n} f)(\theta) - (W_{T_n} f)(\theta)|$$
$$\leq \sup_{h\in H} |(W_{Y_n} f)(h) - (W_{T_n} f)(h)| = \| W_{Y_n} f - W_{T_n} f \| =$$
$$= \left\| \left(\prod_{k=1}^{n} [W_{A_n X_k} - W_{A_n Z_k}] \right) f \right\| =$$
$$= \left\| \left(\sum_{k=1}^{n} W_{A_n X_1} \ldots W_{A_n X_{k-1}} [W_{A_n X_k} - W_{A_n Z_k}] W_{A_n Z_{k+1}} \ldots W_{A_n Z_n} \right) f \right\|$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} \| W_{A_n X_k} f - W_{A_n Z_k} f \| .$$

In der Taylorentwicklung

$$f(h+l) = f(h) + (l, f'(h)) + \tfrac{1}{2}(l, f''(h)\, l) + r(h; l)$$

gilt für das Restglied $|r(h;l)| \leqq \delta(h;l)\,(l,l)$, wobei $\delta(h;l)$ beschränkt ist, $\delta(h;l) \leqq C_1$, und bei beliebigem $h \in H$ für $(l,l) \to 0$ gegen Null konvergiert.

Damit folgt

$$\begin{aligned}(W_{A_n X_k} f)(h) &= \int_H f(h + A_n x)\,\mu_{X_k}(dx) = \int_H [f(h) + (A_n x, f'(h)) + \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(A_n x, f''(h) A_n x) + r(h; A_n x)]\,\mu_{X_k}(dx) = \\ &= f(h) + \tfrac{1}{2}\int_H (A_n x, f''(h) A_n x)\,\mu_{X_k}(dx) + \int_H r(h; A_n x)\,\mu_{X_k}(dx).\end{aligned}$$

Der mittlere Term läßt sich mit Formel (3) umformen

$$\begin{aligned}\int_H (A_n x, f''(h) A_n x)\,\mu_{X_k}(dx) &= \int_H \sum_{j=1}^{\infty} (e_j, A_n^* f''(h) A_n x)\,(e_j, x)\,\mu_{X_k}(dx) = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (S_{X_k} e_j, A_n^* f''(h) A_n e_j) = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (S_{Z_k} e_j, A_n^* f''(h) A_n e_j) = \\ &= \int_H (A_n x, f''(h) A_n x)\,\mu_{Z_k}(dx).\end{aligned}$$

Mithin folgt für beliebiges $h \in H$

$$(W_{A_n X_k} f)(h) - (W_{A_n Z_k} f)(h) = \int_H r(h; A_n x)\,\mu_{X_k}(dx) - \int_H r(h; A_n x)\,\mu_{Z_k}(dx).$$

Die Restgliedintegrale lassen sich so abschätzen:

$$\begin{aligned}\Big|\int_H r(h; A_n x)\,\mu_{X_k}(dx)\Big| &\leqq \int_H \delta(h; A_n x)\,\|A_n x\|^2\,\mu_{X_k}(dx) \\ &\leqq \delta(\varepsilon) \int_{\|A_n x\| \leqq \varepsilon} \|A_n x\|^2\,\mu_{X_k}(dx) + C_1 \int_{\|A_n x\| > \varepsilon} \|A_n x\|^2\,\mu_{X_k}(dx) \\ &\leqq \delta(\varepsilon)\,\mathrm{Sp}\, S_{A_n X_k} + C_1 \int_{\|A_n x\| > \varepsilon} \|A_n x\|^2\,\mu_{X_k}(dx).\end{aligned}$$

Dabei geht $\delta(\varepsilon) \downarrow 0$ mit $\varepsilon \downarrow 0$.

Dieses Ergebnis wollen wir in die Ausgangsrelation einsetzen

$$\begin{aligned}\Big|\int_H f(x)\,\mu_{Y_n}(dx) - \int_H f(x)\,\mu_{T_n}(dx)\Big| &\leqq \sum_{k=1}^{n} \|W_{A_n X_k} f - W_{A_n Z_k} f\| \\ &\leqq \sum_{k=1}^{n} [\delta(\varepsilon)(\mathrm{Sp}\, S_{A_n X_k} + \mathrm{Sp}\, S_{A_n Z_k}) + C_1(\int_{\|A_n x\| > \varepsilon} \|A_n x\|^2\,\mu_{X_k}(dx) + \\ &\quad + \int_{\|A_n x\| > \varepsilon} \|A_n x\|^2\,\mu_{Z_k}(dx))] = \\ &= 2\,\delta(\varepsilon)\,\mathrm{Sp}\, S_{Y_n} + \\ &\quad + C_1 \left(\sum_{k=1}^{n} \int_{\|A_n x\| > \varepsilon} \|A_n x\|^2\,\mu_{X_k}(dx) + \sum_{k=1}^{n} \int_{\|A_n x\| > \varepsilon} \|A_n x\|^2\,\mu_{Z_k}(dx) \right).\end{aligned}$$

Die beiden mit C_1 multiplizierten Terme verschwinden für $n \to \infty$, da die Folgen $\{X_k\}$ und $\{Z_k\}$ der Lindebergschen Bedingung genügen. Die Zahl ε kann man stets so wählen, daß $2\delta(\varepsilon) \sup_n \operatorname{Sp} S_{Y_n} = 2\delta(\varepsilon) C_0$ bei hinreichend großem n kleiner als eine vorgegebene positive Konstante wird.

Damit ist die Relation (14) nachgewiesen.

Zum Schluß möchte ich den Herren Prof. K. Matthes (Jena), Dr. habil. W. Richter (Dresden) und Dr. W. Winkler (Dresden) für anregende Gespräche bzw. Durchsicht des Manuskripts danken.

Literatur

[1] Kandelaki, N. P., and V. V. Sasonov: Teor. Verojatn. Primen. **9**, 43–52 (1964).
[2] Hille, E., and R. Phillips: Functional Analysis and Semigroups. Providence **1957**.
[3] Prochorov, Ju. V.: Teor. Verojatn. Primen. **1**, 177–238 (1956).
[4] Trotter, H. F.: Arch. der Math. **10**, 226–234 (1959).
[5] Krickeberg, K.: Trans. Third Prague Conf. Information Theory, Statist. Decision Functions, Random Processes (1962), 441–452. Prague: Publishing House of the Czecheslovak Academy of Sciences 1964.
[6] Halmos, P. R.: Measure Theory. New York: D. van Nostrand Company 1950.
[7] Gelfand, I. M., u. G. E. Schilov: Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen) Bd. 1 (Übers. a. d. Russ.). Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1960.

Kurt Reinschke
X 8027 Dresden
Georg-Schumann Str. 12