Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 6, 125—128 (1966)

Zur Existenz von separablen stochastischen Prozessen

RUDOLF BORGES

Eingegangen am 28. Oktober 1965

1. Einleitung und Ergebnisse

J. L. DOOB beweist in seinem bekannten Lehrbuch [3, II Satz 2.4] den folgenden

Satz 1. *Es sei $(x_t)_{t\in T}$ ein stochastischer Prozeß mit $T \subset \tilde{R}$. Dann gibt es einen separablen stochastischen Prozeß $(y_t)_{t\in T}$ auf demselben vollständigen Wahrscheinlichkeitsfeld $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ mit der Eigenschaft, daß für alle $t \in T$*

$$P\{\omega : x_t(\omega) = y_t(\omega)\} = 1\,,$$

(y_t kann die Werte $\pm\infty$ annehmen).

Dabei bezeichnet $\tilde{R}$ die Menge der eigentlichen und uneigentlichen reellen Zahlen. Wie DOOB bemerkt, läßt sich der Satz leicht auf allgemeinere Parametermengen T und Wertebereiche E von x_t übertragen, insbesondere kann man bekanntlich (siehe z. B. [1]) den Beweis wörtlich auf stochastische Prozesse mit Werten aus kompakten Hausdorffräumen E mit abzählbarer Basis übertragen.

Im Fall $E \subset \tilde{R}$ kann man die Voraussetzung der Vollständigkeit des Wahrscheinlichkeitsfeldes $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ mühelos eliminieren (siehe z. B. [1]). Hier wollen wir dies im allgemeinen Fall durchführen und beweisen:

Satz 2. *Es sei $(x_t)_{t\in T}$ ein stochastischer Prozeß, definiert auf einem beliebigen Wahrscheinlichkeitsfeld $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ mit Werten $x_t(\omega)$ aus einem kompakten Hausdorffraum E mit abzählbarer Basis und einem Parameterraum T, der Teilmenge eines topologischen Raumes F mit abzählbarer Basis $\mathfrak{J}$ ist. Dann gibt es einen separablen stochastischen Prozeß $(y_t)_{t\in T}$ mit*

$$P\{\omega : y_t(\omega) = x_t(\omega)\} = 1 \quad \text{für} \quad t \in T\,.$$

In Abschnitt 3 geben wir ein Auswahlverfahren einer $\mathfrak{F}$-meßbaren Funktion von ω aus kompakten Teilmengen $C(\omega)$ eines kompakten Hausdorffraumes E mit abzählbarer Basis an, das auch in anderen Zusammenhängen von Interesse sein dürfte. Zum Beweis des Satzes 2 entnehmen wir in Abschnitt 2 einen Hilfssatz und ein Separabilitätskriterium aus dem Doobschen Beweis von Satz 1 und führen dann den Beweis in Abschnitt 4 mit zweimaliger Anwendung des Auswahlverfahrens durch.

2. Die Doobschen Resultate

Im folgenden bezeichnet $(x_t)_{t\in T}$ oder $(y_t)_{t\in T}$ immer einen stochastischen Prozeß, definiert auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ mit Werten $x_t(\omega)$ aus einem kompakten Hausdorffraum E mit abzählbarer Basis und einer Parametermenge T, die Teilmenge eines topologischen Raumes F mit abzählbarer

Basis $\mathfrak{J}$ ist. Der stochastische Prozeß $(x_t)_{t\in T}$ heißt separabel, wenn es eine abzählbare Menge $S \subset T$ mit

$$\{\omega : x_t(\omega) \in A \quad \text{für alle} \quad t \in I \cap T\} = \{\omega : x_t(\omega) \in A \quad \text{für alle} \quad t \in I \cap S\} \tag{2.1}$$

für alle abgeschlossenen $A \subset E$ und alle offenen $I \subset F$ gibt. Dabei nennt man S einen Separator des Prozesses. Der Doobsche Existenzsatz separabler stochastischer Prozesse für vollständige Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ und sein Beweis für den Fall $E = F = \tilde{R}$ lassen sich wörtlich auf den hier betrachteten allgemeineren Fall übertragen [*3*, S. 56—59]. Wir entnehmen aus diesem Beweis den folgenden Hilfssatz und das Kriterium.

Dabei sei in Anlehnung an die Doobsche Bezeichnungsweise $A_S(I, \omega)$ die abgeschlossene Hülle von $\{x_s(\omega) : s \in I \cap S\}$ für ein abzählbares $S \subset T$, für $I \in \mathfrak{J}$ und $\omega \in \Omega$ und

$$A_S(t, \omega) := \bigcap_{t \in I \in \mathfrak{J}} A_S(I, \omega). \tag{2.2}$$

Hilfssatz (2.3). *Zu jedem stochastischen Prozeß $(x_t)_{t\in T}$ gibt es eine abzählbare Menge $S \subset T$ und zu jedem $t \in T$ eine Nullmenge Λ_t, so daß für alle $t \in T$ gilt*

$$A_S(t, \omega) \neq \emptyset \quad \textit{für} \quad \omega \in \Omega$$

und

$$x_t(\omega) \in A_S(t, \omega) \quad \textit{für} \quad \omega \notin \Lambda_t \quad \textit{oder} \quad t \in S.$$

Kriterium (2.4). *Ein stochastischer Prozeß $(x_t)_{t\in T}$ ist separabel mit dem Separator S, wenn für alle $t \in T$ gilt*

$$x_t(\omega) \in A_S(t, \omega).$$

Wir bemerken, daß man leicht auch die Notwendigkeit der Bedingung nachweist.

Aus dem Hilfssatz und Kriterium folgt nach Doob unmittelbar Satz 1, indem man $y_t(\omega) = x_t(\omega)$ für $t \in S$ oder $t \notin S$, $\omega \notin \Lambda_t$ und im übrigen $y_t(\omega)$ beliebig aus $A_S(t, \omega)$ wählt, falls $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ vollständig ist. Zum Beweis von Satz 2 muß man $y_t(\omega)$ $\mathfrak{F}$-meßbar auswählen.

3. Auswahl meßbarer Funktionen

Um aus einer Familie von kompakten Mengen $C(\omega)$ eines kompakten Raumes E mit abzählbarer Basis meßbare Funktionen von ω mit Werten in $C(\omega)$ auswählen zu können, benötigen wir eine geeignete Struktur. Der folgende Hilfssatz liefert uns eine totale Ordnung, nämlich die lexikographische Ordnung im R^∞. Dies gestattet die Auswahl bestimmter Punkte mit Hilfe des lexikographischen Supremums und Infimums. Die weiteren Hilfssätze geben dann hinreichende Bedingungen an, wann dies meßbare Funktionen sind.

Hilfssatz (3.1). *Jeder kompakte Hausdorffraum E mit abzählbarer Basis ist einer kompakten Teilmenge C des R^∞ mit der Tychonoffschen Produkttopologie homöomorph.*

Beweis. Jeder kompakte Hausdorffraum E mit abzählbarer Basis ist normal und jeder normale Raum ist regulär. Nach dem Urysohnschen Metrisationssatz (siehe z.B. [*5*], S. 125) ist jeder reguläre Hausdorffraum mit abzählbarer Basis einem Teilraum des Kubus $[0, 1]^\infty \subset R^\infty$ homöomorph. Daher ist E einem kompakten Teilraum C von R^∞ homöomorph.

Es sei $\pi_n : R^\infty \to R^n$ die Projektion von $a \in R^\infty$ auf seine ersten n Komponenten. Weiter seien R^∞ und R^n für $n = 1, 2, \ldots$ lexikographisch geordnet. Schließlich bezeichne $\mathfrak{B}^\infty$ und $\mathfrak{B}^n$ die Gesamtheit der Borelschen Mengen von R^∞ bzw. R^n. Schließlich bezeichne B^α die abgeschlossene Hülle der Menge B.

Hilfssatz (3.2). *Es sei $C(\omega)$, $\omega \in \Omega$, eine Familie von kompakten Teilmengen des R^∞ mit $\mathfrak{F}$-meßbaren Stützfunktionen*

$$H_n(u, \omega) := \sup\{u' \pi_n a : a \in C(\omega)\}$$

für alle $u \in R^n$ und $n = 1, 2, \ldots$. Dann existieren $\sup C(\omega)$ und $\inf C(\omega)$ bzgl. der lexikographischen Ordnung und sind $(\mathfrak{B}^\infty, \mathfrak{F})$-meßbar.

Beweis. Die Projektion π_n ist stetig, und daher folgt aus der Kompaktheit von $C(\omega)$ die von $\pi_n C(\omega)$. Nach H. Richter [*6*, Hilfssatz 4] (für andere Beweise siehe [*2*] und [*4*]) ist der E_n-optimale Punkt von $\pi_n C(\omega)$ $(\mathfrak{B}^n, \mathfrak{F})$-meßbar; dabei ist der E_n-optimale Punkt einer beschränkten Menge $B \subset R^n$ als das lexikographische Infimum von B^α definiert. Es existiert also $\inf \pi_n C(\omega)$ und ist $(\mathfrak{B}^n, \mathfrak{F})$-meßbar für jedes $n = 1, 2, \ldots$. Daraus folgt die Existenz von $\inf C(\omega)$ und es gilt

$$\pi_n \inf C(\omega) = \inf \pi_n C(\omega).$$

Daher ist jede Projektion von $\inf C(\omega)$ $(\mathfrak{B}^n, \mathfrak{F})$-meßbar und folglich $\inf C(\omega)$ selbst $(\mathfrak{B}^\infty, \mathfrak{F})$-meßbar. Analog erhält man die Behauptung für $\sup C(\omega)$.

Hilfssatz (3.3). *Es sei $(z_i)_{i \in I}$ eine abzählbare Familie von $(\mathfrak{B}^\infty, \mathfrak{F})$-meßbaren Funktionen und $C(\omega)$ die abgeschlossene Hülle von $\{z_i(\omega) : i \in I\}$. Ist $C(\omega)$ kompakt, so existieren $\sup C(\omega)$ sowie $\inf C(\omega)$ und sind $(\mathfrak{B}^\infty, \mathfrak{F})$-meßbar.*

Beweis. Für die Stützfunktionen der Projektionen π_n von $C(\omega)$ in den R^n gilt

$$\begin{aligned} H_n(u, \omega) &:= \sup\{u' \pi_n a : a \in C(\omega)\} \\ &= \sup\{u' \pi_n z_i(\omega) : i \in I\}. \end{aligned}$$

Die reellen Funktionen $u' \pi_n z_i$, $i \in I$, hängen stetig von den $(\mathfrak{B}_\infty, \mathfrak{F})$-meßbaren Funktion z_i, $i \in I$, ab und sind daher selbst $\mathfrak{F}$-meßbar. Da das Supremum abzählbar vieler $\mathfrak{F}$-meßbarer Funktionen wieder $\mathfrak{F}$-meßbar ist, sind die Stützfunktionen für alle $u \in R^n$ und alle $n = 1, 2, \ldots$ $\mathfrak{F}$-meßbar. Daher folgt aus Hilfssatz (3.2) die Behauptung.

Wir bemerken noch, daß für kompakte $C \subset R^\infty$ gilt

$$\sup C \in C. \tag{3.4}$$

Denn jede kompakte Menge C ist abgeschlossen. Da die Ordnungstopologie feiner als die dem R^∞ zugrunde gelegte Tychonoffsche Produkttopologie ist, ist C auch in der Ordnungstopologie abgeschlossen und daher gilt (3.4).

4. Beweis von Satz 2

Da nach Hilfssatz (3.1) jeder kompakte Hausdorffraum mit abzählbarer Basis homöomorph einer kompakten Teilmenge des R^∞ ist, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $E \subset R^\infty$ und kompakt ist.

Nach Hilfssatz (2.3) gibt es eine abzählbare Menge $S \subset T$ mit $A_S(t, \omega) \neq \emptyset$ für alle $t \in T$ und $\omega \in \Omega$. Daraus folgt nach Definition $A_S(I, \omega) \neq \emptyset$ für alle $\omega \in \Omega$ und $I \in \mathfrak{J}$ mit $I \cap T \neq \emptyset$. Ferner ist $A_S(I, \omega)$ als abgeschlossene Teilmenge des kompakten E selbst kompakt. Wegen $A_S(I, \omega) := \{x_s(\omega) : s \in I \cap S\}^\alpha$ und der Abzählbarkeit von S folgt aus Hilfssatz (3.3) die Existenz von $\sup A_S(I, \omega)$ und aus (3.4) weiter $\sup A_S(I, \omega) \in A_S(I, \omega)$.

Wir betrachten ein festes $t \in T$ und schreiben alle Mengen I der abzählbaren Basis $\mathfrak{J}$ mit $t \in I$ als Folge $I_1, I_2, \ldots$ auf. Da E kompakt ist, existiert nach Hilfssatz (3.3)

$$\inf\{\sup A_S(I_1 \cap \cdots \cap I_n, \omega) : n \geqq m\}^\alpha \tag{4.1}$$

für jedes $m = 1, 2, \ldots$ und ist $(\mathfrak{B}^\infty, \mathfrak{F})$-meßbar. Das Infimum hängt jedoch nicht von m ab. Denn $A_S(I_1 \cap \cdots \cap I_n, \omega)$ ist monoton nicht wachsend in $n = 1, 2, \ldots$ und daher ebenso $\sup A_S(I_1 \cap \cdots \cap I_n, \omega)$, also ist die letzte Funktion größer gleich dem in (4.1) angegebenen Infimum für alle n und m und daher das Infimum von m unabhängig. Aus der eben schon benutzten Monotonie von $A_S(I, \omega)$ folgt noch $\sup A_S(I_1 \cap \cdots \cap I_n, \omega) \in A_S(I_m, \omega)$ für alle $n \geqq m$ und damit weiter, daß das Infimum ein Element von $A_S(I, \omega)$ für alle $I \in \mathfrak{J}$ mit $t \in I$ ist. Definieren wir $z_t(\omega)$ als das Infimum (4.1), so gilt also $z_t(\omega) \in A_S(I, \omega)$, was $z_t(\omega) \in A_S(t, \omega)$ impliziert. Setzen wir

$$y_t(\omega) := \begin{cases} x_t(\omega) & \text{für} \quad t \in S \\ x_t(\omega) & \text{für} \quad \omega \notin A_t \quad \text{und} \quad t \notin S \\ z_t(\omega) & \text{sonst} \end{cases} \tag{4.2}$$

so ist $y_t(\omega) \in A_S(t, \omega)$ für alle t und ω. Also ist nach dem Kriterium der stochastische Prozeß $(y_t)_{t \in T}$ separabel (in die Definition von $A_S(t, \omega)$ gehen nur die Parameter t aus S ein!) und es gilt $y_t = x_t$ f. s., w. z. b. w.

Wir bemerken, daß die durch (4.1) definierte zufällige Größe z_t im allgemeinen nicht $\sup A_S(t, \omega)$ ist, wie das folgende Beispiel lehrt: Es sei $x_t(\omega) = (|t|, \cos(\pi/|t|))$ für $t \neq 0$, S rationale Zahlen $\neq 0$, $I_n := \{t : |t| < 1/n\}$. Dann ist $z_0(\omega) = (0, -1)$ und $\sup A_S(0, \omega) = (0, 1)$.

Zusatz bei der Korrektur. K. L. CHUNG und J. L. DOOB haben bereits im April 1965 im wesentlichen die Aussage von Satz 2 für $T = R$ in Proposition 33 ihrer Arbeit „Fields, Optionality and Measurability, Amer. J. Math. 87, 397—424 (1965)" mit Hilfe völlig anderer Methoden bewiesen. Dabei benutzen sie unser Kriterium (2.4) als Definition der Separabilität.

Literatur

[1] BAUER, H.: Markoffsche Prozesse. Vorlesungsausarbeitung. Hamburg 1964.
[2] BORGES, R.: Ecken des Wertebereiches von Vektorintegralen. Manuskript in Vorbereitung.
[3] DOOB, J. L.: Stochastic processes. In: Wiley publications of statistics. New York: Wiley 1953.
[4] KELLERER, H. G.: Bemerkung zu einem Satz von H. Richter. Arch. der Math. **15**, 204—207 (1964).
[5] KELLEY, J. L.: General topology. New York: Van Nostrand 1955.
[6] RICHTER, H.: Verallgemeinerung eines in der Statistik benötigten Satzes der Maßtheorie. Math. Ann. **150**, 85—90 und 440—441 (1963).

Mathematisches Institut
63 Gießen, Arndtstr. 2