Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 6, 145—160 (1966)

Lois tendues μ sur un demi-groupe topologique complètement simple X

A. Tortrat

Reçule 30 Octobre, 1965

La structure bien connue des demi-groupes[1] complètement simples se prête à une telle étude. Quelques cas particuliers (hors le cas fini) ont été abordés (Kloss dans [4], Hebble dans [2], Rosenblatt dans [7], Per Martin Löf dans [5] pour le cas discret qui est en fait le cas X dénombrable).

L'étude peut être poussée assez loin lorsque μ appartient à un „idempotent produit", ce qui est assuré lorsque X est simple à gauche (ou à droite), et que les μ^n sont supposées U. T.[2]; nous étudions les propriétés des „lois produit" et la notion essentielle d'idempotent produit (partie II) puis abordons (III) l'équation $\mu\nu = \mu$ pour préciser certains cas particuliers permettant de généraliser en un certain sens les propriétés d'invariance, de μ, relatives au cas où X est un groupe (et d'affirmer que toute loi $m = m^2$ est loi produit), enfin étudions les liens entre μ et son idempotent (supposant la famille $\{\mu^n\}$ U. T.). La partie I est consacrée à de nombreux préliminaires, en particulier à justifier, dans le cas non compact, la représentation de X utilisée. Les résultats ont été, pour l'essentiel, publiés sans démonstration dans [10] (la restriction $X = E\times G\times F$ du titre est inutile, d'après le paragraphe I.1. ci-dessous), leurs énoncés présentent parfois ici des corrections de détail.

I. Preliminaires

I.1.

Lorsque X est compact, et simple (c. à. d. sans idéal non trivial; $XAX\subset A \Rightarrow A = X$ ou $\emptyset$), on sait que X est complètement simple (cf. ci-après) et admet la représentation (cf. [6])

$$X = E\times G\times F,\quad x\in X \Rightarrow x = e\tilde{x}f,\ \text{ avec } \tilde{x} = gxg,\ \ g \text{ unité de } G (e\in E, f\in F). \tag{1}$$

E et F sont composés d'idempotents, G est un groupe, et $FE\subset G$. X est réunion des groupes disjoints $G_{ef} = e\,Gf = eXf$, tout idempotent de X est unité d'un de ces groupes, ceux de E et F sont caractérisés respectivement par

$$eg = e,\quad gf = f, \tag{2'}$$

et $E\cap F = \{g\} = g\times g\times g$. La loi de multiplication, pour la représentation (1), G étant un groupe parmi les G_{ef} choisi une fois pour toutes, est donc:

$$x = e\times\tilde{x}\times f,\quad x' = e'\times\tilde{x}'\times f' \Rightarrow xx' = e\times\tilde{x}fe'\tilde{x}'\times f',$$

[1] Ou semi-groupe: groupoïdes à opération associative, bicontinue dans le cas topologique.
[2] Uniformément tendue(s).

d'où en particulier les relations suivantes qui contiennent (2′) et aussi $ge = g$, $fg = g$:

(2) $$ee' = e, \quad f'f = f.$$

Cette structure de X entraine évidemment que aucun idempotent ne peut en absorber (dominer) un autre: si ce sont g, g' on ne peut avoir:

$$g'g = gg' = g'.$$

On dit que tout idempotent est primitif car g' serait dans E, donc $gg' = g$[3].

De plus tout x est invariant à droite (et à gauche) par au moins un idempotent. Ces deux propriétés constituent une caractérisation des X simples qui sont complètement simples.

Montrons réciproquement que tout X (demi-groupe simple) complètement simple admet la représentation (1): il suffit pour cela que X ait un idempotent primitif au moins, ce qui est la définition de X (simple) complètement simple prise par CLIFFORD et PRESTON dans leur traité fondamental sur les demi-groupes (cf. [*1*]). On sait alors que X est somme[4] de groupes disjoints $G_{ij} = R_i \cap L_j$, les R_i, L_j étant des idéaux minimums respectivement à droite et à gauche, disjoints, avec $X = \sum_i R_i = \sum_j L_j$. On sait aussi représenter ainsi X[5]: on choisit $G = G_{11}$, et $r_i \in G_{i1} \subset L_1$, $q_j \in G_{1j} \subset R_1$ (r_i, q_j à cela près arbitraires), alors lorsque $\bar{x}$ parcourt G_{11}, $x = r_i \bar{x} q_j$ décrit G_{ij}, cette correspondance établissant un isomorphisme entre les ensembles G_{ij}, avec la loi de multiplication dans X analogue à celle dite ci-dessus: on sait que $q_j r_i \in G$, la matrice des $q_j r_i$, dite „sandwich" définit cette loi.

a) Choisissons $r_i =$ l'unique idempotent e_i du groupe G_{i1}, q_j de même dans G_{1j}. On sait que e_i a un inverse unique e_i' (au sens $aba = a$, $bab = b$) dans chaque G_{ij}, choisissons celui de $G = G_{11}$

— que $Xg = L_1$ et $gX = R_1$

— que $e_i' e_i = g$ car $G_{ij} G_{i'j'} = G_{ij'}$ donc $e_i' e_i \in G$,

donc $e_i' e_i e_i' = e_i'$ peut, dans G se simplifier (de même $f_j f_j' = g$, $f_j' \in G$) donc $e_i g = e_i$, $g f_j = f_j$. On sait que $x \to x f_j = x'$ applique L_1 sur L_j en conservant les classes R_i, et que la correspondance inverse est $x' \to x' f_j' = x$.

b) Il ne nous reste donc qu'à montrer que $f_j' = g$, $e_i' = g$. Or, suivant PYM ([*6*] du cas compact), $gXg = G$ (groupe) $\Rightarrow gX$ et Xg sont simplifiables respectivement à gauche et à droite: soit

$$x_1 = g\xi_1, \quad x_2 = g\xi_2, \quad x = g\xi, \quad \text{et} \quad xx_1 = xx_2,$$

on a:

$$x_1 = (g\xi g)^{-1}(g\xi g)\,\xi_1 = (g\xi g)^{-1} x x_1 = (g\xi g)^{-1} x x_2 = g\xi_2 = x_2.$$

Ainsi $x \in Xg$, et $xe_i^2 = xe_i \Rightarrow xe_i = x$, tout $x \in Xg$ (vu $e_i = e_i g \in Xg$, donc $xe_i \in Xg$); en particulier $ge_i = g = f_j g$, et g est bien l'unique inverse de e_i, f_j dans G puisque par exemple $e_i g e_i = e_i^2 = e_i$, on le savait, et $g e_i g = g e_i = g$. ▮

---

[3] Vérifions le: $g' = e\bar{x}f$ et $g'g = g' \Rightarrow e\bar{x} = g' = g'^2 = e\bar{x}^2$ donc $\bar{x} = g$ et $g' = e$.

[4] Réunion de parties disjointes, cf. [*1*] corollaire 2—52—b, p. 80.

[5] Suivant [*1*], p. 93.

Remarque. Il est évident que la correspondance entre G_{ef} et G devient un isomorphisme de groupe lorsqu'on fait $x \to \bar{\bar{x}} = f e \bar{x}$ (ou $\bar{x} f e$).

I.2. Topologie dans X

A) Soit (provisoirement) un espace X „contracté“: $X_0 \overset{\varphi}{\longleftrightarrow} E \times G \times F$, $x = e \times \times \bar{x} \times f = \varphi(x_0)$; désignons par $\mathscr{B}_0$ la tribu borélienne, $\mathscr{C}_0$ la classe des fonctions continues bornées sur X_0, $\mathscr{B}_{0,a}$ la tribu de Baire „engendrée“ par ces fonctions g_0 (par les ensembles $\{x : g_0(x_0) < a\}$).

Les ouverts de X et X_0 se correspondent (biunivoquement, et point par point), et la tribu borélienne dans X est $\mathscr{B} = \varphi^{-1}\mathscr{B}_0$, se correspondent donc aussi les fonctions $g_0 \in \mathscr{C}$ et $g \in \mathscr{C} : g(x) = g_0(x_0)$, $\mathscr{C}$ désignant la classe des fonctions continues bornées dans X: on a $\varphi^{-1}\mathscr{B}_{0,a} = \mathscr{B}_a$ tribu de Baire dans X.

Supposons les fonctions projection $e(x)$, $f(x)$ continues ($\bar{x}(x)$ l'étant évidemment, pour la topologie trace sur G), alors les cylindres ouverts, dans X, dont les bases sont les ouverts de E, G, F (pour les topologies traces), $\in \mathscr{B}$:

$\mathscr{B} \supset \mathscr{A} = \mathscr{B}_E \times \mathscr{B}_G \times \mathscr{B}_F$, $\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_G, \mathscr{B}_F =$ tribus boréliennes dans E, G, F, aussi bien les tribus des cylindres correspondants. D'ailleurs les G_{ef} sont alors fermés dans X.

B) On voit facilement (cf. [*9*]) que

1°) $\mathscr{B} = \mathscr{A}$ si X (ou E, G, F, c'est la même chose) est à base dénombrable d'ouverts.

2°) Si μ_0 est une loi de probabilité[6] sur $\mathscr{B}_0$ correspondant à μ sur $\mathscr{B} = \varphi^{-1}\mathscr{B}_0$, et si les lois projection μ_E, μ_G, μ_F admettent des fermés à bases dénombrables de voisinages, de mesure $> 1 - \varepsilon$ (tout $\varepsilon > 0$), alors:

$\mathscr{B} \subset \mathscr{A}_\mu$ tribu $\mathscr{A}$ complétée par rapport à μ.

3°) Si $\mu(\mu_0)$ est tendue (existence de compacts K_ε tels que $\mu(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$), toute fonction $g \in \mathscr{C}$ est $\mathscr{A}_\mu$ mesurable, en particulier $g \in \mathscr{C}$ (que plus loin nous écrirons $g(e \times \bar{x} \times f) = g(x)$, $g \in \mathscr{C}_0$, au lieu de $g_0(x_0)$).

Il est équivalent de dire que $\mathscr{A}_\mu \supset \mathscr{B}_a$.

C) Nous ne distinguerons plus dans la suite, X et X_0, raisonnant en principe dans X, mais écrivant aussi bien $x = e \times \bar{x} \times f$ ou $e \bar{x} f$ (de même que les ensembles produits: tel $E' \times H \times F' = E' H F'$) suivant les besoins. Lorsque nous devrons parler d'un choix convenable de G, nous ferons implicitement référence à X_0 indépendant de toute représentation (1).

En général il faut restreindre μ à $\mathscr{A}$ (ou à la tribu complétée $\mathscr{A}_\mu$). μ_0 est alors toujours définie sur $\mathscr{B}_0(\mu \to \mu_0 = \varphi(\mu))$ sous l'une des conditions 1°), 2°), 3°). Le plus souvent (cf. I.3.) nous devrons supposer μ K-régulière (ou tendue et régularisée):

$\mu B = \sup_{K \subset B} \mu K)$, alors μ_0, sur $\mathscr{B}_0$, ou μ (sur $\mathscr{B}$), sont bien définies par leurs restrictions à $\mathscr{B}_{0,a}(\mathscr{B}_a)$, dès que X_0 (aussi bien X) est C. R.[7], et inversement on peut supposer en ce cas, l'extension à $\mathscr{B}_0(\mathscr{B})$ réalisée.

Nous ferons une *2ème hypothèse* de caractère topologique concernant X: que le *groupe* G, avec la topologie trace qui en fait un demi-groupe topologique, *soit aussi*

---

[6] Nous dirons „mesure“ ou „loi“.

[7] Complètement régulier: séparé (au sens de HAUSDORFF), et uniformisable ou: un compact et un fermé disjoints sont „séparés“ par $g \in \mathscr{C}$.

un groupe topologique. Il suffit que $\bar{x}^{-1}$ soit, dans G, fonction continue de $\bar{x}$ (cela est assuré automatiquement si G est compact, car si $\bar{x}_\alpha \to \bar{x}$, tout ξ de G adhèrent à $\{\bar{x}_\alpha^{-1}\}$ satisfait à $\xi\bar{x} = \bar{x}\xi = e$, donc $\bar{x}_\alpha^{-1} \to \bar{x}^{-1}$).

I.3. Convolution dans X

Les considérations précédentes s'appliquent à la contraction (X' étant une „copie" de X).

$x\times x' \xrightarrow{\psi} xx'$ de $X\times X'$ dans X lui-même, avec cette différence que les fonctions $\in \psi^{-1}\mathscr{C}$, ou les tribus $\psi^{-1}\mathscr{B}$, $\psi^{-1}\mathscr{B}_a$, sont une partie seulement des fonctions $\in \mathscr{C}(X\times X')$, ou des tribus, $\mathscr{B}(X\times X')$, $\mathscr{B}_a(X\times X')$; il demeure vrai que cette dernière tribu, $\mathscr{B}_a(X\times X')$ est contenue dans $(\mathscr{A}\times\mathscr{A}')_{\mu\times\mu'}$ sous l'hypothèse que X est à base dénombrable d'ouverts (alors $\mathscr{B}(X\times X')$ l'est aussi), ou l'une des hypothèses 2°), 3°) pour le couple (μ, μ'), par exemple μ et μ' tendues.

La convolution $\mu\mu'$ est définie par l'image contractée $\mu\times\mu' \xrightarrow{\varphi} \mu\mu'$, de la loi produit $\mu\times\mu'$ définie sur $(\mathscr{A}\times\mathscr{A}')_{\mu\times\mu'}$; l'image de la tribu $\mathscr{A}\times\mathscr{A}'$ est la tribu $\mathscr{B}_E\times\mathscr{B}_G^c\times\mathscr{B}_F$, où $\mathscr{B}_G^c$ désigne la contraction de $\mathscr{B}_G\times\mathscr{B}_F\times\mathscr{B}_E\times\mathscr{B}_G$ pour l'application (trace de ψ) $\bar{x}\times f\times e'\times\bar{x}' \to \bar{x}fe'\bar{x}'$. *Si μ et μ' (donc $\mu\mu'$) sont tendues et régularisées* (et X supposé C.R.), on est assuré des formules fondamentales (cf. [*9*])

$$\mu\mu' B = \int \mu'(x^{-1}B)\,\mu(dx) = \int \mu(By^{-1})\,\mu'(dy)\,, \quad \text{tout } B\in\mathscr{B}\,, \tag{3}$$

avec

$$x^{-1}B = \{y : xy\in B\}\,, \quad By^{-1} = \{x : xy\in B\}\,,$$

et

$$\mu\mu' g = \int \mu(dx)\int g(xy)\,\mu'(dy) = \int \mu'(dy)\int g(xy)\,\mu(dx)\,, \text{ toute } g\,\mathscr{B} \text{ mesurable}; \tag{3'}$$

dans (3)—(3′) les fonctions intégrées sont toutes $\mathscr{B}$ mesurables, sans que nécessairement les fonctions $g(x\times x') = g(xx')$ dans $X\times X'$, ou les 1_B correspondantes, soient $(\mathscr{A}\times\mathscr{A}')_{\mu\times\mu'}$ mesurables.

II. Lois produit et idempotents produit

II.1. Demi-groupes fermés ω, sous l'hypothèse que G est compact (ou que les ω ∩ G_{ef} le sont)

Proposition 1. *Si on choisit G tel que $G\cap\omega \neq \emptyset$, on a pour un H sous-groupe compact de G (et évidemment E', F' fermés)*

$$\omega = E'\times H\times F'\,, \quad F'E'\subset H\,, \quad E'\cap F' \ni g \text{ unité de } G\,. \tag{4}$$

Démonstration.

1°) Posant $\omega\cap G_{ef} = \omega_{ef}$, on a $\omega = \sum_{E\times F}\omega_{ef}$,

$$\overline{\omega}_{ef} = g\,\omega_{ef}\,g \subset g\,\omega\,g = \omega_G \quad \text{et vu} \quad \omega^2\subset\omega\,, \quad \omega_{ef}^2 \subset eXf\cap\omega = \omega_{ef};$$

chaque ω_{ef} est fermé (vu l'hypothèse), donc, comme demi-groupe compact contenu dans un groupe, est un groupe représenté dans G par $\overline{\omega}_{ef} = g\,\omega_{ef}\,g$ (pour $x\to\bar{x} = gxg$) ou par $fe\overline{\omega}_{ef} = H_{ef}$ (ou $\overline{\omega}_{ef}fe = H'_{ef}$) qui sont des groupes, pour l'application rappelée ci-dessus $x \to \bar{\bar{x}} = fe\bar{x}$ ($\bar{x}fe$ pour H'_{ef}).

2°) $\omega_{ef'} \supset \omega_{ef}\omega_{e'f'} = e\overline{\omega}_{ef} \cdot fe' \cdot \overline{\omega}_{e'f'}f' \Rightarrow$

(5) $$\overline{\omega}_{ef'}f'e \supset \overline{\omega}_{ef}fe' \cdot \overline{\omega}_{e'f'}f'e,$$

d'où, pour $e = e'$

$$H'_{ef'} \supset H'_{ef}H'_{ef'} \Rightarrow H'_{ef'} \supset H'_{ef} \Rightarrow H'_{ef}$$

ne dépend pas de f (lorsque $\neq \emptyset$); mais on a de même:

$$f'e\overline{\omega}_{ef'} \supset f'e\overline{\omega}_{ef}fe'\overline{\omega}e'f' \xRightarrow{(f=f')} H_{ef} \supset H_{ef}H_{e'f} \Rightarrow H_{ef}$$

ne dépend pas de e (si $\neq \emptyset$).

Supposons G choisi tel que $\omega \cap G \neq \emptyset$; c'est à dire que les projections E' et F' de ω sur E, F, contiennent g, et pour $e = f = g$ on a:

$$\overline{\omega}_{gg} = H_{gg} = H'_{gg}, \quad \text{soit } H\text{, et} \quad H_{ef} = H_{gf}, \quad H'_{eg} = H'_{ef},$$

et

$$H'_{eg} = (ge)^{-1}H_{eg}ge = H_{eg} = H, \quad \text{de même} \quad H = H'_{gf} = (fg)^{-1}H_{gf}fg = H_{gf};$$

donc

$$H_{ef} = H'_{ef} = H.$$

3°) $\overline{\omega}_{ef} = a_{ef}H = Ha_{ef}$, avec $a_{ef} = (fe)^{-1}$ (dans G), mais (5) s'écrit:

$$H \supset Ha_{ef} \cdot fe' \cdot a_{e'f'}H \Rightarrow H \supset Ha_{ef} \cdot fe' \cdot a_{e'f'} \xRightarrow{f'=e'=g} H \supset Ha_{ef} \Rightarrow \overline{\omega}_{ef} = H.$$

Remarque. Si X est simple à gauche, $\omega_e = \omega \cap eX$, $\overline{\omega}_e = g\omega_e$, on a

$$\sum_E \omega_e = \omega, \quad \cup\, \overline{\omega}_e = \omega_G \quad \text{et} \quad \overline{\omega}_e\omega_G \subset \overline{\omega}_e,$$

tout e: dans le demi-groupe ω_G ($\subset G$) les $\overline{\omega}_e$ sont des idéaux à gauche, de réunion ω_G.

II.2. Lois produit

Appelons loi produit une loi qui sur $\mathscr{A}$[8] est le produit de ses lois marginales μ_E, μ_G, μ_F:

(6) $$\mu = \mu_E \times \mu_G \times \mu_F;$$

on peut aussi écrire $\mu_E\mu_G\mu_F$, convolution des lois marginales sur les sous-tribus de cylindres $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_G$, $\mathscr{B}_F$, qui a ici un sens:

$$\mu A = \int_{e\bar{x}f \in A} \mu_E(de)\mu_G(d\bar{x})\mu_F(df).$$

De même, par exemple, la convolution $\mu\mu'_{E\times G}$ a un sens et est une loi dans $E \times G$ (au moins pour sa tribu de Baire, sous hypothèse convenable, cf. I.3. et [*9*]):

$$(\mu\mu')_{E\times G}A = \int_{xe'\bar{x}' \in A} \mu(dx)\mu'_{E\times G}(de' \times d\bar{x}'),$$

on peut l'identifier avec la loi $\mu \times \mu'_{E\times G}$, pour les ensembles $\{x \times e \times \bar{x} : xe\bar{x} \in A\}$.

Proposition 2. *Pour toutes lois* μ, μ', *on a* $(\mu\mu')_{E\times F} = \mu_E \times \mu'_F$, *en particulier* $(\mu\mu')_E = \mu_E$, $(\mu\mu')_F = \mu'_F$.

---

[8] Bien noter que pour μ K-régulière, il y a un prolongement unique à $\mathscr{A}_\mu \supset \mathscr{B}_a$, et à $\mathscr{B}$.

En effet pour toute fonction $g(e\times\bar{x}\times f)$ ne dépendant que de e, f, $\mathcal{B}_E\times\mathcal{B}_F$ mesurable, on a:

$$\mu\mu' g = \int \mu(dx)\mu'(dx')g(xx') = \int \mu_E(de)\mu'_F(df')g(ef').$$

Proposition 3. *μ et μ' étant deux lois produit (relatives à un même G, de représentation de X_0) $\mu\mu'$ est la loi produit définie par ses projections μ_E et μ'_F respectivement sur E et F, et on a:*

$$(\mu\mu')_G = \mu_G \nu \mu'_G, \tag{7}$$

ν étant la loi induite dans G par $\mu_F(df)\times\mu'_E(de')$ et l'application $f\times e' \to fe'$.

Notons que suivant I.3. $(\mu\mu')_G$ est en général définie seulement sur $\mathcal{B}^c_G$; mais que pour μ et μ' K-régulières, ν est tendue: on est assuré de la formule (8)

$$\mu_G\nu\mu'_G g = \int \mu_G(d\bar{x})\,\nu(d\bar{y})\,\mu'_G(d\bar{x}')\,g(\bar{x}\bar{y}\bar{x}'), \tag{8}$$

pour toute $g\,\mathcal{B}_G$-mesurable, les fonctions successivement intégrées étant toutes $\mathcal{B}_G$-mesurables.

Démonstration. Dans $X\times X'$, et sur $\mathcal{A}\times\mathcal{A}'$, on a, pour toute fonction g sur X telle que:

$$g(x,x') = g(e\times\bar{x}fe'\bar{x}'\times f') \quad \text{soit} \quad (\mathcal{A}\times\mathcal{A}')_{\mu\times\mu'}$$

mesurable, (par exemple $g\,\mathcal{B}_a$-mesurable) et μ, μ' tendues).

$$\mu\mu' g = \int \mu_E(de)\,\mu_G(d\bar{x})\,\mu_F(df)\,\mu'_E(de')\,\mu'_G(d\bar{x}')\,\mu'_F(df')\,g(e\bar{x}fe'\bar{x}'f')$$

d'où l'affirmation que $\mu\mu'$ est loi produit, avec $(\mu\mu')_G \in (8)$ qui équivaut à (7).

Proposition 4. *G étant fixé, les lois idempotentes ($m = m^2$), K-régulières, qui sont loi produit, relativement à $G(:\in(6))$, sont toutes les lois*

$$m = m_E\times a m_H\times m_F, \quad F'E' \subset Ha^{-1} \tag{9}$$

avec $a\in G$, m_H loi de HAAR sur H sous-groupe compact de G, et où m_E, m_F sont des lois quelconques sur $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$, pourvu que leurs supports E', F', satisfassent à $F'E' \subset Ha^{-1}$.

Démonstration. Suivant (7), on a, dans G, $m_G\nu m_G = m_G$, d'où, notant $H = [\nu m_G]$ le sous-groupe fermé (nécessairement compact, cf. [8]) engendré par le support de m_G, celui ω_{m_G}, de m_G, est H-invariant à droite, donc réunion de classes à gauche xH, mais également contenu dans $\xi^{-1}H$ pour tout $\xi\in\omega_\nu$ puisque $\xi\,\omega_{m_G}\subset H$ (νm_G „engendre" H); ainsi $\omega_{m_G} = aH$, $m_G = a m_H\cdot\omega_\nu$ est la fermeture dans G, de $F'E'$, donc $F'E'aH\subset H \Rightarrow F'E'a\subset H$.

Ces conditions suffisent évidemment pour que la loi produit (9) soit idempotente.

$$m_G\nu \text{ „engendre" } aHa^{-1} = H' \quad \text{et} \quad H' \text{ invarie à gauche} \quad m_G = m_{H'}a\,^{9}.$$

[9] Il n'est pas vrai que dans certains cas la classe a H doit être bilatère, comme nous l'avons écrit par erreur dans [*10*].

Proposition 5. *Les lois produit idempotentes au sens précédent sont caractérisées par la représentation*

$$(9') \qquad m = m_E \times m_H \times m_F\,,\ F'E' \subset H\,,\ g \in E'\,,\ F'\,,$$

pour tout choix d'un groupe de base G coupant le support ω_m. Aussi bien on peut dire qu'existent pour (presque) tous $e \in E'$, $f \in F'$, des lois conditionnelles qui sont lois de Haar *sur des sous-groupes H_{ef} isomorphes entre eux pour n'importe laquelle des représentations dites cidessus „canoniques" des H_{ef} à partir de l'un d'entre eux (soi*

$$H = H_{gg} \neq 0\,, \quad c'est \quad h_{ef} = e(fe)^{-1}hf\,, \quad ou \quad h_{ef} \leftrightarrow h$$

avec $(fe)^{-1}h = g\,h_{ef}g)$.

Démonstration. Il est évident que si $\omega \cap G \neq \emptyset$, $aH = H$, et (9) se réduit à (9′). Sinon, d'après la démonstration de la proposition 1, pour tout choix de G, tel que $G \cap \omega_m \neq \emptyset$, $\omega_m = E' \times H \times F'$, avec $F'E' \subset H$, (car nous savons les $\omega \cap G_{ef}$ compacts, le changement de G ne fait que les permuter entre eux, seule change la représentation $E \times F$ de l'ensemble des idempotents ou unités des G_{ef}). Les lois conditionnelles eam_Hf (portées par les groupes ω_{ef}) deviennent em_Hf:

$$m = \int em_H fm(de \times df)\,;$$

et d'après la proposition 2, pour toute représentation des idempotents, $m_{E\times F}$ est loi produit (vu $m = m^2$). Quel que soit le choix de $H = g\,\omega_m g \neq \emptyset$, $H_{ef} = eHf$ est isomorphe à H suivant les relations de l'énoncé ($H \to e(fe)^{-1}Hf = eHf$ puisque $fe \in H$).

Remarque. Nous n'avons pu nous assurer que la „mauvaise représentation" (9) était valable pour tout choix de $G \cap \omega = 0$, en particulier que tout demi-groupe à $\omega \cap G_{ef}$ compacts égale $E' \times aH \times F'$ (c.à.d. compléter la proposition 1 pour le „mauvais" choix de G).

Dans le cas X simple à gauche (à droite) on a toujours la représentation $m_E \times m_H$, car $F' = \{g\} \Rightarrow F'E' = \{g\} \Rightarrow aH = H$.

III. Equation $\mu\nu = \mu$ (10)

III.1.

Le théorème qui suit a pour but de préciser des conditions permettant d'affirmer la structure précédente pour un idempotent, en particulier dans le cas où X est simple à gauche, où toutes les restrictions sautent. Le lien entre les deux problèmes ($\mu\nu = \mu$, $\mu^2 = \mu$) est assez remarquable, et il y a intérêt à dégager les propriétés de (10), plus générales.

Théorème 1. *μ étant régulière et tendue (définie sur la tribu borélienne $\mathcal{B}$), X étant C.R., et ν tendue et régulière telle que:*

1°) *le support E' de ν_E est compact et, F' étant celui de ν_F, $F'E'$ a (dans G) une fermeture compacte;*

2°) *le demi-groupe fermé $S = [\omega^c]$ engendré par le support ω_ν de ν est du type produit* (4), *pour H = sous-groupe fermé de G (H n'est pas supposé compact);*

A) *$\mu_{E\times G}$ est $E' \times H$ invariante à droite (H est compact, $\mu_F = \nu_F$), et*

B) $\mu = \mu_{E\times G} \times \mu_F$.

A) *se réduit en fait à: $\mu_{E\times G}$ est H-invariante à droite, ou $\mu_{E\times G} = \mu_{E\times G/H} \times m_H$.*

Démonstration.

1°) (10) entraine, vu (3),

(11) $$\mu\nu B = \int \nu(dx)\mu(Bx^{-1}), \quad Bx^{-1} = \{y : yx \in B\}, B \in \mathscr{B}.$$

$\mu(Bx^{-1})$ s'écrit aussi $\mu x B$ (au sens de $\mu x(B)$), et μx est, en tant que loi (et pour la CV. faible) fonction continue de x (cf. [8]); μx est K-règulière, car si C compact approche Ax^{-1} pour $\mu(C \subset Ax^{-1}$ et $\mu\, C \geqq \mu(Ax^{-1}) - \varepsilon)$, $C' = Cx$ est compact, contenu dans A et $\mu x C' = \mu(C'x^{-1}) \geqq \mu C \geqq \mu x A - \varepsilon$.

$\mu x K$ est, comme fonction de x, semi-continue supérieurement (cf. [9]) possède un maximum M sur S_f („section" de S par f fixé) si $\mu x_n K \nearrow M$ implique que les x_n restent dans un compact[10].

Tel est le premier point essentiel de la démonstration qui suit celle de [8] (pour le cas d'un groupe).

2°) Soit $x = e \times \bar{x} \times f$, et $x \in S$, f fixé. On a $x \in S_f$ ou $e\bar{x} \in S'_f = E' \times H$, et

$$\mu x K = \mu\{e' \times \bar{y} \times f'; e'\bar{y} f' e\bar{x} \in K'_f\};$$

si

$$\mu x_n K \nearrow M = \sup_{x \in S_f} \mu x K, \quad \text{avec} \quad x_n = e_n \bar{x}_n f,$$

l'ensemble $K x_n^{-1}$ étant en projection sur G contenu dans

$$\{\bar{y} : \bar{y} \in K_G\, \bar{x}_n^{-1} (F'E')^{-1}\} \ \ (K_G = gKg,$$

projection de K sur G, est compact), $\bar{x}_n$ doit demeurer dans le compact

$$\overline{F'E'}^{-1} \bar{K}_\varepsilon^{-1} K_G,$$

si $\varepsilon \leqq M$ (avec $\mu_G \bar{K}_\varepsilon > 1 - \varepsilon$, et $\overline{F'E'}$ = fermeture de $F'E'$). De même e_n étant dans E' supposé compact, il existe $x_0(f)$ tel que $\mu x_0 K = M$, donc $\mu x x_0 K \leqq M$ pour tout $x \in S$, car alors $x x_0 \in S_f$.

Pour tout xx_0, vu la semi-continuitè supêrieure dite ci-dessus, on a

$$\mu x x_0 K < M - \eta \Rightarrow \mu x' x_0 K < M - \eta/2$$

pour tout x' dans un voisinage convenable $U(x)$ de x donc (11), qui s'écrit:

(12) $$\mu\nu x_0 K = \int_{\omega_\nu} \nu(dx)\mu x x_0 K,$$

entraine $\mu\nu x x_0 K = M$, pour tout $x \in \omega_\nu$, d'où en itérant, puis passant à la limite pour obtenir S:

(13) $$\mu x x_0 M = M, \quad \text{tout} \quad x \in S.$$

3°) La deuxième hypothèse de l'énoncé intervient ici seulement, lorsque G n'est pas compact, si $x_0 = e_0 \bar{x}_0 f$, pour faire

$$x = e'hf' \quad \text{tel que} \quad xx_0 = f : \text{prendre } e' = g, h^{-1} = f' e_0 \bar{x}_0.$$

---

[10] Si nous raisonnons, dans tout ceci, comme dans [8], sur les K, au lieu des $g \in \mathscr{C}$, c'est parce que, lorsque X n'est pas localement compact, les $g < \varepsilon$ hors d'un compact ne suffisent pas à définir une loi, il peut, nous semble-t-il, ne pas exister de g telles que $g \geqq 1_{K_\varepsilon}$, pour les $K_\varepsilon \in K_\varepsilon > 1 - \varepsilon$.

On a bien:

(14) $$\mu x K = \mu f K, \quad \text{tout} \quad x = e \times h \times f, \quad e \times h \in E' \times H,$$

et H est nécessairement compact d'après le raisonnement fait plus haut pour les $\bar{x}_n$.

Mais μx étant K-régulière, l'invariance (14) vaut pour tout $B \in \mathscr{B}$, donc toute fonction $\mathscr{B}$ mesurable.

C'est en ce sens qu'il faut entendre l'affirmation A) de l'énoncé.

La formule (11) appliquée à $B \in \mathscr{B}$, où l'intégrale se réduit, vu $\mu_F = \nu_F$, à:

$$\int_{F'} \mu(df) \mu f B, \quad \text{avec} \quad \mu f B = \mu\{e \times \bar{x} \times f \in B\} = \mu_{E \times G}\{e \times \bar{x} \in B'_f\}$$

donne

(15) $$\mu = \mu_{E \times G} \times \mu_F, \quad \text{avec} \quad \mu_{E \times G} E' \times H \quad \text{invariante à droite.}$$

Réciproquement (15) entraine (10), car, suivant (11), on a:

$$\mu \nu B = \int_{F'} \mu_{E \times G}(B'_f) \mu(df) = \mu B.$$

4°) A) équivaut en fait à la seule H-invariance de $\mu_{E \times G}$, vu $E'g \subset H$ (mais seuls (10) et A) sous la première forme impliquent B)).

En effet, pour $B \subset E \times G$, on a $\mu B = \mu g B$, donc (avec $h' = g e' h$) $\mu e' h B = \mu g e' h B = \mu h B = \mu B$ dès que μ est H-invariante. On peut alors dire $\mu_{E \times G}\, m_H$-invariante: on a:

$$\mu_{E \times G} m_H B = \int m(dh) \mu_{E \times G} h B = \mu_{E \times G} B,$$

et, représentant $E \times G$ dans $E \times G/H \times H = \bar{E} \times H$, on a:

$$\mu_{E \times G} B = \mu_{E \times G} m_H B = \mu_{E \times H} m_H B = \int \mu(d\bar{e} \times dh) m\{h : \bar{e} \times h \in B\} =$$
$$= \int \mu(d\bar{e}) m B_{\bar{e}},$$

soit

$$\mu_{E \times G} = \mu_{E \times G/H} m_H.$$

Corollaire. Si $E \times G$ ou $G \times F$ sont compacts, les seules lois idempotentes m K-régulières sont les lois produit idempotentes des propositions 4 et 5. En effet G étant compact, le support ω_m est du type produit (4), et les conditions du théorème sont satisfaites (avec $\nu = \mu$, ici m). Les ω_{ef} étant eHf ou $\emptyset$, $\mu_{E \times G}$ se réduit à $\mu_E \times m_H$.

III. 2.

Cas où X est simple à gauche: F se réduit à $\{g\}$, tout idempotent de X est unité à droite, car $Xx = X$ pour tout x (sinon ce serait un idéal à gauche $< X$) donc $Xe = X$.

En particulier la loi de multiplication devient $(e \times \bar{x}) . (e' \times \bar{x}') = e \times \bar{x}\bar{x}'$, l'isomorphisme (naturel) entre les eX est $\bar{x} \leftrightarrow e\bar{x} \leftrightarrow e'\bar{x}$, où $x' = e'x$, $x = ex'$.

Alors les restrictions du théorème 1 sautent toutes. Plus précisément:

Théorème 1'. *Soit X simple à gauche, C. R., et μ, ν K-régulières, définies sur $\mathscr{B}$, l'égalité*

(10) $$\mu \nu = \mu$$

implique

a) *le support de* ν_G *engendre un sous-groupe compact* H *de* G,

b) *le demi-groupe fermé* $S = [\omega_\nu]$ *égale* $E' \times H$, E' *étant le support de* μ_E,

c) μ *est* H*-invariante à droite, donc* $E' \times H$ *invariante à droite,* $\mu = \mu_{E \times G/H} \times m_H$.

a) *et* c) *équivalent à* (10), *et* b) *résulte de* a) *suivant la proposition 1.*

Remarque. Dans $E \times G$, on a les relations générales:

$$(16,\ 16') \qquad \mu\mu' = \mu\mu'_G, \qquad (\mu\mu')_G = \mu_G\mu'_G.$$

Le membre de droite, dans (16), a un sens (cas particulier d'une remarque faite en II.2.) car pour tout $B \in \mathscr{B}_E \times \mathscr{B}_G$,

$$xx' \in B \Leftrightarrow e\bar{x}\bar{x}' \in B \Leftrightarrow \bar{x}' \in \bar{x}^{-1}\bar{B}_e,$$

et (16) en résulte.

(16′) se déduit aussi de $e\bar{x} \times e'\bar{x}'$: la projection sur G respecte le produit donc la convolution.

Démonstration. Suivant (16′), (10) entraine $\mu_G\nu_G = \mu_G$, d'où a), vu le théorème correspondant, pour (10), dans un groupe (cf. [8]). H étant compact, et chaque $\bar{S}_e$ représentation de eS dans G (pour $S = [\omega_\nu]$) étant dans H (H est la projection de S sur G), S est du type produit. Cela résulte de la proposition 1 (car chaque eH, compact, contient $\omega \cap G_e$), mais est ici beaucoup plus simple: E' étant l'ensemble des $e \in S \cap G_e \neq 0$, on a:

$$e \in E' \Rightarrow eS = S \cap G_e, \quad \text{donc} \quad S \cap g_e = egS \quad \text{ou} \quad S = E' \times H.$$

En effet $G_e \cap S$ est dans eS et, inversement $e \in E' \Rightarrow \exists\, e\,h \in S$, donc pour tout $x \in S$ on a $x = e'h' \Leftrightarrow ex = eh' = eh \cdot h^{-1}h'$; mais $\exists\, e''h^{-1}h' \in S$ puisque $H = S_G$, donc $eh \in S \Rightarrow ex = eh \cdot e''h^{-1}h' \in S$.

Il suffit alors de reprendre la 2ème partie de la démonstration du théorème 1, pour μhK, démonstration qui se réduit ici à celle du cas où X est un groupe: h parcourant H compact, μhK atteint sa borne supérieure sur H et c) en résulte.

Théorème 1″. *Si* X *est simple à gauche, C.R. et* μ, ν K*-régulières, définies sur* $\mathscr{B}$*, l'égalité:*

$$(10') \qquad \nu\mu = \mu$$

équivaut à:

a) *le support de* ν_G *engendre un sous-groupe compact* H *de* G,

b) *le demi-groupe fermé* $S = [\omega_\nu]$ *égale* $E' \times H$, E' *étant le support de* $\nu_E = \mu_E$,

c) μ *est la loi produit* $\nu_E \times \mu_G$ *et* μ_G *est* H*-invariante à gauche.*

Démonstration. Puisque $F = \{g\}$, $FE = \{g\}$, la première condition du théorème 1 est vérifiée, car ν étant ici à gauche dans (10′), c'est e que l'on fixe, donc F' qui doit être compact (ainsi que $F'E' = \{g\}$); ainsi on raisonne avec $e\bar{x}\mu K$, e fixe, $\bar{x}$ parcourant par exemple, S_G, et $e\bar{x}\mu K = \bar{x}\mu K_e = \bar{x}\mu_G\bar{K}_e$ (avec $e\bar{K}_e = K \cap G_e = K_e$). Tout comme ci-dessus $\nu_G\mu_G = \mu_G$ implique que ω_{ν_G} engendre un sous-groupe compact H de G, que $[\omega_\nu] = S = E' \times H$, avec E' = support de $\mu_E = \nu_E$. Suivant le raisonnement de théorème 1, on a $e\bar{x}\mu = e\mu$ pour tout $\bar{x} \in H$, ce qui équivaut à l'invariance (H à gauche) de μ_G (ce que nous savons déjà) puisque c'est

$$\bar{x}\mu_G \bar{K}_e = \mu \bar{K}_e\,,$$

et (10′) entraine que μ est loi produit: avec $x = e\bar{x}$ on a:

$$\mu K = \nu\mu K = \int \nu(dx) x\mu K = \int_{E'} \nu_E(de)\mu_G \bar{K}_e = \{\nu_E \times \mu_G\} K\,.$$

μ peut s'écrire ainsi $\mu = \nu_E \times m_H \times \mu_{G/H}$, à comparer avec le théorème 1′.

Corollaire. *Les seules lois (K-régulières) idempotentes* ($m = m^2$) *dans X simple à gauche (à droite) et C.R., sont les lois produit*

$$m = m_E \times m_H,\ m_E \text{ arbitraire},\quad m_H = \text{loi de Haar dans } G, \text{ et pour toute autre loi } \mu \text{ on a:} \tag{17}$$

$$\mu m = \bar{\mu}\,, \qquad\qquad m\mu = m_F \times \bar{\mu}_G\,, \tag{18, 18′}$$

$\bar{\mu}$ étant la loi H-régularisée à droite de μ, et $\bar{\mu}_G$ la loi H-régularisée à gauche, dans G, de μ_G. Si $H = G$, $\mu m = \mu_E m_G$, tandis que (dans tous les cas) $m\mu = m$ pour toute μ telle que $\omega\mu_G \subset H = \omega_{m_G}$.

Démonstration. C'est la théorème 1″ qu'il faut utiliser, avec $\nu = \mu = m$. Puisque m_G est H-invariante à gauche et $\subset H$, on a $m_G = m_H$. De plus; μ étant une loi quelconque, vu (16) et (17), $m\mu = m_E \times m_H \mu_G$.

$\bar{\mu}_G = m_H \mu_G$ est la H-régularisée à gauche de μ_G: loi H-invariante ayant même projection que μ_G sur G/H (classes à droite), qu'on peut considérer comme le produit de m_H par cette projection (cf. [*9*]).

De même vu (16), $\bar{\mu} = \mu m_H$ est H-invariante à droite, et d'après le théorème 1′ c'est $\mu_{E\times G/H} \times m_H$.

III.3. Remarques concernant le cas où X est un demi-groupe discret (cf. [*5*])

Proposition 6. *Soit X un demi-groupe topologique quelconque, et μ, μ', μ'' des lois K-régulières de supports ω, ω', ω''. On peut supposer (sans restriction) que le demi-groupe fermé $[\omega]$ égale X, donc $\omega = X$ si $\mu = \mu^2$. Alors si $\mu = \mu'\mu''$, pour tout idéal I dans X, on a:*

$$\mu I^c \leqq \mu' I^c \cdot \mu'' I^c\,[11],$$

$$\text{en particulier} \begin{cases} \mu = \mu\nu \quad \text{ou} \quad \mu = \nu\mu \Rightarrow \mu I = 1 \quad \text{ou} \quad \nu I = 0 \\ m = m^2 \Rightarrow m I = 0 \quad \text{ou} \quad 1\,. \end{cases}$$

En effet, adaptant le raisonnement de Per Martin-Löf (qui dans X discret concerne $m = m^2$);

(11) donne (vu $x \in I \Rightarrow xy \in I$)

$\mu I^c = \int_{I^c} \mu'(dx)\mu''\{x^{-1}I^c\}$, dès que I est idéal à droite, et si I est idéal à gauche, $xy \in I^c \Rightarrow y \in I^c$, donc $\mu''\{x^{-1}I^c\} \geqq \mu'' I^c$. ▮

---

[11] I^c désigne le complémentaire $X - I$ de I.

Dans [5], l'auteur suppose la topologie discrète, et que $mB = \sup_{F \subset B} F$, F désignant un ensemble fini, quelconque, de points. Cela revient à supposer m discrète, son support est dénombrable (donc aussi X) puisque la topologie est discrète et que $m(x) > 0$, pour tout $x \in X$ (si $m = m^2$). Alors X est simple: tout idéal (tout ensemble) étant de $\mathscr{B}$, $mI = 0$ ou $1 \Rightarrow I$ est vide ou $= X$, puisque $mI = 1 \Rightarrow I \supset \omega_m = X$. X est également complètement simple: il suffit pour cela que X ait au moins un idéal minimal à gauche, et un à droite; or ces idéaux L_j (R_i) coincident avec les classes essentielles (ou fermées minimales) pour la chaine de MARKOV à gauche (ou à droite), homogène (marche au hasard) dans l'espace $X: x \to yx$ (ou xy) avec les probabilités $m(y)$, et m étant une loi stationnaire pour chacune de ces chaines, ces idéaux existent et sont même des classes positives. X est alors, puisque complètement simple, réunion de ces classes essentielles, toutes > 0 (sinon $[\omega]$ serait $< X$), tous les états sont essentiels et positifs. On vérifie (cf. [5]) que la mesure (non bornée à priori) $p(x) = m(L_j)$ pour $x \in L_j$ est stationnaire pour la chaine, dans chaque classe R_i, donc égale m (à un facteur près): m est constante sur chaque groupe G_{ef}, donc ceux-ci sont finis (et ont même nombre de points étant isomorphes): ainsi on retrouve la structure produit (9′) pour ces lois idempotentes, mais ces résultats ne semble pas découler directement du théorème 1 ci-dessus.

Cf. IV.2. ci-dessous pour le cas où X n'est pas complètement simple.

IV. Lois appartenant a un idempotent produit

Soit μ K-régulière, toutes les μ^n sont telles, sur $\mathscr{B}$ par exemple, après prolongement convenable. Supposons la famille $\{\mu^n\}$ U. T., alors l'ensemble $D(\mu)$ des lois limites de $\{\mu^n\}$ est un groupe compact d'unité m (cf. [3]): toute $\mu' \in D(\mu)$ satisfait à:

$$\mu' m = m \mu' = \mu' \tag{19}$$

et

$$\exists \mu'' \in (19) \quad \text{avec} \quad \mu' \mu'' = \mu'' \mu' = m. \tag{19'}$$

On dit que μ appartient à l'idempotent m: $\mu \in m$.

IV.1. Lois appartenant à un groupe dont l'unité m est loi produit ($m \in (9')$ pour un choix convenable de G)

Proposition 7. *Si m est loi-produit, μ' l'est également.*

Soit $A \in \mathscr{B}_a$ tribu de Baire de X; pour μ' et m complètes et puisque $m = m_{E \times G} m_F$, on a (A_e, A_f, A_{ef} désignant des sections de A, ensembles de $G \times F$, $E \times G$, G respectivement)

$$\mu' A = \mu' m A = \int_{xx' \in A} \mu'(dx) m(dx') = \int m_F(df) \int_{xe\bar{x} \in A_f} \mu'(dx)\, m_{E\times G}(de \times d\bar{x}) =$$
$$= \{\mu'^{*}_{E\times G} m_F\} A,$$

$\mu'^{*}_{E\times G}$ étant la loi définie sur la tribu de Baire (complétée)[12] de $E \times G$ par $\mu' m_{E\times G}$.

---

[12] Cette précaution ainsi que l'hypothèse $A \in \mathscr{B}_a$ est inutile (en étendant les remarques faites en I.3.).

Mais on a de même $\mu' = m_E \mu'^*_{G\times F}$, et, désignant par μ'^*_G la restriction de $\mu'^*_{G\times F}$ à la tribu de Baire dans G, on a:

$$\mu' A_f = \{m_E \mu'^*_G\} A_f \Rightarrow \mu' A = \int m_E(de)\, m_F(df)\, \mu'^*_G A_{ef}.$$

Ainsi μ' est ici produit sur $\mathscr{B}_a$, son prolongement à $\mathscr{A}_{\mu'}$ (et $\mathscr{B}$) égale nécessairement celui défini par le produit des prolongements à $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_G$, $\mathscr{B}_F$ de ses composantes, μ' est bien loi produit sur $\mathscr{A}_{\mu'}$.

La formule (7), puisque $F'E' \subset H \Rightarrow \nu m_H = m_H \nu = m_H$, implique

$$\mu'_G m_H = m_H \mu'_G = \mu'_G; \tag{19'}$$

tout se passe donc comme lorsque X est un groupe, pour μ'_G sur $\mathscr{B}_G$ et μ'_G est portée par une réunion de classes bilatères $aH = Ha$ qui se réduit à une seule vu l'existence de μ''_G inverse de μ'_G pour m_H ($a^{-1} \in \omega_{\mu''_G} \Rightarrow \omega_{\mu'_G} \subset Ha$ et aH).

Théorème 2. *Toute loi μ' appartenant à un groupe dont l'unité m est une loi produit, est, (sur $\mathscr{A}_{\mu'}$) de la forme*

$$m_E \times a\, m_H \times m_F, \quad aH = Ha, \quad F'E' \subset H (m \in (9')). \tag{20}$$

Remarquons que a est dans G un élément compact (engendrant un groupe fermé qui est compact) car $\mu'^m = m_E \times a^n m_H \times m_F$, les $a^n m_H = \{\mu'^n\}_G$ sont, dans G, U. T. donc aussi les lois a^n (aussi bien $a^n H$ coupe un K_ε sous-tendant ces lois à ε près, donc tout $a^n \in K_\varepsilon H^{-1}$).

IV.2. Lois $\mu \in m$, $m^2 = m$ étant loi produit

Enonçons d'abord quelques propriétés plus générales. On sait qu'on a, dès que $\mu \in m$ (X demi-groupe topologique C. R. quelconque)

$$\mu m = m \mu = \mu' \in (19) \text{ et } (19'), \tag{21}$$

car $m = \lim \mu^{n_\alpha} \Rightarrow m\mu = \mu m = \lim \mu^{n_\alpha + 1} \in D(\mu)$. D'autre part on a:

$$\pi_n = \frac{1}{n} \sum_1^n \mu^k \to \pi = \pi\mu = \mu\pi = \pi^2, \tag{22}$$

π absorbant toute loi $\mu' \in D(\mu)$: $\pi\mu' = \mu'\pi = \pi$ puisque $\pi\mu^n = \pi$, en particulier π absorbe m, d'où pour μ' définie par (21)

$$\pi'_n = \frac{1}{n} \sum_1^n \mu'^k = m \pi_n m \to \pi, \quad \text{en particulier} \quad \mu' = m \Rightarrow \pi = m. \tag{22'}$$

Réduisant X à $[\omega_\mu]$, demi-groupe engendré par μ, ce qui n'est pas une restriction, le support N de π est un idéal (fermé) dans X, car $N\omega^n$ et $\omega^n N$ sont dans $N (\omega = \omega_\mu)$, donc aussi $N[\omega]$ et $[\omega]N$.

Théorème 3. *Si X est un espace topologique normal, ou X C. R. et N compact, et si μ est une loi sur $\mathscr{B}$ à μ^n uniformément tendues, toutes les lois de $D(\mu)$ ont leur support dans N.*

Démonstration. Soit $\mathscr{O} \supset N$ un ouvert quelconque; séparant N et $\complement\, \mathscr{O}$ par une fonction continue, il existe $\mathscr{O} \supset \mathscr{O}' \supset N$ avec $\mathscr{O}'$ de frontière π nulle et puisque alors $\pi_n \mathscr{O}' \to \pi \mathscr{O}' = 1$, on a $\limsup \mu^n \mathscr{O}' = 1$, d'où une suite $k_j \nearrow \infty$, telle que $\mu^{k_j} \mathscr{O}' > 1 - \varepsilon_j$. Désignons par K_{ij} l'ensemble des k tels que $\mu^k \mathscr{O}_i > 1 - \varepsilon_j$ (une suite

$\varepsilon_j \searrow 0$), i indexant l'ensemble des ouverts contenant N. Les intersections finies de K_{ij} définissent une base de filtre (sur les entiers k), car pour I fini, et des $j(i)$ quelconques, l'ensemble $\{k : \mu^k \mathcal{O}_i > 1 - \varepsilon_j,$ tout $i \in I\}$ n'est jamais vide, contenant $\{k : \mu^k \{\bigcap_I \mathcal{O}_i\} > 1 - \inf_{i \in I} \varepsilon_{j(i)}\}$.

Les ensembles correspondants de $\mu^k : D_{ij}$, étant relativement compacts, il existe μ_0' adhèrente au filtre $\mathcal{F}$ correspondant dans $\{\mu^k\}$, et pour i_0 fixe, choisissant $\mathcal{O}_{i_0} \supset \mathcal{O}_{i_0}'' \supset N$, tel que $F_r \mathcal{O}_{i_0}''$ soit μ' nul, on a:

$\mu' \mathcal{O}_{i_0} \geqq \mu' \mathcal{O}_{i_0}'' = \lim_{\mathcal{F}} \mu^k \mathcal{O}_{i_0}'' \geqq 1 - \varepsilon_j$ pour tout j, donc $= 1$. Ainsi $\mu_0' N = \inf_{\mathcal{O} \supset N} \mu' \mathcal{O} = 1$. Mais pour μ' quelconque de $D(\mu)$ il existe μ'' telle que $\mu' = \mu_0' \mu''$ donc $\omega_{\mu'} \subset$ fermeture de $NX \subset N$.

Il résulte de la proposition 6, que, dans N, tout idéal (mesurable) est nulle part dense (rare), ou est de π mesure égale à 1. Rappelons que pour X compact[13] on montre que N est simple (donc complètement simple car compact), en fait N est idéal minimal et, dans tous les cas, un idéal minimal est unique et est un demi-groupe sans idéal non trivial; on le dit simple.

Corollaire *(des théorèmes 2 et 3). Si π, de support N, est loi produit $\pi = \pi_E \times \times m_H \times \pi_F$, m_H loi de* HAAR*), et si X, demi-groupe topologique engendré par ω_μ est normal (ou C. R. et N compact), la CV. $\mu^n \to m$ (alors $m = \pi$) équivaut à $\mu m = m \mu = m$. En effet si μ' (défini par (21)) égale m, $D(\mu)$ se réduit à $\{m\}$, idempotent auquel appartient μ.*

Revenons au cas où X est complètement simple ($X \in (1)$). De (20) et (21) on déduit

$$\omega_\mu \subset \omega_{\mu'} = E' \times aH \times F', \quad F'E' \subset H, \quad aH = Ha \tag{23}$$

car $x \in \omega_\mu \Rightarrow gx$ et $xg \in \omega_{\mu'}$ et $x = e\bar{x}f \Rightarrow \bar{x}f \in HF'$, $e\bar{x} \in E'H$.
Remarquons que (23) entraine (21) en prenant $m = \mu_E \times m_H \times \mu_F$ et $\mu' = \mu_E \times a m_H \times \mu_F$, et également

$$\omega_\mu^n \subset \omega_{\mu'}^n = E' \times a^n H \times F' \,(\text{avec } a^n H = H a^n). \tag{23'}$$

Théorème 4. *Si μ appartient à un idempotent produit m (dans $X \in (1)$), on a*

$$\mu = \mu_E \times m_H \times \mu_F, \tag{24}$$

H étant le plus petit sous-groupe compact de G (un quelconque des groupes G dont X est la réunion, pourvu que $G \cap \omega_\mu \neq \emptyset$) tel que

$$\omega_\mu \subset E' \times aH \times F', \quad Ha = aH, \quad F'E' \subset H, \tag{24'}$$

E', F' supports de μ_E, μ_F; μ^n converge (alors vers m) si et seulement si $aH = H$ (a lors $[\omega_\mu] = E' \times H \times F'$), et la limite π de CESARO, *définie par* (22) *est*

$$\pi = \mu_E \times m_{[aH]} \times \mu_F, \quad m_{[aH]} = \textit{loi de } \text{HAAR} \textit{ sur } [aH]. \tag{25}$$

[13] Cf. dans C. r. Acad. Sci., 261, 3941—3944 une extension du théorème de ROSENBLATT. Dans la démonstration que nous en donnons (théorème 1), if faut inclure dans la définition de $\mathcal{O}_n$ les conditions y_n et $y_{n+L+1} \in \mathrm{K}_\varepsilon$.

Démonstration. 1°) La CV. de μ^n nécessite $\mu' = m$, donc $aH = H$ dans (23). Cela suffit vu (23'), car alors $[\omega_\mu] = E' \times H \times F'$, donc vu le théorème 2 (cf. (20)) $D(\mu)$ se réduit à $\{m\}$.

2°) Dans tous les cas (CV. de μ^n ou non) H est bien le plus petit $\in$ (24'). S'il existe un $H' \not\supset H$, satisfaisant à (24'), on peut le supposer dans H (le remplaçant par $H' \cap H$) car a est quelconque dans la classe cherchée; a étant compact, vu $\mu^{n_\alpha} \to m$, on a pour un filtre plus fin convenable $(\mu^{n_\alpha})_G a^{-n_\alpha} \to c m_H \subset H'$ donc $H = H'$.

3°) (25) résulte de (22'), de $\pi'_n = \mu_E \times \frac{1}{n} \sum_1^n a^k m_H \times \mu_F$ et de ce que, dans le sous groupe compact:

$H' = [aH]$ de G, $\frac{1}{n} \sum_1^n a^k m_H$ CV. vers $m' = m'^2$, m' absorbant $a m_H$ (cf. (22)): m' est $[aH]$ invariante à droite et à gauche donc égale la loi de Haar sur H' (redémontrant ici des résultats classiques).

Remarque. (24') équivaut, en posant $E' = \omega_{\mu_E}$, $F' = \omega_{\mu_F}$ à

$$g\,\omega_\mu g = \omega_G \subset a\,H = H\,a, \quad F' E' \subset H. \tag{26}$$

On peut prolonger le problème de la caractérisation de l'idempotent m, μétant donné, en supposant seulement que N support de π (et non X) est complètement simple, et que π est loi produit: m l'est elle aussi ? et en ce cas (dans les conditions du théorème 3 qui assurent que μ' est dans N) la relation (26) qui demeure nécessaire, permet-elle encore de caractériser H (et le cas où μ^n CV.) ? Voir [*7*] pour le cas où X est compact.

IV.3. Cas où X est simple à gauche

Théorème 4'. *Soit X simple à gauche, les μ^n U. T. (et K-régulières), alors μ appartient à un idempotent produit*

$$m = \mu_E \times m_H,$$

et H est le plus petit sous-groupe, nécessairement compact, tel que

$$\omega_\mu \subset E' \times H\,a, \quad a\,H = H\,a, \quad E' = \text{support de } \mu_E; \tag{27}$$

on a

$$\mu^n a^{-n} \to m \quad et \quad \pi_n \to \mu_E \times m_{[aH]},$$

il y a CV. de μ^n si et seulement si $aH = H$.

Démonstration. Comme cas particulier du théorème 4, compte tenu du corollaire du théorème 1'', assurant que m est loi produit, on obtient toutes les affirmations de l'énoncé, sauf celle plus précise que $\mu^n a^{-n} \to m$, qui résulte du raisonnement classique (cf. [*3*]): sachant ici que:

$$\omega_\mu^n \subset (E' H\,a)^n = E' \times H\,a^n (H\,a^n = a^n H),$$

et que les lois $\mu^n a^{-n}$ sont U. T. (car a est élément compact de G), on en déduit (voir Th. 3, 2°)) $\mu^{n_\alpha} a^{-n_\alpha} \to \mu' c$, d'où $\omega_{\mu'} c \subset E' \times H$ avec $\mu' = \mu_E \times m_H a$, soit $Hac = H$: les lois limites pour $\{\mu^n a^{-n}\}$ se réduisent à m.

Remarque. (27) s'écrit aussi $\omega_\mu \subset E' Ha$, $E'H$ est un demi-groupe fermé (cf. [2] pour un essai particulier de caractérisation du cas de CV. sous cette forme).

Abreviations et notations

C. R.	Complètement régulier	$\mathscr{B}_a$	tribu de Baire
CV.	Converge, convergence ...	$\mathscr{B}$	tribu borélienne
$F_r A$	Frontière de l'ensemble A	K-régulière	tendue et régulière ou „approchée par les compacts"
U. T.	Uniformément tendu (e, es)		

Bibliographie

[1] CLIFFORD, A. H., and G. B. PRESTON: The algebraïc theory of semi-groups. Mathematical surveys American Math. Soc. 1961.

[2] HEBBLE, M.: Probability measures on certain compact semi-groups. J. math. Analysis Appl. 812, 258—277 (1964).

[3] KLOSS, B. M.: Probability distributions on bicompact topological groups. Teor. Verojatn. Primen 4, 237—270 (1959).

[4] — Stable distributions on a class of locally compact groups. Theor. Probab. Appl. 7, 237—257 (1962).

[5] PER MARTIN LÖF: Probability theory on discrete semi-groups. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 4, 78—102 (1965).

[6] PYM, J. S.: Idempotent measures on semi-groups, Pacific J. Math. 12, 685—698 (1962).

[7] ROSENBLATT, M.: Equicontinuous Markov Operators. Theor. Probab. Appl. 9, 180—197 (1964).

[7'] — Limits of convolution sequences of measures on a compact topological semi-group. J. Math. Mech. 9, 293—306 (1960).

[8] TORTRAT, A.: Lois de probabilité sur un espace topologique complètement régulier. Ann. Inst. Henri Poincaré I, 217—237 (1965).

[9] — Lois tendues et convolutions dénombrables dans un groupe topologique. Ann. Inst. Henri Poincaré, 279—298 (1966).

[10] — Lois de probabilité dans les demi-groupes topologiques complètement simples de la forme $E \times G \times F$. C. r. Acad. Sci., Paris 260, 4408—4411 (1965).

Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre Curie
Paris, 5ème, France